BLOQUE VI
CINEMÁTICA(II)

Contenidos

Criterios de evaluación

- Reconocer las ecuaciones de los movimientos rectilíneo y circular y aplicarlas a situaciones concretas.
- Interpretar representaciones gráficas de los movimientos rectilíneo y circular.
- Describir el movimiento circular uniformemente acelerado y expresar la aceleración en función de sus componentes intrínsecas.
- Relacionar en un movimiento circular las magnitudes angulares con las lineales.
- Identificar el movimiento no circular de un móvil en un plano como la composición de dos movimientos unidimensionales rectilíneo uniforme (MRU) y rectilíneo uniformemente acelerado (MRUA).

1. Movimiento en una sola dimensión.

El movimiento acelerado en una sola dimensión más sencillo es aquel cuya trayectoria es una recta y su aceleración es constante. Este movimiento es el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (MRUA) y su velocidad cambia al mismo ritmo durante todo el tiempo. Dado que la aceleración es constante, la aceleración media coincide con la aceleración instantánea y por tanto:

$$\vec{a} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t} \qquad \textbf{VI.11}$$

De esta expresión podemos obtener la ecuación de la velocidad en un instante concreto:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t \qquad \textbf{VI.12}$$

Al tratarse de un movimiento en una sola dimensión, podríamos utilizar la ecuación escalar correspondiente utilizando un criterio de signos, $v = v_0 \pm at$

Para calcular la posición en cualquier instante haremos uso del concepto de velocidad media que vimos en el tema anterior. Por otra parte en un movimiento rectilíneo con aceleración constante la velocidad media coincide con la media aritmética de la velocidad entre dos puntos cualesquiera:

$$\left.\begin{aligned} v_{media} &= \frac{x - x_0}{t} \\ v_{media} &= \frac{v + v_0}{2} \end{aligned}\right\} \qquad \frac{x - x_0}{t} = \frac{v + v_0}{2} \implies x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

que es la ecuación que nos informa de la posición de un móvil que se mueve en un movimiento rectilíneo y con aceleración constante.

Si esta ecuación la expresamos en forma vectorial:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_o t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \qquad \textbf{VI.13}$$

tenemos el vector de posición de un móvil que se mueve con **aceleración constante**.

Se puede comprobar que derivando el vector de posición con respecto al tiempo en la ecuación VI.13 se obtiene la velocidad recogida en la ecuación VI.12

En el caso que el móvil tenga aceleración cero, las ecuaciones VI.12 y V1.13 se convierten en las ecuaciones de un movimiento rectilíneo uniforme (MRU)

Podemos resumir lo visto anteriormente en la siguiente tabla:

MOVIMIENTO RECTILÍNEO			
aceleración = 0	MRU	Posición	$x = x_0 \pm vt$
		Velocidad	constante
aceleración constante distinta de cero.	MRUA	Posición	$x = x_0 \pm v_o t \pm \frac{1}{2}at^2$
		Velocidad	$v = v_0 \pm at$

En general, para un movimiento uniformemente acelerado, las ecuaciones son:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{r}_0 + \vec{v}_o t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \\ \vec{v} &= \vec{v}_0 + \vec{a}t \end{aligned} \qquad \textbf{VI.14}$$

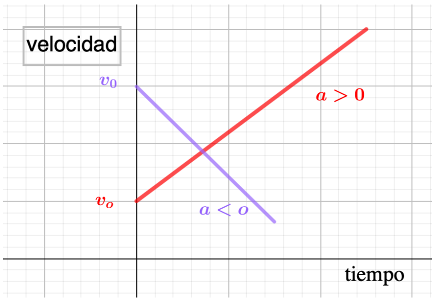
Un ejemplo de movimiento rectilíneo con aceleración constante es el denominado **caída libre**. En este caso debemos tener en cuenta que la Tierra atrae a todos los cuerpos con una fuerza que se denomina peso y que depende de la masa del cuerpo y de la aceleración de la gravedad. Esta fuerza hace que todos los cuerpos en caída libre estén sometidos a la aceleración de la gravedad, que está dirigida hacia el centro de la Tierra. Aunque el valor de la gravedad varía con la altura, en las proximidades de la superficie terrestre podemos considerar que su valor permanece constante con un valor de 9,8 m/s^2.

