

REPASO CURSO ANTERIOR

MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

Contenidos

1. Introducción
2. El movimiento armónico simple (M.A.S.)
3. Cinemática del movimiento armónico simple.
4. Energía del movimiento armónico simple.
5. Cuestiones y problemas

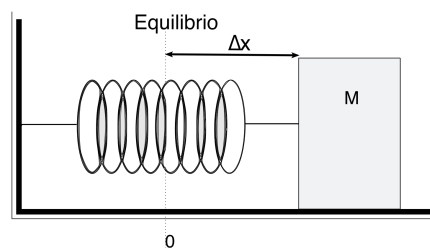
1. Introducción

Cuando un sistema, que se encuentra en equilibrio estable, se modifica su posición de equilibrio se producen oscilaciones. La característica más fácilmente reconocible es que resulta **periódico**, es decir que se repite a sí mismo. Pueden encontrarse muchos ejemplos familiares de oscilaciones: el corcho que sube y baja en un estanque, los péndulos de un reloj, las cuerdas de una guitarra, etc... Otros ejemplos, menos familiares que los anteriores, son las oscilaciones de las moléculas de aire en las ondas sonoras y las oscilaciones de las corrientes eléctricas en los aparatos de radio y televisión. Empezaremos con un movimiento vibratorio muy corriente e importante el movimiento vibratorio armónico simple o movimiento armónico simple.

2. El movimiento armónico simple (M.A.S.)

Cuando se desplaza un objeto de su posición de equilibrio, se pone en marcha un movimiento armónico simple (m.a.s.) si existe una fuerza restauradora que sea proporcional al desplazamiento. Esta condición se cumple, casi siempre, cuando es pequeña la separación de la posición de equilibrio.

Un sistema típico que presenta un m.a.s. es el de un cuerpo unido a un muelle. En el equilibrio, el muelle no ejerce fuerza alguna sobre el cuerpo. Cuando éste se ve desplazado en una cantidad Δx de su posición de equilibrio, el muelle ejerce una fuerza $k\Delta x$, que viene dada por la ley de Hooke:



$$\vec{F}_x = -K\vec{\Delta x}$$

1

El signo menos de la ley de Hooke se debe a que la fuerza tiene sentido contrario al del desplazamiento. Si escogemos como valores positivos de Δx los desplazamientos hacia la derecha, la fuerza es negativa (hacia la izquierda) cuando x es positivo, y positiva (hacia la

derecha) cuando Δx es negativo. Combinando la ecuación 1 con la segunda ley de Newton, se tiene:

$\vec{F}_x = -K\vec{\Delta x} = m\vec{a}$	2
---	----------

y por lo tanto:

$\vec{a} = -\left(\frac{K}{m}\right)\vec{\Delta x}$	3
---	----------

La aceleración es proporcional al desplazamiento y tiene sentido contrario. Esto constituye una característica general del movimiento armónico simple:

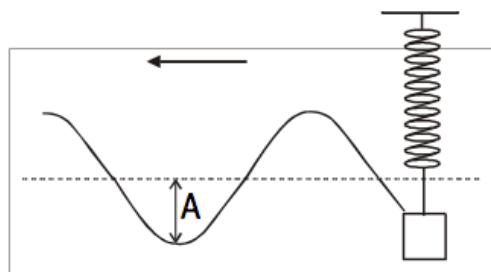
Siempre que la aceleración de un objeto es proporcional a su desplazamiento pero con sentido opuesto, el objeto se mueve con movimiento armónico simple.

Si seguimos estudiando el ejemplo propuesto, el objeto oscila en un sentido y otro, alrededor de su posición de equilibrio. El tiempo que emplea dicho objeto en realizar una oscilación completa se denomina **período, T**, cuyo inverso es la **frecuencia, f**, que es el número de oscilaciones por segundo:

$f = \frac{1}{T}$	4
-------------------	----------

La unidad de frecuencia es s^{-1} , que recibe el nombre de hertz (Hz).

Demos un paso más; para describir este movimiento debemos hallar su **ecuación de movimiento**, esto es, la función que nos indica la posición del objeto en función del tiempo. Puede obtenerse experimentalmente, por ejemplo, al sujetar un lápiz a un objeto que esté unido a un muelle vertical, situándolo de forma que pueda escribir sobre una tira de papel que tenga un movimiento perpendicular a la dirección de la oscilación, como se muestra en la figura.



