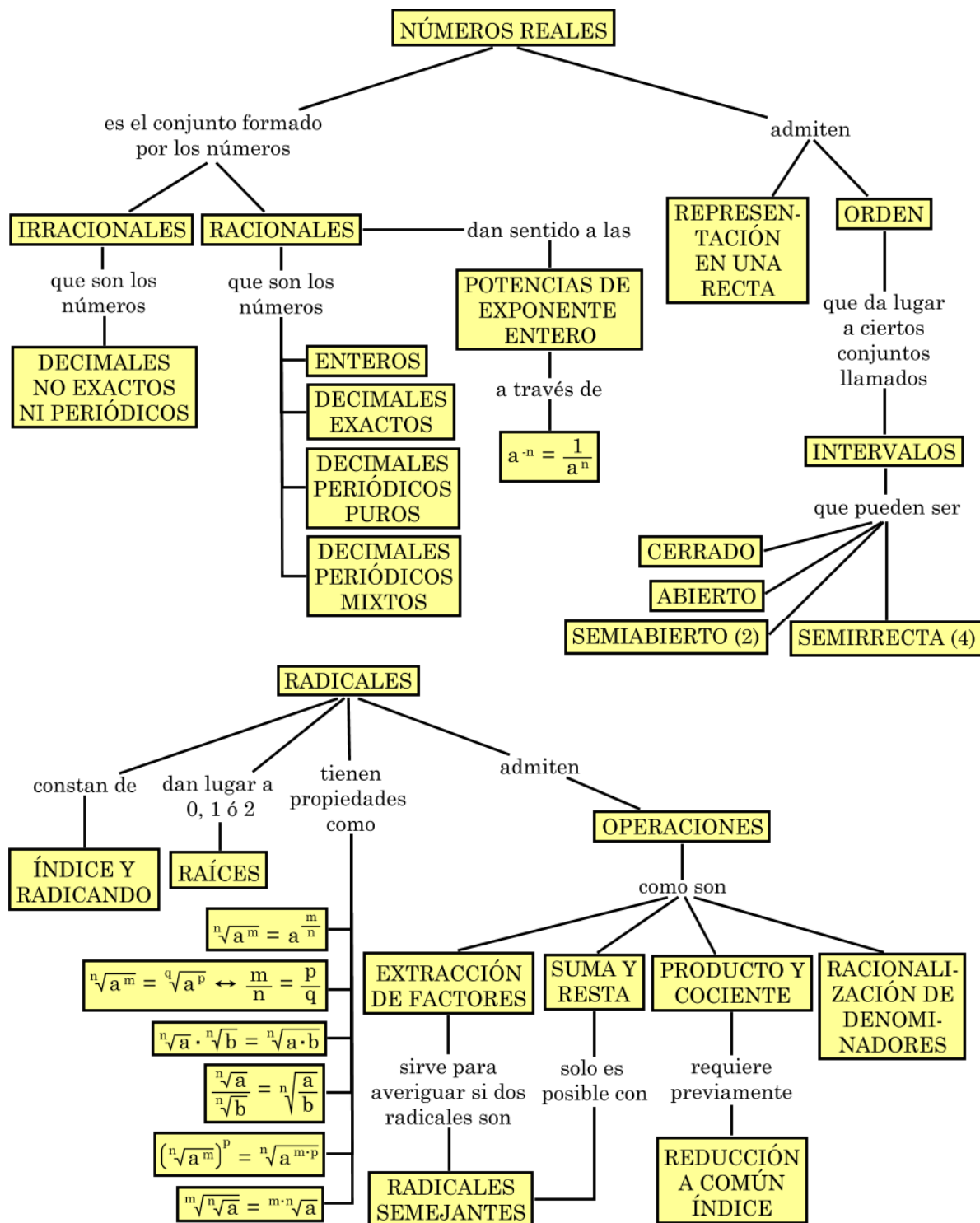
