



ACTIVIDADES

1. Límite de una función en un punto.

1. Sobre la gráfica de la función f :

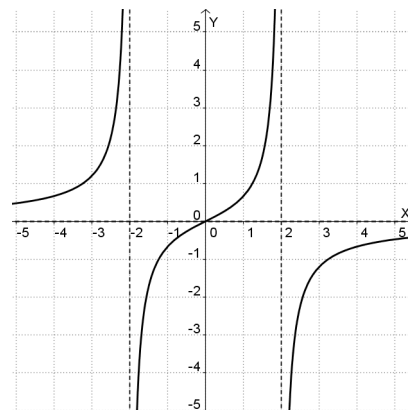
a) Indicar el valor de los límites $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$ $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$.

¿Existe el límite $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$?

b) Indicar el valor de los límites $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$.

¿Existe el límite $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$?

c) ¿Tiene asíntotas verticales? Indicar sus ecuaciones.



2. Sobre la gráfica de la función f :

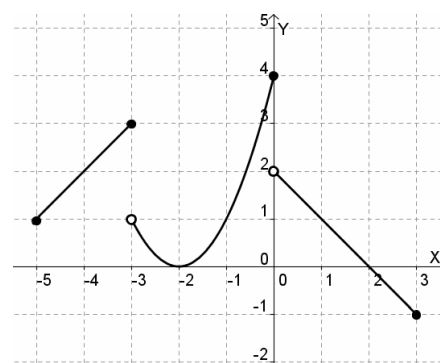
a) Indicar el valor de los límites $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x)$ $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x)$.

¿Existe el límite $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$?

b) Indicar el valor de los límites $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

¿Existe el límite $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$?

c) Indicar el valor de los límites $\lim_{x \rightarrow -5^+} f(x)$ $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$.

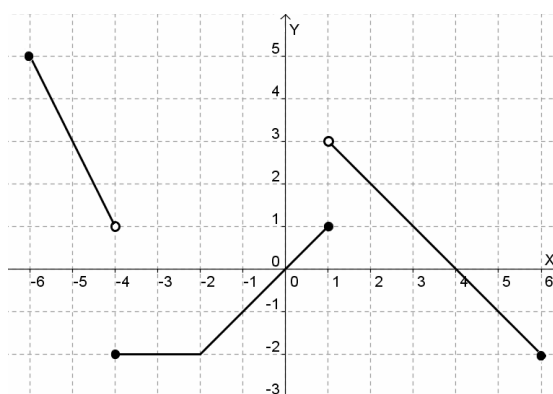


3. Sobre la gráfica de la función f , indicar:

a) $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x)$ b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ c) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

d) $f(1)$ e) $\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x)$ f) $\lim_{x \rightarrow -4^-} f(x)$

g) $f(-4)$ h) $\lim_{x \rightarrow -6^+} f(x)$



4. Utilizando una tabla de valores, averiguar el valor de los siguientes límites:

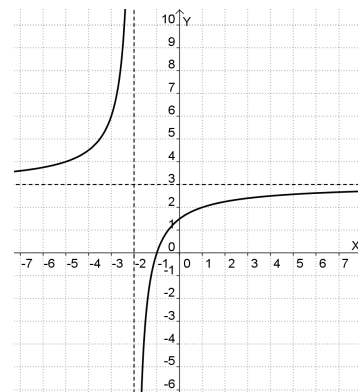
a) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - x}{x - 1}$ b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - x}{x - 1}$ c) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x}{3 - x}$ d) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x}{3 - x}$

e) A la vista de los resultados obtenidos, ¿existe $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x - 1}$? ¿existe $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x}{3 - x}$?

