DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS.

MATEMÁTICAS II DE 2ºBACHILLERATO.

UNIDAD 9. DISTRIBUCIONES BINOMIAL Y NORMAL.

IES LA BAHIA

1. Distribuciones discretas.

Dado un experimento aleatorio, se llama **variable aleatoria** a una función que a cada suceso elemental del espacio muestral le hace corresponder un número real. Se representa por X, Y,…

Las variables aleatorias pueden ser discretas o continuas:

– **Discreta** si, entre dos valores cualesquiera, solo puede tomar un número finito de valores.

– **Continua** si, entre dos valores cualesquiera, puede tomar infinitos valores.

Ejemplo 1: la variable aleatoria X = "número de caras obtenidas al lanzar tres monedas", es discreta ya que solo toma los valores 0, 1, 2, 3.

$X: E \to \mathbb{R}$ xxx → 0 xxc → 1 xcx → 1 cxx → 1 xcc → 2 cxc → 2 ccx → 2 ccc → 3

Ejemplo 2: la variable aleatoria X = "suma de los puntos obtenidos al lanzar dos dados", es discreta ya que solo toma los valores 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.

Ejemplo 3: la variable aleatoria X = "medida en cm del perímetro craneal", es continua ya que puede tomar infinitos valores en el intervalo [60, 90]

Ejemplo 4: la variable aleatoria X = "tiempo de retraso en min. de un autobús que cubre una determinada línea", es continua ya que puede tomar infinitos valores en el intervalo [0, 10]

Distribución de probabilidad

Se llama **distribución de probabilidad** de una variable aleatoria discreta X, a la función que a cada valor de X asocia la probabilidad de que X tome dicho valor.
A la distribución de probabilidad también se le suele llamar **función de probabilidad**.

Es frecuente que los valores de una distribución discreta se expresen mediante una **tabla**:

x_i	x_1	x_2	…	x_{n-1}	x_n
p_i	p_1	p_2	…	p_{n-1}	p_n

donde $p_1 + p_2 + ...p_n = 1$

Ejemplo: en el experimento aleatorio consistente en lanzar dos dados al aire, el espacio muestral es E = { (1,1), (1,2), (1,3), …, (1, 6), (2,1), (2,2), …, (2,6), …, …, …, (6,1), (6,2), …, (6,6)}

Sobre este espacio muestral se puede definir define la variable aleatoria discreta
X = "suma de los puntos obtenidos al lanzar dos dados", que toma valores los valores naturales comprendidos entre 2 y 12, ambos incluidos. Su distribución de probabilidad es:

X_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_i	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Notación: se suele escribir P(X = 2) = 1/36, P(X = 3) = 2/36, …, P(X = 12) = 1/36

Parámetros de una variable aleatoria discreta

Los parámetros más usuales de una variable aleatoria son la media (o esperanza), la varianza y la desviación típica. Se calculan de forma análoga a los parámetros estadísticos.

Dada X una v. a. discreta con distribución de probabilidad

x_i	x_1	x_2	...	x_{n-1}	x_n
p_i	p_1	p_2	...	p_{n-1}	p_n

– la **media (o esperanza) de X** es el número real $\mu = \sum x_i \cdot p_i$

– la **desviación típica de X** es el número real $\sigma = \sqrt{\sum x_i^2 \cdot p_i - \mu^2}$

– la **varianza de X** es el cuadrado de la desviación típica, es decir, el número real σ^2.

Ejemplo: X = "suma de los puntos obtenidos al lanzar dos dados"

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_i	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Media: $\mu = 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + 4 \cdot \frac{3}{36} + 5 \cdot \frac{4}{36} + 6 \cdot \frac{5}{36} + 7 \cdot \frac{6}{36} + 8 \cdot \frac{5}{36} + 9 \cdot \frac{4}{36} + 10 \cdot \frac{3}{36} + 11 \cdot \frac{2}{36} + 12 \cdot \frac{1}{36}$

