



### ACTIVIDADES

#### 1. Rectas tangente y normal a una gráfica en un punto.

1. Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a)  $f(x) = \frac{4x-1}{2x-2}$  en  $x = 0$       b)  $f(x) = 1 + \ln(2x-1)$  en  $x = 1$       c)  $f(x) = \sin x \cdot \cos x$  en  $x = \pi$

d)  $f(x) = x^2 \cdot e^x$  en  $x = 1$       e)  $f(x) = \sin^2 x$  en  $x = \pi/4$       f)  $f(x) = x^2 \cdot \ln x$  en  $x = \sqrt{e}$

2. Hallar los puntos de la función  $f(x) = \frac{1}{x}$  donde su recta tangente tiene pendiente  $-\frac{1}{4}$  y la ecuación de la recta tangente en cada uno de esos puntos.

3. Hallar el punto de la curva  $f(x) = \ln x$  donde la recta tangente sea paralela a la recta de ecuación  $r \equiv 4x - 2y + 1 = 0$  y calcular la ecuación de dicha recta.

4. Hallar las ecuaciones de las tangentes a la curva  $f(x) = \frac{x}{x+1}$  paralelas a la recta  $y = 4x - 2$ .

5. Hallar los puntos de la función  $f(x) = x^3 - x^2$  en los que la tangente sea paralela a la bisectriz del primer cuadrante.

6. Calcular los valores de **a** y **b** para que  $f(x) = x^2 + ax + b$  pase por el punto  $(0, -5)$  y que en dicho punto la recta tangente sea paralela a la recta  $y = -4x$

7. Hallar el punto de la función  $f(x) = x^2 - 4x + 3$  donde la tangente es paralela al eje X.

8. Hallar los puntos de tangencia horizontal de la función  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$

9. Dada la función  $f(x) = x^2 + x$ , hallar el ángulo que forma su recta tangente con el eje X en el punto de abscisa  $x = 0$ .

10. Hallar los puntos de la función  $f(x) = \frac{x}{x+1}$  donde la tangente tiene una inclinación de  $45^\circ$ .

11. Una curva de la forma  $f(x) = ax^2 + bx + c$  pasa por el punto  $P(1, 5)$  y es tangente en el punto de coordenadas  $(0, 1)$  a la recta  $y = x + 1$ . Hallar la expresión analítica de  $f$ .

12. Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva  $f(x) = \frac{x}{x+1}$  que forman un ángulo de  $45^\circ$  con la horizontal.

13. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva  $y = x^3$  en el punto de abscisa  $x = 0$ . Representar gráficamente la función y dicha recta tangente. ¿Qué se observa?

14. Calcular el valor de  $k$  para que las rectas tangentes a la función  $f(x) = kx^3 - x^2 + 7x - 18$  en  $x = 1$  y  $x = 2$ , respectivamente, sean paralelas.

15. Determinar los puntos de tangencia horizontal de la función  $f(x) = x \cdot e^{-x^2}$

## **2. Monotonía en un intervalo. Extremos locales.**

16. Analizar la monotonía y los extremos locales de las siguientes funciones:

a)  $f(x) = x \cdot e^x$

b)  $f(x) = x \cdot e^{-x}$

c)  $f(x) = x^2 \cdot e^x$

d)  $f(x) = (x - 3) \cdot e^x$

e)  $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$

f)  $f(x) = x^2 \cdot \ln x$

g)  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

h)  $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

i)  $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 3x + 3}$

17. Analizar la monotonía de  $f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x < 0 \\ -1/x & \text{si } x > 0 \end{cases}$  y representarla gráficamente.

18. Para cada una de las siguientes funciones, analizar su derivabilidad y determinar los intervalos de monotonía y sus extremos relativos:

a)  $f(x) = x^2 - |x|$

b)  $f(x) = (x - 2) \cdot |x|$

19. Hallar el valor de  $a$  para que  $f(x) = x^2 - ax + 2$  tenga un extremo local en la abscisa  $x = 1$ .

20. Dada la función  $f(x) = ax^2 + bx$ , calcular los valores de  $a$  y  $b$  para que la función tenga un extremo relativo en el punto  $(1, 4)$ .

21. Dada la función  $f(x) = x^2 + px + q$ , calcular los valores de  $p$  y  $q$  sabiendo que la función tiene un extremo local en  $x = -6$  y su valor en él es  $-2$ .

22. Hallar los valores de  $a$  y  $b$  para que la función  $f(x) = x^3 + ax^2 + b$  tenga un extremo relativo en el punto  $(-2, 3)$ .

23. Dada la función  $f(x) = ax^2 + bx + 5$ , calcular los valores de  $a$  y  $b$  para que la función tenga un máximo relativo en el punto  $(2, 9)$ .