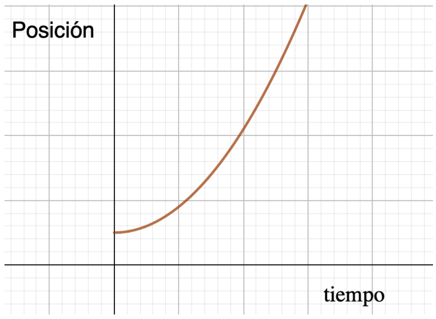
En los problemas de caída libre no tendremos en cuenta el rozamiento con el aire.

Si lanzamos verticalmente un cuerpo hacia arriba estamos también en un caso de MRUA.

Las gráficas correspondientes de las ecuaciones anteriores son las siguientes:

- Para la gráfica **velocidad - tiempo** se obtiene una recta cuya pendiente es la aceleración del móvil. Esta pendiente puede ser positiva si el sentido de la aceleración coincide con el de la velocidad inicial.
- Para la gráfica **posición - tiempo** se obtiene una parábola. Es de destacar que en el caso de que la velocidad inicial y la aceleración tengan signos diferentes, la gráfica tendrá un tramo creciente y otro decreciente, y el paso de un tramo a otro (vértice de la parábola) coincidirá con el momento en el que el móvil cambia de sentido y su velocidad será cero.





2. Movimientos en dos dimensiones

En este tipo de movimientos son dos las coordenadas de posición las que varían con el tiempo. Ejemplos de movimientos en dos dimensiones son los **lanzamientos de proyectiles** (cuerpo lanzado al aire) y la **superposición de movimientos uniformes**.

2.1. Movimiento de proyectiles

El movimiento de un proyectil es complicado debido a la resistencia del aire, la rotación de la Tierra y las variaciones de la aceleración de la gravedad. Por simplicidad despreciaremos estas complicaciones.

La diferencia con un movimiento de caída libre o lanzamiento vertical es que la **velocidad inicial y la aceleración de la gravedad** tienen direcciones distintas dando lugar a una trayectoria curvilínea.

Trataremos este tipo de movimientos como una composición (principio de superposición)[1] de dos movimientos rectilíneos: uno horizontal (MRU) y otro vertical (MRUA).

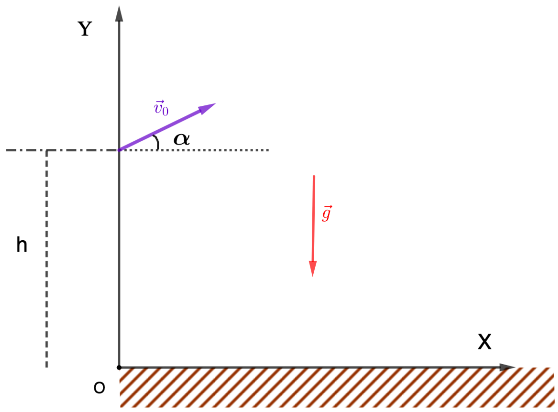
El estudio de este movimiento lo realizaremos describiendo los pasos que debemos seguir en la resolución de problemas sobre movimiento en una o dos dimensiones.

---

[1] *Cuando un cuerpo está sometido simultáneamente a varios movimientos elementales e independientes, el movimiento total se obtiene sumando vectorialmente dichos movimientos parciales.*

Ejemplo: Desde un acantilado de 20 m de altura sobre el nivel del mar, se lanza una piedra hacia el mar con una rapidez de 10 m/s formando un ángulo de 30° con la horizontal. Calcula: a) el alcance de la piedra (distancia a la que cae la piedra); b) tiempo de vuelo (tiempo que tarda en impactar con el agua desde que se lanzó); c) Altura máxima alcanzada por la piedra; d) Velocidad de la piedra en el momento del impacto con el agua. Dato: aceleración de la gravedad: 10 m/s²

Primer paso: Realizar un esquema del problema, indicando claramente el sistema de referencia y el criterio de signos.



