DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS.

MATEMÁTICAS I DE 1ºBACHILLERATO.

UNIDAD 2. LÍMITE DE UNA FUNCIÓN. CONTINUIDAD.

IES LA BAHIA

1. Límite de una función en un punto.

Límite lateral por la izquierda en x = c

Si para toda sucesión de valores del dominio de f **menores que c**, cada vez más próximos al número real c ($x \to c^-$):

– sus correspondientes imágenes se aproximan cada vez más al número real L, entonces se dice que $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = L$

Ejemplo: analizar el límite lateral por la izquierda en c = 1 de $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$

x	0,9	0,99	0,999	…	$\to 1^-$
f(x)	1,9	1,99	1,999	…	$\to 2$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$$

– sus correspondientes imágenes son cada vez mayores con signo positivo, superando a cualquier valor por grande que sea, entonces se dice que $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = +\infty$

Ejemplo: analizar el límite lateral por la izquierda en c = 2 de $f(x) = \dfrac{1}{2-x}$

x	1,9	1,99	1,999	…	$\to 2^-$
f(x)	10	100	1 000	…	$\to +\infty$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{2-x} = +\infty$$

– sus correspondientes imágenes son cada vez menores con signo negativo, superando a cualquier valor por pequeño (negativo) que sea, entonces se dice que $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = -\infty$

Ejemplo: analizar el límite lateral por la izquierda en c = 3 de $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$

x	2,9	2,99	2,999	…	$\to 3^-$
f(x)	–10	–100	–1 000	…	$\to -\infty$

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{1}{x-3} = -\infty$$

Límite lateral por la derecha en x = c

Si para toda sucesión de valores del dominio de f **mayores que c**, cada vez más próximos al número real c ($x \to c^+$):

– sus correspondientes imágenes se aproximan cada vez más al número real L, entonces se dice que $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = L$

Ejemplo: analizar el límite lateral por la derecha en c = 1 de $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$

x	1,1	1,01	1,001	…	$\to 1^+$
f(x)	2,1	2,01	2,001	…	$\to 2$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$$

– sus correspondientes imágenes son cada vez menores con signo negativo, superando a cualquier valor por pequeño (negativo) que sea, entonces se dice que $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = -\infty$

Ejemplo: analizar el límite lateral por la derecha en c = 2 de $f(x) = \dfrac{1}{2-x}$

x	2,1	2,01	2,001	…	→ 2⁺
f(x)	–10	–100	–1 000	…	→ –∞

$\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{2-x} = -\infty$

– sus correspondientes imágenes son cada vez mayores con signo positivo, superando a cualquier valor por grande que sea, entonces se dice que $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = +\infty$

Ejemplo: analizar el límite lateral por la derecha en c = 3 de $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$

x	3,1	3,01	3,001	…	→ 3⁺
f(x)	10	100	1 000	…	→ +∞

$\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{1}{x-3} = +\infty$

Límite de una función en un punto de abscisa x = c

Para que exista el límite de una función en un punto, los límites laterales en dicho punto han de ser iguales. Es decir:

1) Si $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = \lim\limits_{x\to c^+} f(x) = L$, entonces se dice que $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$

Ejemplo: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = 2$ porque $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2-1}{x-1} = 2$

2) Si $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = \lim\limits_{x\to c^+} f(x) = +\infty$, entonces se dice que $\lim\limits_{x\to c} f(x) = +\infty$

Ejemplo: $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1}{(x-3)^2} = +\infty$ porque $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{1}{(x-3)^2} = \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{1}{(x-3)^2} = +\infty$

3) Si $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = \lim\limits_{x\to c^+} f(x) = -\infty$, entonces se dice que $\lim\limits_{x\to c} f(x) = -\infty$

Ejemplo: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-1}{x^2} = -\infty$ porque $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-1}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{-1}{x^2} = -\infty$

Si los límites laterales de una función en un punto no son iguales, dicho límite no existe.

Ejemplo: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{2-x}$ no existe porque $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{1}{2-x} = +\infty \neq \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{2-x} = -\infty$

Nota: el valor del límite de una función en x = c es independiente del valor que la función tome en x = c. Es más, la función no tiene por qué estar definida en x = c. Ni siquiera tiene por qué existir f(c), la imagen del valor c.

2. Límite de una función en el infinito.

Límite de una función cuando la variable x tiende a más infinito

Si para toda sucesión de valores del dominio de f cada vez mayores con signo positivo, superando a cualquier valor por grande que sea ($x \to +\infty$):

– sus correspondientes imágenes se aproximan cada vez más al número real L, entonces se dice que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$

Ejemplo: analizar el límite cuando $x \to +\infty$ de $f(x) = \dfrac{3x}{x+1}$

x	100	1 000	10 000	…	→ +∞
f(x)	2,97	2,997	2,9997	…	→ 3

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{x+1} = 3$$

– sus correspondientes imágenes son cada vez mayores con signo positivo, superando a cualquier valor por grande que sea, entonces se dice que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Ejemplo: analizar el límite cuando $x \to +\infty$ de $f(x) = x^3 + 2x^2 - 1$

x	10	100	1 000	…	→ +∞
f(x)	1 199	1 019 999	1 001 999 999	…	→ +∞

$$\lim_{x\to+\infty} x^3 + 2x^2 - 1 = +\infty$$

– sus correspondientes imágenes son cada vez menores con signo negativo, superando a cualquier valor por pequeño (negativo) que sea, entonces se dice que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

Ejemplo: analizar el límite cuando $x \to +\infty$ de $f(x) = -x^3 + 2x^2 - 1$

x	10	100	1 000	…	→ +∞
f(x)	–801	–980 001	–998 000 001	…	→ –∞

$$\lim_{x\to+\infty} -x^3 + 2x^2 - 1 = -\infty$$

Límite de una función cuando la variable x tiende a menos infinito

Si para toda sucesión de valores del dominio de f cada vez menores con signo negativo, superando a cualquier valor por pequeño (negativo) que sea ($x \to -\infty$):

– sus correspondientes imágenes se aproximan cada vez más al número real L, entonces se dice que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$

Ejemplo: analizar el límite cuando $x \to -\infty$ de $f(x) = \dfrac{3x}{x+1}$

x	–100	–1 000	–10 000	…	→ –∞
f(x)	3,03	3,003	3,0003	…	→ 3

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x}{x+1} = 3$$

– sus correspondientes imágenes son cada vez mayores con signo positivo, superando a cualquier valor por grande que sea, entonces se dice que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

Ejemplo: analizar el límite cuando $x \to -\infty$ de $f(x) = x^2 + 2x - 1$

x	–10	–100	–1 000	…	→ –∞
f(x)	79	9 799	997 999	…	→ +∞

$$\lim_{x\to-\infty} x^2 + 2x - 1 = +\infty$$

– sus correspondientes imágenes son cada vez menores con signo negativo, superando a cualquier valor por pequeño (negativo) que sea, entonces se dice que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Ejemplo: analizar el límite cuando $x \to -\infty$ de $f(x) = x^3 + 2x^2 - 1$

x	–10	–100	–1 000	…	→ –∞
f(x)	–801	–980 001	–998 000 001	…	→ –∞

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 + 2x^2 - 1 = -\infty$

3. Cálculo de límites.

Operaciones con límites

Dadas dos funciones f, g, si los límites $\lim\limits_{x \to *} f(x)$, $\lim\limits_{x \to *} g(x)$ son finitos (el símbolo $*$ representa a un número real c, +∞ ó –∞), entonces se cumplen las siguientes propiedades:

P1. $\lim\limits_{x \to *} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x \to *} f(x) \pm \lim\limits_{x \to *} g(x)$

P2. $\lim\limits_{x \to *} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to *} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to *} g(x)$

P3. $\lim\limits_{x \to *} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)} \right) = \dfrac{\lim\limits_{x \to *} f(x)}{\lim\limits_{x \to *} g(x)}$ (siendo $\lim\limits_{x \to *} g(x) \neq 0$)

P4. $\lim\limits_{x \to *} (k \cdot f(x)) = k \cdot \lim\limits_{x \to *} f(x)$ $(\forall\ k \in \mathbb{R})$

P5. $\lim\limits_{x \to *} f(x)^{g(x)} = \left(\lim\limits_{x \to *} f(x) \right)^{\lim\limits_{x \to *} g(x)}$ (ambos límites no simultaneamente cero)

P6. $\lim\limits_{x \to *} g(f(x)) = g\left(\lim\limits_{x \to *} f(x) \right)$

Significado de la notación

Notación	Significado
$\to 0$	Tiende a cero
$\to k$	Tiende a un número real k
$\to +\infty$	Tiende a más infinito
$\to -\infty$	Tiende a menos infinito

Nota: en los casos en los que aparece como resultado final $\to \infty$ sin precisar el signo, hay que averiguar dicho signo. Para ello, hay que razonar con los signos y las operaciones incluidas en la función cuyo límite se pretende calcular.