2. Límite de una función en el infinito.

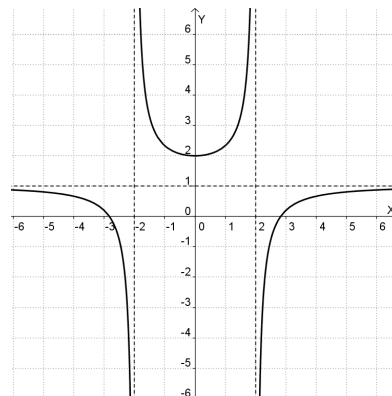
5. Sobre la gráfica de la función f :

- a) Indicar el valor del límite de f cuando $x \rightarrow -\infty$
- b) Indicar el valor del límite de f cuando $x \rightarrow +\infty$
- c) ¿Tiene asíntota horizontal? Indicar su ecuación.
- d) Indicar el valor de los límites $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$ $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$.
- e) ¿Tiene asíntota vertical? Indicar su ecuación.



6. Sobre la gráfica de la función f :

- a) Indicar el valor del límite de f cuando $x \rightarrow -\infty$
- b) Indicar el valor del límite de f cuando $x \rightarrow +\infty$
- c) ¿Tiene asíntota horizontal? Indicar su ecuación.
- d) Razonar si existe el límite de la función en $x = 0$



7. Utilizando una tabla de valores, determinar el valor de los siguientes límites:

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2}$
- b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x}$
- c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 + 5x^2$
- d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 + 7x$
- e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-1}{x+9}$
- f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-1}{x+9}$
- g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{7x+20}$
- h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{7x+20}$

3. Cálculo de límites.

8. Calcular los siguientes límites:

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{(x+1)^2}$
- b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{2}{x^2}$
- c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-x^3}$
- d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-7}{(x-1)^2}$
- e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3}{x^4}$
- f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x+x^3}$
- g) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4}{x-2}$
- h) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{4}{x-2}$
- i) $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3x}{x+1}$
- j) $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3x}{x+1}$
- k) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{5x^2}{1-x}$
- l) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{5x^2}{1-x}$

9. Calcular los siguientes límites:

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 2x$
- b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x+1}{2}$
- c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x+1$
- d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2+x}{5}$
- e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 - 2x$
- f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} -7x+1$
- g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x+1$
- h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x^2+x$
- i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 4x^3+x$
- j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-x+2}{3}$
- k) $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x^4 + \frac{x^2}{3} - x$
- l) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1-x)^2$

10. Calcular los siguientes límites:

$$\begin{array}{llll}
 \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2-x} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{2-x} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 3x - 1}{x} & \text{d) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{1-x^2} \\
 \text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x+3} & \text{f) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x}{x-2} & \text{g) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2-x}{2x+1} & \text{h) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-3x}{2-3x} \\
 \text{i) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x+3} & \text{j) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x}{x-2} & \text{k) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2-x}{2x+1} & \text{l) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-3x}{2-3x} \\
 \text{m) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{3x+1} & \text{n) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{3x+1} & \text{ñ) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2x^2}{2x^2} & \text{o) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{(x+1)^2}
 \end{array}$$

11. Calcular los siguientes límites:

$$\begin{array}{llll}
 \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x-2}{x+4}} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-1}}{x} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+4}}{x+2} & \text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+1}} \\
 \text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2}{x}} & \text{f) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{2x} & \text{g) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x+1} & \text{h) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-3}{\sqrt{x^2+3}} \\
 \text{i) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{8x+5}{2x-4}} & \text{j) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2-2}}{3x} & \text{k) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+1}} & \text{l) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{3x^2+7}}
 \end{array}$$

12. Calcular los siguientes límites:

$$\begin{array}{llll}
 \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+3} - \sqrt{x+2} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2-2x} - x & \\
 \text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^3-x^2+1} - \sqrt{x^3-x} & \text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+x} - x & \text{f) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2-2x} - \sqrt{x^2+2x} & \\
 \text{g) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+3} - \sqrt{x-3} & \text{h) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x^2+4x} & \text{i) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2-4} &
 \end{array}$$

13. Calcular los siguientes límites:

$$\begin{array}{llll}
 \text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2x-x^2} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{x^2+3x+2} & \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3+x}{x^2+x} \\
 \text{e) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^4}{x^3+x^2} & \text{f) } \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{x^2+x-6}{x^2-3x+2}} & \text{g) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-5x+6} & \text{h) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4-16}{x^2-4} \\
 \text{i) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-3x^2+8x-5}{x-1} & \text{j) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+4x-5}{x^3-1} & \text{k) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-3x+2}{x^3-2x^2-x+2} & \text{l) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-3x}{2x}
 \end{array}$$

14. Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^3+1 & \text{si } x < 1 \\ 2x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ hallar:

$$\begin{array}{lllll}
 \text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) & \text{c) } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) & \text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) & \text{e) } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)
 \end{array}$$

15. Dada la función $f(x) = \begin{cases} 2-x & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{x^2-1}{x^2-x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$ hallar:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ b) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ c) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

16. Dada la función $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+2} & \text{si } -2 \leq x \leq 1 \\ \frac{1-x^2}{3-3x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$ hallar:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ c) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

17. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{4-x}{\sqrt{13-x}-3}$ b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1-\sqrt{3-x}}{x-2}$ c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$ d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{4-\sqrt{15+x}}$
e) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$ f) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{5}} \frac{x-\sqrt{5}}{x^2-5}$ g) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+4}-3}{x^2-25}$ h) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x-2}-1}{x^2-9}$

18. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x \cdot \left(\frac{x-2}{x+1} - 1 \right)$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-2} - 1 \right) \cdot x$ c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 1 \right)$
d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1-x) \cdot \left(\frac{2x+1}{2x-3} - 1 \right)$ e) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} \right) \cdot \left(\frac{2}{x+1} - 1 \right)$ f) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} \right) \cdot \left(\frac{x+2}{2x} - 1 \right)$

4. Asíntotas de una función.

19. Para cada una de las siguientes funciones, hallar las ecuaciones de sus asíntotas y determinar la posición de la gráfica respecto de las mismas:

a) $f(x) = \frac{4x}{2x-1}$ b) $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$ c) $f(x) = \frac{4}{3-x}$ d) $f(x) = \frac{x+1}{2x+3}$
e) $f(x) = \frac{2x^2+3}{x^2-4x}$ f) $f(x) = \frac{2x+3}{3x-1}$ g) $f(x) = \frac{2x^2+1}{x^2}$ h) $f(x) = \frac{x^2+2}{x-1}$
i) $f(x) = \frac{x^2}{x+2}$ j) $f(x) = \frac{3x^2-1}{2x}$ k) $f(x) = \frac{-2x^2+3}{x+1}$ l) $f(x) = \frac{2-x^2}{x}$

20. Si el denominador de una función racional se anula en un valor de abscisa $x = c$, ¿puede afirmarse que la recta $x = c$ es una asíntota vertical de la función? Justificar la respuesta.

21. En una planta industrial, el coste **Y** de producción de un sobre (coste por unidad en euros) en función del número **X** de unidades fabricadas viene dado por la expresión

$$y = \frac{3x + 10\,000}{10x}$$

a) Completar la siguiente tabla de valores:

x = número de sobres fabricados	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000
y = coste de producción de un sobre						

b) ¿Tiene asíntota horizontal? ¿Cuál es su ecuación? ¿A qué valor se acerca el coste de producción de un sobre cuando el número de sobres fabricados aumenta cada vez más?

22. Un comercio que se dedica a la venta de camisetas al por mayor, establece el precio **Y** de venta de una camiseta (precio por unidad en euros) en función del número **X** de camisetas que se compran, de acuerdo con la siguiente expresión

$$y = \frac{4 + 5x}{x}$$

a) Completar la siguiente tabla de valores:

x = número de camisetas	1	2	4	5	10	100	1 000	10 000
y = precio de venta de una camiseta								

b) ¿Tiene asíntota horizontal? ¿Cuál es su ecuación? ¿A qué valor se acerca el precio de venta de una camiseta cuando el número de camisetas compradas aumenta cada vez más?

