



1. Tasa de variación media de una función en un intervalo.

Dados una función $y = f(x)$ definida en un intervalo $[a, b]$, se llama **tasa de variación media de f en el intervalo $[a, b]$** al cociente

$$\text{TVM} [a, b] = \frac{\text{Variación de } y}{\text{Variación de } x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

La tasa de variación media de una función f en $[a, b]$ es una medida del cambio en promedio experimentado por la función en dicho intervalo.

En el caso particular en el que $y = f(x)$ expresa el espacio **Y** recorrido por un objeto en función del tiempo **X**, la TVM es la velocidad media del objeto durante ese intervalo de tiempo.

Ejemplo: la tasa de variación media de la función $y = f(x) = x^2$ en el intervalo $[1, 5]$ es

$$\text{TVM} [1, 5] = \frac{f(5) - f(1)}{5 - 1} = \frac{25 - 1}{5 - 1} = \frac{24}{4} = 6$$

Esto significa que, en el intervalo $[1, 5]$, la variable **Y** aumenta en promedio 6 unidades por cada unidad de **X**.

2. Derivada de una función en un punto.

Dados una función $y = f(x)$ y un valor $c \in \text{Dom}(f)$, se define la **derivada de f en $x = c$** como el límite de las tasas de variación media $\text{TVM} [c, c+h]$ cuando h tiende a cero:

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Al tomar límite cuando h tiende a cero, se van obteniendo las TVM en intervalos cuyos extremos son valores muy próximos, cada vez más próximos, infinitamente próximos.

Por este motivo, el resultado de dicho límite (la derivada de f en $x = c$) es la tasa de variación instantánea, la medida del cambio instantáneo que experimenta la función **$y = f(x)$** de forma exacta en el punto de coordenadas $(c, f(c))$.

En el caso particular en el que $y = f(x)$ expresa el **espacio Y** recorrido por un objeto en función del **tiempo X**, el valor $f'(c)$ es la **velocidad** del objeto justamente en el instante $x = c$.

Ejemplo 1: hallar la derivada de la función $f(x) = x^2 + 1$ en $x = 3$

$$f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h)^2 + 1 - (3^2 + 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{10 + h^2 + 6h - 10}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 6h}{h} = 6$$

Ejemplo 2: hallar la derivada de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ en $x = 4$

$$f'(4) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{4+h} - \frac{1}{4}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{4 - 4 - h}{4 \cdot (4+h)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{4 \cdot (4+h) \cdot h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{4 \cdot (4+h)} = \frac{-1}{16}$$

Interpretación geométrica

Geométricamente, la derivada de una función f en un punto de abscisa $x = c$ es la **pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en dicho punto**. Es decir, si dicha recta tiene por ecuación $y = mx + n$, entonces $m = f'(c)$.

De lo que se deduce que:

– Cuanto mayor (con signo positivo) sea $f'(c)$, mayor inclinación creciente tiene la recta tangente en $x = c$, luego mayor es el crecimiento de la gráfica en el punto $(c, f(c))$.

Ejemplo: si la recta tangente a la gráfica de una función f en el punto de abscisa $x = 5$, tiene por ecuación $y = 2x - 1$, entonces se deduce que $f'(5) = 2$ y que f es creciente en $x = 5$.

– Cuanto menor (con signo negativo) sea $f'(c)$, mayor inclinación decreciente tiene la recta tangente en $x = c$, luego mayor es el decrecimiento de la gráfica en el punto $(c, f(c))$.

Ejemplo: si la recta tangente a la gráfica de una función f en el punto de abscisa $x = 2$, tiene por ecuación $y = -3x + 1$, entonces se deduce que $f'(2) = -3$ y que f es decreciente en $x = 2$.

3. Función derivada.

Dada una función f , se llama **función derivada de f** a la que asocia a cada valor de x el correspondiente valor $f'(x)$. Se representa por $f'(x)$.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

El dominio de la función derivada $f'(x)$ es el conjunto de valores donde f es derivable.

Ejemplo 1: la función derivada de $f(x) = x^2$ es $f'(x) = 2x$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + h^2 + 2xh - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2xh}{h} = 2x$$

Ejemplo 2: la función derivada de $f(x) = \frac{2x+3}{x}$ es $f'(x) = -\frac{3}{x^2}$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2(x+h)+3}{x+h} - \frac{2x+3}{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{-3h}{(x+h) \cdot x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3}{(x+h) \cdot x} = -\frac{3}{x^2}$$

4. Reglas de derivación. Cálculo de funciones derivadas.

Las siguientes reglas se cumplen para cada valor de x donde dos funciones f y g sean derivables al mismo tiempo.