Álgebra de límites

A continuación se recogen todos los casos que se pueden presentar al calcular el límite de una función y = f(x) cuando la variable x tiende a un número real c, +∞ ó –∞.

(Caso 1) $\dfrac{\to k \neq 0}{\to 0} = \infty$ (Caso 2) $\dfrac{\to k}{\to \infty} = 0$ (Caso 3) $\dfrac{\to \infty}{\to k} = \infty$

(Caso 4) $(\to +\infty + \infty) = +\infty$ (Caso 5) $(\to -\infty - \infty) = -\infty$ (Caso 6) $(\to \infty \pm k) = \infty$

(Caso 7) $(\to \infty) \cdot (\to \infty) = \infty$ (Caso 8) $(\to k \neq 0) \cdot (\to \infty) = \infty$

(Caso 9) $(\to k > 1)^{(\to +\infty)} = +\infty$ (Caso 10) $(\to k > 1)^{(\to -\infty)} = 0$

(Caso 11) $(\to k < 1)^{(\to +\infty)} = 0$ (Caso 12) $(\to k < 1)^{(\to -\infty)} = +\infty$

(Caso 13) $(\to 0)^{(\to k>0)} = 0$ (Caso 14) $(\to 0)^{(\to +\infty)} = 0$

(Caso 15) $(\to 0)^{(\to k<0)} = +\infty$ (Caso 16) $(\to 0)^{(\to -\infty)} = +\infty$

(Caso 17) $(\to +\infty)^{(\to k>0)} = +\infty$ (Caso 18) $(\to +\infty)^{(\to +\infty)} = +\infty$

(Caso 19) $(\to +\infty)^{(\to k<0)} = 0$ (Caso 20) $(\to +\infty)^{(\to -\infty)} = 0$

Indeterminaciones

Se dice que el cálculo de un límite presenta una indeterminación si no se puede conocer el resultado de forma inmediata. Con la palabra *indeterminación* se quiere decir que hay una situación inicial de incertidumbre: el resultado final del límite puede ser un número real L, puede ser +∞ ó puede ser –∞. Por ello, para cada tipo de **indeterminación** hay que aplicar una técnica específica que permita resolver la indeterminación y llegar al resultado final.

Hay siete casos de indeterminación, que son los siguientes:

$\dfrac{\to \infty}{\to \infty}$	$\dfrac{\to 0}{\to 0}$	$\to +\infty - \infty$	$(\to 0) \cdot (\to \infty)$	$(\to +\infty)^{(\to 0)}$	$(\to 0)^{(\to 0)}$	$(\to 1)^{(\to \infty)}$

Cálculo de límites

1. Cálculo del límite de una función en un punto.

Para calcular $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ se sustituye **x** por el número real c y se realizan las operaciones.

<u>Ejemplos</u>: $\lim\limits_{x\to 3} x^2 = 9$ $\lim\limits_{x\to 2} \frac{5x}{x-5} = \frac{-10}{3}$ $\lim\limits_{x\to -2} \sqrt{5x+1} = \sqrt{-9}$ no existe

$\lim\limits_{x\to 3^+} \frac{x^2}{x-3} = \frac{9}{0^+} = +\infty$ $\lim\limits_{x\to 3^-} \frac{x^2}{x-3} = \frac{9}{0^-} = -\infty$

2. Cálculo del límite de una función polinómica en el infinito.

Dado un polinomio P(x) de grado n siendo A el coeficiente de su término de mayor grado:

Si $A > 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$ Si $A < 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = -\infty$

Si $A > 0$, n par $\Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = +\infty$ Si $A > 0$, n impar $\Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$

Si $A < 0$, n par $\Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$ Si $A < 0$, n impar $\Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = +\infty$

<u>Ejemplos</u>: $\lim\limits_{x\to+\infty} 5x^3 - 2x^2 - 8x + 7 = +\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} -5x^4 - 2x^3 - 8x + 7 = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} 5x^4 - 2x^3 - 8x + 7 = +\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} 5x^3 - 2x^2 - 8x + 7 = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} -5x^4 - 2x^3 - 8x + 7 = -\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} -5x^3 - 2x^2 - 8x + 7 = +\infty$

3. Cálculo del límite de una función racional en el infinito.

Dada una función racional $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ y según se deduce de lo explicado en el caso anterior, en el cálculo del $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$ se obtendría la indeterminación $\frac{\to\infty}{\to\infty}$.

Esta indeterminación se resuelve según el siguiente análisis:

Caso 3.1. Si grado(P(x)) = grado(Q(x)), entonces $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{B}$

siendo A y B los coeficientes de los términos de mayor grado de P(x) y Q(x), respectivamente.

Caso 3.2. Si grado(P(x)) < grado(Q(x)), entonces $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ Aquí se incluye el caso en el que el numerador es constante (un valor constante se considera un polinomio de grado cero).

Caso 3.3. Si grado(P(x)) > grado(Q(x)), entonces $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \pm\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \pm\infty$

El signo final del resultado depende de los signos de las tendencias de P(x) y Q(x).

<u>Ejemplos</u>: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4x^3+2x-1}{3x^3-2} = \frac{4}{3}$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4x^3+2x-1}{3x^3-2} = \frac{4}{3}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4x^2+2x-1}{3x^3-2} = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4x^3+2x-1}{3x^2-2} = +\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-4x^3+2x-1}{3x^2-2} = -\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4x^3+2x-1}{3x^2-2} = -\infty$

4. Indeterminación $\to +\infty - \infty$ con raíces.

La indeterminación $+\infty-\infty$ aparece en el cálculo de límites como

$$\lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{P(x)}-\sqrt{Q(x)} = +\infty-\infty \quad \text{ó} \quad \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{P(x)}-Q(x) = +\infty-\infty$$

Para resolver esta indeterminación, hay que multiplicar y dividir por su expresión conjugada. Después se simplifica la fracción resultante, obteniéndose una nueva fracción y finalmente se aplica el mismo límite a la nueva fracción.

Resulta de utilidad saber que, en un límite en el que $x \to +\infty$ / $x \to -\infty$, la raíz cuadrada de un polinomio se puede sustituir por la raíz cuadrada de su monomio de mayor grado, ya que el resto de los términos son irrelevantes en la tendencia final del polinomio.

<u>Ejemplo 1</u>:

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+3x}-x = +\infty-\infty = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x^2+3x}-x)\cdot(\sqrt{x^2+3x}+x)}{\sqrt{x^2+3x}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}$$

<u>Ejemplo 2</u>:

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-5x} = +\infty-\infty = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-5x})\cdot(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-5x})}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-5x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x-(x^2-5x)}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-5x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6x}{\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6x}{2x} = 3$$

5. Indeterminación $\dfrac{\to 0}{\to 0}$ sin raíces.

Dada una función racional $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, siendo $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{0}{0}$, para resolver esta indeterminación, hay que descomponer en factores P(x) y Q(x), después simplificar $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ y aplicar finalmente el mismo límite a la nueva fracción obtenida.