5. Continuidad de una función. Tipos de discontinuidad.

23. En cada uno de los siguientes apartados, analizar la continuidad de la función dada, clasificando el tipo de discontinuidad en cada caso:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } f(x) = \begin{cases} 3x-1 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{x-2} & \text{si } 0 \leq x < 4 \\ \sqrt{x} & \text{si } x \geq 4 \end{cases} & \text{b) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < 1 \\ 2x-1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} & \text{c) } f(x) = \begin{cases} |x+1| & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 & \text{si } -1 < x < 1 \\ 2x+1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \end{array}$$

24. En cada uno de los siguientes apartados, analizar la continuidad de la función dada, clasificando el tipo de discontinuidad en cada caso:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } f(x) = \begin{cases} 2-x & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{x-1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases} & \text{b) } f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & \text{si } x < -2 \\ \frac{10}{x+4} & \text{si } x \geq -2 \end{cases} & \text{c) } f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x^2-x & \text{si } 1 < x < 4 \\ |4-2x^2| & \text{si } x \geq 4 \end{cases} \\ \text{d) } f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2-x}}{x} & \text{si } x < 1 \\ 2x-1 & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ \frac{x}{4-x} & \text{si } x \geq 3 \end{cases} & \text{e) } f(x) = \begin{cases} x^2-x & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{x^2-4x+3} & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 2-x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases} & \text{f) } f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x = 0 \\ 2x+1 & \text{si } x \neq 0 \end{cases} \end{array}$$

25. En cada apartado, averiguar el valor de **k** para que **f** sea continua en todo $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } f(x) = \begin{cases} 7 - x^2 & \text{si } x < 2 \\ x + k & \text{si } x \geq 2 \end{cases} & \text{b) } f(x) = \begin{cases} 3 - \frac{x}{2} & \text{si } x < 0 \\ x^2 + k & \text{si } x \geq 0 \end{cases} & \text{c) } f(x) = \begin{cases} 1 + k & \text{si } x = 2 \\ \frac{x-2}{x^2-4} & \text{si } x \neq 2 \end{cases} \end{array}$$

26. En cada apartado, hallar el valor de **m** y **n** para que **f** sea continua en todo $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x) = \begin{cases} mx^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 3mx - n & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases} & \text{b) } f(x) = \begin{cases} \sqrt{1+x} & \text{si } x < 0 \\ mx + n & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 1 + x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases} \\ \text{c) } f(x) = \begin{cases} mx^2 - x + 5 & \text{si } x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ \frac{-1 + nx}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases} & \text{d) } f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-nx} & \text{si } x < 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \\ \sqrt{2-mx} & \text{si } x > 1 \end{cases} \end{array}$$

27. Analizar la continuidad de las siguientes funciones, clasificando el tipo de discontinuidad:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } f(x) = \frac{2x}{x^2 - 9} & \text{b) } f(x) = \frac{1}{x^2} & \text{c) } f(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \\ \text{d) } f(x) = \frac{1}{x^2 + x - 2} & \text{e) } f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} & \text{f) } f(x) = \frac{x}{x^2 - x} \end{array}$$

28. Analizar la continuidad de las siguientes funciones:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } f(x) = \sqrt{x-5} & \text{b) } f(x) = \sqrt{3-x} & \text{c) } f(x) = \sqrt{4-x^2} \\ \text{d) } f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}} & \text{e) } f(x) = \sqrt{\frac{x}{x^2-1}} & \text{f) } f(x) = \sqrt{\frac{x}{x^2+1}} \end{array}$$

6. Función exponencial.

29. Calcular los siguientes límites:

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{x+5} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^x & \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^x & \text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} 4 + e^x \\ \text{e) } \lim_{x \rightarrow -\infty} 2^{x+5} & \text{f) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^x & \text{g) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^x & \text{h) } \lim_{x \rightarrow -\infty} 4 + e^x \\ \text{i) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x^2}{x^2-1}\right)^{x+1} & \text{j) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2-1}{5x^2}\right)^{x+1} & \text{k) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x-1}{3x}\right)^x & \text{l) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x-1}{3x}\right)^x \\ \text{m) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5x-1}{4x}\right)^x & \text{n) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x-1}{4x}\right)^x & \text{ñ) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{8x+2}{3x}\right)^{x+5} & \text{o) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x+1}{8x}\right)^{x+3} \end{array}$$