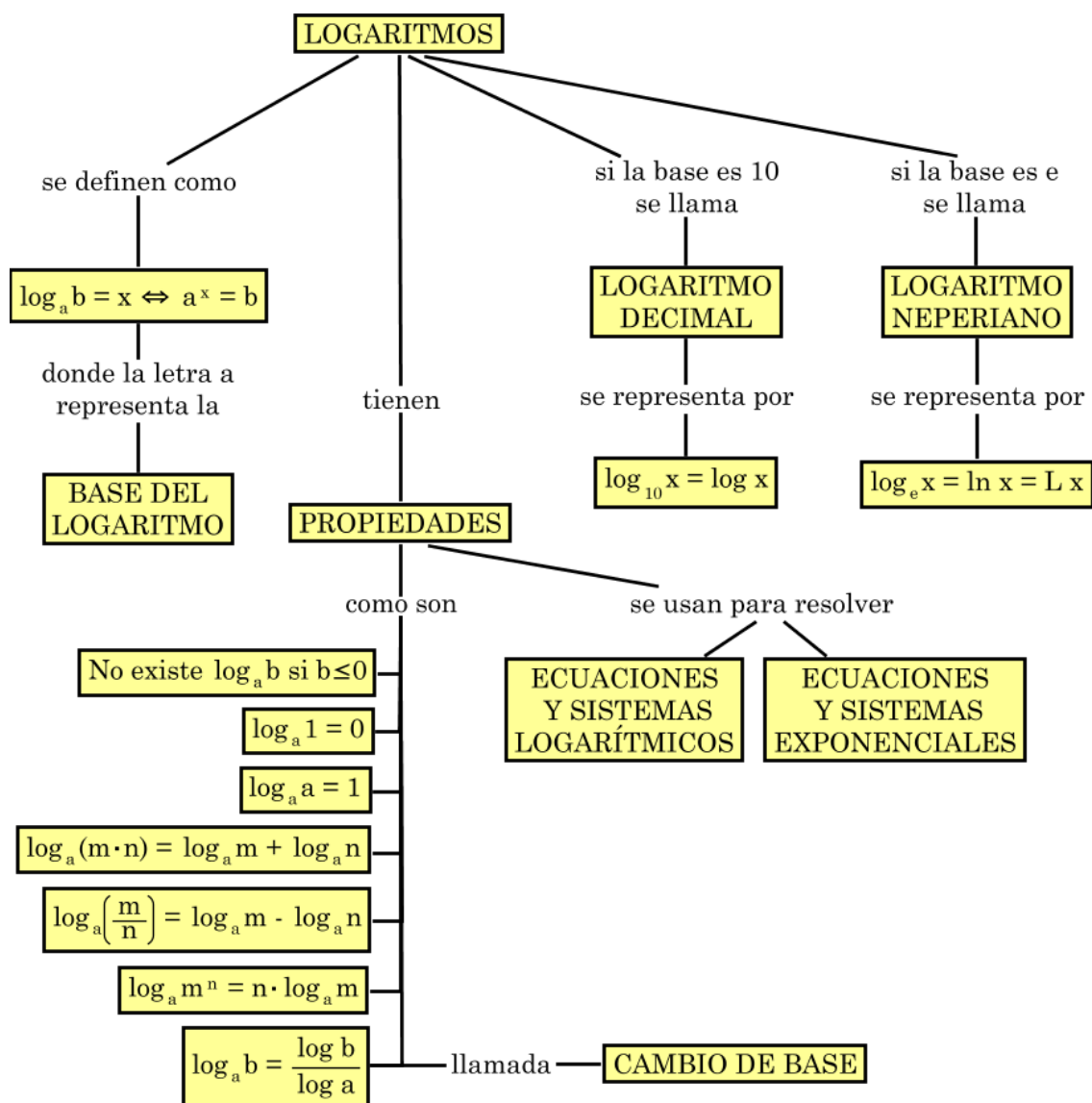