R1. Suma y resta de funciones $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$

R2. Producto de una función por $k \in \mathbb{R}$ $(k \cdot f)'(x) = k \cdot f'(x)$

R3. Producto de funciones $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

R4. Cociente de funciones $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$ si $g(x) \neq 0$

R5. Composición de funciones $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$ [Regla de la cadena]

TABLA DE FUNCIONES DERIVADAS

La letra **u** representa a una función que depende de variable x $u = u(x)$

ELEMENTALES	COMPUESTAS
$y = k \quad k \in \mathbb{R} \quad y' = 0$	
$y = x^n \quad n \in \mathbb{Z} \quad y' = n \cdot x^{n-1}$	$y = (u)^n \quad n \in \mathbb{Z} \quad y' = n \cdot (u)^{n-1} \cdot u'$
$y = \sqrt{x} \quad y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = \sqrt{u} \quad y' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
$y = \sqrt[n]{x} \quad n \in \mathbb{N} \quad y' = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$y = \sqrt[n]{u} \quad n \in \mathbb{N} \quad y' = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{u^{n-1}}} \cdot u'$
$y = e^x \quad y' = e^x$	$y = e^u \quad y' = e^u \cdot u'$
$y = a^x \quad a > 0 \quad y' = a^x \cdot \ln a$	$y = a^u \quad a > 0 \quad y' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$
$y = \ln x \quad y' = \frac{1}{x}$	$y = \ln u \quad y' = \frac{1}{u} \cdot u'$
$y = \log_a x \quad a > 0 \quad y' = \frac{1}{(\ln a) \cdot x}$	$y = \log_a u \quad a > 0 \quad y' = \frac{1}{(\ln a) \cdot u} \cdot u'$

5. Derivabilidad de una función en un punto. Derivadas laterales.

Se dice que una función **f** es **derivable por la derecha** en un punto de abscisa $x = c$ de su dominio si $f'_+(c) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$ es un número real.

El valor de este límite es la **derivada lateral por la derecha de f en $x = c$**

Se dice que una función **f** es **derivable por la izquierda** en un punto de abscisa $x = c$ de su dominio si $f'_-(c) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$ es un número real.

El valor de este límite es la **derivada lateral por la izquierda de f en $x = c$**

$$\boxed{f \text{ es derivable en } x = c} \Leftrightarrow \boxed{f'_+(c) \text{ y } f'_-(c) \text{ son números reales iguales}}$$

Si **f** es derivable en $x = c$, entonces $f'(c) = f'_+(c) = f'_-(c)$

Geométricamente, si una función es derivable en un punto de abscisa $x = c$, entonces su gráfica tiene un trazado "suave, sin cambios bruscos" en dicho punto.

■ Razones por las que una función no es derivable en un punto

1. Porque no sea continua en dicho punto.

Si una función es derivable en un punto, entonces es continua en dicho punto. De lo cual se deduce que **si una función no es continua en un punto, entonces no es derivable en dicho punto.**

Nota: **si una función es continua en $x = c$, no tiene por qué ser derivable en $x = c$.**

Por ejemplo, la función $f(x) = |x|$ es continua en $x = 0$ pero no es derivable en $x = 0$.

2. Porque las derivadas laterales sean números reales distintos.

Una función puede ser derivable lateralmente tanto por la izquierda como por la derecha en un punto, y sin embargo no ser derivable en dicho punto porque las derivadas laterales no sean iguales. En estos casos, la pendiente de la recta tangente a la gráfica en dicho punto "sufre un cambio brusco" y se dice que el punto es un **punto anguloso** de la función.

Por ejemplo, el punto $(0, 0)$ es un punto anguloso de la función $f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

ya que sus derivadas laterales en $x = 0$ son números reales distintos.

3. Porque alguna de las derivadas laterales sea $+\infty$ ó $-\infty$

Una función puede no ser derivable ni siquiera lateralmente en un punto porque una de las derivadas laterales sea $+\infty$ ó $-\infty$. En estos casos, la recta tangente a la gráfica en dicho punto es una recta vertical y se dice que el punto es un **punto de tangencia vertical** de la función.

Por ejemplo, el punto $(0, 0)$ es un punto de tangencia vertical de la función $f(x) = \sqrt{|x|}$ ya que su derivada lateral por la derecha en $x = 0$ es $+\infty$.