30. Calcular los siguientes límites:

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x-2}{x^2} \right)^{x+1} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{8x-1}{2x} \right)^{\frac{x+1}{2x+5}} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x+1}{x} \right)^{x-1} & \text{d) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x+4}{3x} \right)^{x-2} \\ \text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{1+e^x} & \text{f) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{1+e^x} & \text{g) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{1-e^x} & \text{h) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{1-e^x} \end{array}$$

31. En cada uno de los siguientes apartados, analizar la continuidad de la función dada, clasificando el tipo de discontinuidad en cada caso:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x+1} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & \text{si } 0 < x < 2 \\ 2^{-x+1} & \text{si } x \geq 2 \end{cases} & \text{b) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3^x} & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} & \text{c) } f(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{1+e^x} & \text{si } x < 0 \\ 1+x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

7. Función logarítmica.

32. Calcular los siguientes límites:

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x & \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{1}{x} \right) & \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \left(\frac{1}{x} \right) \\ \text{e) } \lim_{x \rightarrow 1} \log x^2 & \text{f) } \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x-1) & \text{g) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \left(\frac{x^2+3x}{x} \right) & \text{h) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \log \left(\frac{10x^2}{x^2-1} \right) \\ \text{i) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(-x) & \text{j) } \lim_{x \rightarrow 2^+} \ln(x^2-4) & \text{k) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \left(\frac{x^2+x}{x} \right) & \text{l) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_2 \left(\frac{2x+1}{x+1} \right) \end{array}$$

33. Calcular los siguientes límites:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1+\ln x} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \log \left(\frac{x^2+1}{x} \right) \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1+x^2) & \text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{x+1}{x} \right) & \text{f) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{3x+2}{x+1} \right)^{\log x} \end{array}$$

34. Dada la función $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 1 \\ \ln x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ calcular:

$$\begin{array}{lllll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) & \text{c) } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) & \text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) & \text{e) } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \end{array}$$

35. En cada uno de los siguientes apartados, analizar la continuidad de la función dada, clasificando el tipo de discontinuidad en cada caso:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < 0 \\ \log x & \text{si } 1 \leq x \leq 10 \end{cases} & \text{b) } f(x) = \begin{cases} \log(x+1) & \text{si } -1 < x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

36. Dada la función $f(x) = \begin{cases} 2 + 2x - x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x-2}{x-1} & \text{si } 0 < x < 2 \\ \ln\left(\frac{2x-3}{x-1}\right) & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

a) Analizar la continuidad de la función, clasificando el tipo de discontinuidad en cada caso.

b) Calcular los siguientes límites: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

37. En cada apartado, hallar el valor de **k** para que **f** sea continua en todo $\mathbb{R}$:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ \log(kx) & \text{si } x > 1 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} \ln(k+x) & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + x & \text{si } x > 0 \end{cases}$ c) $f(x) = \begin{cases} k + x^3 & \text{si } x \leq 2 \\ \log(2x+4) & \text{si } x > 3 \end{cases}$

38. Analizar la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \ln(x-1)$ b) $f(x) = \log(x^2 - 2x)$ c) $f(x) = \log(2x - x^2)$ d) $f(x) = \ln(1 + x^2)$