MAPA CONCEPTUAL





1. Potencias de exponente entero.

A) Potencia de base entera y exponente entero negativo

Dados $a \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, la **potencia de base a y exponente negativo $-n$** equivale a una fracción de numerador 1 y denominador a^n .

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Demostración: $a^{-n} = a^{0-n} = \frac{a^0}{a^n} = \frac{1}{a^n}$

Propiedades

En las potencias de exponente negativo se siguen cumpliendo las mismas propiedades que en las potencias de exponente positivo.

$$\begin{array}{lll} \text{P1. } a^m \cdot a^n = a^{m+n} & \text{P2. } \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} & \text{P3. } (a^m)^n = a^{m \cdot n} \\ \text{P4. } a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m & \text{P5. } \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m & \text{P6. } a^0 = 1 \end{array}$$

B) Potencia de base fraccionaria y exponente entero negativo

Dados $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ $b \neq 0$ $n \in \mathbb{N}$, la **potencia de base $\frac{a}{b}$ y exponente negativo $-n$** equivale a una potencia de base $\frac{b}{a}$ y exponente n .

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Demostración: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \frac{1}{\frac{a^n}{b^n}} = \frac{1}{1} \cdot \frac{b^n}{a^n} = \frac{b^n}{a^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

Propiedades

Las potencias de base fraccionaria cumplen las mismas propiedades que las potencias de base un número entero.

$$\begin{array}{lll} \text{P1. } \left(\frac{a}{b}\right)^m \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m+n} & \text{P2. } \left(\frac{a}{b}\right)^m : \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m-n} & \text{P3. } \left[\left(\frac{a}{b}\right)^m\right]^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m \cdot n} \\ \text{P4. } \left(\frac{a}{b}\right)^m \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^m = \left(\frac{a \cdot c}{b \cdot d}\right)^m & \text{P5. } \left(\frac{a}{b}\right)^m : \left(\frac{c}{d}\right)^m = \left(\frac{a}{b} : \frac{c}{d}\right)^m & \text{P6. } \left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1 \end{array}$$

2. Radical. Raíz enésima de un número.

Dados $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$, $a \in \mathbb{R}$, un **radical de índice n** y **radicando a** es una expresión del tipo $\sqrt[n]{a}$

Raíz enésima de a es un número $r \in \mathbb{R}$ tal que $r^n = a$

$$\sqrt[n]{a} = r \Leftrightarrow r^n = a$$

De la definición se deduce que un número puede tener 0, 1 ó 2 raíces enésimas, dependiendo de su **signo** y de la **paridad del índice n** .

	Si n es par	Si n es impar
Si a es positivo	El número a tiene dos raíces enésimas opuestas	El número a tiene una raíz enésima
Si a es negativo	El número a no tiene raíces enésimas	El número a tiene una raíz enésima

Ejemplo 1: 16 tiene dos raíces cuartas, los números 2 y -2 porque $2^4 = 16$ y $(-2)^4 = 16$
 $x^4 = 16 \Rightarrow x = \pm \sqrt[4]{16} = \pm 2$

Ejemplo 2: -16 no tiene raíces cuartas porque ningún número elevado a 4 es igual a -16
 $x^4 = -16 \Rightarrow \nexists \sqrt[4]{-16}$

Ejemplo 3: 32 tiene una raíz quinta, el número 2 porque $2^5 = 32$
 $x^5 = 32 \Rightarrow x = \sqrt[5]{32} = 2$

Ejemplo 4: -32 tiene una raíz quinta, el número -2 porque $(-2)^5 = -32$
 $x^5 = -32 \Rightarrow x = \sqrt[5]{-32} = -2$

Nota: **una raíz enésima es un número real**, no tiene por qué ser un número entero.

Por ejemplo, $\sqrt[5]{12}$ no se puede hallar con la definición. Con ayuda de una calculadora, se obtiene $\sqrt[5]{12} = 1,6437...$ en este caso, un número irracional.

3. Números reales.

Un **número irracional** es aquel que tiene infinitas cifras decimales no periódicas. No puede expresarse en forma de fracción. El conjunto de los números irracionales se representa por $\mathbb{I}$.