24. Hallar los valores de **a**, **b**, **c** para que la gráfica de la función  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  tenga tangente horizontal en  $x = -2$  y en  $x = 2$ , respectivamente y que pase por el punto  $(0, 3)$ .

25. Dada la función  $f(x) = x^3 + ax + b$ , determinar los valores de **a** y **b** sabiendo que dicha función alcanza un máximo relativo en el punto  $(-1, 3)$ .

26. Dada la función  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = a \ln x + bx^2 + x$ , averiguar los valores de **a** y **b** sabiendo que  $f$  tiene extremos relativos en  $x = 1$  y en  $x = 2$ , respectivamente.

¿Son máximos o mínimos? Justificar la respuesta.

27. Determinar la función polinómica de grado tres, de la que se sabe que tiene un extremo relativo en el punto  $(0, 2)$  y que la tangente a su gráfica en el punto de abscisa  $x = 1$  es la recta  $x + y = 3$ .

28. El número de moléculas en una placa de ensayo viene dado por la función  $f(x) = e^{x^2-2x}$  expresado en miles de moléculas, donde  $x \in [0, 5]$  indica el tiempo en horas.

a) Realizar un estudio de la monotonía de dicha función. ¿Cuáles son las cantidades máxima y mínima? ¿En qué momento se alcanzan?

b) ¿Cuál es la velocidad de crecimiento a las 3 horas? ¿Cuál es la velocidad media de crecimiento en el intervalo  $[0, 5]$ ?

29. El beneficio (en miles de euros) que obtiene una empresa al vender **x** miles de unidades de un producto viene dado por la función:  $B(x) = -2x^3 + 15x^2 + 36$  donde  $x \in [0, 8]$ . Se pide:

a) Determinar los intervalos de monotonía del beneficio y localizar los valores de **x** en los que se alcanzan máximos y mínimos relativos. Calcular también el valor máximo y mínimo absolutos del beneficio en dicho intervalo.

b) Justificar razonadamente que decisión tomaría la empresa en función de los resultados y por qué en los problemas de optimización en intervalos cerrados es imprescindible comparar los extremos relativos con los valores en los extremos del intervalo.

30. Dada la función  $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \begin{cases} 1 - e^x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 2x - 1 - e & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

a) Estudiar la derivabilidad de  $f$ .

b) Realizar un esbozo de la gráfica y determinar los extremos absolutos de  $f$  (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

31. En una habitación se ha dejado una bebida caliente, su temperatura  $T(t)$  en grados Celsius se puede modelar por la función  $T(t) = \frac{90 + 20t}{t + 1}$  donde  $t \geq 0$  representa el tiempo en segundos.

a) En relación a la función  $T(t)$ , indicar su dominio, intervalos de monotonía, posibles extremos y posibles asíntotas. Esbozar la gráfica de dicha función.

b) Indicar, justificando la respuesta, cuál era la temperatura inicial que tenía la bebida, describir cómo ha evolucionado su temperatura y cuál sería la hipotética temperatura final que alcanzaría. ¿A qué temperatura está la habitación?

32. La gráfica de una función derivada  $f'(x)$  es una parábola de vértice  $(1, -4)$  que además corta al eje de abscisas en los puntos  $(-1, 0)$  y  $(3, 0)$ .

a) Analizar la monotonía de la función  $f(x)$  y los valores de  $x$  donde la función  $f$  alcanza un máximo o un mínimo relativos.

b) Realizar un esbozo de la gráfica de la función  $f(x)$ .

33. Analizar la monotonía y los extremos locales de las siguientes funciones:

$$a) f(x) = \begin{cases} 2x - \frac{x^2}{2} & \text{si } x \leq 4 \\ 2x - 8 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 3x^2 - 12x + 9 & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ -2x^2 + 16x - 30 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x < 0 \\ e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$d) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-3} & \text{si } x \leq 4 \\ x^2 - 9x + 21 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

### **3. Curvatura en un intervalo. Puntos de inflexión.**

34. Analizar la curvatura de las siguientes funciones:

$$a) f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2$$

$$b) f(x) = x^3$$

$$c) f(x) = x^2 \cdot \ln x$$

$$d) f(x) = e^{\frac{1}{x}}$$

35. De una función  $f$  se sabe que su función derivada es  $f'(x) = 3x^2 - 9x + 6$

a) Analizar la monotonía y la curvatura de  $f(x)$ .

b) Sabiendo que la gráfica de  $f$  pasa por el punto  $(0, 1)$ , calcular la ecuación de la recta tangente en dicho punto.