SOLUCIONES

1. a) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$ No existe, porque los límites laterales no coinciden;
b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$ No existe, porque los límites laterales no coinciden;
c) Tiene una asíntota vertical en $x = -2$ y otra asíntota vertical en $x = 2$
2. a) $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = 3$ $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = 1$ No existe, porque los límites laterales no coinciden;
b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 4$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2$ No existe, porque los límites laterales no coinciden;
c) $\lim_{x \rightarrow -5^+} f(x) = 1$ $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -1$
3. a) -2; b) 3; c) 1; d) 1; e) -2; f) 1; g) -2; h) 5
4. a) 1; b) 1; c) $+\infty$; d) $-\infty$; e) Sí existe y vale 1 / No existe.
5. a) 3; b) 3; c) Sí, la recta $y = 3$; d) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$; e) Sí. La recta $x = -2$
6. a) 1; b) 1; c) $y = 1$; d) Existe y vale 2, ya que los límites laterales son ambos iguales a 2.
7. a) 0; b) 0; c) $-\infty$; d) $-\infty$; e) 3; f) 3; g) $+\infty$; h) $-\infty$
8. a) 0; b) 0; c) 0; d) 0; e) 0; f) 0; g) $+\infty$; h) $-\infty$; i) $-\infty$; j) $+\infty$; k) $-\infty$; l) $+\infty$
9. a) $+\infty$; b) $-\infty$; c) $+\infty$; d) $-\infty$; e) $+\infty$; f) $+\infty$; g) $-\infty$; h) $-\infty$; i) $+\infty$; j) $+\infty$; k) $-\infty$; l) $+\infty$
10. a) $-\infty$; b) $+\infty$; c) $+\infty$; d) 0; e) 2; f) $+\infty$; g) $-1/2$; h) 1; i) 2; j) $-\infty$; k) $-1/2$; l) 1; m) $+\infty$; n) $-\infty$; ñ) -1; o) 0
11. a) 1; b) 0; c) 1; d) 3; e) 0; f) $1/2$; g) 0; h) 2; i) 2; j) $1/3$; k) 2; l) $\sqrt{3}/3$
12. a) 0; b) $+\infty$; c) -1; d) $-\infty$; e) $1/2$; f) -2; g) 0; h) -2; i) 1
13. a) $1/2$; b) $1/2$; c) -1; d) 1; e) 0; f) $\sqrt{5}$; g) 1; h) 8; i) 2; j) 2; k) $1/3$; l) $-3/2$
14. a) 2; b) 1; c) 4; d) $+\infty$; e) $-\infty$
15. a) No existe; b) 3; c) $4/3$; d) 1; e) $+\infty$
16. a) No existe; b) $\sqrt{2}$; c) 1; d) $+\infty$; e) No existe.
17. a) 6; b) $1/2$; c) $\sqrt{2}/4$; d) 8; e) $1/4$; f) $\sqrt{5}/10$; g) $1/60$; h) $1/12$
18. a) -6; b) 0; c) 1; d) -2; e) $-1/2$; f) $-1/4$
19. a) AV $x = 1$, AH $y = 2$; b) AV $x = -2$, AH $y = 1$; c) AV $x = 3$, AH $y = 0$;
d) AV $x = -3/2$, AH $y = 1/2$; e) AV $x = 0$, $x = 4$, AH $y = 2$; f) AV $x = 1/3$, AH $y = 2/3$;
g) AV $x = 0$, AH $y = 2$; h) AV $x = 1$, AO $y = x+1$; i) AV $x = -2$, AO $y = x-2$;
j) AV $x = 0$, AO $y = 3x/2$; k) AV $x = -1$, AO $y = -2x+2$; l) AV $x = 0$, AO $y = -x$
20. No. El denominador de $f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 1}$ se anula en $x = 1$ y sin embargo, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{2}$

21. a)

x = número de sobres fabricados	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000
y = coste de producción de un sobre	100,3	10,3	1,3	0,40	0,31	0,301

b) Sí tiene asíntota horizontal, la recta de ecuación $y = 3/10$. Si $x \rightarrow +\infty$, el coste de producción de un sobre tiende a 0,30 euros.

22. a)

x = número de camisetas	1	2	4	5	10	100	1 000	10 000
y = precio de venta de una camiseta	9	7	6	5,8	5,40	5,04	5,004	5,0004

b) Sí tiene asíntota horizontal, la recta de ecuación $y = 5$. Si $x \rightarrow +\infty$, el precio de venta de una camiseta tiende a 5 euros.

23. a) Continua en $\mathbb{R} - \{0, 2\}$. Discontinuidad de salto finito en $x = 0$ y de salto infinito en $x = 2$;

b) Continua en todo $\mathbb{R} - \{0\}$. Discontinuidad de salto infinito en $x = 0$;

c) Continua en $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$. Discontinuidad de salto finito en $x = -1$ y en $x = 1$.