<u>Ejemplo 1</u>: $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^3-x^2-3x+2} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x\to2} \dfrac{(x-2)\cdot(x-3)}{(x-2)\cdot(x^2+x-1)} = \lim\limits_{x\to2} \dfrac{(x-3)}{(x^2+x-1)} = \dfrac{-1}{5}$

<u>Ejemplo 2</u>: $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^2-3x}{4x^2+3x} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{x\cdot(x-3)}{x\cdot(4x+3)} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{x-3}{4x+3} = -1$

6. Indeterminación $(\to 0)\cdot(\to\infty)$

Para resolver la indeterminación $(\to 0)\cdot(\to\infty)$, hay que operar y reducir las expresiones algebraicas que aparezcan, obteniéndose una nueva expresión y aplicar finalmente el mismo límite a la nueva expresión.

<u>Ejemplo</u>:

$$\lim_{x\to+\infty} (x+1)\cdot\left(\frac{x^2-3}{x^2+2x-1}-1\right) = +\infty\cdot 0 = \lim_{x\to+\infty} (x+1)\cdot\left(\frac{-2-2x}{x^2+2x-1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-2x^2-4x-2}{x^2+2x-1}\right) = -2$$

7. Cálculo del límite de una función definida a trozos en un punto–frontera.

Dada una función $f(x)=\begin{cases} f_1(x) & \text{si} \quad x<c \\ f_2(x) & \text{si} \quad x\geq c \end{cases}$ para calcular $\lim\limits_{x\to c} f(x)$, hay que calcular los límites laterales de f en x = c, siendo $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)=\lim\limits_{x\to c} f_1(x)$ y $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)=\lim\limits_{x\to c} f_2(x)$

Ejemplo 1: $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x\leq 2 \\ x^3-2x & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$ $\begin{matrix} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} x^2=4 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} x^3-2x=4 \end{matrix} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x)=4$

Obsérvese que $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty} x^2=+\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty} x^3-2x=+\infty$

Ejemplo 2: $f(x)=\begin{cases} \dfrac{6-x^2}{x+4} & \text{si} \quad x\leq 1 \\ 7-x & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$ $\begin{matrix} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{6-x^2}{x+4}=1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} 7-x=6 \end{matrix} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x)$ no existe

Obsérvese que $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{6-x^2}{x+4}=+\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty} 7-x=-\infty$

8. Indeterminación $\to +\infty-\infty$ sin raíces.

Para resolver la indeterminación $+\infty-\infty$ en una expresión sin raíces cuadradas, hay que operar y reducir las expresiones algebraicas que aparezcan, obteniéndose una nueva expresión y aplicar finalmente el mismo límite a la nueva expresión.

Ejemplo 1: $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x^2-4}=+\infty-\infty=\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x+2-1}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x+1}{x^2-4}=\dfrac{3}{0^+}=+\infty$

Ejemplo 2: $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{x^2-1}-\dfrac{x}{x-1}=+\infty-\infty=\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1-x\cdot(x+1)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1-x^2-x}{x^2-1}=\dfrac{-1}{0^+}=-\infty$

9. Indeterminación $\dfrac{\to 0}{\to 0}$ con raíces.

Dada una función de y = f(x) con alguna de las cuatro formas siguientes:

$$y=\frac{\sqrt{P(x)}-\sqrt{Q(x)}}{R(x)} \qquad y=\frac{\sqrt{P(x)}-Q(x)}{R(x)} \qquad y=\frac{R(x)}{\sqrt{P(x)}-\sqrt{Q(x)}} \qquad y=\frac{R(x)}{\sqrt{P(x)}-Q(x)}$$

siendo $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\dfrac{0}{0}$, para calcular dicho límite, se multiplica y se divide por la expresión conjugada de la que tiene la raíz cuadrada, se simplifica la expresión resultante obteniéndose una nueva expresión y aplicar finalmente el mismo límite a la nueva expresión.

Ejemplo:

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{3x+4}-x}{x-4}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 4} \frac{(\sqrt{3x+4}-x)\cdot(\sqrt{3x+4}+x)}{(x-4)(\sqrt{3x+4}+x)}=\lim_{x\to 4} \frac{3x+4-x^2}{(x-4)(\sqrt{3x+4}+x)}=$$

$$=\lim_{x\to 4} \frac{-(x+1)(x-4)}{(x-4)(\sqrt{3x+4}+x)}=\lim_{x\to 4} \frac{-(x+1)}{\sqrt{3x+4}+x}=\frac{-5}{8}$$

4. Asíntotas de una función.

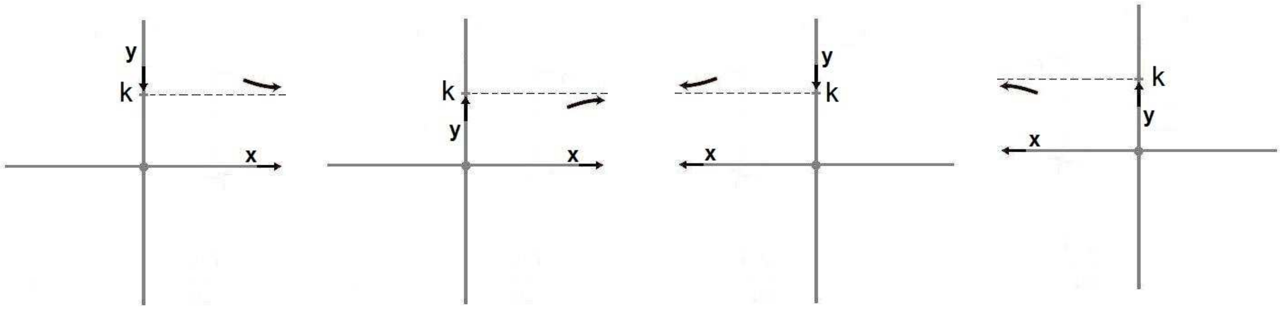
En general, se llama asíntota de una función $y = f(x)$ a una recta a la que se aproxima cada vez más la gráfica de la función, cuando la variable $x \to +\infty$ / $x \to -\infty$ / $x \to c$. Según la inclinación de la asíntota, ésta puede ser horizontal, vertical u oblicua.

¿Puede la gráfica de una función cortar a una de sus asíntotas? Sí, pero esto solo puede ocurrir en valores pequeños, en valor absoluto, de x.

4.1. Asíntota horizontal.

Se dice que la recta $y = k$ es una **asíntota horizontal** (AH) de una función f si

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = k \quad \text{ó} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = k$$



Ejemplo: averiguar si la función $f(x) = \frac{8x-1}{2x+3}$ tiene asíntotas horizontales y determinar la posición de la gráfica respecto de la asíntota.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{8x-1}{2x+3} = \frac{8}{2} = 4 \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{8x-1}{2x+3} = \frac{8}{2} = 4 \quad \Rightarrow$$ la recta y = 4 es asíntota horizontal de f(x)

– Para determinar la posición de la gráfica respecto de la asíntota y = 4 en la zona **derecha** del eje X, se elige un valor suficientemente lejano del cero, por ejemplo, x = 1000 y se compara su imagen f(1000) con el valor y = 4.

$f(1000) = \frac{7999}{2003} \cong 3{,}99$ es menor que 4 $\Rightarrow$ el trazo de la gráfica está por debajo de la AH

– Para determinar la posición de la gráfica respecto de la asíntota y = 4 en la zona **izquierda** del eje X, se elige un valor suficientemente lejano del cero, por ejemplo, x = –1000 y se compara su imagen f(–1000) con el valor y = 4.

