



## 1. Resolución de ecuaciones.

### A) Ecuaciones de segundo grado

Una **ecuación de segundo grado con una incógnita** es una igualdad algebraica en la que interviene una sola letra llamada **incógnita**, elevada a dos.

La forma general de una ecuación de segundo grado con una incógnita es la expresión reducida

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ donde } a, b, c \in \mathbb{R}, \text{ siendo } a \neq 0$$

Para resolver una ecuación de segundo grado escrita en la forma general, se aplica la siguiente fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Pueden darse tres casos:

1. Si  $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ , la ecuación tiene dos soluciones distintas.
2. Si  $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ , la ecuación tiene una única solución (doble).
3. Si  $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ , la ecuación no tiene solución.

Ejemplo: resolver la ecuación  $x - \frac{1+x^2}{2} = \frac{2(x^2-1)}{3}$

$$x - \frac{1+x^2}{2} = \frac{2x^2-2}{3} \Rightarrow \frac{6x}{6} - \frac{3+3x^2}{6} = \frac{4x^2-4}{6} \Rightarrow 6x - 3 - 3x^2 = 4x^2 - 4$$

$$\Rightarrow 0 = -6x + 3 + 3x^2 + 4x^2 - 4 \Rightarrow 7x^2 - 6x - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = -1/7$$

### Ecuaciones de segundo grado incompletas

Se denomina **incompleta** a aquella ecuación de segundo grado en la que falta el término de primer grado o el término independiente.

#### a) Ecuaciones del tipo $ax^2 + c = 0$

$$ax^2 + c = 0 \Rightarrow ax^2 = -c \Rightarrow x^2 = \frac{-c}{a} \Rightarrow \text{las soluciones son } x_1 = +\sqrt{\frac{-c}{a}} \text{ y } x_2 = -\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

La ecuación tiene **dos soluciones** solo si  $\frac{-c}{a} > 0$  y **ninguna solución** si  $\frac{-c}{a} < 0$

#### b) Ecuaciones del tipo $ax^2 + bx = 0$

$$ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x \cdot (ax + b) = 0 \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \\ \Rightarrow ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x_2 = \frac{-b}{a} \end{array} \right.$$

La ecuación tiene **dos soluciones**. Una de ellas siempre es  $x = 0$ .

## B) Ecuaciones bicuadradas

Una ecuación bicuadrada es aquella del tipo  $ax^4 + bx^2 + c = 0$ , donde  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , siendo  $a \neq 0$

Puede tener **4 soluciones** (dos parejas de valores opuestos), **3 soluciones** (dos valores opuestos y cero), **2 soluciones** (dos valores opuestos), **1 solución** (cero) o **ninguna solución**.

Para resolver una ecuación de este tipo se aplican los siguientes pasos:

**Paso 1.** Con el cambio de letra  $x^2 = z$ ,  $x^4 = z^2$  se reescribe la ecuación como  $az^2 + bz + c = 0$ .

**Paso 2.** Se resuelve la ecuación resultante  $az^2 + bz + c = 0$  para la letra  $z$ .

**Paso 3.** Aplicando  $x^2 = z$  en cada una de las soluciones obtenidas para  $z$ , se escriben las correspondientes ecuaciones para la letra  $x$ . Al resolver por separado cada una de estas ecuaciones, se obtienen todas las soluciones de la ecuación inicial.

Ejemplo: para resolver la ecuación  $x^4 + 2x^2 - 3 = 0$ , se hace lo siguiente:

**Paso 1.** Con el cambio  $x^2 = z$ ,  $x^4 = z^2$  la ecuación quedaría  $z^2 + 2z - 3 = 0$

**Paso 2.** Los coeficientes de esta ecuación son  $a = 1$ ,  $b = 2$ ,  $c = -3$ . Se aplica la fórmula:

$$z = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \left\{ \begin{array}{l} z = \frac{-2 + 4}{2} = \frac{2}{2} = 1 \\ z = \frac{-2 - 4}{2} = \frac{-6}{2} = -3 \end{array} \right.$$

**Paso 3.** La ecuación inicial **tiene 2 soluciones** ya que:

– Si  $z = 1$ , entonces  $x^2 = 1$  y por lo tanto,  $x_1 = +1$  y  $x_2 = -1$

– Si  $z = -3$ , entonces  $x^2 = -3$  y por lo tanto, esta parte no aporta ninguna solución.

## C) Ecuaciones por descomposición factorial

Para resolver una ecuación del tipo  $P(x) = 0$ , donde  $P(x)$  es un polinomio de grado  $n \geq 3$ , se aplican los siguientes pasos:

**Paso 1.** Se factoriza el polinomio  $P(x)$ .

**Paso 2.** Se igualan a cero todos y cada uno de los factores, obteniéndose así tantas ecuaciones como factores haya.

**Paso 3.** Se resuelven todas y cada una de las ecuaciones por separado. Las soluciones obtenidas son todas las soluciones de la ecuación inicial. Téngase en cuenta que la ecuación inicial debe tener **como máximo n soluciones**.

Ejemplo 1: para resolver la ecuación  $2x^3 - 5x^2 - x + 6 = 0$ , se factoriza  $2x^3 - 5x^2 - x + 6$

Aplicando la regla de Ruffini, se obtiene  $2x^3 - 5x^2 - x + 6 = (x + 1) \cdot (x - 2) \cdot (2x - 3)$

$$(x + 1) \cdot (x - 2) \cdot (2x - 3) = 0 \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -1 \\ \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x_2 = 2 \\ \Rightarrow 2x - 3 = 0 \Rightarrow x_3 = \frac{3}{2} \end{array} \right. \text{ La ecuación tiene tres soluciones.}$$

Ejemplo 2: para resolver la ecuación  $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$ , se factoriza  $x^3 - 5x^2 + 6x$

Aplicando la regla de Ruffini, se obtiene  $x^3 - 5x^2 + 6x = x \cdot (x - 2) \cdot (x - 3)$

$$x \cdot (x - 2) \cdot (x - 3) = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \\ \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x_2 = 2 \\ \Rightarrow x - 3 = 0 \Rightarrow x_3 = 3 \end{array} \right. \quad \text{La ecuación tiene tres soluciones.}$$

Ejemplo 3: para resolver la ecuación  $x^3 + 4x - 5 = 0$ , se factoriza  $x^3 + 4x - 5$

Aplicando la regla de Ruffini, se obtiene  $x^3 + 4x - 5 = (x - 1) \cdot (x^2 + x + 5)$

$$(x - 1) \cdot (x^2 + x + 5) = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \\ \Rightarrow x^2 + x + 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{-19}}{2} \end{array} \right.$$

La ecuación **tiene una solución**.