Media: $\mu = \frac{252}{36} = 7$ puntos

$$\sigma^2 = 4 \cdot \frac{1}{36} + 9 \cdot \frac{2}{36} + 16 \cdot \frac{3}{36} + 25 \cdot \frac{4}{36} + 36 \cdot \frac{5}{36} + 49 \cdot \frac{6}{36} + 64 \cdot \frac{5}{36} + 81 \cdot \frac{4}{36} + 100 \cdot \frac{3}{36} +$$

$$+ 121 \cdot \frac{2}{36} + 144 \cdot \frac{1}{36} - 7^2 = 54{,}83 - 49 = 5{,}83$$

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{5{,}83} = 2{,}41$ puntos

2. Distribución binomial.

Se llama **prueba de Bernoulli** a un experimento aleatorio con solo dos posibles resultados, denominados "**éxito**" y "**fracaso**", teniendo en cuenta que la elección de dichos términos es completamente arbitraria.

Ejemplos: pruebas de Bernoulli son:

– El resultado de lanzar una moneda (cara o cruz).

– El estado de una pieza recién fabricada (sin defecto o defectuosa).

– Un lanzamiento a canasta (enceste o fallo).

– El resultado de un examen (suspenso o aprobado)

Se llama **experimento o experiencia binomial** a la repetición de **n** pruebas de Bernoulli independientes y con la misma probabilidad **p** de éxito en cada repetición. En una binomial:

– El número **n** de intentos (pruebas) es un número fijo.

– Cada intento tiene solamente dos posibles resultados.

– Cada intento es independiente de los demás. Por ello, la probabilidad **p** de éxito es la misma en todas las repeticiones.

Se llama **variable aleatoria binomial** a la que expresa el número total de éxitos obtenidos en un experimento binomial. Se representa por **$X \equiv B(n; p)$**, donde

n es el número de repeticiones   **p** es la probabilidad de éxito en cada repetición

Se llama **distribución binomial** a la distribución de probabilidad de una v. a. binomial.

Si $X \equiv B(n; p)$, la distribución o función de probabilidad se obtiene con la siguiente fórmula:

$$\forall r \quad 0 \le r \le n \quad P(X = r) = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot (1-p)^{n-r}$$

<u>Nota</u>: $\binom{n}{r} = \dfrac{n!}{r! \cdot (n-r)!}$ es el número combinatorio "n sobre r". Equivale al número de combinaciones (no importa el orden) de r elementos (sin repetición) elegidos entre n elementos.

Media y desviación típica de una variable aleatoria binomial

En toda variable aleatoria binomial $X \equiv B(n; p)$ se cumple que:

La media o esperanza es $\mu = n \cdot p$ La desviación típica es $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$

La varianza $\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p)$

<u>Ejemplo</u>: en una caja con 6 bolas blancas y 4 bolas azules, se extraen 5 bolas devolviendo la bola extraída despues de cada extracción, es decir, con reemplazamiento.

Hallar la función de probabilidad de la v. a. X = "número de bolas blancas extraídas", así como su media y su desviación típica.

$X \equiv B(5; 0{,}6)$ con n = 5 repeticiones y probabilidad de éxito p = 0,6 porque:

– En cada extracción solo hay dos posibles resultados: sacar bola blanca (éxito) o sacar bola azul (fracaso).

– Cada extracción es independiente de las demás.

– La probabilidad de sacar bola blanca en cada extracción es 6/10 = 0,6, que es la misma en cada extracción.

Una vez establecidos los valores de n y p, se puede calcular la distribución de probabilidad:

$$P(0) = \binom{5}{0} \cdot 0{,}6^0 \cdot 0{,}4^5 = 1 \cdot 1 \cdot 0{,}01024 = 0{,}01024 \qquad P(1) = \binom{5}{1} \cdot 0{,}6^1 \cdot 0{,}4^4 = 5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}0256 = 0{,}0768$$

$$P(2) = \binom{5}{2} \cdot 0{,}6^2 \cdot 0{,}4^3 = 10 \cdot 0{,}36 \cdot 0{,}064 = 0{,}2304 \qquad P(3) = \binom{5}{3} \cdot 0{,}6^3 \cdot 0{,}4^2 = 10 \cdot 0{,}216 \cdot 0{,}16 = 0{,}3456$$

$$P(4) = \binom{5}{4} \cdot 0{,}6^4 \cdot 0{,}4^1 = 5 \cdot 0{,}1296 \cdot 0{,}4 = 0{,}2592 \qquad P(5) = \binom{5}{5} \cdot 0{,}6^5 \cdot 0{,}4^0 = 1 \cdot 0{,}07776 \cdot 1 = 0{,}07776$$

<u>Nota</u>: obsérvese que la suma de todas las probabilidades es exactamente igual a 1.