$f(-1000) = \frac{-8001}{-1997} \cong 4{,}007$ es mayor que 4 $\Rightarrow$ el trazo de la gráfica está por arriba de la AH

Algunas aclaraciones:

1. Las funciones polinómicas (entre otras) **no** tienen asíntotas horizontales.

2. Hay funciones que tienen una asíntota horizontal por los dos lados, tanto por el positivo como por el negativo, del eje de abscisas.

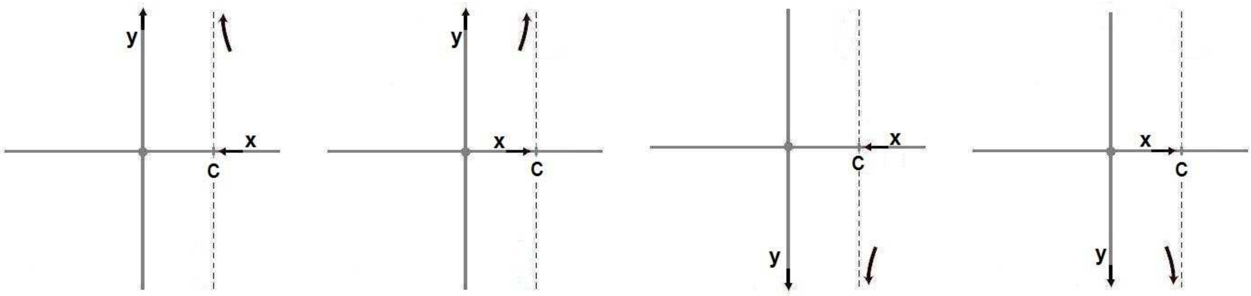
3. Hay funciones que tienen una asíntota horizontal sólo por uno de los dos lados, el positivo o el negativo, del eje de abscisas.

4. Hay funciones que tienen dos asíntotas horizontales distintas: una por el lado positivo del eje X y otra diferente por el lado negativo de dicho eje.

4.2. Asíntota vertical.

Se dice que la recta x = c es una **asíntota vertical** (AV) de una función f si

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = \pm\infty \qquad \text{ó} \qquad \lim_{x\to c^-} f(x) = \pm\infty$$



En las asíntotas verticales hay que elegir adecuadamente los valores en los cuales llevar a cabo el cálculo de límites laterales. No se debe perder tiempo probando con valores al azar.
Los valores en los que es factible la existencia de una asíntota vertical se suelen elegir entre los que a**nulan algún denominador de la función.**

<u>Ejemplo</u>: averiguar si la función $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$ tiene asíntotas verticales. En caso afirmativo, determinar la posición de la gráfica respecto de la asíntota.

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{2x}{x+1} = \frac{-2}{0^+} = -\infty \qquad \lim_{x\to -1^-} \frac{2x}{x+1} = \frac{-2}{0^-} = +\infty \quad \Rightarrow \quad \text{la recta } x = -1 \text{ es asíntota vertical de } f(x)$$

Para determinar la posición de la gráfica respecto de la asíntota x = –1 a derecha o izquierda de –1, se observa el signo del infinito en el resultado del límite:

– Si es $+\infty$, esto implica que el trazo de la gráfica está **arriba** acercándose a la AV sin tocarla.

– Si es $-\infty$, esto implica que el trazo de la gráfica está **abajo** acercándose a la AV sin tocarla.

<u>Nota</u>: otra posibilidad que se analizará más adelante, es la existencia de asíntotas verticales en valores que son **extremos abiertos de intervalos del dominio** de la función**.**

<u>Ejemplo</u>: como el dominio de $f(x) = \ln x$ es el intervalo $(0, +\infty)$, el valor x = 0 sería un candidato para asíntota vertical en esta función.

De hecho, la recta x = 0 es asíntota vertical de la función $f(x) = \ln x$ porque $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$

Algunas aclaraciones:

1. Las funciones polinómicas (entre otras) **no** tienen asíntotas verticales.

2. Hay funciones que tienen una asíntota vertical por los dos lados, tanto a la derecha como a la izquierda de x = c.

3. Hay funciones que tienen una asíntota vertical sólo por uno de los dos lados, a la izquierda o a la derecha de x = c.

4. Hay funciones que tienen dos o más asíntotas verticales distintas, e incluso un número infinito de ellas.

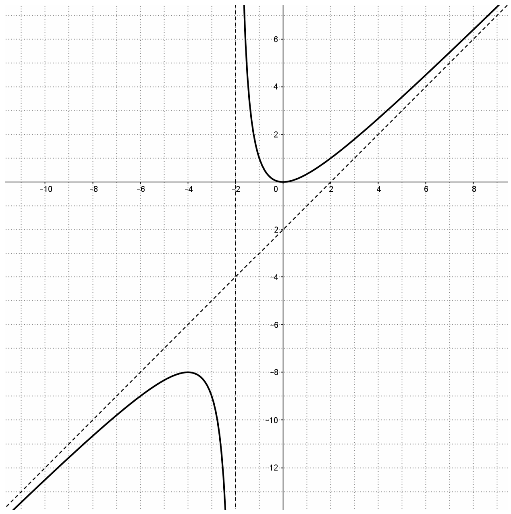
4.3. Asíntota oblicua.

Se dice que la recta $y = mx + n$ es una **asíntota oblicua** (AO) de una función f si

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \neq 0 \qquad [\text{ m es un número real distinto de cero }]$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx) \qquad [\text{ n es un número real }]$$

<u>Ejemplo</u>: averiguar si la función $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+2x}$ tiene asíntotas oblicuas. En caso afirmativo, determinar la posición de la gráfica respecto de la asíntota.



$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2+2x}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^3+2x^2} = 1 \neq 0$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^3}{x^2+2x} - 1x \right) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{-2x^2}{x^2+2x} \right) = -2$$

$y = mx + n \qquad y = 1x - 2 \qquad y = x - 2$

La recta $y = x-2$ es asíntota oblicua de f(x)

– Para determinar la posición de la gráfica respecto de la asíntota $y = x-2$ en la zona **derecha** del eje X, se elige un valor suficientemente lejano del cero, por ejemplo, $x = 100$ y se compara su imagen f(100) con el valor que toma la asíntota, en este caso $y = 100-2 = 98$

$$f(100) = \frac{100^3}{100^2 + 2\cdot 100} \cong 98{,}04 > 98 \quad \Rightarrow \quad \text{el trazo de la gráfica está por arriba de la AO}$$

– Para determinar la posición de la gráfica respecto de la asíntota $y = x-2$ en la zona **izquierda** del eje X, se elige un valor suficientemente lejano del cero, por ejemplo, $x = -100$ y se compara su imagen f(–100) con el valor que toma la asíntota, en este caso $y = -100-2 = -102$

$$f(-100) = \frac{(-100)^3}{(-100)^2 + 2\cdot(-100)} \cong -102{,}04 < -102 \quad \Rightarrow \quad \text{el trazo de la gráfica está debajo de la AO}$$

Algunas aclaraciones:

1. Las funciones polinómicas (entre otras) **no** tienen asíntotas oblicuas.

2. Hay funciones que tienen una asíntota oblicua por los dos lados del eje de abscisas, tanto por el lado positivo como por el lado negativo.

3. ¿Puede una función tener asíntotas horizontales y oblicuas a la vez? Depende.

Una función **no** puede tener asíntota horizontal y asíntota oblicua a la vez por el mismo lado del eje de abscisas. Sin embargo, la respuesta es que sí es posible, siempre que sean distintos lados del eje de abscisas.

5. Continuidad de una función. Tipos de discontinuidad.

Continuidad en un punto

Una función **f es continua en un punto de abscisa x = c** si se cumplen los tres requisitos siguientes:

(1) f(c) es un número real (2) $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ es un número real (3) $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$

Nota: todas las funciones definidas por una sola expresión analítica son continuas en todos los puntos de su dominio. En cambio, una función definida a trozos no tiene por qué ser continua en un punto de su dominio.