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty \quad [f'_-(0) = -\infty]$$

Análisis de la derivabilidad de una función en un punto

En la práctica, para analizar la derivabilidad de una función en un punto, se suele aplicar el siguiente resultado:

Si f es continua en $x = c$ y el $\lim_{x \rightarrow c^-} f'(x)$ es un número real	$\Rightarrow$	f es derivable por la izquierda en $x = c$ $f'_-(c) = \lim_{x \rightarrow c^-} f'(x)$
Si f es continua en $x = c$ y el $\lim_{x \rightarrow c^+} f'(x)$ es un número real	$\Rightarrow$	f es derivable por la derecha en $x = c$ $f'_+(c) = \lim_{x \rightarrow c^+} f'(x)$

Nota: la existencia e igualdad de las derivadas laterales en un punto, no garantiza que una función sea derivable en dicho punto. Recuérdese que, si una función no es continua en un punto, automáticamente no es derivable en dicho punto.

De ahí la importancia en subrayar que la aplicación de este resultado exige como **condición previa y necesaria que la función sea continua en el punto** donde se esté analizando.

Ejemplo 1: para analizar la derivabilidad de la función $f(x) = \begin{cases} 2x^3 - 5x & \text{si } x < 3 \\ x^2 + 10x & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ en $x = 3$, primero se analiza si es continua en dicho punto.

En efecto, es continua en $x = 3$ porque $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 39 = f(3)$

Ahora en lugar de calcular las derivadas laterales mediante la definición, se calcula $f'(x)$

$$f'(x) = \begin{cases} 6x^2 - 5 & \text{si } x < 3 \\ 2x + 10 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$$f'_-(3) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} 6x^2 - 5 = 49 \Rightarrow f \text{ es derivable en } x = 3 \text{ por la izquierda.}$$

$$f'_+(3) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} 2x + 10 = 16 \Rightarrow f \text{ es derivable en } x = 3 \text{ por la derecha.}$$

Sin embargo, f no es derivable en $x = 3$ ya que sus derivadas laterales son distintas.

Ejemplo 2: para analizar la derivabilidad de la función $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 8 & \text{si } x < 1 \\ 6x + 5 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ en $x = 1$, primero se analiza si es continua en dicho punto.

En efecto, es continua en $x = 1$ porque $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 11 = f(1)$

Ahora en lugar de calcular las derivadas laterales mediante la definición, se calcula $f'(x)$

$$f'(x) = \begin{cases} 6x & \text{si } x < 1 \\ 6 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 6x = 6 \Rightarrow f \text{ es derivable en } x = 1 \text{ por la izquierda.}$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 6 = 6 \Rightarrow f \text{ es derivable en } x = 1 \text{ por la derecha.}$$

La función es derivable en $x = 1$ ya que es derivable lateralmente, tanto por la izquierda como por la derecha, y sus derivadas laterales son iguales.

6. Recta tangente a una gráfica en un punto.

La ecuación de la **recta tangente** a la gráfica de $y = f(x)$ en $x = c$ es: $y - f(c) = f'(c) \cdot (x - c)$

Ejemplo: la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^3$ en $x = 2$ es $y = 12x - 16$

$$f(2) = 8 \quad f'(x) = 3x^2 \quad f'(2) = 12 \quad y - 8 = 12 \cdot (x - 2) \Rightarrow y = 12x - 16$$

Obsérvese que la derivada de una función f en un punto de abscisa $x = c$ es la **pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en dicho punto**. Es decir, si dicha recta tiene por ecuación $y = m x + n$, entonces $m = f'(c)$.

7. Monotonía en un intervalo. Extremos locales.

Una función f es **creciente** en un intervalo I si $\forall a, b \in I$, siendo $a < b$, entonces $f(a) < f(b)$

Una función f es **decreciente** en un intervalo I si $\forall a, b \in I$, siendo $a < b$, entonces $f(a) > f(b)$

Una función f es **constante** en un intervalo I si $\forall a, b \in I$, siendo $a < b$, entonces $f(a) = f(b)$

Condición suficiente de monotonía: dada una función f derivable en un intervalo I ,

– Si $f'(x) > 0 \quad \forall x \in I$, entonces f es creciente en el intervalo I

– Si $f'(x) < 0 \quad \forall x \in I$, entonces f es decreciente en el intervalo I

Ejemplo 1: para analizar la monotonía de la función $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x - 1$, se estudia el signo de su función derivada $f'(x) = x^2 - 5x + 6$

$f'(x) > 0$ en $(-\infty, 2)$ y en $(3, +\infty) \Rightarrow f$ es creciente en $(-\infty, 2)$ y en $(3, +\infty)$

$f'(x) < 0$ en $(2, 3) \Rightarrow f$ es decreciente en $(2, 3)$

Ejemplo 2: para analizar la monotonía de la función $f(x) = \frac{4 - 2x}{x - 1}$, se estudia el signo de su

función derivada $f'(x) = \frac{-2}{(x - 1)^2}$

$f'(x) < 0$ en $(-\infty, 1)$ y en $(1, +\infty) \Rightarrow f$ es decreciente en $(-\infty, 1)$ y en $(1, +\infty)$

Extremos locales

Una función f tiene un **máximo local** en un punto $(c, f(c))$ si existe un entorno de c donde **$f(c) > f(x)$** $\forall x \neq c$ perteneciente a dicho entorno.