## D) Ecuaciones racionales

Una **ecuación racional** es aquella en la que la incógnita se encuentra en algún denominador. Su resolución se basa en la aplicación correcta de las operaciones con fracciones algebraicas.

Hay que revisar todas las soluciones ya que a veces se pueden obtener soluciones falsas.

Ejemplo 1: resolver la ecuación  $\frac{3}{x} = \frac{4x + 5}{x + 2}$

$$3(x + 2) = x(4x + 5) \Rightarrow 3x + 6 = 4x^2 + 5x \Rightarrow 0 = 4x^2 + 5x - 3x - 6 \Rightarrow 4x^2 + 2x - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-6)}}{2 \cdot 4} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 96}}{8} = \frac{-2 \pm \sqrt{100}}{8} = \frac{-2 \pm 10}{8} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{-2 + 10}{8} = \frac{8}{8} = 1 \\ x_2 = \frac{-2 - 10}{8} = \frac{-12}{8} = \frac{-3}{2} \end{array} \right.$$

Ejemplo 2: resolver la ecuación  $\frac{x-1}{x+1} - \frac{3+x}{x-1} = 2$

$$\text{m.c.m.}(x+1, x-1) = (x+1) \cdot (x-1)$$

$$\frac{(x-1) \cdot (x-1)}{(x+1) \cdot (x-1)} - \frac{(3+x) \cdot (x+1)}{(x+1) \cdot (x-1)} = \frac{2 \cdot (x+1) \cdot (x-1)}{(x+1) \cdot (x-1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-1) \cdot (x-1) - (3+x) \cdot (x+1) = 2 \cdot (x+1) \cdot (x-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 - (x^2 + 4x + 3) = 2 \cdot (x^2 - 1) \Rightarrow x^2 - 2x + 1 - x^2 - 4x - 3 = 2x^2 - 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 - x^2 - 4x - 3 = 2x^2 - 2 \Rightarrow 0 = 2x^2 - 2 - x^2 + 2x - 1 + x^2 + 4x + 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x \cdot (2x + 6) = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \\ \Rightarrow 2x + 6 = 0 \Rightarrow x_2 = -3 \end{array} \right.$$

## E) Ecuaciones irracionales

Una **ecuación irracional** es aquella en la que la incógnita se encuentra bajo la influencia de alguna raíz.

**Caso 1.** Para resolver una ecuación irracional **con una sola raíz cuadrada** se aplican los siguientes pasos:

**Paso 1.** Se aísla la raíz cuadrada a un lado del signo igual, pasando todo lo que no tenga raíz cuadrada al lado contrario.

**Paso 2.** Se reducen términos, si fuera necesario, en el lado donde no se encuentra la raíz.

**Paso 3.** Se eleva al cuadrado a la izquierda y a la derecha del signo igual.

**Paso 4.** Se resuelve la ecuación resultante. Hay que revisar todas las soluciones ya que en el paso anterior pudieron introducirse soluciones falsas.

Ejemplo: resolver la ecuación  $x - \sqrt{25 - x^2} = 1$

$$x - \sqrt{25 - x^2} = 1 \Rightarrow -\sqrt{25 - x^2} = 1 - x \Rightarrow (-\sqrt{25 - x^2})^2 = (1 - x)^2 \Rightarrow 25 - x^2 = 1 - 2x + x^2$$

$$\Rightarrow 0 = -25 + x^2 + 1 - 2x + x^2 \Rightarrow 2x^2 - 2x - 24 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 12 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{+1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 48}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2} \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{1+7}{2} = 4 \\ x_2 = \frac{1-7}{2} = -3 \end{array} \right.$$

Comprobación:  $x = 4$  sí es solución ya que  $4 - \sqrt{25 - 4^2} = 4 - \sqrt{9} = 4 - 3 = 1$

Comprobación:  $x = -3$  no es solución ya que  $-3 - \sqrt{25 - (-3)^2} = -3 - \sqrt{16} = -3 - 4 = -7 \neq 1$

**Caso 2.** Para resolver una ecuación irracional **con dos raíces cuadradas** se aplican los siguientes pasos:

**Paso 1.** Se aísla una de las raíces cuadradas a un lado del signo igual pasando el resto de los términos al lado contrario, incluida la otra raíz cuadrada.

**Paso 2.** Se eleva al cuadrado a izquierda y derecha del signo igual.

**Paso 3.** Se obtiene una ecuación irracional con una sola raíz cuadrada, que se resuelve siguiendo los pasos del caso 1.

Ejemplo: resolver la ecuación  $\sqrt{x} + \sqrt{3x - 2} = 2$

$$\sqrt{3x - 2} = 2 - \sqrt{x} \Rightarrow (\sqrt{3x - 2})^2 = (2 - \sqrt{x})^2 \Rightarrow 3x - 2 = 4 + x - 4\sqrt{x} \Rightarrow 2x - 6 = -4\sqrt{x} \Rightarrow$$

$$(2x - 6)^2 = (-4\sqrt{x})^2 \Rightarrow 4x^2 - 24x + 36 = 16x \Rightarrow 4x^2 - 40x + 36 = 0 \Rightarrow x^2 - 10x + 9 = 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{+10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1} = \frac{+10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2} \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{10+8}{2} = 9 \\ x_2 = \frac{10-8}{2} = 1 \end{array} \right.$$

Comprobación de las soluciones:

$x_1 = 9$  no es solución ya que  $\sqrt{9} + \sqrt{3 \cdot 9 - 2} \neq 2$        $x_2 = 1$  sí es solución ya que  $\sqrt{1} + \sqrt{3 \cdot 1 - 2} = 2$

## F) Ecuaciones logarítmicas

Dados  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a, b > 0$ ,  $a \neq 1$ , se llama **logaritmo en base a de b** al número al que hay que elevar **a** para obtener **b**. Se representa por  $\log_a b$ .