Tipos de discontinuidad

Una función **f es discontinua en un punto de abscisa x = c** si no cumple alguno de los tres requisitos que exige la definición de continuidad. Según esto, existen tres tipos de discontinuidad: evitable, de salto finito o de salto infinito.

Tipo 1. La función tiene una discontinuidad **evitable** en x = c si ocurre alguna de estas dos situaciones:

1.1) Existe $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ y existe f(c) pero $\lim\limits_{x \to c} f(x) \neq f(c)$

1.2) Existe $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ pero no existe f(c)

Ejemplo 1: la función $f(x) = \begin{cases} 6 - x^2 & \text{si} \quad x \neq 1 \\ 3 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$ tiene una discontinuidad evitable en el punto de abscisa x = 1 ya que

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (6 - x^2) = 5 \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (6 - x^2) = 5 \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{x \to 1} f(x) = 5 \neq f(1) = 3$$

El límite cuando x $\rightarrow$ 1 existe y es igual a 5 pero es distinto de la imagen de 1

Ejemplo 2: la función $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 2x}$ tiene una discontinuidad evitable en el punto de abscisa x = 2 ya que

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 2x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2) \cdot (x+4)}{x \cdot (x-2)} = \lim_{x \to 2} \frac{x+4}{x} = 3 \quad \text{pero} \quad f(2) = \frac{0}{0} \quad \text{no existe.}$$

Tipo 2. La función tiene una discontinuidad **de salto finito** en x = c si los límites laterales en dicho punto son ambos números reales distintos.

Ejemplo : la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si} \quad x \leq 3 \\ -x^2 + 4x - 1 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$ tiene una discontinuidad de salto finito en el punto de abscisa x = 3 ya que

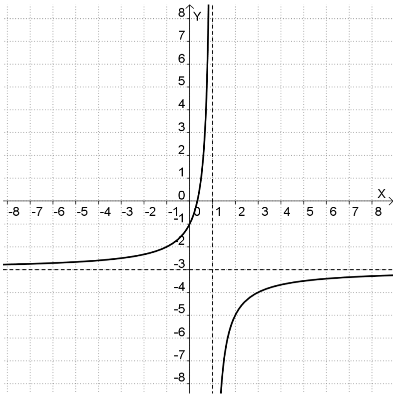
$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} (x^2 - 1) = 8 \qquad \lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} (-x^2 + 4x - 1) = 2$$

Tipo 3. La función tiene una discontinuidad **de salto infinito** en x = c si ocurre alguna de estas dos situaciones:

3.1) Los límites laterales en dicho punto son ambos infinitos.

3.2) Uno de los límites laterales es infinito y el otro es un número real.

<u>Ejemplo</u>: la función $f(x)=\dfrac{-3x+1}{x-1}$ tiene una discontinuidad de salto infinito en x = 1 ya que



$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{-3x+1}{x-1}=\frac{-2}{0^-}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{-3x+1}{x-1}=\frac{-2}{0^+}=-\infty$$

Continuidad lateral

Se dice que una función **f es continua por la derecha en x = c** si $\lim_{x\to c^+} f(x)=f(c)$

Se dice que una función **f es continua por la izquierda en x = c** si $\lim_{x\to c-} f(x)=f(c)$

6. Función exponencial.

Dado a ∈ ℝ, a > 0, a ≠ 1, **función exponencial de base a** es la que tiene por expresión analítica $f(x)=a^x$. Salvo restricción impuesta en el enunciado o consecuencia del contexto, su dominio es todo ℝ y su recorrido es el intervalo (0, +∞)

Una función del tipo $f(x)=a^x$ es continua en todo ℝ, corta al eje Y en el punto (0, 1) y no corta al eje X. El resto de propiedades dependen de que la base sea un valor mayor que uno o bien un valor comprendido entre cero y uno.

Si **a > 1**	Creciente en todo ℝ	$\lim_{x\to+\infty} a^x=+\infty$ Tiene una rama parabólica (IC)	$\lim_{x\to-\infty} a^x=0$ La recta y = 0 es AH
Si **0 < a < 1**	Decreciente en todo ℝ	$\lim_{x\to+\infty} a^x=0$ La recta y = 0 es AH	$\lim_{x\to-\infty} a^x=+\infty$ Tiene una rama parabólica (IIC)

Las gráficas de dos funciones del tipo $y=a^x$, $y=\left(\dfrac{1}{a}\right)^x$ son **simétricas respecto del eje Y**.

Ejemplo 1: para representar graficamente la función $y = 2^x$, se hace lo siguiente:

Se construye una tabla de valores dando valores a la variable **x**, a izquierda y derecha de x = 0:

x	…	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	…
y	…	0,03125	0,0625	0,125	0,25	0,5	1	2	4	8	16	32	…

Dom(f) = (–∞, +∞) Rec(f) = (0, +∞)

Continua en todo ℝ Creciente en todo ℝ

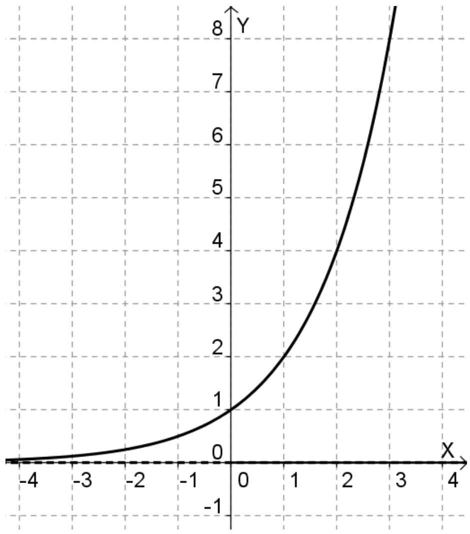
Corta al eje Y en el punto (0, 1) y no corta al eje X

x	10	20	30	→ +∞
y	1 024	1 048 576	1 073 741 824	→ +∞

$\lim\limits_{x\to+\infty} 2^x = +\infty$ Tiene una rama parabólica (IC)

x	–10	–20	–30	→ –∞
y	0,00098	0,00000095	0,0000000009	→ 0

$\lim\limits_{x\to-\infty} 2^x = 0$ La recta y = 0 es AH



Ejemplo 2: para representar graficamente la función $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, se hace lo siguiente:

Se construye una tabla de valores dando valores a la variable **x**, a izquierda y derecha de x = 0:

x	…	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	…
y	…	32	16	8	4	2	1	0,5	0,25	0,125	0,0625	0,03125	…

Dom(f) = (–∞, +∞) Rec(f) = (0, +∞)

Continua en todo ℝ Decreciente en todo ℝ

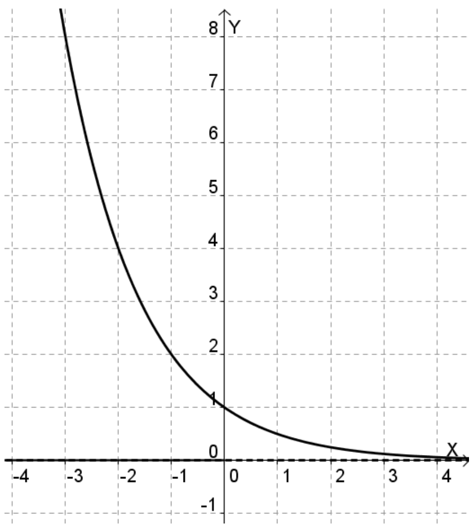
Corta al eje Y en el punto (0, 1) y no corta al eje X

x	10	20	50	→ +∞
y	0,00098	0,00000095	0,0000000009	→ 0

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$ La recta y = 0 es AH

x	–10	–20	–50	→ –∞
y	1 024	1 048 576	1 073 741 824	→ +∞

$\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty$ Tiene una rama parabólica (IIC)



Obsérvese que las gráficas de las funciones $y = 2^x$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ son simétricas respecto del eje Y.