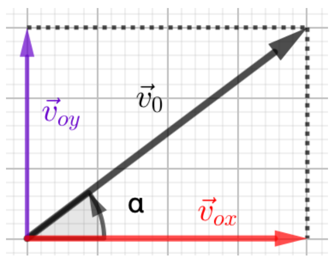
Las punta de la flecha en cada uno de los ejes nos indica la parte positiva.

Todos los cálculos se realizarán según ese sistema de referencia (SR) el cual no podemos cambiar durante el problema. Sería conveniente también establecer el origen de tiempos.

En nuestro caso el SR está en la base del acantilado y empezaremos a contar el tiempo en el instante de lanzamiento de la piedra.

Segundo paso: Recoger los datos del problema, expresando las magnitudes vectoriales en función de los vectores unitarios correspondientes y sus unidades. Si hubiese que descomponer algún vector este es el momento (todos aquellos que no tengan la dirección del eje X o del eje Y)

Datos	
Posición inicial:	$\vec{r}_0 = 20\vec{j} \quad m$
Aceleración:	$\vec{g} = -10\vec{j} \quad m/s^2$
Velocidad inicial: **hay que descomponerla, ver gráfico**	$\vec{v}_0 = \vec{v}_{ox} + \vec{v}_{oy}$ $\vec{v}_o = v_0 \cos\alpha\ \vec{i} + v_0 \text{ sen } \alpha\ \vec{j}$ $\vec{v}_o = 10 \cos 30° \vec{i} + 10 \text{ sen } 30°\ \vec{j} \quad m/s$



Tercer paso: Expresar las ecuaciones del vector de posición y de la velocidad, sustituir los datos y obtener las ecuaciones escalares correspondientes.

Se trata de un movimiento uniformemente acelerado ya que la aceleración es constante. Por tanto las ecuaciones correspondientes son:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_o t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$$

Sustituimos los valores correspondientes:

$\vec{r} = 20\vec{j} + (10\ \cos 30°\vec{i} + 10\ \text{sen}30°\vec{j})t + \frac{1}{2}(-10\vec{j})t^2 \implies \vec{r} = 20\vec{j} + 10t\cos 30°\vec{i} + 10t\,\text{sen}30°\vec{j} - 5t^2\vec{j}$

$\vec{r} = 10t\cos 30°\vec{i} + (20 + 10t\,\text{sen}30° - 5t^2)\vec{j}\quad m$

De esta ecuación se obtienen las siguientes ecuaciones escalares:

$$x = 10t\ \cos 30°\quad m$$
$$y = 20 + 10t\ \text{sen}\ 30° - 5t^2\quad m$$

Para la velocidad seguimos los mismos pasos:

$\vec{v} = 10\ \cos 30°\vec{i} + 10\ \text{sen}30°\vec{j} + (-10\vec{j})t \implies \vec{v} = 10\ \cos 30°\vec{i} + (10\ \text{sen}30° - 10t)\vec{j}\quad m/s$

Y de nuevo se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$v_x = 10\ \cos\ 30°\quad m/s$$
$$v_y = 10\ \text{sen}\ 30° - 10t\quad m/s$$

Como se puede comprobar, la piedra lleva un MRU a lo largo del eje X y un MRUA a lo largo del eje Y. La superposición de estos dos movimientos da lugar al movimiento de la piedra, describiendo una trayectoria parabólica.

Cuarto paso: A partir de estas ecuaciones calculamos las incógnitas del problema.

Cálculo del alcance. Para calcular el alcance de la piedra debemos tener en cuenta que en el punto del impacto y = 0. Si sustituimos ese valor en la ecuación, tenemos:

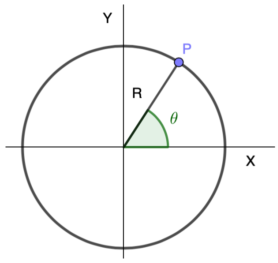
$0 = 20 + 10t\ \text{sen}\ 30° - 5t^2$, que representa a una ecuación de 2º grado en t; si resolvemos, se obtienen: -1,6 y 2,6 s. Descartando la primera, se obtiene un tiempo de 2,6 s. Este tiempo es el tiempo que tarda la piedra en impactar con el agua desde que se lanzó (tiempo de vuelo). Para calcular el alcance sustituimos el valor del tiempo obtenido en la ecuación del alcance: $x = 10 \cdot 2{,}6 \cdot cos 30° = 22{,}5\ m$. Por tanto el alcance es de 22,5 m