Una función f tiene un **mínimo local** en un punto $(c, f(c))$ si existe un entorno de c donde **$f(c) < f(x)$** $\forall x \neq c$ perteneciente a dicho entorno.

Condición necesaria de extremo local: si una función f es derivable en un valor c de su dominio y tiene un extremo local en el punto $(c, f(c))$, entonces $f'(c) = 0$

Esta condición es necesaria pero no suficiente. Por ejemplo, la derivada de $f(x) = x^3$, que es la función $f'(x) = 3x^2$, se anula en $x = 0$ y sin embargo, f no tiene extremo local en $x = 0$.

Condición suficiente de extremo local para el análisis gráfico de una función:

Una función f tiene un máximo local en el punto $(c, f(c))$ si se cumplen estas tres condiciones:

$$(C1) \ f'(c) = 0 \quad (C2) \ f' > 0 \text{ a la izquierda de } x = c \quad (C3) \ f' < 0 \text{ a la derecha de } x = c$$

Una función f tiene un mínimo local en el punto $(c, f(c))$ si se cumplen estas tres condiciones:

$$(C1) \ f'(c) = 0 \quad (C2) \ f' < 0 \text{ a la izquierda de } x = c \quad (C3) \ f' > 0 \text{ a la derecha de } x = c$$

Ejemplo 1: para hallar los extremos locales de la función $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$, dado que es derivable en todo su dominio, se hallan los valores donde se anula $f'(x) = x^2 - 4x + 3$

$$f'(x) = x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 3$$

Al analizar el signo de $f'(x) = x^2 - 4x + 3$ en valores próximos a la izquierda y a la derecha de $x = 1$ y de $x = 3$, respectivamente, resulta que:

$$f' > 0 \text{ a la izquierda de } x = 1 \Rightarrow f \text{ es } \nearrow \text{ en } (-\infty, 1)$$

$$f' < 0 \text{ entre } x = 1 \text{ y } x = 3 \Rightarrow f \text{ es } \searrow \text{ en } (1, 3)$$

$$f' > 0 \text{ a la derecha de } x = 3 \Rightarrow f \text{ es } \nearrow \text{ en } (3, +\infty)$$

Por lo tanto, f tiene un máximo local en el punto $(1, 7/3)$ y un mínimo local en el punto $(3, 1)$

Ejemplo 2: para hallar los extremos locales de la función $f(x) = \frac{4-2x}{x-1}$, dado que es derivable en todo su dominio $\mathbb{R} - \{1\}$, se hallan los valores donde se anula $f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2}$

$$\text{Como } f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2} \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{1\} \Rightarrow f \text{ no tiene extremos locales}$$

Obsérvese que $f' < 0$ en todo su dominio $\mathbb{R} - \{1\} \Rightarrow f$ es $\searrow$ en $(-\infty, 1)$ y en $(1, +\infty)$

Puntos críticos de una función

Dada una función $y = f(x)$, se dice que $(c, f(c))$ es un **punto crítico** de f si ocurre alguna de estas dos situaciones:

- 1) f no es derivable en $x = c$ 2) f es derivable en $x = c$ pero $f'(c) = 0$

En consecuencia, para determinar los extremos locales de una función que no sea derivable en algún valor de su dominio, hay que analizar qué ocurre en sus puntos críticos.

Ejemplo: la función $f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ es continua pero no derivable en $x = 0$ porque las derivadas laterales en $x = 0$ no coinciden: $f'_-(0) = -1 \neq f'_+(0) = 1$

$$\text{Si } x < 0 \Rightarrow f(x) = -x \Rightarrow f'(x) = -1 \neq 0 \quad \text{Si } x > 0 \Rightarrow f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1 \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Por lo tanto, el punto $(0, 0)$ es un punto crítico. ¿Hay un extremo local en el punto $(0, 0)$?

$$f' < 0 \text{ en } (-\infty, 0) \Rightarrow f \text{ es } \searrow \text{ en } (-\infty, 0) \quad f' > 0 \text{ en } (0, +\infty) \Rightarrow f \text{ es } \nearrow \text{ en } (0, +\infty)$$

Por lo tanto, f tiene un mínimo local en el punto $(0, 0)$