Cálculo de dominios

Las funciones cuya expresión analítica son del tipo $f(x) = a^{g(x)}$, donde $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$, son el resultado de componer una función g con una función del tipo $y = a^x$

Salvo restricción impuesta en el enunciado o consecuencia del contexto, el dominio de una función del tipo $f(x) = a^{g(x)}$ coincide con el dominio de g(x).

<u>Ejemplo 1</u>: $f(x) = 2^{x^4+3x^2-1}$ Dom(f) = $\mathbb{R}$

<u>Ejemplo 2</u>: $f(x) = 3^{\frac{2x-1}{x^2-4}}$ Dom(f) = $\{ x\in\mathbb{R} \ / \ x^2 - 4 \neq 0 \} = \mathbb{R} - \{ -2, 2 \}$

<u>Ejemplo 3</u>: $f(x) = 2^{\frac{3x}{x^2+4}}$ Dom(f) = $\mathbb{R}$

<u>Ejemplo 4</u>: $f(x) = 2^{\sqrt{3x+6}}$ Dom(f) = $\{ x\in\mathbb{R} \ / \ 3x + 6 \geq 0 \} = [-2, +\infty)$

<u>Ejemplo 5</u>: $f(x) = 3^{\sqrt{x^2-1}}$ Dom(f) = $\{ x\in\mathbb{R} \ / \ x^2 - 1 \geq 0 \} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

<u>Ejemplo 6</u>: $f(x) = \dfrac{x+1}{2^x - 8}$ Dom(f) = $\{ x\in\mathbb{R} \ / \ 2^x - 8 \neq 0 \} = \mathbb{R} - \{ 3 \}$

<u>Ejemplo 7</u>: $f(x) = \dfrac{x+1}{2^x}$ Dom(f) = $\mathbb{R}$

<u>Ejemplo 8</u>: $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{2^x - 8}$ Dom(f) = $\{ x\in\mathbb{R} \ / \ x + 1 \geq 0 \wedge 2^x - 8 \neq 0 \} = [-1, 3) \cup (3, +\infty)$

<u>7. Función logarítmica.</u>

Dado $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$, **función logarítmica de base a** es la que tiene por expresión analítica $f(x) = \log_a x$. Salvo restricción impuesta en el enunciado o consecuencia del contexto, su dominio es el intervalo $(0, +\infty)$ y el recorrido es todo $\mathbb{R}$.

Una función del tipo $f(x) = \log_a x$ es continua en todo su dominio, no corta al eje Y y corta al eje X en el punto (1, 0). El resto de propiedades dependen de que la base sea un valor mayor que 1 o bien un valor comprendido entre 0 y 1.

Si $a > 1$	Creciente en $(0, +\infty)$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty$ Tiene una rama parabólica (IC)	$\lim\limits_{x\to0^+} \log_a x = -\infty$ La recta x = 0 es AV
Si $0 < a < 1$	Decreciente en $(0, +\infty)$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty$ Tiene una rama parabólica (IVC)	$\lim\limits_{x\to0^+} \log_a x = +\infty$ La recta x = 0 es AV

Las gráficas de dos funciones del tipo $y = \log_a x$, $y = \log_{1/a} x$ son simétricas respecto del eje X.

Ejemplo: para representar graficamente la función $y = \ln x$, se hace lo siguiente:

Se construye una tabla de valores dando valores a la variable **x**, a izquierda y derecha de x = 0:

x	…	0,001	0,01	0,1	0,5	1	*e*	10	20	30	…
y	…	–6,9	–4,6	–2,3	–0,69	0	1	2,3	2,99	3.4	…

Dom(f) = (0, +∞)   Rec(f) = (–∞, +∞)

Continua en (0, +∞)   Creciente en (0, +∞)

Corta al eje X en el punto (1, 0) y no corta al eje Y

x	1 000	10 000	100 000	$\to +\infty$
y	6,9	9,2	11,5	$\to +\infty$

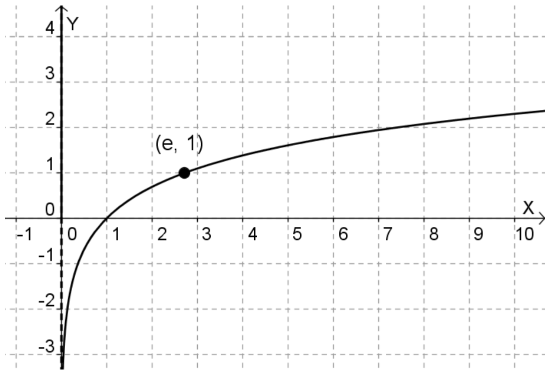
$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

Tiene una rama parabólica (IC)

x	0,001	0,0001	0,00001	$\to 0^+$
y	–6,9	–9,2	–11,5	$\to -\infty$

$\lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty$

La recta x = 0 es AV



Las funciones exponencial y logarítmica de la misma base son funciones recíprocas

$$f(x) = a^x : \mathbb{R} \to (0, +\infty) \qquad\qquad f^{-1}(x) = \log_a x : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$$

Demostración:
Para hallar la recíproca de $y = a^x$, se intercambian las letras **x** e **y**, obteniéndose $x = a^y$
Ahora se despeja **y** de la expresión $x = a^y$. Por definición de logaritmo en base **a** de **x**, se deduce que $y = \log_a x$. Por lo tanto, $f^{-1}(x) = \log_a x$

Obsérvese que el resultado de componer ambas funciones es la función identidad:

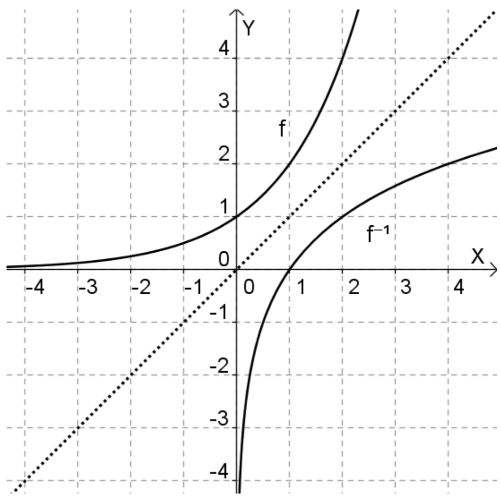
$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(a^x) = \log_a a^x = x \qquad (f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(\log_a x) = a^{\log_a x} = x$$

Por ser funciones recíprocas, las **gráficas** de las funciones exponencial y logarítmica de la misma base son **simétricas respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrantes.**

Ejemplo: las gráficas de $f(x) = 2^x$, $f^{-1}(x) = \log_2 x$ son simétricas respecto de la recta y = x

x	$y = 2^x$
…	…
–4	0,0625
–3	0,125
–2	0,25
–1	0,5
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
10	1 024
20	1 048 576
…	…

x	$y = \log_2 x$
…	…
0,0625	–4
0,125	–3
0,25	–2
0,5	–1
1	0
2	1
4	2
8	3
16	4
1 024	10
1 048 576	20
…	…



Cálculo de dominios

Las funciones cuya expresión analítica son del tipo $f(x) = \log_a(g(x))$, donde $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$, son el resultado de componer una función g con una función del tipo $y = \log_a x$

Salvo restricción impuesta en el enunciado o consecuencia del contexto, el dominio de cualquier función del tipo $f(x) = \log_a(g(x))$ está formado por los valores de x para los que g(x) es mayor que cero.