Media: $\mu = n \cdot p = 5 \cdot 0{,}6 = 3$ es el número de bolas blancas esperadas.

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4} = 1{,}095$

3. Distribuciones continuas.

Se llama **función de densidad** (o de probabilidad) a aquella que:

1. Es no negativa en todo su dominio, es decir, $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \text{Dom}(f)$
2. El área comprendida entre su gráfica y el eje de abscisas es igual a 1.

Toda variable aleatoria continua tiene asociada una función de densidad, que es la que determina su **distribución de probabilidad continua**.

Si X es una v.a. continua, su función de densidad permite hallar la probabilidad de que X tome valores dentro de un intervalo [a, b], determinando así su distribución de probabilidad:
$P(a \leq X \leq b)$ equivale al área encerrada por la gráfica de la función de densidad y el eje de abscisas entre los valores $x = a$ y $x = b$.

Obsérvese que la probabilidad de que una v. a. continua tome un único valor es cero, es decir, $P(X = c) = 0$ (un único valor no determina área), y por lo tanto, $P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b)$

Nota: graficamente, la **función de densidad** de una v. a. continua es la curva a la que tienden los histogramas de frecuencias relativas cuando la amplitud de los intervalos se va haciendo cada vez más pequeña.

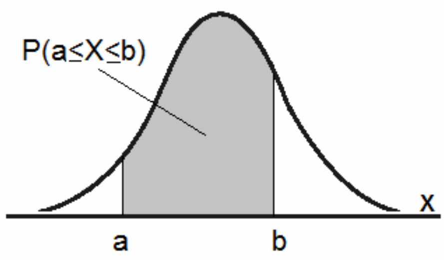
4. Distribución normal.

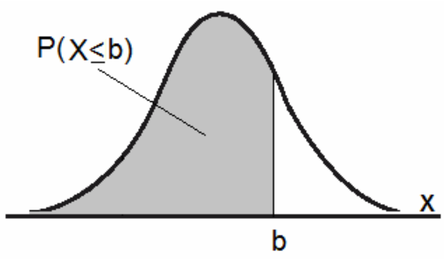
Se llama **variable aleatoria normal de media μ y desviación típica σ** a una v. a. continua cuya función de densidad tiene como gráfica la **curva o campana de Gauss**.
Se representa por **$X \equiv N(\mu; \sigma)$**

Nota: la expresión analítica de la función de densidad es $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

Una variable aleatoria continua X tiene una **distribución normal** si sus valores forman una curva continua "con forma de campana". Cada distribución normal tiene su propia media y su propia desviación típica. Con independencia de cuál sea la media y la desviación típica, todas las distribuciones normales tienen la misma "forma básica de campana".

Si **$X \equiv N(\mu; \sigma)$**, la probabilidad de que X tome valores dentro de un intervalo [a, b], es decir, $P(a \leq X \leq b)$, coincide con el área encerrada por la curva de Gauss asociada a X y el eje de abscisas entre los valores $x = a$ y $x = b$.





Ejemplos: v. a. continuas que siguen una distribución normal son:

– Las calificaciones de un examen.

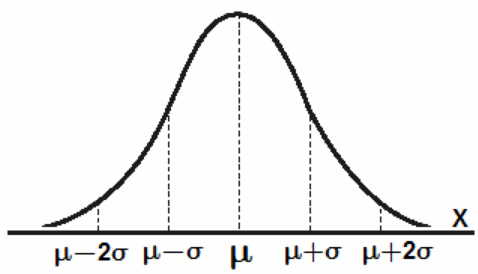
– La talla o el peso de una población.

– Tiempo de estancia de los enfermos en un hospital.

– Tiempo de vida útil de los electrodomésticos producidos en una fábrica.