36. Hallar los puntos de inflexión de las siguientes funciones:

$$a) f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

$$b) f(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x - 1$$

$$c) f(x) = \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{2}$$

37. Dada la función  $f(x) = \frac{3x+1}{\sqrt{x}}$ , determinar los intervalos de monotonía, los extremos relativos y los puntos de inflexión.

$$38. \text{ Dada la función } f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ -x^2 + 4x - 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Analizar la monotonía, extremos locales, intervalos de concavidad/convexidad, puntos de inflexión y representarla gráficamente.

39. Dada la función  $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

a) Determinar los intervalos de monotonía y los extremos relativos.

b) Hallar la recta tangente a su gráfica en el punto de inflexión de abscisa negativa.

40. Determinar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función  $f(x) = (x - 3) \cdot e^x$  en su punto de inflexión.

41. Dada la función  $f(x) = 2x^3 + ax^2 - 12x + b$

a) Hallar los valores de **a** y **b** para que la función se anule en  $x = 1$  y tenga un punto de inflexión en  $x = -1/2$

b) Para  $a = -3$  y  $b = 2$ , hallar sus extremos relativos.

42. Dada la función  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$

a) Hallar los valores de **a** y **b**, sabiendo que su gráfica pasa por el punto  $(2, 2)$  y que tiene un punto de inflexión de abscisa  $x = 0$ .

b) Para los valores de **a** y **b** obtenidos en el apartado anterior, calcular las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica en su punto de inflexión.

43. Dada la función  $f(x) = 2x^3 + 12x^2 + ax + b$ , determinar los valores de **a** y **b** para que la recta tangente a la gráfica en su punto de inflexión sea la recta  $y = 2x + 3$

44. De la función  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  se sabe que tiene un máximo local en  $x = -1$ , que su gráfica corta al eje X en el punto de abscisa  $x = -2$ , que tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa  $x = 0$  y que la recta tangente a la gráfica en el punto de abscisa  $x = 2$  tiene pendiente 9. Hallar los valores de **a**, **b**, **c**, **d**.

45. Dada la función  $f(x) = x^3 + 3x^2 + mx + 7$ , hallar el valor de **m** para que en su punto de inflexión, la recta tangente a la gráfica forme un ángulo de  $45^\circ$  con el eje X.

46. Se han realizado varios estudios para determinar el modo en que se transmiten los bulos en cierta red social. Un primer estudio ha establecido que el número (aproximado) de personas  $f(t)$  (expresado en miles) que conocen y difunden un bulo viene dado por la función

$$f(t) = \frac{18}{1 + 2^{-t+3}}$$

donde  $t$  representa el tiempo (en días).

a) Según este modelo, ¿cuántas personas empiezan a difundir el bulo?

b) A medida que transcurre el tiempo, ¿está limitado el número de personas que conocen el bulo? En caso afirmativo, ¿cuál es su límite y por qué?

En un segundo estudio, han simplificado el modelo anterior y han establecido que el número (aproximado) de personas  $g(t)$  (expresado en miles) que conocen y difunden un bulo viene dado por la función

$$g(t) = \frac{18}{\pi} \arctg(t - 3) + 9$$

donde  $t$  representa el tiempo (en días).

c) Según este segundo modelo, ¿en qué momento empieza a disminuir la velocidad a la que se propaga el bulo? ¿Cuántas personas conocen en dicho momento el bulo?

#### **4. Representación gráfica de funciones.**

47. Para cada una de las siguientes funciones, determinar su dominio, ramas parabólicas, monotonía y extremos relativos, curvatura y puntos de inflexión y representarla gráficamente:

a)  $f(x) = -x \cdot (x - 3)^2$

b)  $f(x) = x^3 + 3x^2$

c)  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

d)  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$

e)  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2$

f)  $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4x - 1$

g)  $f(x) = 2x^4 - 4x^2$

h)  $f(x) = x^4 - 2x^3$

i)  $f(x) = -x^4 + 2x^3$

j)  $f(x) = -x^4 + 6x^2 + 2$

k)  $f(x) = x^4 + 2x$

l)  $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$

48. Para cada una de las siguientes funciones, determinar su dominio, asíntotas, puntos de corte con los ejes, intervalos de monotonía y extremos relativos y representarla gráficamente:

a)  $f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - x - 2}$

b)  $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$

c)  $f(x) = \frac{x^4 + 3}{x}$

d)  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$

e)  $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$

f)  $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 2x + 1}$

g)  $f(x) = \frac{3x}{x^2 + 1}$

h)  $f(x) = \frac{1 - 4x}{x^2}$

i)  $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$

j)  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

k)  $f(x) = \frac{1}{x^2 + x - 2}$

l)  $f(x) = \frac{x^2}{2(x - 1)}$

m)  $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$

n)  $f(x) = \frac{(x + 1)^2}{x + 3}$

ñ)  $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4}$

o)  $f(x) = \frac{x^4 - 4x^2}{x^2 - 1}$

## SOLUCIONES

1. a)  $y = -\frac{3x}{2} + \frac{1}{2}$ ; b)  $y = 2x - 1$ ; c)  $y = x - \pi$ ; d)  $y = 3ex - 2e$ ; e)  $y = x + \frac{2-\pi}{4}$ ; f)  $y = 2\sqrt{ex} - \frac{3e}{2}$
2. En  $x = 2$ , donde la tangente es  $y = -\frac{x}{4} + 1$ ; en  $x = -2$ , donde la tangente es  $y = -\frac{x}{4} - 1$
3. En  $x = \frac{1}{2}$ , donde la tangente es  $y = 2x - 1 + \ln\left(\frac{1}{2}\right)$
4. En  $x = -\frac{1}{2}$ , donde la tangente es  $y = 4x + 1$ ; en  $x = -\frac{3}{2}$ , donde la tangente es  $y = 4x + 9$
5. Los puntos  $(1, 0)$  y  $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{27}\right)$ , respectivamente.
6. Los valores son  $a = -4$ ,  $b = -5$
7. El punto  $(2, -1)$
8. Los puntos  $(2, 1)$  y  $(0, 5)$ , respectivamente.
9. Forma un ángulo de  $45^\circ$
10. Los puntos  $(0, 0)$  y  $(-2, 2)$ , respectivamente.
11. La expresión analítica es  $f(x) = 3x^2 + x + 1$
12. Las rectas son  $y = x$ ,  $y = x + 4$  respectivamente.
13. La recta es  $y = 0$ . Dicha recta atraviesa la gráfica en  $x = 0$ .
14. El valor es  $k = 2/9$
15. Los puntos son  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2e}}{2e}\right)$ ,  $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2e}}{2e}\right)$
16. a) Mínimo local en  $(-1, -1/e)$ ,  $\searrow$  en  $(-\infty, -1)$ ,  $\nearrow$  en  $(-1, +\infty)$ ;  
b) Máximo local en  $(1, 1/e)$ ,  $\nearrow$  en  $(-\infty, 1)$ ,  $\searrow$  en  $(1, +\infty)$ ;  
c) Máximo local en  $(-2, 4/e^2)$ , mínimo local en  $(0, 0)$ ,  $\nearrow$  en  $(-\infty, -2)$ ,  $\searrow$  en  $(-2, 0)$ ,  $\nearrow$  en  $(0, +\infty)$ ;  
d) Mínimo local en  $(2, -e^2)$ ,  $\searrow$  en  $(-\infty, 2)$ ,  $\nearrow$  en  $(2, +\infty)$ ;  
e) Mínimo local en  $(0, 0)$ , máximo local en  $(2, 4/e^2)$ ,  $\searrow$  en  $(-\infty, 0)$ ,  $\nearrow$  en  $(0, 2)$ ,  $\searrow$  en  $(2, +\infty)$ ;  
f) Mínimo local en  $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, \frac{-1}{2e}\right)$ ,  $\searrow$  en  $\left(0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ ,  $\nearrow$  en  $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty\right)$ ;  
g) Máx. local en  $(0, 2)$ , mín. local en  $(2, -2)$ ,  $\nearrow$  en  $(-\infty, 0)$ ,  $\searrow$  en  $(0, 2)$ ,  $\nearrow$  en  $(2, +\infty)$ ;  
h) No tiene extremos locales,  $\searrow$  en  $\mathbb{R} - \{0\}$ ;  
i) Máximo local en  $(-2, 3)$ , mínimo local en  $(0, 1/3)$ ,  $\nearrow$  en  $(-\infty, -2)$ ,  $\searrow$  en  $(-2, 0)$ ,  $\nearrow$  en  $(0, +\infty)$
17. Monotonía:  $\searrow$  en  $(-\infty, 0)$ ,  $\nearrow$  en  $(0, +\infty)$