<u>Ejemplo 1</u>: $f(x) = \log_2(x^2 - 1)$ Dom(f) = $\{ x\in\mathbb{R} \ / \ x^2 - 1 > 0 \} = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

<u>Ejemplo 2</u>: $f(x) = \log\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)$ Dom(f) = $\{ x\in\mathbb{R} \ / \ \dfrac{x+1}{x-2} > 0 \} = (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$

<u>Ejemplo 3</u>: $f(x) = \ln(\sqrt{3x+6})$ Dom(f) = $\{ x\in\mathbb{R} \ / \sqrt{3x+6} > 0 \} = (-2, +\infty)$

<u>Ejemplo 4</u>: $f(x) = \dfrac{1}{\log x}$ Dom(f) = $\{ x\in\mathbb{R} \ / x > 0 \wedge \log x \neq 0 \} = (0, 1) \cup (1, +\infty)$

<u>Ejemplo 5</u>: $f(x) = \dfrac{\log(x+3)}{2^x - 1}$ Dom(f) = $\{ x\in\mathbb{R} \ / x + 3 > 0 \wedge 2^x - 1 \neq 0 \} = (-3, 0) \cup (0, +\infty)$

<u>Ejemplo 6</u>: $f(x) = \dfrac{\log x}{1 - \log(x+1)}$ Dom(f) = $\{ x\in\mathbb{R} \ / x > 0 \wedge 1 - \log(x+1) \neq 0 \} = (0, 9) \cup (9, +\infty)$

<u>8. Transformaciones en la gráfica de una función</u>.

Dados $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$ y una función f cuya gráfica es conocida:

Traslaciones

		La gráfica de g es el resultado de trasladar la gráfica de f un número k de unidades
T1	g(x) = f(x – k)	hacia la derecha
T2	g(x) = f(x + k)	hacia la izquierda
T3	g(x) = f(x) + k	hacia arriba
T4	g(x) = f(x) – k	hacia abajo

Contracciones / Estiramientos

		La gráfica de g es el resultado de aplicar a la gráfica de f
T5	$g(x) = f(k \cdot x)$	una contracción horizontal si $k > 1$
T6	$g(x) = f(k \cdot x)$	un estiramiento horizontal si $k < 1$
T7	$g(x) = k \cdot f(x)$	un estiramiento vertical si $k > 1$
T8	$g(x) = k \cdot f(x)$	una contracción vertical si $k < 1$

Simetrías respecto de los ejes de coordenadas

		La gráfica de g es la simétrica de la gráfica de f
T9	$g(x) = f(-x)$	respecto del eje Y
T10	$g(x) = -f(x)$	respecto del eje X

9. Funciones trigonométricas.

■ **Función seno** $y = \text{sen}(x)$ donde x es la medida del ángulo **en radianes**

Tabla para valores de x comprendidos entre 0 y 2π

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
y	0	0,5	0,71	0,87	1	0,87	0,71	0,5	0

x	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y	0	–0,5	–0,71	–0,87	–1	–0,87	–0,71	–0,5	0

□ En el intervalo $(0, 2\pi)$ la función $y = \text{sen}(x)$

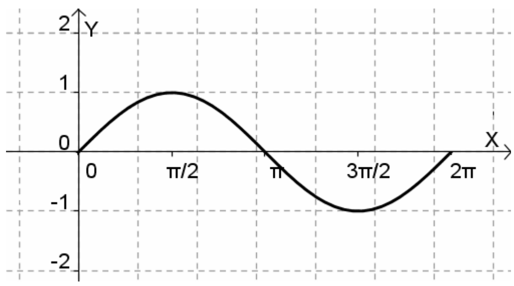
Es creciente en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ y en $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$

Es decreciente en $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$

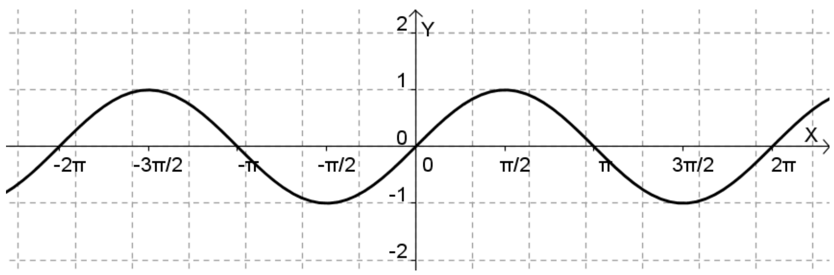
Tiene un máximo absoluto en el punto $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$

Tiene un mínimo absoluto en el punto $\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$

Está acotada superiormente por 1 e inferiormente por –1.



□ Su dominio es todo $\mathbb{R}$. Es continua en todo $\mathbb{R}$. Es periódica de periodo 2π.



■ **Función arcoseno** $y = \text{arcsen}(x)$

La función $f(x) = \text{sen}(x)$ es inyectiva si se restringe al dominio $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

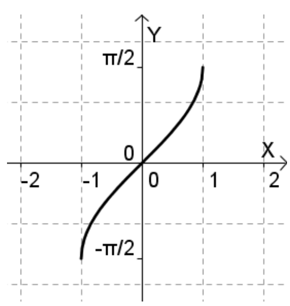
Entonces tiene sentido su función recíproca $f^{-1}(x) = \text{arcsen}(x)$ que se lee "**arco seno de x**".

$f(x) = \text{sen}(x) : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ $\qquad f^{-1}(x) = \text{arcsen}(x) : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Arcoseno de x es el ángulo (en radianes) cuyo seno es x

$$\text{arcsen}(a) = b \iff \text{sen}(b) = a$$

x	–1	–0,5	0	0,5	1
y	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$



■ **Función coseno** y = cos(x) donde x es la medida del ángulo **en radianes**

Tabla para valores de x comprendidos entre 0 y 2π

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
y	1	0,87	0,71	0,5	0	–0,5	–0,71	–0,87	–1

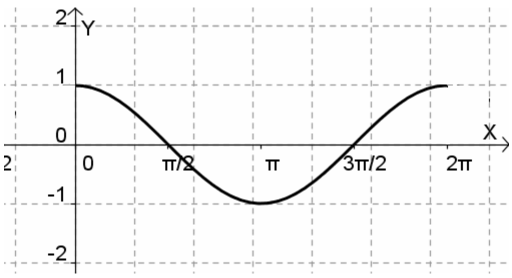
x	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y	–1	–0,87	–0,71	–0,5	0	0,5	0,71	0,87	1

□ En el intervalo (0, 2π) la función y = cos(x)

Es creciente en $(\pi, 2\pi)$ y decreciente en $(0, \pi)$

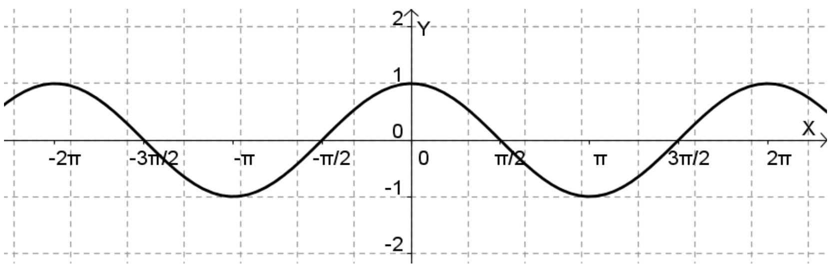
Tiene un máximo absoluto en el punto (0, 1)

Tiene un mínimo absoluto en el punto $(\pi, -1)$



Está acotada superiormente por 1 e inferiormente por –1.

□ Su dominio es todo ℝ. Es continua en todo ℝ. Es periódica de periodo 2π.



■ **Función arco coseno** y = arc cos(x)

La función f(x) = cos(x) es inyectiva si se restringe al dominio $[0, \pi]$

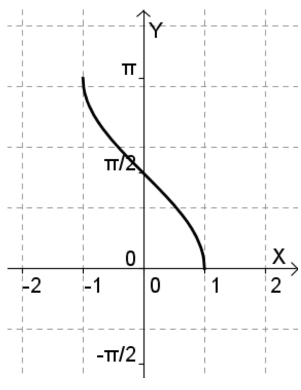
Entonces tiene sentido su función recíproca $f^{-1}(x) = \text{arc cos}(x)$ que se lee "**arco coseno de x**".