Ejemplos: $\pi = 3,14159265...$ $\sqrt{2} = 1,41421356...$ $\sqrt[3]{7} = 1,9129311827...$

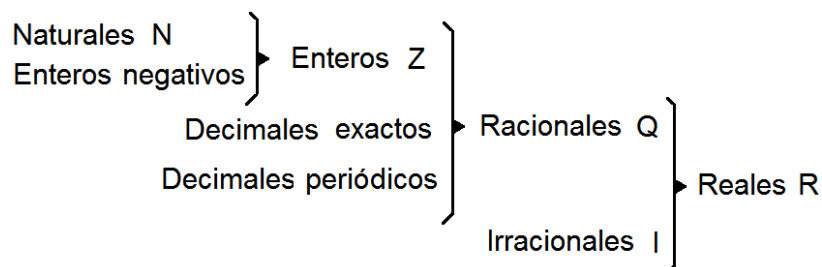
Nota: números como $\sqrt{16}$ ó $\sqrt{\frac{4}{9}}$ **no son irracionales** ya que $\sqrt{16} = 4$ y $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$

Al conjunto de los números racionales unión con los números irracionales se le llama conjunto de **los números reales** y se representa por $\mathbb{R}$.

$$\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$$

Relación de inclusión entre los conjuntos de números naturales, enteros y racionales y reales

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$



Ejemplo: indicar cuáles de los siguientes números pertenecen a $\mathbb{N}$, cuáles a $\mathbb{Z}$, cuáles a $\mathbb{Q}$ y cuáles a $\mathbb{I}$:

	3	-7	4,82	-5,333...	1,6444...	$\sqrt{2}$
$\mathbb{N}$	3					
$\mathbb{Z}$	3	-7				
$\mathbb{Q}$	3	-7	4,82	-5,333...	1,6444...	
$\mathbb{I}$						$\sqrt{2}$

4. Propiedades de los radicales.

P1. Un radical de índice n y radicando a^m es igual a una potencia de base a y exponente $\frac{m}{n}$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Ejemplo 1: $\sqrt[5]{1024} = \sqrt[5]{2^{10}} = 2^{\frac{10}{5}} = 2^2 = 4$ Ejemplo 2: $25^{\frac{3}{2}} = \sqrt{25^3} = \sqrt{(5^2)^3} = \sqrt{5^6} = 5^3 = 125$

Ejemplo 3: $\left(\frac{25}{9}\right)^{\frac{-3}{2}} = \left(\frac{9}{25}\right)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{\left(\frac{9}{25}\right)^3} = \sqrt{\left(\frac{3^2}{5^2}\right)^3} = \sqrt{\frac{3^6}{5^6}} = \frac{3^3}{5^3} = \frac{27}{125}$

Obsérvese que si $m = 1$, entonces $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ Ejemplos: $4^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4}$ $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$

P2. Dos **radicales** son **equivalentes** si lo son sus fracciones asociadas.

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[q]{a^p} \Leftrightarrow \frac{m}{n} = \frac{p}{q}$$

En consecuencia, **simplificar un radical** equivale a simplificar su fracción asociada.

Ejemplos: $\sqrt[8]{5^4} = \sqrt{5}$ porque $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ $\sqrt[12]{3^4} = \sqrt[3]{3}$ porque $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ $\sqrt[6]{7^2} = \sqrt[3]{7}$ porque $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

P3. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$ Ejemplos: $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{10}$ $\sqrt[12]{x^5} \cdot \sqrt[12]{x} = \sqrt[12]{x^6} = \sqrt{x}$

P4. $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ Ejemplos: $\frac{\sqrt[5]{6}}{\sqrt[5]{2}} = \sqrt[5]{\frac{6}{2}} = \sqrt[5]{3}$ $\frac{\sqrt[15]{x^7}}{\sqrt[15]{x^2}} = \sqrt[15]{x^5} = \sqrt[3]{x}$

P5. $(\sqrt[n]{a^m})^p = \sqrt[n]{a^{m \cdot p}}$ Ejemplos: $(\sqrt[3]{2^4})^6 = \sqrt[3]{2^{24}} = 2^8 = 256$ $(\sqrt[3]{x^2})^6 = \sqrt[3]{x^{12}} = x^4$

P6. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$ Ejemplos: $\sqrt[3]{\sqrt{8}} = \sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$ $\sqrt[3]{\sqrt[7]{x^6}} = \sqrt[21]{x^6} = \sqrt[7]{x^2}$

Extracción de factores fuera del radical

Para extraer factores fuera del radical, se procede como sigue:

Paso 1. Se descompone el radicando en factores primos y se escribe el radical como producto de tantos radicales como factores primos haya.

