1º Bachillerato — CÁLCULO VECTORIAL

Contenidos

Criterios de evaluación

- Conocer las características de un vector.
- Obtener el vector suma y el vector diferencia de dos o más vectores.
- Obtener un vector unitario de un vector.
- Expresar un vector en forma analítica.
- Descomponer un vector en sus componentes cartesianas.
- Conocer el producto de dos vectores.

1. Magnitudes escalares y vectoriales.

En Física existen magnitudes que quedan perfectamente definidas mediante un valor numérico acompañado de la unidad de medida utilizada. Estas magnitudes reciben el nombre de magnitudes **escalares**. Ejemplos de magnitudes escalares son: masa, temperatura, volumen, energía, etc..

Existe otro tipo de magnitudes, magnitudes **vectoriales**, que para tener una idea precisa de ellas no basta con conocer su valor numérico, sino que es necesario especificar su dirección y su sentido. Un ejemplo de magnitud vectorial es la fuerza. Si sobre un cuerpo actúa una fuerza de 400 N, podemos entender que el efecto que produce esa fuerza sobre ese cuerpo dependerá de la dirección y sentido de aplicación de la fuerza, y en consecuencia, se hace necesario aportar esa información además de dar el valor numérico. Otros ejemplos de magnitudes vectoriales lo podemos encontrar en la velocidad, la aceleración, la cantidad de movimiento, etc..

Las operaciones habituales de sumar, restar, etc., no pueden hacerse de la misma forma con magnitudes escalares que con vectoriales. La suma de una masa de 10 kg y otra de 6 kg siempre dará una masa total de 16 kg, pero la suma de una fuerza de 15 N y otra de 5 N dependerá de la dirección y sentido de cada una de ellas.

La forma que tiene la matemática de trabajar con magnitudes vectoriales es mediante el uso del concepto de **vector**. Un vector es un segmento rectilíneo orientado. Un vector se especifica dando una dirección, un sentido y un valor (módulo).

2. Vectores.

En la figura 1 podemos ver las tres características específicas de un vector. La parte que indica el sentido del vector se le conoce con el nombre de **extremo** del vector; por el contrario, la otra parte del segmento se le denomina **origen**. Para que dos vectores sean distintos basta con que se diferencien en una sola de esas características. Por convenio, una magnitud vectorial, o un vector, se simboliza con una letra con una flecha encima, $\vec{F}$. El módulo de un vector lo representaremos con el mismo símbolo entre dos barras verticales, $|\vec{F}|$.

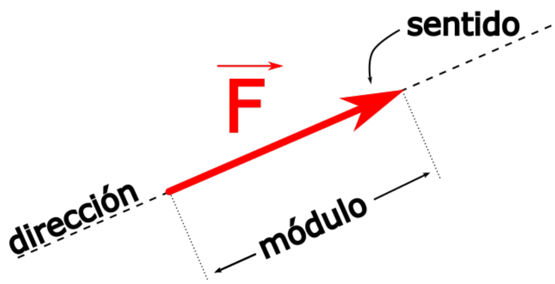

FIGURA 1

3. Operaciones con vectores.

3.1. Suma y diferencia de vectores.

Un procedimiento general para dibujar el vector suma de otros dos vectores es: 1) poner un vector a continuación del otro, sin cambiar en nada ninguno de los dos (ello supone que el extremo de uno, el primero, esté en contacto con el origen del otro, el segundo). 2) Dibujar el vector que va desde el origen del primero hasta el extremo del segundo. Dicho vector será el vector suma. En la figura 2 podemos ver el procedimiento.

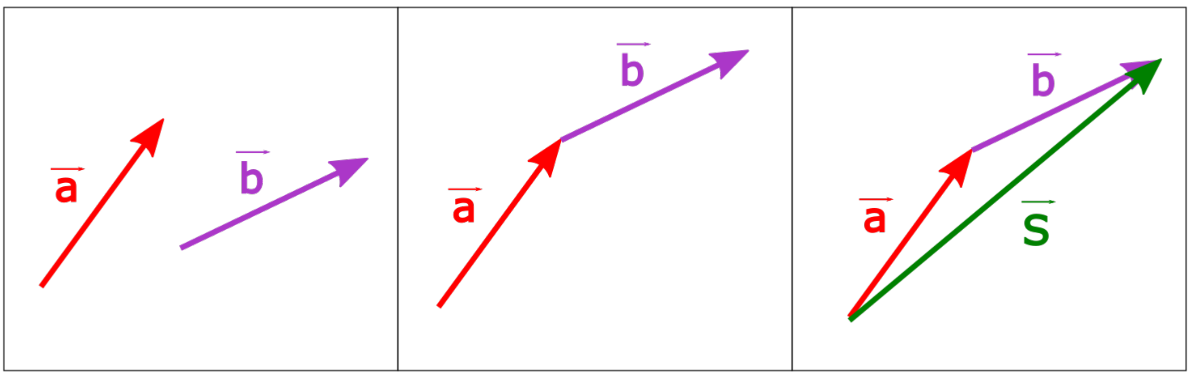

FIGURA 2

Podemos ver la explicación en el siguiente vídeo: https://youtu.be/SA0fjrQvUSk.