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

Si la **base** del logaritmo es el **número 10**, entonces el logaritmo se llama **decimal**. Se representa por **log x**. El número 10 no se escribe.

Si la **base** del logaritmo es el **número e = 2,71828...**, entonces el logaritmo se llama **neperiano**. Se representa por **ln x** ó también por **Lx**.

Una **ecuación logarítmica** es aquella en la que la incógnita se encuentra bajo la influencia de algún logaritmo.

En una ecuación logarítmica del tipo  $\log_a (E(x)) = L$ , donde L es un número real y E(x) es una expresión que depende de x, hay que aplicar la definición de logaritmo para obtener la ecuación equivalente  $E(x) = a^L$ , una ecuación que hay que resolver.

Finalmente, hay que revisar todas las soluciones ya que solo tienen sentido los logaritmos de números positivos.

Ejemplo 1: resolver la ecuación  $\log(50 \cdot x) = 3$

$$\log(50 \cdot x) = 3 \Rightarrow 50 \cdot x = 10^3 \Rightarrow x = \frac{1000}{50} \Rightarrow x = 20$$

Ejemplo 2: resolver la ecuación  $\log\left(\frac{x^2}{4}\right) = 2$

$$\log\left(\frac{x^2}{4}\right) = 2 \Rightarrow \frac{x^2}{4} = 10^2 \Rightarrow x^2 = 400 \Rightarrow x = \pm\sqrt{400} \Rightarrow x = \pm 20$$

La solución  $x = -20$  se rechaza ya que no existe el logaritmo de un número negativo.

## G) Ecuaciones exponenciales

Una **ecuación exponencial** es aquella en la que la incógnita aparece en el exponente de alguna potencia.

**Caso 1. Ecuaciones en las que los dos miembros de la igualdad se pueden expresar como potencias de la misma base.**

Ejemplo 1: resolver la ecuación  $5^{x^2-5x+8} = 25$

$$5^{x^2-5x+8} = 5^2 \Rightarrow x^2 - 5x + 8 = 2 \Rightarrow x^2 - 5x + 8 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\ x_2 = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \end{array} \right.$$

Ejemplo 2: para resolver la ecuación  $3^{1-x^2} = \frac{1}{27}$ , se hace lo siguiente:

$$3^{1-x^2} = \frac{1}{3^3} \Rightarrow 3^{1-x^2} = 3^{-3} \Rightarrow 1-x^2 = -3 \Rightarrow 1+3 = x^2 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = +2 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

Ejemplo 3: para resolver la ecuación  $2^{3x-1} = 4^{x+3}$ , se hace lo siguiente:

$$2^{3x-1} = (2^2)^{x+3} \Rightarrow 2^{3x-1} = 2^{2x+6} \Rightarrow 3x-1 = 2x+6 \Rightarrow 3x-2x = +6+1 \Rightarrow x = 7$$

## Caso 2. Ecuaciones en las que hay que aplicar un cambio de variable.

Ejemplo 1: para resolver la ecuación  $4^x + 3 \cdot 2^x = 10$ , se hace lo siguiente:

$$2^{2x} + 3 \cdot 2^x - 10 = 0 \Rightarrow \begin{cases} (2^x)^2 + 3 \cdot 2^x - 10 = 0 \\ 2^x = A \end{cases} \Rightarrow A^2 + 3A - 10 = 0 \Rightarrow \begin{cases} A_1 = 2 \\ A_2 = -5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2^x = 2 \Rightarrow x = 1 \\ 2^x = -5 \text{ Sin solución} \end{cases}$$

Ejemplo 2: para resolver la ecuación  $2^x - 2^{2-x} = -3$ , se hace lo siguiente:

$$2^x - \frac{2^2}{2^x} = -3 \Rightarrow \begin{cases} 2^x - \frac{4}{2^x} = -3 \\ 2^x = A \end{cases} \Rightarrow A - \frac{4}{A} = -3 \Rightarrow \begin{cases} A_1 = 1 \\ A_2 = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x = 1 \Rightarrow x = 0 \\ 2^x = -4 \text{ Sin solución} \end{cases}$$

## Caso 3. Ecuaciones en las que los dos miembros de la igualdad no se pueden expresar como potencias de la misma base.

Para resolverlas, se aplica la definición de logaritmo para despejar la expresión exponencial donde se encuentra la incógnita. Tras esto, se despeja la incógnita y se utiliza una calculadora científica para calcular su valor de forma aproximada.

Ejemplo 1: para resolver la ecuación  $5^{x+2} = 50$ , se hace lo siguiente:

$$5^{x+2} = 50 \Rightarrow x+2 = \log_5 50 \Rightarrow x = \log_5 50 - 2 \Rightarrow x \cong 0,43$$

Ejemplo 2: para resolver la ecuación  $3^{1-x^2} = 2$ , se hace lo siguiente:

$$3^{1-x^2} = 2 \Rightarrow 1-x^2 = \log_3 2 \Rightarrow x^2 = 1 - \log_3 2 \Rightarrow x = \pm \sqrt{1 - \log_3 2} \Rightarrow x \cong \pm 0,37$$

Ejemplo 3: para resolver la ecuación  $e^{4x-5} = 12$ , se hace lo siguiente:

$$e^{4x-5} = 12 \Rightarrow 4x-5 = \ln 12 \Rightarrow x = \frac{\ln 12 + 5}{4} \Rightarrow x \cong 1,87$$

## 2. Sistemas de ecuaciones lineales. Método de Gauss.

Un **sistema de 3 ecuaciones lineales con 3 incógnitas** es un conjunto de expresiones de la forma

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y + a_{13} \cdot z = b_1 \\ a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y + a_{23} \cdot z = b_2 \\ a_{31} \cdot x + a_{32} \cdot y + a_{33} \cdot z = b_3 \end{cases}$$

donde:  $a_{ij}$  son números reales llamados **coeficientes** del sistema.

$b_1, b_2, b_3$  son números reales llamados **términos independientes**.

$x, y, z$  son las **incógnitas** del sistema.