Paso 2. Cada uno de los radicales $\sqrt[n]{a^m}$ anteriores en los que sea $m \geq n$, se descompone así:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^{c \cdot n + r}} = \sqrt[n]{a^{c \cdot n} \cdot a^r} = a^c \cdot \sqrt[n]{a^r}, \text{ siendo } c \text{ el cociente y } r \text{ el resto de la división } m : n$$

Obsérvese que si $r = 0$, entonces $\sqrt[n]{a^m} = a^c$

Paso 3. Finalmente, se multiplican todos los factores extraídos por un lado y todos los radicales sobrantes por otro, y se escribe el producto indicado de los resultados.

Ejemplos: extraer factores fuera de los siguientes radicales:

$$a) \sqrt[5]{x^{32}y^3z^{40}} = \sqrt[5]{x^{30}x^2y^3z^{40}} = x^6z^8 \sqrt[5]{x^2y^3}$$

$$b) \sqrt[4]{\frac{x^{25}y^{15}}{z^6}} = \sqrt[4]{\frac{x^{24}x y^{12}y^3}{z^4z^2}} = \frac{x^6y^3}{z} \sqrt[4]{\frac{xy^3}{z^2}}$$

$$c) \sqrt[3]{128} = \sqrt[3]{2^7} = \sqrt[3]{2^6 \cdot 2} = 2^2 \sqrt[3]{2} = 4 \sqrt[3]{2}$$

$$d) \sqrt[3]{3125} = \sqrt[3]{5^5} = \sqrt[3]{5^3 \cdot 5^2} = 5 \sqrt[3]{5^2} = 5 \sqrt[3]{25}$$

$$e) \sqrt{40} = \sqrt{2^3 \cdot 5} = \sqrt{2^2 \cdot 2 \cdot 5} = 2 \sqrt{2 \cdot 5} = 2\sqrt{10}$$

$$f) \sqrt{96} = \sqrt{2^5 \cdot 3} = \sqrt{2^4 \cdot 2 \cdot 3} = 2^2 \sqrt{2 \cdot 3} = 4\sqrt{6}$$

5. Suma y resta de radicales.

Dos radicales son **semejantes** si, una vez extraídos factores fuera del radical, tienen el mismo índice y el mismo radicando.

Ejemplo 1: $4\sqrt{5}$ y $-3\sqrt{5}$ son semejantes porque ambos tienen índice 2 y radicando 5.

Ejemplo 2: $4\sqrt[3]{5}$ y $-3\sqrt{5}$ **no** son semejantes porque no tienen el mismo índice.

Ejemplo 3: $4\sqrt[3]{5}$ y $4\sqrt[3]{6}$ **no** son semejantes porque no tienen el mismo radicando.

Ejemplo 4: $\sqrt{8}$ y $\sqrt{18}$ son semejantes porque $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ y $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

Para **sumar o restar radicales**, es necesario que los **radicales sean semejantes**. Si los radicales no son semejantes, hay que dejar la operación indicada.

Se aplica la siguiente propiedad: $p\sqrt[n]{a} \pm q\sqrt[n]{a} = (p \pm q)\sqrt[n]{a}$

$$\text{Ejemplo 1: } 5\sqrt{8} + \sqrt{18} - 3\sqrt{32} = 5 \cdot 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 3 \cdot 4\sqrt{2} = 10\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 12\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

$$\text{Ejemplo 2: } \sqrt{245} - \sqrt{320} + \sqrt{8} + \sqrt{125} - \sqrt{18} = 7\sqrt{5} - 8\sqrt{5} + 2\sqrt{2} + 5\sqrt{5} - 3\sqrt{2} = -2\sqrt{5} - \sqrt{2}$$

$$\text{Ejemplo 3: } 2\sqrt[3]{16} - 5\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{250} = 2 \cdot 2\sqrt[3]{2} - 5\sqrt[3]{2} + 3 \cdot 5\sqrt[3]{2} = 4\sqrt[3]{2} - 5\sqrt[3]{2} + 15\sqrt[3]{2} = 14\sqrt[3]{2}$$

$$\text{Ejemplo 4: } 8\sqrt[3]{3} + 5\sqrt[3]{24} - 5\sqrt[3]{375} = 8\sqrt[3]{3} + 5 \cdot 2\sqrt[3]{3} - 5 \cdot 5\sqrt[3]{3} = 8\sqrt[3]{3} + 10\sqrt[3]{3} - 25\sqrt[3]{3} = -7\sqrt[3]{3}$$