18. a) Continua en todo  $\mathbb{R}$ , derivable en  $\mathbb{R} - \{0\}$ ;  $\searrow$  en  $(-\infty, -1/2)$ ,  $\nearrow$  en  $(-1/2, 0)$ ,  $\searrow$  en  $(0, 1/2)$ ,  $\nearrow$  en  $(1/2, +\infty)$ ; mínimo local en  $(-1/2, -1/4)$  y en  $(1/2, -1/4)$ , máximo local en  $(0, 0)$ ;  
 b) Continua en todo  $\mathbb{R}$ , derivable en  $\mathbb{R} - \{0\}$ ;  $\searrow$  en  $(0, 1)$ ,  $\nearrow$  en  $(-\infty, 0)$  y en  $(1, +\infty)$ ; máximo local en  $(0, 0)$  y mínimo local en  $(1, -1)$
19. El valor es  $a = 2$
20. Los valores son  $a = -4$ ,  $b = 8$
21. Los valores son  $p = 12$ ,  $q = 34$
22. Los valores son  $a = 3$ ,  $b = -1$
23. Los valores son  $a = -1$ ,  $b = 4$
24. Los valores son  $a = 0$ ,  $b = -12$ ,  $c = 3$
25. Los valores son  $a = -3$ ,  $b = 1$
26. Los valores son  $a = -2/3$ ,  $b = -1/6$ . En  $x = 1$  hay un mínimo y en  $x = 2$  hay un máximo.
27. La función es  $f(x) = -x^3 + x^2 + 2$
28. a) Decreciente en el intervalo  $(0, 1)$ , creciente en el intervalo  $(1, 5)$ ; la cantidad mínima es  $\frac{1000}{e}$  moléculas y se alcanza para  $x = 1$  hora ya que el punto  $(1, \frac{1000}{e})$  es un mínimo relativo y absoluto; la cantidad máxima es  $1000e^{15}$  moléculas y se alcanza para  $x = 5$  horas ya que el punto  $(5, 1000e^{15})$  es el máximo absoluto; b) La velocidad de crecimiento a las 3 horas es  $4000e^3$  moléculas/hora; la velocidad media de crecimiento en el intervalo  $[0, 5]$  es  $200(e^{15} - 1)$  moléculas/hora.
29. a) Creciente en el intervalo  $(0, 5)$  y decreciente en el intervalo  $(5, 8)$ . Alcanza un máximo relativo y absoluto en el punto  $(5\ 000, 161\ 000)$ . No tiene mínimo relativo. Alcanza el mínimo absoluto en el punto  $(8\ 000, -28\ 000)$ ; b) La empresa debería producir exactamente 5 000 unidades para obtener un beneficio máximo de 161 000 euros. Bajo ningún concepto debería producir 8 000 unidades ya que alcanzaría el mínimo beneficio (beneficio negativo = máxima pérdida = 28 000 euros); porque el valor alcanzado por la función en un extremo del intervalo podría ser mayor (menor) que el alcanzado en un máximo (mínimo) relativo.
30. a) Continua en todo su dominio y derivable en  $[0, 1)$  y en  $(1, 2]$  (todo su dominio excepto en  $x = 1$ ); b) Máximo absoluto en el punto  $(2, 3-e)$  y mínimo absoluto en el punto  $(1, 1-e)$
31. a)  $\text{Dom}(T) = [0, +\infty)$ ; sin asíntotas verticales ni oblicuas; es continua y decreciente en todo su dominio; no tiene extremos relativos; el punto  $(0, 90)$  es máximo absoluto; no alcanza mínimo absoluto aunque está acotada inferiormente por  $y = 20$ ; la recta  $y = 20$  es asíntota horizontal; b) La temperatura inicial era  $T(0) = 90^\circ$  Celsius; la temperatura final se aproxima cada vez más a  $20^\circ$  Celsius ya que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} T(t) = 20$ . A medida que transcurre el tiempo, la bebida se va enfriando y su temperatura tiende a igualarse con la temperatura ambiente de la habitación, que debe ser  $20^\circ$  Celsius.
32.  $\nearrow$  en  $(-\infty, -1)$  y en  $(3, +\infty)$ ,  $\searrow$  en  $(-1, 3)$ ; máximo local en  $x = -1$  y mínimo local en  $x = 3$