Según el número de soluciones del sistema, éste puede ser:

- Compatible determinado, si tiene una sola solución.
- Incompatible, si no tiene solución.
- Compatible, indeterminado si tiene infinitas soluciones.

Para resolver un sistema lineal de **dos** ecuaciones con **dos** incógnitas se suele utilizar alguno de los siguientes métodos ya conocidos: **sustitución**, **igualación** o **reducción**. En cambio, si el sistema tiene **tres o más** ecuaciones lineales con **tres o más** incógnitas, se suele utilizar el **Método de Gauss**.

Con el método de Gauss, se puede clasificar y resolver al mismo tiempo cualquier sistema. Básicamente, consiste en transformar el sistema en otro equivalente con forma **triangular** (o **escalonada**) mediante **transformaciones elementales**, que son las dos reglas siguientes:

1. Si se multiplican (dividen) los dos miembros de una ecuación de un sistema por un número real distinto de cero, resulta otro sistema equivalente al dado.
2. Si a una ecuación de un sistema se le suma (resta) otra ecuación del mismo, resulta un sistema equivalente al dado.

Ejemplo: para resolver por el método de Gauss el sistema 
$$\begin{cases} 2x + y - z = -3 \\ x - 2y + 2z = 1 \\ 2x + y + z = 5 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & -5 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & -5 \\ 0 & 5 & -3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \div 5} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Una vez triangulada la matriz ampliada, se observa que el número de ecuaciones (3) coincide con el número de incógnitas (3).

Por lo tanto, el sistema es compatible determinado y es equivalente al sistema 
$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 1 \\ y - z = -1 \\ 2z = 8 \end{cases}$$

$$E_3 \equiv 2z = 8 \Rightarrow z = 4 \quad E_2 \equiv y - z = -1 \Rightarrow y = 3 \quad E_1 \equiv x - 2y + 2z = 1 \Rightarrow x = -1$$

Por lo tanto, la única solución del sistema es  $\{ x = -1, y = 3, z = 4 \}$

### 3. Otros sistemas de ecuaciones.

#### **A) Sistemas no lineales**

Un **sistema de ecuaciones es no lineal** si al menos una de las ecuaciones no es de la forma  $ax + by = c$ .

En un sistema no lineal, alguna de las incógnitas puede estar elevada a una potencia, las incógnitas pueden estar multiplicando o dividiendo entre sí, alguna de las incógnitas puede encontrarse bajo la influencia de una raíz cuadrada, etc.

La mayoría de los sistemas no lineales se pueden resolver por el método de **sustitución**.

Ejemplo: resolver el sistema 
$$\begin{cases} 3x^2 - 2y = 9 \\ 5x - y = -2 \end{cases}$$

Se despeja  $y = 5x + 2$  de la 2ª ecuación

Se sustituye  $y = 5x + 2$  en la 1ª ecuación:

$$3x^2 - 2 \cdot (5x + 2) = 9 \Rightarrow 3x^2 - 10x - 4 = 9 \Rightarrow 3x^2 - 10x - 13 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-13)}}{2 \cdot 3} = \frac{10 \pm \sqrt{100 + 156}}{6} = \frac{10 \pm 16}{6} \begin{cases} x_1 = \frac{10 + 16}{6} = \frac{13}{3} \\ x_2 = \frac{10 - 16}{6} = -1 \end{cases}$$

$$\text{-- Si } x_1 = \frac{13}{3}, \text{ entonces } y_1 = 5 \cdot \frac{13}{3} + 2 = \frac{71}{3}$$

$$\text{-- Si } x_2 = -1, \text{ entonces } y_2 = 5 \cdot (-1) + 2 = -3$$

Por lo tanto, las soluciones del sistema son  $\{x_1 = \frac{13}{3}, y_1 = \frac{71}{3}\}; \{x_2 = -1, y_2 = -3\}$

#### **B) Sistemas logarítmicos**

Un **sistema logarítmico** es aquel en el que alguna de las ecuaciones tiene alguna incógnita bajo la influencia de algún logaritmo. Al igual que en las ecuaciones logarítmica, su resolución se basa en la correcta aplicación de la definición de logaritmo.

Ejemplo: resolver el sistema 
$$\begin{cases} \log(x^2 \cdot y) = 1 \\ \log(x \cdot y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log(x^2 \cdot y) = 1 \\ \log(x \cdot y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 \cdot y = 10^1 \\ x \cdot y = 10^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 \cdot y = 10 \\ x \cdot y = 1 \end{cases}$$

El sistema obtenido 
$$\begin{cases} x^2 \cdot y = 10 \\ x \cdot y = 1 \end{cases}$$
 es un sistema no lineal equivalente al sistema inicial. Se

puede resolver por sustitución, obteniéndose como solución  $\{x = 10, y = \frac{1}{10}\}$

### C) Sistemas exponenciales

Un **sistema exponencial** es aquel en el que alguna de las incógnitas se encuentra en algún exponente.

**Caso 1. Sistemas en cuyas ecuaciones los dos miembros de la igualdad se pueden expresar como potencias de la misma base.**

Ejemplo: para resolver el sistema 
$$\begin{cases} 5^x \cdot 5^y = 25 \\ \frac{3^y}{3^x} = 81 \end{cases}, \text{ se hace } \begin{cases} 5^{x+y} = 5^2 \\ 3^{y-x} = 3^4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ y-x=4 \end{cases}$$

De esta forma, el sistema obtenido 
$$\begin{cases} x+y=2 \\ y-x=4 \end{cases}$$
 es un sistema lineal equivalente al sistema inicial, cuya solución es  $\{x = -1, y = 3\}$

**Caso 2. Sistemas en cuyas ecuaciones hay que aplicar un cambio de variable.**

En general, para resolver un sistema exponencial, se procede de la siguiente forma:

**Paso 1.** Se hacen los cambios de variable:  $a^x = A$ ,  $b^y = B$

**Paso 2.** Se resuelve el sistema resultante en las incógnitas A y B.

**Paso 3.** Se despejan las incógnitas  $x$  e  $y$  deshaciendo los cambios de variable iniciales, si fuera necesario, aplicando la definición de logaritmo y utilizando una calculadora científica para el cálculo final.