6. Producto y cociente de radicales con distinto índice.

Reducir radicales a común índice equivale a encontrar otros tantos radicales equivalentes a los primeros y que tengan todos ellos el mismo índice.

Este índice común es el mínimo común múltiplo de los índices de todos los radicales. Luego, en cada uno de los radicales, se divide el índice común entre su índice y el resultado se multiplica por el exponente del radicando.

Ejemplo: para reducir los radicales $\sqrt[3]{2^2}$, $\sqrt{3^3}$, $\sqrt[4]{5}$ a radicales con el mismo índice, se calcula el índice común que es el m.c.m.(3, 2, 4) = 12

$$\text{Para el índice 3, se hace } 12 : 3 = 4 \quad 4 \cdot 2 = 8 \quad \Rightarrow \quad \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[12]{2^8}$$

$$\text{Para el índice 2, se hace } 12 : 2 = 6 \quad 6 \cdot 3 = 18 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{3^3} = \sqrt[12]{3^{18}}$$

$$\text{Para el índice 4, se hace } 12 : 4 = 3 \quad 3 \cdot 1 = 3 \quad \Rightarrow \quad \sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{5^3}$$

Para multiplicar o dividir radicales de distinto índice, primero hay que reducirlos a **común índice** y después aplicar el producto o cociente de radicales del mismo índice:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Ejemplo 1: $\frac{\sqrt[3]{2^8}}{\sqrt{2^3}} = \frac{\sqrt[6]{2^{16}}}{\sqrt[6]{2^9}} = \sqrt[6]{2^7} = \sqrt[6]{2^6 \cdot 2} = 2 \sqrt[6]{2}$

Ejemplo 2: $\frac{\sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt{2^5}}{\sqrt[4]{2^7}} = \frac{\sqrt[12]{2^8} \cdot \sqrt[12]{2^{30}}}{\sqrt[12]{2^{21}}} = \sqrt[12]{\frac{2^{38}}{2^{21}}} = \sqrt[12]{2^{17}} = \sqrt[12]{2^{12} \cdot 2^5} = 2 \sqrt[12]{2^5} = 2 \sqrt[12]{32}$

Ejemplo 3: $\sqrt[5]{x^2} \cdot \sqrt[3]{x^4} \cdot \sqrt{x^7} \cdot \sqrt[15]{x} = \sqrt[30]{x^{12}} \cdot \sqrt[30]{x^{40}} \cdot \sqrt[30]{x^{105}} \cdot \sqrt[30]{x^2} = \sqrt[30]{x^{159}} = \sqrt[30]{x^{150} \cdot x^9} = x^5 \sqrt[30]{x^9}$

Ejemplo 4: $\sqrt[3]{a^2b} \sqrt{ab} \sqrt{a} = \sqrt[3]{a^2b} \cdot \sqrt[6]{ab} \cdot \sqrt[12]{a} = \sqrt[12]{a^8b^4} \cdot \sqrt[12]{a^2b^2} \cdot \sqrt[12]{a} = \sqrt[12]{a^{11}b^6}$

Ejemplo 5: $\frac{\sqrt[3]{a^2b} \sqrt{2ab}}{\sqrt{2ab} \sqrt[3]{b}} = \frac{\sqrt[3]{a^2b} \cdot \sqrt[6]{2ab}}{\sqrt{2ab} \cdot \sqrt[6]{b}} = \frac{\sqrt[6]{a^4b^2} \cdot \sqrt[6]{2ab}}{\sqrt[6]{2^3a^3b^3} \cdot \sqrt[6]{b}} = \frac{\sqrt[6]{2a^5b^3}}{\sqrt[6]{2^3a^3b^4}} = \sqrt[6]{\frac{a^2}{2^2b}} = \sqrt[6]{\frac{a^2}{4b}}$

7. Racionalización de denominadores.

Racionalizar una fracción con denominador radical consiste en encontrar una fracción equivalente cuyo denominador sea un número racional.