Desplacemos entonces el objeto una distancia A y tiremos del papel hacia la izquierda con velocidad constante cuando soltemos el objeto. El lápiz dibujará la curva sinusoidal que se ve en la figura. La ecuación correspondiente a esta curva es:

$x = A \cos(\omega t + \delta)$	5
---------------------------------	----------

en donde A , ω y δ son constantes. Todo aquel movimiento en el que la posición varía con el tiempo de acuerdo con la ecuación 5, es por definición un movimiento armónico simple. Obsérvese que $\cos(\omega t + \delta) = \sin(\omega t + \delta + \pi/2)$. Que la expresión se exprese como una función coseno o una función seno depende simplemente del momento en que escojamos $t = 0$. El desplazamiento máximo respecto a la posición de equilibrio se denomina amplitud A . El argumento de la función coseno, $\omega t + \delta$, se denomina **fase** del movimiento y la constante δ se denomina **constante de fase**. Durante un ciclo completo del movimiento, la fase aumenta en 2π .

Al final del ciclo, el objeto tiene de nuevo la misma posición y velocidad que tenía cuando se inició el ciclo, puesto que $\cos(\omega t + \delta + 2\pi) = \cos(\omega t + \delta)$. Podemos determinar el período T a partir del hecho de que la fase en el instante $t + T$ es precisamente 2π más la fase en el instante t :

$$\omega(t + T) + \delta = 2\pi + \omega t + \delta$$

6

o lo que es lo mismo:

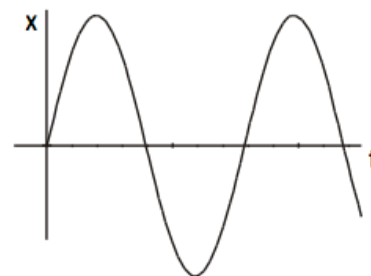
$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

7

La constante ω es la frecuencia angular, también denominada **pulsación**. Tiene como unidades radianes por segundo, las mismas unidades que la velocidad angular también designada por ω .

3. Cinemática del movimiento armónico simple.

La constante de fase δ depende de nuestra selección del instante cero. Si escogemos $t=0$ cuando $x=0$, el valor de δ puede ser o bien $\pi/2$ ó $3\pi/2$, dependiendo de si x está aumentando o disminuyendo cuando $t=0$. Por ejemplo, si x está aumentando cuando $t=0$, como se ve en la figura, $\delta = 3\pi/2$, y el valor de la posición en función del tiempo es:



$$x = A \cos(\omega t + 3\pi/2) = A \sin \omega t$$

$$x = A \cos(\omega t + \delta)$$

8

La primera derivada de x respecto al tiempo de la ecuación 8 nos proporciona la velocidad v :

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \delta)$$

9

La fase de la velocidad difiere de la que tiene la posición en $\pi/2$ rad. Cuando $\cos(\omega t + \delta)$ tiene el valor $+1$ ó -1 , $\sin(\omega t + \delta) = 0$. Así pues, cuando x tiene su valor máximo o mínimo, la velocidad es nula. Análogamente, cuando $\sin(\omega t + \delta)$ tiene el valor $+1$ ó -1 , $\cos(\omega t + \delta) = 0$. La velocidad es máxima cuando el objeto pasa por su posición de equilibrio $x=0$.

Derivando la velocidad, ecuación 9, respecto al tiempo, se obtiene la aceleración del objeto:

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \delta) = -\omega^2 x$$

10

en donde se ha hecho uso de la ecuación 8.

En el caso especial de que la constante de fase sea cero, tendremos que en el instante inicial $t=0$, el desplazamiento es máximo, la velocidad es cero y la aceleración es negativa e igual a $-\omega^2 A$. Entonces la velocidad se hace negativa cuando el objeto se mueve regresando hacia su posición de equilibrio. Cuando el objeto está en su posición de equilibrio, $x=0$, la aceleración es nula y la velocidad tiene su valor máximo.

Comparando esta expresión con $a=-(k/m)x$ correspondiente a una masa unida a un muelle, ecuación **3**, vemos que la frecuencia angular ω está relacionada con la constante k de la fuerza y con la masa m por:

$\omega^2 = \frac{k}{m}$	11
--------------------------	-----------

La frecuencia y período de una masa sujeta a un muelle están así relacionadas con la constante k de la fuerza y con la masa m por:

$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$	12
---	-----------

$T = \frac{1}{f} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$	13
---	-----------

A partir de este resultado puede verse que cuando k es grande, como en el caso de un muelle bastante rígido, la frecuencia es grande. Análogamente, si la masa es grande, la frecuencia es pequeña.