A.1. *Haced una propuesta general para restar dos vectores. (Podemos pensar que restar dos vectores,* $\vec{a} - \vec{b}$*, es igual que sumar* $\vec{a} + (-\vec{b})$*, y que el vector* $\vec{b}$ *tiene sentido opuesto al vector* $-\vec{b}$ *).*

3.2. Producto de un número por un vector.

Cuando un vector se multiplica un número, se obtiene otro vector cuyo módulo es igual al del primero multiplicado por el valor absoluto de ese número, y cuyo sentido es el mismo que el del primero si el número es positivo pero opuesto al del primero cuando el número es negativo.

Análogamente, lo mismo ocurre cuando un vector se divide por un número (dividir por un número n, es la misma situación que multiplicar por 1/n)

A.2. *Dado un vector* $\vec{a}$*, representa los vectores* $3\vec{a}$ *y* $-2\vec{a}$*.*

A.3. *Un vector unitario se define como aquel vector que tiene módulo igual a 1. ¿Cómo podemos obtener un vector unitario que tenga la misma dirección y sentido que un vector* $\vec{a}$*?*

4. Expresión analítica de un vector en componentes cartesianas.

Profundizaremos un poco en la matemática para buscar una forma de representar los vectores que facilite la realización de las operaciones y que nos permita hallar con precisión todas las características de los mismos.

Tendremos que tener en cuenta que todo vector puede siempre sustituirse por dos vectores perpendiculares entre sí, cuya suma nos dé el vector. Si trazamos un par de rectas perpendiculares entres sí cuya intersección pase por el origen del vector, podemos comprobar que encontrar un par de vectores perpendiculares cuya suma nos dé el vector es bastante simple (vídeo).

A los vectores anteriores se les llama **vectores componentes cartesianos** del vector.

Cuando se trabaja de esta forma es habitual utilizar unos vectores unitarios designados como $\vec{i}$ y $\vec{j}$. El vector $\vec{i}$ siempre se halla sobre el eje X en sentido positivo, mientras que el vector $\vec{j}$ siempre se encuentra sobre el eje Y en sentido positivo, tal y como se indica en la figura 3.

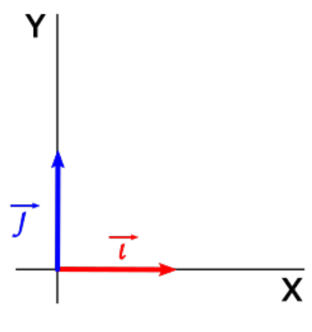

FIGURA 3

El uso de los vectores unitarios nos va a permitir expresar un vector $\vec{a}$ como el producto de su módulo por un vector unitario que tenga la dirección y sentido del vector $\vec{a}$. Por tanto:

$$\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{u}_a \quad o \quad \vec{a} = a \cdot \vec{u}_a \qquad \textbf{Vec.1}$$

en donde $\vec{u}_a$ es un vector unitario con la dirección y sentido de $\vec{a}$.

Evidentemente los vectores componentes cartesianos se podrán expresar también en función de los vectores unitarios. En este caso los vectores unitarios serán $\vec{i}$ y $\vec{j}$ (ver figura 4)