$$x = \log_a A \quad y = \log_b B$$

Ejemplo: para resolver el sistema 
$$\begin{cases} 2^{x-1} + 3^{2y} = 11 \\ 2^x - 3^{y+1} = -5 \end{cases}, \text{ se escribe como } \begin{cases} \frac{2^x}{2} + (3^y)^2 = 11 \\ 2^x - 3 \cdot 3^y = -5 \end{cases}$$

Se hacen los cambios  $2^x = A$   $3^y = B$ , obteniéndose el sistema 
$$\begin{cases} \frac{A}{2} + B^2 = 11 \\ A - 3 \cdot B = -5 \end{cases}$$

cuyas soluciones son  $\{A = 4, B = 3\}$  y  $\{A = -37/2, B = -9/2\}$

Finalmente se despejan las incógnitas  $x$  e  $y$  deshaciendo los cambios de variable:

$$\begin{aligned} 2^x = 4 &\Rightarrow x = 2 \\ 3^y = 3 &\Rightarrow y = 1 \end{aligned} \Rightarrow \text{La única solución del sistema es } \{x = 2, y = 1\} \text{ porque}$$

$$\begin{aligned} 2^x = -37/2 \\ 3^y = -9/2 \end{aligned} \Rightarrow \text{No aporta solución}$$

### 4. Resolución de inecuaciones.

#### A) Inecuaciones de primer grado

Una **inecuación de primer grado con una incógnita** es una desigualdad algebraica en la que interviene una sola **incógnita**, elevada a uno. Se llama **solución** de la inecuación al conjunto de números que sustituidos cada uno de ellos en el lugar de la incógnita, verifican la desigualdad.

Ejemplo 1:  $x = -2$  es solución de la inecuación  $3x + 1 < x + 5$  porque  $3 \cdot (-2) + 1 < -2 + 5$

Ejemplo 2:  $x = 3$  no es solución de la inecuación  $3x + 1 < x + 5$  porque  $3 \cdot 3 + 1 > 3 + 5$

Para resolver una inecuación de primer grado con una incógnita, se aplican los mismos pasos que en las ecuaciones de primer grado, llegándose finalmente a una de estas cuatro situaciones:

$$ax < b \quad ax > b \quad ax \leq b \quad ax \geq b \quad \text{donde } a, b \in \mathbb{R}, \text{ siendo } a \neq 0$$

Es en este momento cuando se aplica el siguiente paso que las distingue de las ecuaciones:

**Caso 1:** si  $a > 0$ , se despeja  $x$  dividiendo  $b$  entre  $a$ .

**Caso 2:** si  $a < 0$ , se cambian de signo los valores  $a$  y  $b$  al mismo tiempo que se invierte el sentido de la desigualdad. Después de esto, se despeja  $x$  como en el caso 1.

Si una inecuación de primer grado con una incógnita tiene **solución**, ésta siempre es un **intervalo infinito de números reales (semirrecta)**.

**Ejemplo:** resolver la inecuación  $\frac{x}{2} - \frac{2(x-3)}{3} + \frac{x}{6} - 1 > 2x + 3$

Paso 1.  $\frac{x}{2} - \frac{2x-6}{3} + \frac{x}{6} - \frac{1}{1} > \frac{2x+3}{1}$

Paso 2. m.c.m.(2, 3, 6) = 6 ;  $\frac{3x}{6} - \frac{4x-12}{6} + \frac{x}{6} - \frac{6}{6} > \frac{12x+18}{6}$  ;  $3x - 4x + 12 + x - 6 > 12x + 18$

Paso 3.  $3x - 4x + x - 12x > +18 - 12 + 6$

Paso 4.  $-12x > +12$  ;  $+12x < -12$  ;  $x < \frac{-12}{+12}$  ;  $x < -1$  La **solución** es el intervalo  $(-\infty, -1)$

## B) Inecuaciones de segundo grado

Una **inecuación de segundo grado con una incógnita** es una desigualdad algebraica en la que interviene una sola **incógnita**, elevada a dos.

Se llama **solución** de la inecuación al conjunto de números que sustituidos cada uno de ellos en el lugar de la incógnita, verifican la desigualdad.

Para resolver una inecuación de segundo grado con una incógnita, se aplica el siguiente método:

**Paso 1.** Se aplican los pasos necesarios para llegar finalmente a una de estas 4 situaciones:

$$ax^2 + bx + c > 0 \quad ax^2 + bx + c \geq 0 \quad ax^2 + bx + c < 0 \quad ax^2 + bx + c \leq 0$$

donde  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , siendo  $a \neq 0$

**Paso 2.** Se averiguan las soluciones de la ecuación  $ax^2 + bx + c = 0$

**Paso 3.** Se señalan en la recta real las soluciones obtenidas y se analiza el signo del polinomio  $ax^2 + bx + c$  en cada uno de los intervalos resultantes.

**Paso 4.** La solución es el intervalo o unión de intervalos donde el polinomio  $ax^2 + bx + c$  tiene el mismo signo que indica la desigualdad de la inecuación.

El intervalo (o intervalos) de la solución es (o son) cerrado(s) si la desigualdad es  $\geq$  ó  $\leq$

El intervalo (o intervalos) de la solución es (o son) abierto(s) si la desigualdad es  $>$  ó  $<$

**Ejemplo 1:** para resolver la inecuación  $x^2 + 2x - 8 > 0$ , se averiguan las soluciones de la ecuación  $x^2 + 2x - 8 = 0$ , que son  $x_1 = -4$ ,  $x_2 = +2$

| Inecuación         | Signo del polinomio $x^2 + 2x - 8$ en |           |                | La solución de la inecuación es   |
|--------------------|---------------------------------------|-----------|----------------|-----------------------------------|
|                    | $(-\infty, -4)$                       | $(-4, 2)$ | $(2, +\infty)$ |                                   |
| $x^2 + 2x - 8 > 0$ | +                                     | -         | +              | $(-\infty, -4) \cup (2, +\infty)$ |

**Ejemplo 2:** para resolver la inecuación  $-x^2 + 2x + 3 \geq 0$ , se averiguan las soluciones de la ecuación  $-x^2 + 2x + 3 = 0$ , que son  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = +3$

| Inecuación             | Signo del polinomio $-x^2 + 2x + 3$ en |           |                | La solución de la inecuación es |
|------------------------|----------------------------------------|-----------|----------------|---------------------------------|
|                        | $(-\infty, -1)$                        | $(-1, 3)$ | $(3, +\infty)$ |                                 |
| $-x^2 + 2x + 3 \geq 0$ | -                                      | +         | -              | $[-1, 3]$                       |

### C) Inecuaciones racionales

Una **inecuación racional con una incógnita** es una desigualdad algebraica en la que aparecen fracciones algebraicas, es decir, la incógnita aparece en algún denominador.