33. a)  $\searrow$  en  $(2, 4)$ ,  $\nearrow$  en  $(-\infty, 2)$  y en  $(4, +\infty)$ ; máximo local en  $(2, 2)$  y mínimo local en  $(4, 0)$ ;  
 b)  $\searrow$  en  $(0, 2)$  y en  $(4, +\infty)$ ,  $\nearrow$  en  $(-\infty, 0)$  y en  $(2, 4)$ ; máximo local en  $(0, 1)$  y en  $(4, 2)$ , mínimo local en  $(2, -3)$ ; c)  $\searrow$  en todo  $\mathbb{R}$ ; no tiene extremos locales; d)  $\searrow$  en  $(-\infty, 3)$  y en  $(3, 9/2)$ ,  $\nearrow$  en  $(9/2, +\infty)$ ; mínimo local en  $(9/2, 3/4)$ , no tiene máximos locales.
34. a) Cóncava en  $(-\infty, 1/2)$ , convexa en  $(1/2, +\infty)$ ; b) Cóncava en  $(-\infty, 0)$ , convexa en  $(0, +\infty)$ ;  
 c) Cóncava en  $\left(0, \frac{1}{e\sqrt{e}}\right)$ , convexa en  $\left(\frac{1}{e\sqrt{e}}, +\infty\right)$ ; d) Cóncava en  $(-\infty, -1/2)$ , convexa en  $(-1/2, 0)$  y en  $(0, +\infty)$
35. a)  $\nearrow$  en  $(-\infty, 1)$  y en  $(2, +\infty)$ ,  $\searrow$  en  $(1, 2)$ ; cóncava en  $(-\infty, 3/2)$ , convexa en  $(3/2, +\infty)$ ;  
 b)  $y = 6x+1$
36. a)  $(1, 0)$ ; b)  $(-1, -2)$ ; c)  $(0, 0)$  y  $(-6, -54)$
37. Monotonía:  $\searrow$  en  $(0, 1/3)$ ,  $\nearrow$  en  $(1/3, +\infty)$ ; mínimo local en el punto  $\left(\frac{1}{3}, 2\sqrt{3}\right)$ ; el punto  $(1, 4)$  es punto de inflexión.
38. a)  $\nearrow$  en  $(0, 2)$ ,  $\searrow$  en  $(-\infty, 0)$  y en  $(2, +\infty)$ ; mínimo local en  $(0, 0)$ , máximo local en  $(2, 2)$ ;  
 convexa en  $(-\infty, 1)$ , cóncava en  $(1, +\infty)$ ; punto de inflexión en  $(1, 1)$
39. a) Monotonía:  $\searrow$  en  $(-\infty, 0)$ ,  $\nearrow$  en  $(0, +\infty)$ ; mínimo local en el punto  $(0, 0)$ ;  
 b) En  $x = -1$ , la recta  $y = -x + \ln(2) - 1$
40.  $y = -ex - e$
41. a)  $a = 3$ ,  $b = 7$ ; b) Máximo local en el punto  $(-1, 9)$  y mínimo local en el punto  $(2, -18)$
42. a)  $a = 0$ ,  $b = -7/2$ ; b)  $y = \frac{-7}{2}x + 1$ ;  $y = \frac{2}{7}x + 1$
43. Los valores son  $a = 26$ ,  $b = 19$
44. Los valores son  $a = 1$ ,  $b = 0$ ,  $c = -3$ ,  $d = 2$
45. El valor es  $m = 4$
46. a) 2 000 personas; b) Sí, está limitado a 18 000 personas, porque  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 18$ ;  
 c) La velocidad empieza a disminuir en el punto de inflexión de la función  $g$ . Dicho punto tiene coordenadas  $(3, 9\ 000)$ . Es decir, a partir del tercer día, momento en el que el bulo es conocido por 9 000 personas. Aunque no se pregunta, este modelo también está limitado a 18 000 personas, ya que también  $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = 18$ .