Caso 1: si el denominador de la fracción es de la forma $\sqrt[n]{a^m}$ siendo $m < n$, entonces hay que multiplicar el numerador y el denominador por $\sqrt[n]{a^{n-m}}$

Si fuese $m > n$, previamente hay que extraer factores y después aplicar la regla anterior.

Ejemplo 1: $\frac{10}{\sqrt[3]{2}} = \frac{10 \cdot \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2^2}} = \frac{10 \cdot \sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{10 \cdot \sqrt[3]{4}}{2} = 5 \sqrt[3]{4}$ Ejemplo 2: $\frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}$

Ejemplo 3: $\frac{ab}{\sqrt[4]{ab^2}} = \frac{ab \cdot \sqrt[4]{a^3b^2}}{\sqrt[4]{ab^2} \cdot \sqrt[4]{a^3b^2}} = \frac{ab \cdot \sqrt[4]{a^3b^2}}{\sqrt[4]{a^4b^4}} = \frac{ab \cdot \sqrt[4]{a^3b^2}}{ab} = \sqrt[4]{a^3b^2}$

Caso 2: si el denominador de la fracción es de alguna de las siguientes formas:

$$p\sqrt{a} \pm q\sqrt{b}$$

$$p \pm q\sqrt{b}$$

$$p\sqrt{a} \pm q$$

entonces hay que multiplicar el numerador y el denominador por la expresión conjugada del denominador. La expresión conjugada de $A+B$ es $A-B$ o viceversa.

$$\text{Ejemplo 1: } \frac{6}{2\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{6 \cdot (2\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(2\sqrt{5}-\sqrt{3}) \cdot (2\sqrt{5}+\sqrt{3})} = \frac{6 \cdot (2\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(2\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{12\sqrt{5}+6\sqrt{3}}{20-3} = \frac{12\sqrt{5}+6\sqrt{3}}{17}$$

$$\text{Ejemplo 2: } \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+3} = \frac{\sqrt{3} \cdot (2\sqrt{3}-3)}{(2\sqrt{3}+3) \cdot (2\sqrt{3}-3)} = \frac{\sqrt{3} \cdot (2\sqrt{3}-3)}{(2\sqrt{3})^2 - 3^2} = \frac{6-3\sqrt{3}}{12-9} = \frac{6-3\sqrt{3}}{3} = \frac{2-\sqrt{3}}{1} = 2-\sqrt{3}$$

8. Logaritmos.

Dados $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$, $a \neq 1$, se llama **logaritmo en base a de b** al exponente al que hay que elevar **a** para obtener **b**. Se representa por $\log_a b$.

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

$$\text{Ejemplo 1: } \log_2 8 = 3 \text{ porque } 2^3 = 8$$

$$\text{Ejemplo 2: } \log_3 81 = 4 \text{ porque } 3^4 = 81$$

$$\text{Ejemplo 3: } \log_4 1 = 0 \text{ porque } 4^0 = 1$$

$$\text{Ejemplo 4: } \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} = 2 \text{ porque } \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Si la **base** del logaritmo es el **número 10**, entonces el logaritmo se llama **decimal**. Se representa por **log x**. El número 10 no se escribe.

$$\log_{10} x = \log x$$

Si la **base** del logaritmo es el **número e = 2,7182...**, entonces el logaritmo se llama **neperiano**. Se representa por **ln x** ó también por **Lx**.

$$\log_e x = \ln x = Lx$$

Propiedades de los logaritmos

P1. $\forall a > 0$, $a \neq 1$, no existe $\log_a b$ si $b \leq 0$.