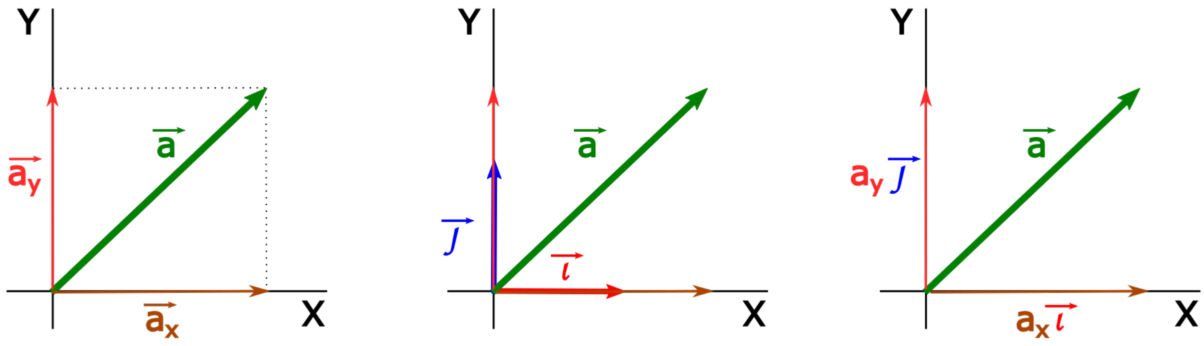

FIGURA 4

Según la figura 4, el vector se puede expresar como: $\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$. A este proceso se le conoce como expresar el vector en función de las componentes.

Si en lugar de estar representando vectores en el plano lo representásemos en el espacio nos haría falta un tercer eje, el eje Z. El vector unitario en la dirección positiva del eje Z es $\vec{k}$.

A.4. *Expresad los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ de la figura en función de sus componentes.*

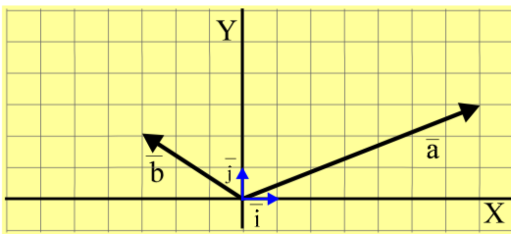

FIGURA 5

Expresar un vector en función de sus componentes escalares es otra forma de expresión de los vectores. Así, para el caso del vector $\vec{a}$ de la figura 4, se escribiría: $\vec{a} = (a_x, a_y)$.

Nos plantearemos ahora el problema de cómo hemos de proceder en general para que, conocido un vector en una de esas formas, podamos conocerlo en la otra.

Cuando se expresa un vector indicando su módulo, dirección y sentido, lo que conocemos es su longitud y los ángulos que dicho vector forma con los ejes. En general, se designa como α el ángulo que el vector forma con el semieje X positivo por el camino más corto y, análogamente, se designa como β, el que forma con el semieje Y positivo siempre por el camino más corto. A dichos

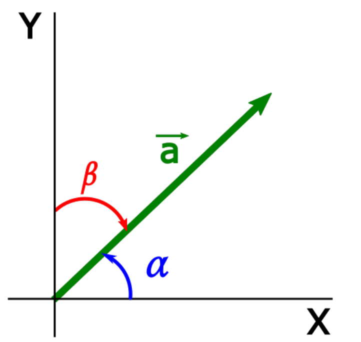

FIGURA 6

ángulos se le llaman **ángulos directores** (ver figura 6).

Para pasar a expresar el vector $\vec{a}$ de la figura 6 (del que conocemos su módulo y los ángulos directores) en función de sus componentes escalares, tendremos que tener en cuenta que:

$\cos\alpha = \dfrac{a_x}{|\vec{a}|}$ y que $\cos\beta = \dfrac{a_y}{|\vec{a}|}$ con lo que obtenemos: $a_x = |\vec{a}| \cdot \cos\alpha$ y $a_y = |\vec{a}| \cdot \cos\beta$

Evidentemente, para calcular la componente escalar sobre el eje Y podríamos haber utilizado el valor del seno del ángulo α, de manera que $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{a_y}{|\vec{a}|}$, y por tanto $a_y = |\vec{a}| \cdot \operatorname{sen}\beta$

De igual forma, si lo que conociésemos fuesen las componentes a_x y a_y, podríamos obtener el valor del módulo y de los cosenos directores. Para ello bastaría aplicar el teorema de Pitágoras y obtener: $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$. A continuación se pueden obtener los ángulos α y β de las relaciones anteriores.

Si tenemos un vector en el espacio, el módulo se calcula: $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

A.5. *En la figura 7 se conocen las componentes escalares de los vectores (en unidades arbitrarias). A partir de ellas obtened el módulo y los ángulos directores de cada uno.*

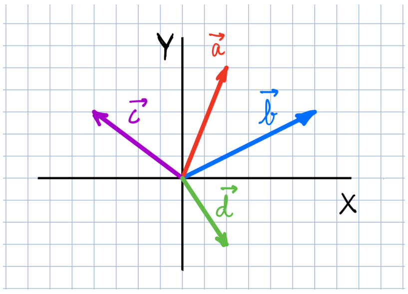

FIGURA 7

A.6. *Calcula las componentes cartesianas de un vector que tiene módulo 10 y forma un ángulo de 30º con la parte positiva del eje X.*

5. Suma de vectores expresados de forma analítica.

Para sumar vectores de forma analítica, basta con sumar sus componentes (de igual forma se realizaría la resta, la multiplicación o la división de un vector por un número).