47. En todos los apartados, el dominio es todo  $\mathbb{R}$

	Intervalos de monotonía	Extremos relativos	Intervalos de curvatura	Puntos de inflexión	Ramas parabólicas
a)	$\searrow$ en $(-\infty, 1)$ y en $(3, +\infty)$ $\nearrow$ en $(1, 3)$	Máximo en $(3, 0)$ Mínimo en $(1, -4)$	Convexa en $(-\infty, 2)$ Cóncava en $(2, +\infty)$	$(2, -2)$	RP: $(+\infty, -\infty)$ RP: $(-\infty, +\infty)$
b)	$\nearrow$ en $(-\infty, -2)$ y en $(0, +\infty)$ $\searrow$ en $(-2, 0)$	Máximo en $(-2, 4)$ Mínimo en $(0, 0)$	Cóncava en $(-\infty, -1)$ Convexa en $(-1, +\infty)$	$(-1, 2)$	RP: $(+\infty, +\infty)$ RP: $(-\infty, -\infty)$
c)	$\nearrow$ en $(-\infty, 1)$ y en $(3, +\infty)$ $\searrow$ en $(1, 3)$	Máximo en $(1, 4)$ Mínimo en $(3, 0)$	Cóncava en $(-\infty, 2)$ Convexa en $(2, +\infty)$	$(2, 2)$	RP: $(+\infty, +\infty)$ RP: $(-\infty, -\infty)$
d)	$\nearrow$ en $(-\infty, 0)$ y en $(4/3, +\infty)$ $\searrow$ en $(0, 4/3)$	Máximo en $(0, 1)$ Mínimo en $(4/3, -0.19)$	Cóncava en $(-\infty, 2/3)$ Convexa en $(2/3, +\infty)$	$(2/3, 0.41)$	RP: $(+\infty, +\infty)$ RP: $(-\infty, -\infty)$
e)	$\nearrow$ en $(-\infty, 0)$ y en $(2, +\infty)$ $\searrow$ en $(0, 2)$	Máximo en $(0, -2)$ Mínimo en $(2, -6)$	Cóncava en $(-\infty, 1)$ Convexa en $(1, +\infty)$	$(1, -4)$	RP: $(+\infty, +\infty)$ RP: $(-\infty, -\infty)$
f)	$\searrow$ en $(-\infty, +\infty)$	No tiene	Convexa en $(-\infty, 1)$ Cóncava en $(1, +\infty)$	$(1, -3)$	RP: $(-\infty, +\infty)$ RP: $(+\infty, -\infty)$
g)	$\nearrow$ en $(-1, 0)$ y en $(1, +\infty)$ $\searrow$ en $(-\infty, -1)$ y en $(0, 1)$	Máximo en $(0, 0)$ Mínimo en $(-1, -2)$ Mínimo en $(1, -2)$	Convexa en $(-\infty, -0.58)$ y en $(0.58, +\infty)$ Cóncava en $(-0.58, 0.58)$	$(-0.58, -1.11)$ $(0.58, -1.11)$	RP: $(+\infty, +\infty)$ RP: $(-\infty, +\infty)$
h)	$\nearrow$ en $(3/2, +\infty)$ $\searrow$ en $(-\infty, 3/2)$	Mínimo en $(3/2, -27/16)$	Convexa en $(-\infty, 0)$ y en $(1, +\infty)$ Cóncava en $(0, 1)$	$(0, 0)$ $(1, -1)$	RP: $(+\infty, +\infty)$ RP: $(-\infty, +\infty)$
i)	$\searrow$ en $(3/2, +\infty)$ $\nearrow$ en $(-\infty, 3/2)$	Máximo en $(3/2, 27/16)$	Cóncava en $(-\infty, 0)$ y en $(1, +\infty)$ Convexa en $(0, 1)$	$(0, 0)$ $(1, 1)$	RP: $(+\infty, -\infty)$ RP: $(-\infty, -\infty)$
j)	$\searrow$ en $(-\sqrt{3}, 0)$ y en $(\sqrt{3}, +\infty)$ $\nearrow$ en $(-\infty, -\sqrt{3})$ y en $(0, \sqrt{3})$	Mínimo en $(0, 2)$ Máximo en $(-\sqrt{3}, 11)$ Máximo en $(\sqrt{3}, 11)$	Cóncava en $(-\infty, -1)$ y en $(1, +\infty)$ Convexa en $(-1, 1)$	$(-1, 7)$ $(1, 7)$	RP: $(+\infty, -\infty)$ RP: $(-\infty, -\infty)$
k)	$\nearrow$ en $(-0.79, +\infty)$ $\searrow$ en $(-\infty, -0.79)$	Mínimo en $(-0.79, -1.19)$	Convexa en $(-\infty, +\infty)$	No tiene	RP: $(+\infty, +\infty)$ RP: $(-\infty, +\infty)$
l)	$\nearrow$ en $(-2, -1/2)$ y en $(1, +\infty)$ $\searrow$ en $(-\infty, -2)$ y en $(-1/2, 1)$	Máximo en $(-1/2, 81/16)$ Mínimo en $(-2, 0)$ Mínimo en $(1, 0)$	Convexa en $(-\infty, -1.37)$ y en $(0.37, +\infty)$ Cóncava en $(-1.37, 0.37)$	$(-1.37, 9/4)$ $(0.37, 9/4)$	RP: $(+\infty, +\infty)$ RP: $(-\infty, +\infty)$

48.