Se llega a un resultado interesante:

En el movimiento armónico simple, la frecuencia y el periodo son independientes de la amplitud.

3. Energía del movimiento armónico simple.

Cuando un cuerpo oscila sujeto a un muelle, tanto la energía cinética del cuerpo como la energía potencial del sistema cuerpo-muelle varían con el tiempo, mientras que su suma, que es la energía total, es constante (suponiendo que no exista rozamiento). La energía potencial de un muelle de constante elástica k deformado hasta una distancia x del equilibrio viene dada por la ecuación:

$U = \frac{1}{2} K x^2$	14
-------------------------	-----------

La energía total es la suma de la energía cinética y la energía potencial:

$E_{TOTAL} = U + E_c = \frac{1}{2} K x^2 + \frac{1}{2} m v^2$	15
---	-----------

Cuando el desplazamiento es máximo, $x=A$, la velocidad es nula y la energía total vale:

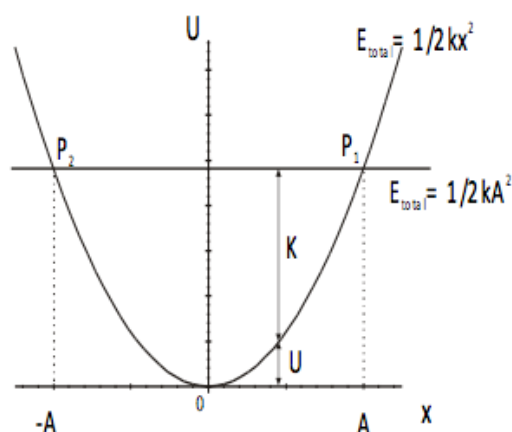
$E_{TOTAL} = \frac{1}{2} K A^2$	16
---------------------------------	-----------

Esta ecuación nos enseña una importante propiedad general del movimiento armónico simple:

La energía total del movimiento armónico simple es proporcional al cuadrado de la amplitud.

Si empezamos el movimiento en la posición de máximo desplazamiento, la energía total es precisamente igual a la energía potencial original. Cuando el cuerpo se mueve acercándose al equilibrio, aumenta su energía cinética, mientras que disminuye la energía potencial del sistema. En el punto de equilibrio, es máxima la velocidad del cuerpo, mientras que es nula la energía potencial del sistema y la energía total es simplemente cinética. Cuando el cuerpo pasa del punto de equilibrio, empieza a decrecer su energía cinética y a crecer la energía potencial del sistema hasta que el cuerpo se encuentra de nuevo en su desplazamiento máximo (en el sentido opuesto), parándose momentáneamente en ese instante, de modo que nuevamente es nula su energía cinética y máxima la energía potencial del sistema. En todo momento la suma de las energías cinética y potencial es constante.

En la figura, se ha representado la energía potencial U en función de x . La curva es una parábola con un mínimo en la posición de equilibrio. La energía total E_{total} es constante y su representación, por consiguiente, da una línea recta, que corta a la curva de energía potencial en $x=A$ y $x=-A$. El movimiento se encuentra restringido al intervalo, $-A \geq x \geq -A$ puesto que la energía total debe ser mayor o igual que la energía potencial. Se puede demostrar que la energía total para un cuerpo que oscila sujeto a un muelle es constante sustituyendo las expresiones correspondientes a x y a v de las en la ecuación 15, correspondiente a la energía total. Se tiene:



$$E_{\text{TOTAL}} = \frac{1}{2}KA^2\cos^2(\omega t + \delta) + \frac{1}{2}KA^2\sin^2(\omega t + \delta) = \frac{1}{2}KA^2$$

17

4. Cuestiones y problemas

- I. Un muelle oscila con una frecuencia de 8 Hz y una amplitud de 12 cm cuando de él hay colgado un cuerpo de 2 kg. Sabemos que cuando se comenzó a contar el tiempo se encontraba a 6 cm de la posición de equilibrio, en el sentido que hemos considerado positivo. Calcula: a) la pulsación; b) la constante elástica del muelle; c) la ecuación del movimiento armónico simple; d) la energía total, cinética y potencial elástica del sistema cuando el cuerpo está a 7 cm de la posición de equilibrio.
- II. Una partícula tiene un desplazamiento x dado por $x=0,3 \cos (2t+\pi/6)$ en donde x se mide en metros y t en segundos. a) Calcula la frecuencia, el período, la amplitud, la frecuencia angular y la constante de fase del movimiento; b) ¿En dónde está la partícula para $t=1$ segundo? c) Hallar la velocidad y la aceleración para un instante cualquiera t . d) Hallar la posición y velocidad inicial de la partícula.