Sea cual sea la base, no existe el logaritmo de cero ni el logaritmo de un número negativo.

$$\text{P2. } \log_a 1 = 0 \quad \forall a > 0, a \neq 1$$

$$\text{P3. } \log_a a = 1 \quad \forall a > 0, a \neq 1$$

$$\text{P4. } \log_a (m \cdot n) = \log_a m + \log_a n \quad \forall a > 0, a \neq 1 \quad \forall m, n > 0$$

$$\text{P5. } \log_a \left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n \quad \forall a > 0, a \neq 1 \quad \forall m, n > 0$$

$$\text{P6. } \log_a m^n = n \cdot \log_a m \quad \forall a > 0, a \neq 1 \quad \forall m > 0$$

$$\text{P7. Cambio de base: } \log_a b = \frac{\log b}{\log a} \quad \forall a > 0, a \neq 1 \quad \forall b > 0$$

El cambio de base se utiliza para resolver ecuaciones del tipo $a^x = b$, donde a y b son números que no pueden expresarse como potencias de la misma base.

Ejemplo: si se quiere resolver la ecuación $2^x = 43$, se despeja x aplicando la definición de logaritmo: $x = \log_2 43$

Aplicando ahora el cambio de base se tiene que $x = \log_2 43 = \frac{\log 43}{\log 2} \cong 5,43$

Nota: la forma general de la propiedad de cambio de base es: $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

Demostraciones

Demostración P4: nombrando $x = \log_a(m \cdot n)$ $y = \log_a m$ $z = \log_a n$

se va a demostrar que $x = y + z$

De la definición de logaritmo se deduce que:

Si $x = \log_a(m \cdot n) \Rightarrow a^x = m \cdot n$ Si $y = \log_a m \Rightarrow a^y = m$ Si $z = \log_a n \Rightarrow a^z = n$

De lo anterior se deduce que $a^x = a^y \cdot a^z$ Por otro lado, se sabe que $a^y \cdot a^z = a^{y+z}$

Encadenando las dos igualdades anteriores, se tiene que $a^x = a^y \cdot a^z = a^{y+z}$. Luego $x = y + z$

Demostración P5: nombrando $x = \log_a \frac{m}{n}$ $y = \log_a m$ $z = \log_a n$

se va a demostrar que $x = y - z$

De la definición de logaritmo se deduce que:

Si $x = \log_a \frac{m}{n} \Rightarrow a^x = \frac{m}{n}$ Si $y = \log_a m \Rightarrow a^y = m$ Si $z = \log_a n \Rightarrow a^z = n$

De lo anterior se deduce que $a^x = \frac{a^y}{a^z}$ Por otro lado, se sabe que $\frac{a^y}{a^z} = a^{y-z}$

Encadenando las dos igualdades anteriores, se tiene que $a^x = \frac{a^y}{a^z} = a^{y-z}$. Luego $x = y - z$

Demostración P6: nombrando $x = \log_a m^n$ $y = \log_a m$ se va a demostrar que $x = n \cdot y$

De la definición de logaritmo se deduce que:

Si $x = \log_a m^n \Rightarrow a^x = m^n$ Si $y = \log_a m \Rightarrow a^y = m$

De lo anterior se deduce que $a^x = (a^y)^n$ Por otro lado, se sabe que $(a^y)^n = a^{n \cdot y}$

Encadenando las dos igualdades anteriores, se tiene que $a^x = (a^y)^n = a^{n \cdot y}$. Luego $x = n \cdot y$

Demostración P7: nombrando $x = \log_a b$ $y = \log b$ $z = \log a$ se va a demostrar que $x = \frac{y}{z}$

De la definición de logaritmo se deduce que:

Si $x = \log_a b \Rightarrow a^x = b$ Si $y = \log b \Rightarrow 10^y = b$ Si $z = \log a \Rightarrow 10^z = a$

De lo anterior se deduce que $10^y = (10^z)^x$ Por otro lado, se sabe que $(10^z)^x = 10^{z \cdot x}$

Encadenando las dos igualdades anteriores, se tiene que $10^y = (10^z)^x = 10^{z \cdot x}$

Luego $y = z \cdot x$, lo que a su vez implica que $x = \frac{y}{z}$