Para resolver una inecuación racional con una incógnita, se aplica el siguiente método:

**Paso 1.** Se aplican los pasos necesarios para llegar finalmente a una de estas 4 situaciones:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \qquad \frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0 \qquad \frac{P(x)}{Q(x)} < 0 \qquad \frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$$

donde  $P(x)$  y  $Q(x)$  son polinomios.

**Paso 2.** Se averiguan las soluciones de las ecuaciones  $P(x) = 0$  y  $Q(x) = 0$ , respectivamente.

**Paso 3.** Se señalan en la recta real las soluciones obtenidas y se analiza el signo de la fracción  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  en cada uno de los intervalos resultantes.

**Paso 4.** La solución es el intervalo o unión de intervalos donde la fracción  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  tiene el mismo signo que indica la desigualdad de la inecuación.

El intervalo (o intervalos) de la solución es (o son) cerrado(s) en los valores que anulan al numerador  $P(x)$  si la desigualdad es  $\geq$  ó  $\leq$

El intervalo (o intervalos) de la solución es (o son) abierto(s) en los valores que anulan al numerador  $P(x)$  si la desigualdad es  $>$  ó  $<$

Por otra parte, independientemente de la desigualdad que aparezca en la inecuación, siempre hay que excluir de la solución aquellos valores que anulan al denominador  $Q(x)$ .

**Ejemplo 1:** para resolver la inecuación  $\frac{x^2 - 1}{x + 3} \geq 0$ , se resuelven las ecuaciones  $x^2 - 1 = 0$ , cuyas soluciones son  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = -1$  y la ecuación  $x + 3 = 0$ , cuya solución es  $x_3 = -3$

| Inecuación                     | Signo de la fracción $\frac{x^2 - 1}{x + 3}$ en |            |           |                | La solución de la inecuación es |
|--------------------------------|-------------------------------------------------|------------|-----------|----------------|---------------------------------|
|                                | $(-\infty, -3)$                                 | $(-3, -1)$ | $(-1, 1)$ | $(1, +\infty)$ |                                 |
| $\frac{x^2 - 1}{x + 3} \geq 0$ | -                                               | +          | -         | +              | $(-3, -1] \cup [1, +\infty)$    |

**Ejemplo 2:** para resolver la inecuación  $\frac{4}{3-x} \leq 1$ , se transforma en la expresión  $\frac{1+x}{3-x} \leq 0$ .

$$\frac{4}{3-x} \leq 1 \Rightarrow \frac{4}{3-x} - 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{4-(3-x)}{3-x} \leq 0 \Rightarrow \frac{1+x}{3-x} \leq 0$$

Tras esto, se resuelven las ecuaciones  $1+x=0$ , cuya solución es  $x_1=-1$  y la ecuación  $3-x=0$ , cuya solución es  $x_2=3$

| Inecuación               | Signo de la fracción $\frac{1+x}{3-x}$ en |           |                | La solución de la inecuación es   |
|--------------------------|-------------------------------------------|-----------|----------------|-----------------------------------|
|                          | $(-\infty, -1)$                           | $(-1, 3)$ | $(3, +\infty)$ |                                   |
| $\frac{1+x}{3-x} \leq 0$ | -                                         | +         | -              | $(-\infty, -1] \cup (3, +\infty)$ |

## D) Inecuaciones con valor absoluto

El subconjunto de números reales que cumplen una **desigualdad** en la que aparece un **valor absoluto**, puede expresarse o bien como **un intervalo acotado** (abierto o cerrado) o bien como **una unión de intervalos infinitos** (abiertos o cerrados en uno de los extremos) de la recta numérica.

**Caso 1 Abierto**  $|x-c| < a \Leftrightarrow -a < x-c < a \Leftrightarrow -a+c < x < a+c \Leftrightarrow x \in (-a+c, a+c)$

**Ejemplo:** ¿Qué valores de  $x$  cumplen la desigualdad  $|x-4| < 7$ ?

$$|x-4| < 7 \Leftrightarrow -7 < x-4 < 7 \Leftrightarrow -7+4 < x < 7+4 \Leftrightarrow x \in (-3, 11)$$

**Caso 2 Abierto**  $|x-c| > a \Leftrightarrow x < -a+c \text{ ó } x > a+c \Leftrightarrow x \in (-\infty, -a+c) \cup (a+c, +\infty)$

**Ejemplo:** ¿Qué valores de  $x$  cumplen la desigualdad  $|x-4| > 7$ ?

$$|x-4| > 7 \Leftrightarrow x-4 < -7 \text{ ó } x-4 > 7 \Leftrightarrow x < -7+4 \text{ ó } x > 7+4 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -3) \cup (11, +\infty)$$

Los otros dos casos son análogos

**Caso 1 Cerrado**  $|x-c| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x-c \leq a \Leftrightarrow -a+c \leq x \leq a+c \Leftrightarrow x \in [-a+c, a+c]$

**Ejemplo:** ¿Qué valores de  $x$  cumplen la desigualdad  $|x+2| \leq 10$ ?

$$|x+2| \leq 10 \Leftrightarrow -10 \leq x+2 \leq 10 \Leftrightarrow -10-2 \leq x \leq 10-2 \Leftrightarrow x \in [-12, 8]$$

**Caso 2 Cerrado**  $|x-c| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a+c \text{ ó } x \geq a+c \Leftrightarrow x \in (-\infty, -a+c] \cup [a+c, +\infty)$

**Ejemplo:** ¿Qué valores de  $x$  cumplen la desigualdad  $|x+2| \geq 10$ ?

$$|x+2| \geq 10 \Leftrightarrow x+2 \leq -10 \text{ ó } x+2 \geq 10 \Leftrightarrow x \leq -10-2 \text{ ó } x \geq 10-2 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -12] \cup [8, +\infty)$$

## 5. Sistemas de inecuaciones con una incógnita.

Para resolver un sistema se resuelve cada inecuación por separado, dando lugar a varios intervalos distintos cuya intersección es la solución del sistema.