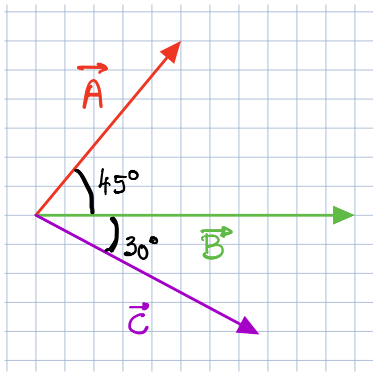

FIGURA 8

Imaginemos que queremos calcular la suma de los tres vectores que tenemos en la figura 8, siendo los módulos de los vectores A, B y C, 5,10 y 8 respectivamente.

Si no nos dan un sistema de coordenadas cartesianas al que podamos referirnos, será conveniente escoger uno tal que el cálculo de las componentes de los vectores sea lo más sencillo

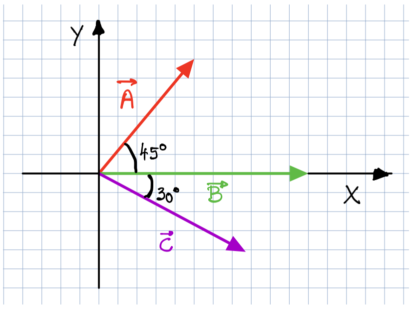

FIGURA 9

posible (lo que se puede lograr haciendo que sus ejes coincidan con el mayor número posible de vectores). Así en este caso podríamos hacer que el eje OX positivo coincida en dirección con el vector $\vec{B}$. De esta forma nos queda el siguiente esquema:

Empezaremos a descomponer el vector $\vec{A}$. La componente sobre el eje OX es $A_x = |\vec{A}| \cdot \cos 45°$; en nuestro caso, sustituyendo valores, se obtiene que A_x = 4. La componente sobre el eje OY es $A_y = |\vec{A}| \cdot \text{sen } 45°$; el valor de A_y es 4.

Podemos expresar el vector $\vec{A}$, de la siguiente manera $\vec{A} = (4{,}4)$ o bien, en función de los vectores unitarios $\vec{A} = 4\vec{i} + 4\vec{j}$.

El vector $\vec{B}$, tan solo tiene componente sobre el eje OX, y por tanto es $\vec{B} = (10{,}0)$. Si lo queremos expresar en función de los vectores unitarios, $\vec{B} = 10\vec{i}$.

Con respecto al vector $\vec{C}$, y procediendo de manera análoga al realizado por el vector $\vec{A}$, se obtiene $\vec{C} = (7, -4)$, o bien $\vec{C} = 7\vec{i} - 4\vec{j}$.

La suma de los tres vectores es $\vec{S} = (4 + 10 + 7{,}4 + 0 - 4) = (21{,}0)$; en función de los vectores unitarios, $\vec{S} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = (4\vec{i} + 4\vec{j}) + (10\vec{i}) + (7\vec{i} - 4\vec{j}) = 21\vec{i}$

6. Producto escalar de dos vectores

Se define el producto escalar de dos vectores, y se representa por $\vec{a} \cdot \vec{b}$, como un **escalar** cuyo valor es el producto de los módulos de los vectores por el coseno del ángulo que forma.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cos \alpha \qquad \textbf{Vec.2}$$

Siendo α el ángulo que forman los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

Obviamente, el producto escalar de un vector por sí mismo es el cuadrado del módulo, ya que el ángulo, en este caso es 0° y el coseno de 0° es 1.

También se desprende de la ecuación **Vec.2**, que si dos vectores son perpendiculares su producto escalar es cero.

El producto escalar de dos vectores en función de sus componentes rectangulares es:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \qquad \textbf{Vec.3}$$

A.7. *Calculad el ángulo que forman los vectores* $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ *y* $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$.

7. Producto vectorial de dos vectores

El producto vectorial de dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ da como resultado un nuevo vector con las siguientes características:

- **Módulo**: $a \cdot b \cdot \text{sen}\,\alpha$
- **Dirección**: perpendicular al plano formado por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$
- **Sentido**: el del sentido de avance de un tornillo, de rosca derecha, girando de $\vec{a}$ a $\vec{b}$ por el camino más corto.

Lo representaremos por $\vec{a} \times \vec{b}$, (también podemos encontrar $\vec{a} \wedge \vec{b}$)

El producto vectorial de dos vectores paralelos es cero.