La distribución normal es muy útil para comparar individuos dentro de una **misma** población.

Propiedades de la curva (campana) de Gauss



P1. Es simétrica respecto de la recta $x = \mu$.

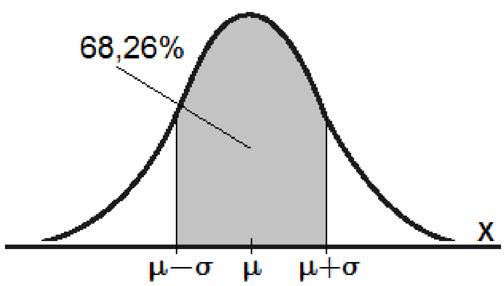
P2. Tiene un máximo local en el punto de abscisa $x = \mu$. Hay una elevación en el centro, con colas que bajan por ambos lados.

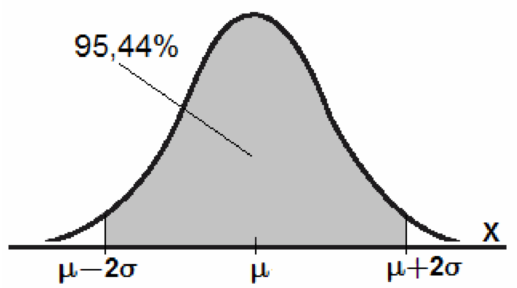
P3. Tiene dos puntos de inflexión, en los puntos de abscisas $x = \mu-\sigma$, $x = \mu+\sigma$, respectivamente.
Por lo tanto, la desviación típica coincide con la distancia entre media y puntos de inflexión.

P4. $P(\ \mu-\sigma \leq X \leq \mu+\sigma\ ) = 0{,}6826$, lo que significa que aproximadamente el 68% de sus valores se encuentran a no más de una desviación típica respecto de la media.

P5. $P(\ \mu-2\sigma \leq X \leq \mu+2\sigma\ ) = 0{,}9544$, lo que significa que aproximadamente el 95% de sus valores se encuentran a no más de dos desviaciones típicas respecto de la media.

P6. Casi todos sus valores (aproximadamente el 99,7% de ellos) se encuentran a no más de tres desviaciones típicas respecto de la media. Para valores de $x \geq \mu+4\sigma$ ó $x \leq \mu-4\sigma$, las probabilidades son practicamente cero.





Cálculo de probabilidades en una N(0; 1) mediante una tabla

Si una variable aleatoria normal tiene media $\mu = 0$ y desviación típica $\sigma = 1$, recibe el nombre de **variable normal típica o estándar**. Se representa por $Z \equiv N(0; 1)$.

Las probabilidades en una v. a. normal típica $Z \equiv N(0; 1)$ se pueden calcular mediante una tabla, en la cual sólo aparecen aquellas del tipo $P(Z \leq k)$, siendo $0 \leq k \leq 3{,}99$.

Si $k \geq 4$, se suele aproximar $P(Z \leq k) = 1$

Ejemplo: para calcular $P(Z \leq 1{,}76)$, se descompone $1{,}76 = 1{,}7 + 0{,}06$; luego se cruza la fila del valor 1,7 con la columna del valor 0,06 en la tabla, obteniéndose $P(Z \leq 1{,}76) = 0{,}9608$

Para el resto de los casos que se pueden presentar, hay que identificar la probabilidad que se pide con el área correspondiente y después aprovechar la simetría de la curva de Gauss.

En los casos que siguen, las letras **a**, **b**, **k** representan números reales positivos.