Es decir, la solución del sistema es el conjunto de números reales que se encuentran a la vez en cada uno de los intervalos resultantes de resolver cada inecuación por separado.

La solución de un sistema puede ser un **intervalo acotado**, una **semirrecta** (intervalo infinito por uno de los extremos), un **único número real** o el **conjunto vacío** (sin solución).

Ejemplo 1: para resolver el sistema  $\begin{cases} 2x + 4 \geq \frac{x-1}{2} \\ -3x + 5 > -2 + 4x \end{cases}$ , se hace lo siguiente:

Se resuelve la inecuación  $2x + 4 \geq \frac{x-1}{2}$ , cuya solución es el intervalo  $[-3, +\infty)$

Se resuelve la inecuación  $-3x + 5 > -2 + 4x$ , cuya solución es el intervalo  $(-\infty, 1)$

Ahora se averigua la parte común a los dos intervalos:  $[-3, +\infty) \cap (-\infty, 1) = [-3, 1)$

La **solución** del sistema es el intervalo  $[-3, 1)$

Ejemplo 2: para resolver el sistema  $\begin{cases} 2x + 4 > 0 \\ \frac{x+3}{2} \leq x \end{cases}$ , se hace lo siguiente:

Se resuelve la inecuación  $2x + 4 > 0$ , cuya solución es el intervalo  $(-2, +\infty)$

Se resuelve la inecuación  $\frac{x+3}{2} \leq x$ , cuya solución es el intervalo  $[3, +\infty)$

Ahora se averigua la parte común a los dos intervalos:  $(-2, +\infty) \cap [3, +\infty) = [3, +\infty)$

La **solución** del sistema es el intervalo  $[3, +\infty)$

Ejemplo 3: para resolver el sistema  $\begin{cases} 3x + 1 \leq 4x - 1 \\ \frac{14-2x}{5} \geq x \end{cases}$ , se hace lo siguiente:

Se resuelve la inecuación  $3x + 1 \leq 4x - 1$ , cuya solución es el intervalo  $[2, +\infty)$

Se resuelve la inecuación  $\frac{14-2x}{5} \geq x$ , cuya solución es el intervalo  $(-\infty, 2]$

Ahora se averigua la parte común a los dos intervalos:  $(-\infty, 2] \cap [2, +\infty) = \{2\}$

La **solución** del sistema es un solo número,  $x = 2$

Ejemplo 4: para resolver el sistema  $\begin{cases} 3x + 1 < 4x - 1 \\ \frac{7-2x}{5} \geq x \end{cases}$ , se hace lo siguiente:

Se resuelve la inecuación  $3x + 1 < 4x - 1$ , cuya solución es el intervalo  $(2, +\infty)$

Se resuelve la inecuación  $\frac{7-2x}{5} \geq x$ , cuya solución es el intervalo  $(-\infty, 1)$

Ahora se averigua la parte común a los dos intervalos:  $(-\infty, 1) \cap (2, +\infty) = \emptyset$

El sistema **no tiene solución**.

## 6. Sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas.

Una **inecuación lineal con dos incógnitas** es una expresión cuya forma general es:

$$ax + by + c > 0 \quad ax + by + c < 0 \quad ax + by + c \geq 0 \quad ax + by + c \leq 0 \quad \text{donde } a, b, c \in \mathbb{R}$$

es decir, es una desigualdad que relaciona dos variables  $x$  e  $y$  ambas de grado uno.

La solución de la inecuación es el conjunto de pares de números que, sustituidos cada uno de ellos en el lugar de las incógnitas, verifican la desigualdad. Geométricamente, la **solución** es un conjunto de puntos que determinan un **semiplano** en el plano cartesiano.

Ejemplos:  $\{x = 3, y = 1\}$  es solución de la inecuación  $2x + y > 5$  porque  $2 \cdot 3 + 1 > 5$

También  $\{x = -1, y = 8\}$  es solución de la inecuación  $2x + y > 5$  porque  $2 \cdot (-1) + 8 > 5$

En cambio,  $\{x = 3, y = 2\}$  **no** es solución de la inecuación  $2x + y > 5$  porque  $2 \cdot 3 + 2 = 8 < 5$

Para **resolver una inecuación de primer grado con dos incógnitas**, se aplican los siguientes pasos:

**Paso 1.** Se hacen las transformaciones necesarias en la inecuación, hasta llegar finalmente a una de estas cuatro situaciones:

$$ax + by + c > 0 \quad ax + by + c < 0 \quad ax + by + c \geq 0 \quad ax + by + c \leq 0 \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

**Paso 2.** Se representa gráficamente la recta de puntos asociada a la ecuación  $ax + by + c = 0$ . Los puntos de la recta dividen al plano en dos semiplanos. Así que esta recta hace de **frontera** entre los dos semiplanos.

**Paso 3.** Se elige un punto  $P(m, n)$  cualquiera **que no esté en la recta** y se sustituyen sus coordenadas  $m$  y  $n$  en la inecuación ( $m$  en lugar de  $x$ ,  $n$  en el lugar de  $y$ ).

– Si verifican la inecuación, entonces el semiplano que **contiene al punto elegido** es el conjunto de puntos que forman la solución de la inecuación.

– Si **no verifican** la inecuación, entonces el otro semiplano (el que **no contiene al punto elegido**) es el conjunto de puntos que forman la solución de la inecuación.

### **Importante:**

Si el signo de la inecuación es  $\geq$  ó  $\leq$  entonces hay que incluir a los puntos de la recta (la frontera) en la solución. En este caso, la recta se traza de forma continua y se dice que la solución es un **semiplano cerrado**.

Por el contrario, si el signo de la inecuación es  $>$  ó  $<$  los puntos de la recta (la frontera) no se incluyen en la solución. En este caso, la recta se traza de forma discontinua y se dice que la solución es un **semiplano abierto**.