	Dom(f)	Corte ejes	Intervalos de monotonía	Extremos relativos	Asíntotas
a)	$\mathbb{R}-\{-1, 2\}$	(0, 0)	$\searrow$ en $(-\infty, -4)$ , en $(0, 2)$ y en $(2, +\infty)$ $\nearrow$ en $(-4, -1)$ y en $(-1, 0)$	Máximo en (0, 0) Mínimo en $(-4, 16/9)$	AV: $x = -1$ AV: $x = 2$ AH: $y = 2$
b)	$\mathbb{R}$	(0, 1)	$\nearrow$ en $(-\infty, -1)$ y en $(1, +\infty)$ $\searrow$ en $(-1, 1)$	Máximo en $(-1, 3)$ Mínimo en $(1, 1/3)$	AH: $y = 1$
c)	$\mathbb{R}-\{0\}$	No tiene	$\nearrow$ en $(-\infty, -1)$ y en $(1, +\infty)$ $\searrow$ en $(-1, 0)$ y en $(0, 1)$	Máximo en $(-1, -4)$ Mínimo en $(1, 4)$	AV: $x = 0$
d)	$\mathbb{R}-\{0\}$	No tiene	$\nearrow$ en $(-\infty, -1)$ y en $(1, +\infty)$ $\searrow$ en $(-1, 0)$ y en $(0, 1)$	Máximo en $(-1, -2)$ Mínimo en $(1, 2)$	AV: $x = 0$ AO: $y = x$
e)	$\mathbb{R}-\{-1, 1\}$	(0, 0)	$\nearrow$ en $(-\infty, -1.73)$ y en $(1.73, +\infty)$ $\searrow$ en $(-1.73, -1)$ , en $(-1, 0)$ , en $(0, 1)$ y en $(1, 1.73)$	Máximo en $(-1.73, -2.6)$ Mínimo en $(1.73, 2.6)$	AV: $x = 1$ AV: $x = -1$ AO: $y = x$
f)	$\mathbb{R}-\{1\}$	(0, 0)	$\searrow$ en $(-\infty, 0)$ y en $(1, +\infty)$ $\nearrow$ en $(0, 1)$	Mínimo en (0, 0)	AV: $x = 1$ AH: $y = 1$
g)	$\mathbb{R}$	(0, 0)	$\searrow$ en $(-\infty, -1)$ y en $(1, +\infty)$ $\nearrow$ en $(-1, 1)$	Máximo en $(1, 3/2)$ Mínimo en $(-1, -3/2)$	AH: $y = 0$
h)	$\mathbb{R}-\{0\}$	$(1/4, 0)$	$\nearrow$ en $(-\infty, 0)$ y en $(1/2, +\infty)$ $\searrow$ en $(0, 1/2)$	Mínimo en $(1/2, -4)$	AV: $x = 0$ AH: $y = 0$
i)	$\mathbb{R}-\{-1, 1\}$	(0, 0)	$\searrow$ en $\mathbb{R}-\{-1, 1\}$	No tiene	AV: $x = -1$ AV: $x = 1$ AH: $y = 0$
j)	$\mathbb{R}$	(0, 1)	$\nearrow$ en $(-\infty, 0)$ $\searrow$ en $(0, +\infty)$	Máximo en (0, 1)	AH: $y = 0$
k)	$\mathbb{R}-\{-2, 1\}$	$(0, -1/2)$	$\nearrow$ en $(-\infty, -2)$ y en $(-2, -1/2)$ $\searrow$ en $(-1/2, 1)$ y en $(1, +\infty)$	Máximo en $(-1/2, -4/9)$	AV: $x = -2$ AV: $x = 1$ AH: $y = 0$
l)	$\mathbb{R}-\{1\}$	(0, 0)	$\nearrow$ en $(-\infty, 0)$ y en $(2, +\infty)$ $\searrow$ en $(0, 1)$ y en $(1, 2)$	Máximo en (0, 0) Mínimo en (2, 2)	AV: $x = 1$ AO: $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
m)	$\mathbb{R}-\{1\}$	$(0, -2)$	$\nearrow$ en $(-\infty, 0)$ y en $(2, +\infty)$ $\searrow$ en $(0, 1)$ y en $(1, 2)$	Máximo en $(0, -2)$ Mínimo en (2, 2)	AV: $x = 1$ AO: $y = x-1$
n)	$\mathbb{R}-\{-3\}$	$(-1, 0)$ $(0, 1/3)$	$\nearrow$ en $(-\infty, -5)$ y en $(-1, +\infty)$ $\searrow$ en $(-5, -3)$ y en $(-3, -1)$	Máximo en $(-5, -8)$ Mínimo en $(-1, 0)$	AV: $x = -3$ AO: $y = x-1$
ñ)	$\mathbb{R}-\{-2, 2\}$	$(0, -3/4)$	$\nearrow$ en $(-\infty, -2)$ y en $(-2, 0)$ $\searrow$ en $(0, 2)$ y en $(2, +\infty)$	Máximo en $(0, -3/4)$	AV: $x = 2$ AV: $x = -2$ AH: $y = 1$
o)	$\mathbb{R}-\{-1, 1\}$	$(-2, 0)$ $(0, 0)$ $(2, 0)$	$\searrow$ en $(-\infty, -1)$ y en $(-1, 0)$ $\nearrow$ en $(0, 1)$ y en $(1, +\infty)$	Mínimo en (0, 0)	AV: $x = 1$ AV: $x = -1$