Caso 1. $P(a \leq Z \leq b) = P(Z \leq b) - P(Z \leq a)$

Ejemplo: $P(0{,}47 \leq Z \leq 2{,}13) = P(Z \leq 2{,}13) - P(Z \leq 0{,}47) = 0{,}9834 - 0{,}6808 = 0{,}3026$

Caso 2. $P(Z \geq k) = 1 - P(Z \leq k)$

Ejemplo: $P(Z \geq 0{,}74) = 1 - P(Z \leq 0{,}74) = 1 - 0{,}7704 = 0{,}2296$

Caso 3. $P(Z \leq -k) = P(Z \geq k) = 1 - P(Z \leq k)$

Ejemplo: $P(Z \leq -2{,}26) = 1 - P(Z \leq 2{,}26) = 1 - 0{,}9881 = 0{,}0119$

Caso 4. $P(Z \geq -k) = P(Z \leq k)$

Ejemplo: $P(Z \geq -1{,}73) = P(Z \leq 1{,}73) = 0{,}9582$

Caso 5. $P(-a \leq Z \leq -b) = P(Z \leq a) - P(Z \leq b)$

Ejemplo: $P(-2{,}13 \leq Z \leq -0{,}47) = P(Z \leq 2{,}13) - P(Z \leq 0{,}47) = 0{,}9834 - 0{,}6808 = 0{,}3026$

Caso 6. $P(-a \leq Z \leq b) = P(Z \leq b) - P(Z \leq -a) = P(Z \leq b) - [1 - P(Z \leq a)]$

Ejemplo: $P(-1{,}27 \leq Z \leq 1{,}66) = P(Z \leq 1{,}66) - (1 - P(Z \leq 1{,}27)) = 0{,}8495$

Tipificación de una variable aleatoria normal

Tipificar una v. a. normal $X \equiv N(\mu;\ \sigma)$ consiste en transformarla en una v. a. normal típica $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ con el objeto de calcular probabilidades en la tabla de una N(0; 1).

$$P(a \leq X \leq b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right) \quad \text{donde } Z \equiv N(0;\ 1)$$

Ejemplo: dada una v. a. $X \equiv N(6;\ 2)$, para calcular $P(6{,}3 \leq X \leq 9{,}4)$ se hace lo siguiente:

$$P(6{,}3 \leq X \leq 9{,}4) = P\left(\frac{6{,}3-6}{2} \leq Z \leq \frac{9{,}4-6}{2}\right) = P(0{,}15 \leq Z \leq 1{,}7) = 0{,}9554 - 0{,}5596 = 0{,}3958$$

5. Aproximación de una binomial por una normal.

El cálculo de probabilidades en una variable $X \equiv B(n; p)$ se suele complicar demasiado cuando el valor **n** del número de repeticiones es muy grande. Es por ello que una binomial $X \equiv B(n; p)$ se puede aproximar por una normal $Y \equiv N(np, \sqrt{npq})$.

En la práctica, se considera que la aproximación es aceptable si $n > 10$, $np > 5$ y $nq > 5$.

Por otro lado, como la probabilidad de que una v. a. continua tome un único valor es cero, para salvar este problema, se realiza un ajuste llamado **corrección de Yates**. Las situaciones siguientes muestran cómo se aplica dicho ajuste:

$$P(X = a) = P(a - 0{,}5 \le Y \le a + 0{,}5)$$

[un valor único de la binomial se convierte en un intervalo de la normal]

$$P(a \le X \le b) = P(a - 0{,}5 \le Y \le b + 0{,}5)$$

Ejemplo: dada $X \equiv B(15; 0{,}5)$, si se usa la fórmula característica de la binomial, se obtienen por ejemplo, $P(X = 9) = 0{,}1527$ y $P(8 \le X \le 12) = 0{,}4963$, que serían valores exactos.

En cambio, aproximando X por una normal $Y \equiv N(7{,}5; 1{,}94)$
[$np = 15 \cdot 0{,}5 = 7{,}5$; $\sqrt{npq} = \sqrt{15 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5} \cong 1{,}94$] y usando la corrección de Yates, se obtienen:

$$P(X = 9) = P(8{,}5 \le Y \le 9{,}5) = P\left(\frac{8{,}5 - 7{,}5}{1{,}94} \le Z \le \frac{9{,}5 - 7{,}5}{1{,}94}\right) = 0{,}1523$$

$$P(8 \le X \le 12) = P(7{,}5 \le Y \le 12{,}5) = P\left(\frac{7{,}5 - 7{,}5}{1{,}94} \le Z \le \frac{12{,}5 - 7{,}5}{1{,}94}\right) = 0{,}4951$$

que, como se puede observar, son valores muy próximos a los valores exactos.