Ejemplo 1: resolver la inecuación  $2x + y \leq 2$

Primero se representa gráficamente la recta  $2x + y = 2$

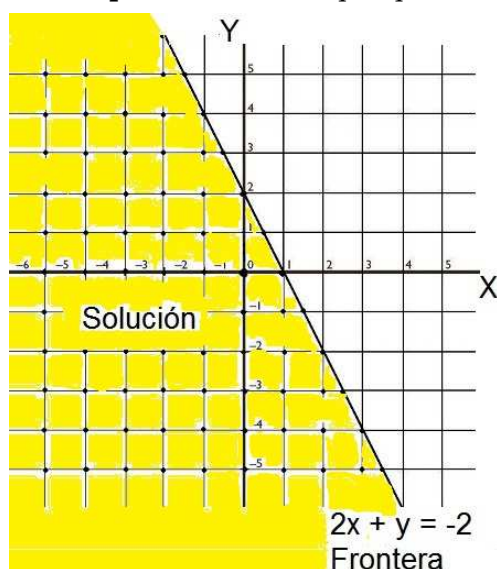
Después se elige un punto cualquiera que no esté en la recta, por ejemplo, el punto  $(0, 0)$

Se sustituyen  $x = 0, y = 0$  en  $2x + y \leq 2$  ¿  $2 \cdot 0 + 0 \leq 2 \Rightarrow 0 \leq 2$  ? SÍ

Esto implica que el semiplano solución es el que contiene al punto elegido  $(0, 0)$

Los puntos de la recta también se incluyen en la solución porque el signo de la inecuación es  $\leq$

Por lo tanto, **la solución es el semiplano cerrado** que queda a la izquierda en esta figura:



Ejemplo 2: resolver la inecuación  $x - y > 2$

Primero se representa gráficamente la recta  $x - y = 2$

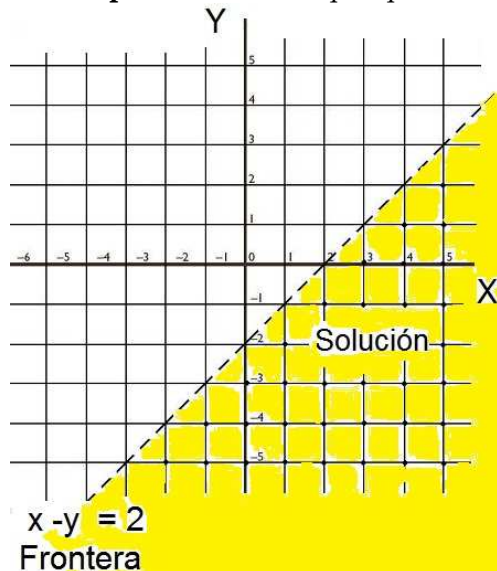
Después se elige un punto cualquiera que no esté en la recta, por ejemplo, el punto  $(0, 0)$

Se sustituyen  $x = 0, y = 0$  en  $x - y > 2$  ¿  $0 - 0 > 2 \Rightarrow 0 > 2$  ? NO

Esto implica que el semiplano solución es el que **no** contiene al punto elegido  $(0, 0)$

Los puntos de la recta **no** se incluyen en la solución porque el signo de la inecuación es  $>$

Por lo tanto, **la solución es el semiplano abierto** que queda a la derecha en la figura:



## Sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas

Un **sistema de inecuaciones lineales con dos incógnitas** es un conjunto de desigualdades que relacionan a dos variables  $x$  e  $y$  ambas de grado uno.

La **solución** del sistema es el conjunto de pares de números que, sustituidos cada uno de ellos en el lugar de las incógnitas, verifican simultáneamente todas las desigualdades a la vez. Geométricamente, la **solución del sistema** es un conjunto de puntos que determinan una región en el plano cartesiano.

Ejemplo 1:  $\{x = 1, y = -2\}$  es solución del sistema  $\begin{cases} 2x + y < 5 \\ x - 2y > 3 \end{cases}$  porque  $\begin{cases} 2 \cdot 1 + (-2) = 0 < 5 \\ 1 - 2 \cdot (-2) = 5 > 3 \end{cases}$

Ejemplo 2:  $\{x = 2, y = 3\}$  **no** es solución del sistema  $\begin{cases} 2x + y < 5 \\ x - 2y > 0 \end{cases}$  porque  $\begin{cases} 2 \cdot 2 + 3 = 7 > 5 \\ 2 - 2 \cdot 3 = -4 < 0 \end{cases}$

Para **resolver un sistema de inecuaciones lineales con dos incógnitas**, se aplican los siguientes pasos:

**Paso 1.** Se resuelven todas y cada de las inecuaciones por separado. Gráficamente, a cada inecuación le corresponde un semiplano de soluciones. Todos los semiplanos deben estar representados en un mismo sistema de coordenadas.

**Paso 2.** La **solución** del sistema está formada por todos los puntos que se encuentran en la **intersección** de todos los semiplanos representados en el paso anterior. Por lo tanto, la solución del sistema determina una región del plano, que se llama **región factible**.

En la solución final del sistema hay que incluir (o no) las fronteras de la región factible dependiendo de los signos de las respectivas inecuaciones.

Ejemplo: resolver el sistema  $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 5x + 4y < 20 \\ 2x - 5y \geq -10 \end{cases}$

Las inecuaciones  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$  indican que la región factible ha de situarse en el primer cuadrante.

El semiplano solución de  $5x + 4y < 20$  es el que contiene al punto  $(0, 0)$  ya que  $5 \cdot 0 + 4 \cdot 0 < 20$

El semiplano solución de  $2x - 5y \geq -10$  es el que contiene al punto  $(0, 0)$  ya que  $2 \cdot 0 - 5 \cdot 0 \geq -10$

Por lo tanto, la región factible o solución del sistema está formada por todos los puntos que se encuentran en el cuadrilátero señalado en la figura.

Los **vértices** de la región factible son los puntos de corte entre las rectas que la delimitan. En este ejemplo, los vértices son los puntos:

$$(0, 0) \quad (0, 2) \quad (4, 0) \quad \left(\frac{20}{11}, \frac{30}{11}\right)$$