- III. Se sujeta un cuerpo de 0,8 kg a un muelle de constante de fuerza 400 N/m. Hallar la frecuencia y período de movimiento del cuerpo cuando se desplaza del equilibrio.
- IV. Un cuerpo de 2 kg estira un muelle en 10 cm cuando cuelga verticalmente en equilibrio. Luego se sujeta el cuerpo al mismo muelle, pero ahora se apoya sobre una mesa sin rozamiento y el muelle está fijo en un extremo. Se separa el cuerpo de la posición de equilibrio una distancia de 5 cm y se deja en libertad cuando $t=0$ segundos. Hallar la amplitud, la frecuencia angular, la frecuencia y el período. ($g = 9,8 \text{ m/s}^2$)
- V. ¿Cuál es la velocidad máxima del cuerpo situado sobre el muelle del ejemplo anterior, y cuándo se presenta esta velocidad máxima?
- VI. Otro muelle idéntico al del ejemplo anterior se sujeta a un cuerpo, también de masa 2 kg. Este muelle se estira 10 cm y se deja en libertad al mismo tiempo que el primer objeto, que deformaba el muelle sólo 5 cm. ¿Qué cuerpo alcanza antes la posición de equilibrio?
- VII. Un objeto de masa de 2 kg está ligado a un muelle de constante de fuerza 40 N/m. Se está moviendo a 25 cm/s cuando está en la posición de equilibrio. (a) ¿Cuál es su energía total? (b) ¿Cuál es la amplitud de su movimiento?
- VIII. Un pedazo de plastilina de 40 gramos de masa se mueve con velocidad de 100 m/s y choca, quedando incrustada, en un bloque de madera de 1 kg de masa que está en reposo. El bloque está unido a un muelle que se contrae 20 cm. Si no hay rozamiento entre el suelo y el bloque, determina la constante recuperadora del muelle y el período de oscilación del movimiento vibratorio generado.
- IX. Un resorte de constante elástica 40 N/m se cuelga de un soporte y, en su otro extremo, se coloca una masa de 1 kg. En equilibrio, la masa dista 1 metro del soporte. A) ¿Cuál es la longitud del resorte cuando no se cuelga ninguna masa? Posteriormente se deja caer desde el soporte una masa de 0,5 kg que queda unida a la primera. B) ¿Cuál es la frecuencia y la amplitud de las oscilaciones?; c) ¿Cuál es la nueva posición de equilibrio? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

Soluciones:

- I. a) $16\pi \text{ rad/s}$; b) 5053 N/m ; c) $x=0,12\cos(16\pi t+5\pi/3)$; d) $36,4 \text{ J}$; 24 J ; $12,4 \text{ J}$
- II. a) $0,318 \text{ Hz}$; $3,14 \text{ s}$; $0,3 \text{ m}$; 2 rad/s ; $\pi/6 \text{ rad}$; b) $-0,245 \text{ m}$; d) $0,260 \text{ m}$; $-0,300 \text{ m/s}$

- III. $3,56 \text{ Hz}$; $0,281 \text{ s}$.
 IV. 5 cm ; $9,90 \text{ rad/s}$; $1,58 \text{ Hz}$; $0,63 \text{ s}$
 V. $49,5 \text{ cm/s}$; $0,16 \text{ s}$
 VI. los dos la alcanzan en el mismo instante
 VII. $0,0625 \text{ Julios}$; $5,59 \text{ cm}$.
 VIII. $K=385 \text{ N/m}$; $T=0,33 \text{ s}$
 IX. a) $0,75 \text{ m}$; b) $0,82 \text{ Hz}$; $0,31 \text{ m}$; c) $1,125 \text{ m}$

Bibliografía:

Tipler, Paul A. Física Editorial Reverté SA
 Física Alonso y Finn