En función de las componentes rectangulares, el producto vectorial se puede expresar como:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - b_y a_z)\vec{i} + (a_z b_x - b_z a_x)\vec{j} + (a_x b_y - b_x a_y)\vec{k} \qquad \textbf{Vec.4}$$

Para determinar el sentido del vector que resulta del producto vectorial de dos vectores nos puede ser útil lo mostrado en la figura 10. Si colocamos el dedo índice en la dirección del primer vector y el dedo corazón en la del segundo, el sentido del vector resultante vendrá dado por la dirección que marca el dedo pulgar.

El momento de una fuerza o el momento angular son ejemplos de magnitudes vectoriales.

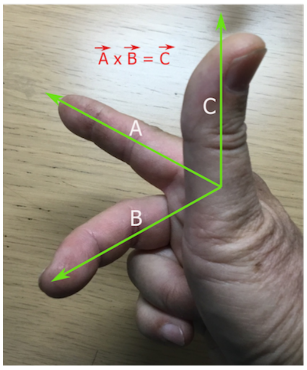

FIGURA 10

A.8. *Calculad un vector unitario que sea perpendicular al plano definido por los vectores* $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ y $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$.

8. Ejercicios y actividades.

I. Dados los siguientes vectores: $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j}$ y $\vec{c} = -4\vec{j}$, resuelve las siguientes cuestiones:

   a. Representa en un sistema de coordenadas cartesianas los tres vectores.
   b. Representa el vector $\vec{a} + \vec{b}$.
   c. Representa el vector $\vec{a} - \vec{b}$.
   d. Calcula el módulo del vector que se obtiene de la siguiente operación: $2\vec{a} - \vec{b} + 5\vec{c}$.
   e. Calcula un vector unitario que tenga la misma dirección y sentido que el vector que resulta de la siguiente operación: $3\vec{a} + 2\vec{b}$

II. Cierto vector tiene por módulo 15 y forma 30° con el eje X. Calcula sus componentes y represéntalo en función de los vectores unitarios $\vec{i}$ y $\vec{j}$.

III. Halla la resultante (suma) de los vectores de la figura 10.

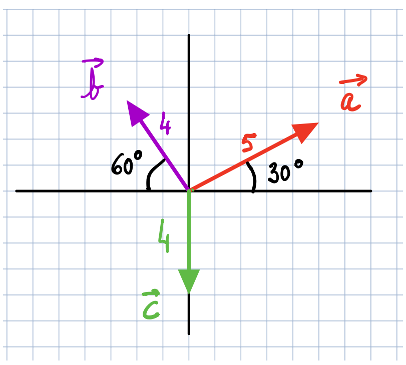

FIGURA 10

¿Qué dirección forma el vector resultante con el eje OX?

IV. Dados los vectores $\vec{a} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$ y $\vec{b}$=(0,2), calculad:

a. $\vec{a} + \vec{b}$
b. $-2\vec{a}$
c. $-\vec{b}$
d. $\vec{a} - \vec{b}$
e. $2\vec{a} - 3\vec{b}$
f. $|3\vec{a}|$
g. $|\vec{b} - \vec{a}|$
h. $\vec{u}_a$ (vector unitario)
i. $\vec{u}_b$ (vector unitario)
j. $\vec{a} \cdot \vec{b}$
k. $\vec{b} \cdot \vec{a}$
l. Ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$

V. De las siguientes parejas de vectores, ¿cuáles son perpendiculares entre sí y cuáles no?:

a. $\vec{a}$ = (-1,3) ; $\vec{b}$=(2,2/3)
b. $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j}$; $\vec{b} = -2\vec{i} - \vec{j}$

VI. Calcula m para que los siguientes vectores sean perpendiculares:

a. $\vec{a} = m\vec{i} + 2\vec{j}$ y $\vec{b} = -\vec{i} - m\vec{j}$
b. $\vec{a}$=(m,3) y $\vec{b}$=(-1,2)

Respuestas:

1. b) (3,-1); c) (1,-5); d) 28,2 ; e) (0,85 , 0,53)
2. $13\vec{i} - 7{,}5\vec{j}$
3. $\vec{R} = 2{,}3\vec{i} + 2{,}0\vec{j}$; 40,1°
4. a) (4,-1); b) (-8,6); c) (0,-2); d) (4,-5); e) (8,-12); f) 15; g) 6,4; h) (4/5,-3/5); i) (0,1); j) -6; k) -6; l) 127°
5. Los vectores perpendiculares son los del apartado a)
6. a) m = 0 ; b) m = 6