$f(x) = \cos(x) : [0, \pi] \to [-1, 1]$ $\qquad f^{-1}(x) = \text{arc cos}(x) : [-1, 1] \to [0, \pi]$

Arco coseno de x es el ángulo (en radianes) cuyo coseno es x

arc cos(a) = b ⇔ cos(b) = a

x	–1	–0,5	0	0,5	1
y	π	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	0



■ **Función tangente** $y = tg(x)$ donde x es la medida del ángulo **en radianes**

Tabla para valores de x comprendidos entre 0 y 2π

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\to\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
y	0	0,58	1	1,73	$\to\infty$	–1,73	–1	–0,58	0

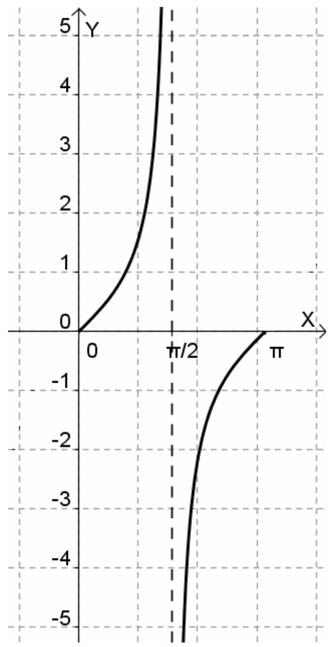
x	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\to\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y	0	0,58	1	1,73	$\to\infty$	–1,73	–1	–0,58	0

☐ En el intervalo $(0, \pi)$ la función $y = tg(x)$

Es creciente en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ y en $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

No tiene máximo ni mínimo absoluto.

No está acotada superiormente ni inferiormente.



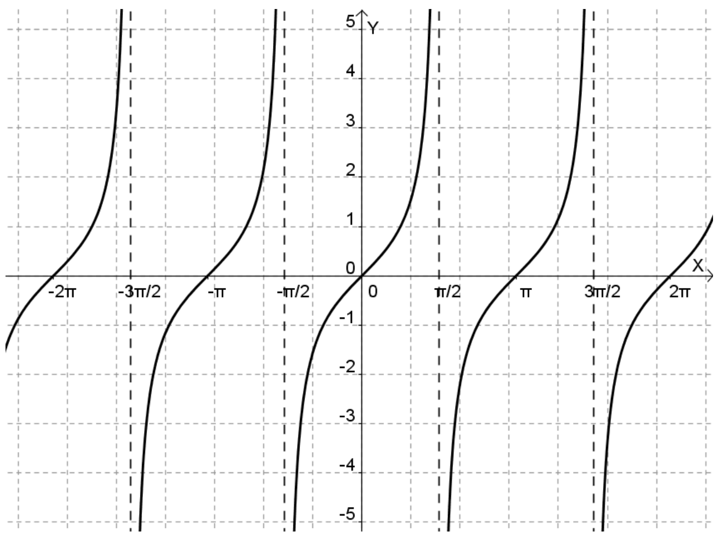
☐ Su dominio es todo $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Es continua en todo su dominio. Es periódica de periodo π

Tiene una discontinuidad de salto infinito en $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Es creciente en todo su dominio.

No tiene extremos relativos ni absolutos.



■ **Función arcotangente** $y = \mathrm{arctg}(x)$

La función $f(x) = tg(x)$ es inyectiva si se restringe al dominio $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

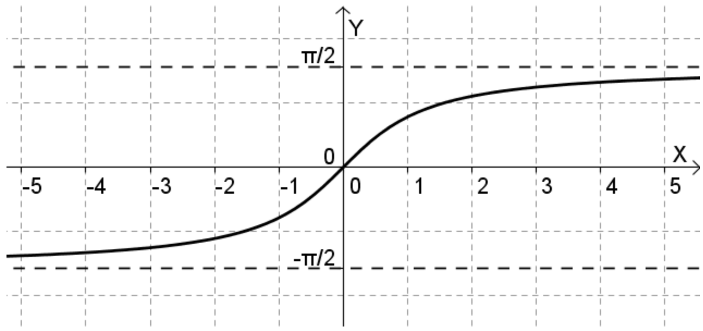
Entonces tiene sentido su función recíproca $f^{-1}(x) = \mathrm{arctg}(x)$ que se lee "**arcotangente de x**".

$f(x) = tg(x) : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to (-\infty, +\infty)$ $\qquad f^{-1}(x) = \mathrm{arctg}(x) : (-\infty, +\infty) \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Arcotangente de x es el ángulo (en radianes) cuyo tangente es x

$$\mathrm{arctg}(a) = b \quad \Leftrightarrow \quad tg(b) = a$$

x	$\to -\infty$	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	$\to +\infty$
y	$-\frac{\pi}{2}$	–1,32	–1,25	–1,1	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	1,1	1,25	1,32	$\frac{\pi}{2}$



Cálculo de dominios

■ Las funciones cuya expresión analítica son del tipo $y = \mathrm{sen}(g(x))$ ó $y = \cos(g(x))$, son el resultado de componer una función g con una función del tipo y = senx ó y = cosx.

Salvo restricción impuesta en el enunciado o consecuencia del contexto, el dominio de una función del tipo $y = \mathrm{sen}(g(x))$ ó $y = \cos(g(x))$ coincide con el dominio de g(x).

<u>Ejemplo 1</u>: el dominio de $y = \mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ es el dominio de $g(x) = \frac{1}{x}$, es decir, $\mathbb{R} - \{ 0 \}$

<u>Ejemplo 2</u>: el dominio de $y = \cos\left(\frac{2x-1}{x^2-4}\right)$ es el dominio de $g(x) = \frac{2x-1}{x^2-4}$, es decir, $\mathbb{R} - \{ -2, 2 \}$

<u>Ejemplo 3</u>: el dominio de $y = \mathrm{sen}\left(\frac{3x}{x^2+4}\right)$ es el dominio de $g(x) = \frac{3x}{x^2+4}$, es decir, todo $\mathbb{R}$

<u>Ejemplo 4</u>: el dominio de $y = \cos(\sqrt{x})$ es el dominio de $g(x) = \sqrt{x}$, es decir, $[0, +\infty)$

<u>Ejemplo 5</u>: el dominio de $y = \mathrm{sen}(\sqrt{x+2})$ es el dominio de $g(x) = \sqrt{x+2}$, es decir, $[-2, +\infty)$

■ Las funciones cuya expresión analítica son del tipo $y = tg(g(x))$, son el resultado de componer una función g con una función del tipo y = tgx.

Salvo restricción impuesta en el enunciado o consecuencia del contexto, el dominio de una función del tipo $y = tg(g(x))$ está formado por el conjunto de valores de x para los que $g(x) \neq k \cdot \frac{\pi}{2}$, k ∈ $\mathbb{Z}$, k impar.

■ Las funciones cuya expresión analítica son del tipo $y = \text{arc sen}(g(x))$ ó $y = \text{arc cos}(g(x))$, son el resultado de componer una función g con una función del tipo y = arcsenx ó y = arc cosx.

Salvo restricción impuesta en el enunciado o consecuencia del contexto, el dominio de una función del tipo $y = \text{arc sen}(g(x))$ ó $y = \text{arc cos}(g(x))$ está formado por los valores de x para los que $-1 \leq g(x) \leq 1$

■ Las funciones cuya expresión analítica son del tipo $y = \text{arc tg}(g(x))$, son el resultado de componer una función g con una función del tipo y = arc tgx.

Salvo restricción impuesta en el enunciado o consecuencia del contexto, el dominio de cualquier función del tipo $y = \text{arc tg}(g(x))$ coincide con el dominio de g(x).