24. a) Continua en $\mathbb{R} - \{1\}$. Discontinuidad de salto infinito en $x = 1$;

b) Continua en todo $\mathbb{R} - \{-2\}$. Discontinuidad de salto finito en $x = -2$; c) Continua en $\mathbb{R} - \{1\}$.

Discontinuidad de salto finito en $x = 1$; d) Continua en $\mathbb{R} - \{0, 3, 4\}$. Discontinuidad de salto finito en $x = 3$ y de salto infinito en $x = 0$ y en $x = 4$; e) Continua en $\mathbb{R} - \{1\}$. Discontinuidad de salto infinito en $x = 1$; f) Continua en $\mathbb{R} - \{0\}$. Discontinuidad de salto finito en $x = 0$.

25. a) $k = 1$; b) $k = 3$; c) $k = -3/4$

26. a) $m = 1, n = 2$; b) $m = 2, n = 1$; c) $m = -1, n = 4$; d) $m = 2, n = 1$

27. a) Continua en $\mathbb{R} - \{-3, 3\}$. Discontinuidad de salto infinito en $x = 3$ y en $x = -3$;

b) Continua en todo $\mathbb{R} - \{0\}$. Discontinuidad de salto infinito en $x = 0$; c) Continua en todo $\mathbb{R}$;

d) Continua en $\mathbb{R} - \{-2, 1\}$. Discontinuidad de salto infinito en $x = 1$ y en $x = -2$;

e) Continua en $\mathbb{R} - \{2\}$. Discontinuidad evitable en $x = 2$;

f) Continua en $\mathbb{R} - \{0, 1\}$. Discontinuidad evitable en $x = 0$ y de salto infinito en $x = 1$

28. a) Continua en todo su dominio $[5, +\infty)$; b) Continua en todo su dominio $(-\infty, 3]$;

c) Continua en todo su dominio $[-2, 2]$; d) Continua en todo su dominio $(-1, +\infty)$;

e) Continua en todo su dominio $(-1, 0] \cup (1, +\infty)$; f) Continua en todo su dominio $[0, +\infty)$

29. a) $+\infty$; b) 0; c) $+\infty$; d) $+\infty$; e) 0; f) $+\infty$; g) 0; h) 4; i) $+\infty$; j) 0; k) $+\infty$; l) 0; m) 0; n) $+\infty$; ñ) $+\infty$; o) 0

30. a) 0; b) 2; c) 1; d) $1/2$; e) 0; f) 3; g) 0; h) 4

31. a) Continua en $\mathbb{R} - \{-1, 0\}$. Discontinuidad evitable en $x = -1$ y de salto infinito en $x = 0$;

b) Continua en todo $\mathbb{R}$; c) Continua en $\mathbb{R} - \{0\}$. Discontinuidad de salto finito en $x = 0$.

32. a) $+\infty$; b) $-\infty$; c) $-\infty$; d) $+\infty$; e) 0; f) $-\infty$; g) $\ln(3)$; h) 1; i) $+\infty$; j) $-\infty$; k) 0; l) 1

33. a) 0; b) $-\infty$; c) $+\infty$; d) $+\infty$; e) 0; f) 0

34. a) No existe; b) 1; c) $\ln(2)$; d) $+\infty$; e) 0

35. a) Continua en $(-\infty, 0) \cup (0, 10]$. Discontinuidad de salto finito en $x = 0$;

b) Continua en todo su dominio $(-1, +\infty)$

36. a) Continua en $\mathbb{R} - \{1\}$. Discontinuidad de salto infinito en $x = 1$;

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ln 2$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

37. a) $k = 10$; b) $k = 1$; c) $k = -7$

38. a) Continua en todo su dominio $(1, +\infty)$; b) Continua en todo su dominio $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$;

c) Continua en todo su dominio $(0, 2)$; d) Continua en todo $\mathbb{R}$