Altura máxima. Para calcular la altura máxima debemos saber que en el punto de máxima altura la componente sobre el eje Y de la velocidad, v_y, tiene que ser cero, lo que nos va a permitir calcular el tiempo que tarda en alcanzar la máxima altura. Si v_y = 0 esto significa que $0 = 10\ \text{sen}\ 30° - 10t \implies t = 0{,}50s$. La posición y en ese tiempo, y(0,5), nos dará la altura máxima: $y = 20 + 10 \cdot 0{,}5\ \text{sen}\ 30° - 5 \cdot 0{,}5^2 = 21{,}3\ m$. Por tanto en el punto más alto está a 21,3 metros sobre el nivel del mar.

Velocidad de impacto. En este caso bastaría con tomar la ecuación que nos da la velocidad en cualquier instante y sustituir el tiempo por 2,6 s, ya que es en ese tiempo cuando impacta con el agua: $\vec{v}(2{,}6) = 10\ \cos 30°\vec{i} + (10\ \text{sen}30° - 10 \cdot 2{,}6)\vec{j} = 8{,}7\vec{i} - 21\vec{j}\quad m/s$

3. Movimientos circulares.

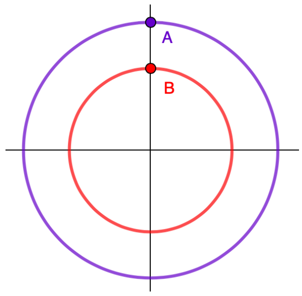
El movimiento circular es aquel movimiento cuya trayectoria es una circunferencia. Debemos tener en cuenta que se trata de un movimiento acelerado puesto que, como mínimo, la dirección de la velocidad está cambiando continuamente. Al ser un movimiento plano se puede estudiar con las dos coordenadas cartesianas x e y, pero su estudio es mucho más fácil



se se utilizan coordenadas polares. Las coordenadas polares del punto P de la figura son dos:

- El **radio**, R, que se corresponde con la distancia al origen de coordenadas.
- El **ángulo** θ, que es el determinado por el segmento que une el punto con el origen y el semieje positivo. Su unidad es el radián (ver anexo). A este valor le daremos el nombre de **posición angular.**

De esta manera, para indicar la posición de un móvil solo tendremos que dar el valor de la posición angular, ya que R se mantiene constante en un movimiento circular.



Cuando los puntos A y B de la figura efectúan una vuelta completa en el mismo tiempo, los espacios recorridos por A y por B no son iguales y por tanto las velocidades lineales no pueden ser iguales, siendo la velocidad de A mayor que la de B (recorre más distancia en el mismo tiempo). Sin embargo, el ángulo que han descrito A y B es el mismo. Esta constancia nos va a permitir definir una nueva magnitud, la **velocidad angular**, ω, que se define como la relación entre el ángulo descrito y el tiempo empleado:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \qquad \textbf{VI.15}$$

La unidad en el Sistema Internacional para la velocidad angular es el **rad/s**, aunque también se suele expresar en revoluciones por minuto (**rpm**) que es lo mismo que las vueltas dadas en un minuto.

¿Qué relación existe entre la velocidad angular y la velocidad lineal (velocidad)?

De la definición de radián se tiene:

$$\theta = \frac{s}{R} \qquad \textbf{VI.16}$$

Combinando VI.15 y VI.16 se obtiene:

$$\omega = \frac{\theta}{t} = \frac{\frac{s}{R}}{t} = \frac{s}{Rt} = \frac{v}{R}$$

O lo que es lo mismo:

$$v = \omega R \qquad \textbf{VI.17}$$

En la que se puede comprobar que a mayor distancia del centro, mayor velocidad lineal.

3.1. Movimiento circular uniforme

El movimiento circular uniforme es aquel movimiento cuya trayectoria es circular y la velocidad angular es constante.

Para determinar la ecuación de movimiento partiremos de la velocidad angular (es constante) y calcularemos la posición angular. De la ecuación VI.15 se obtiene $\Delta\theta = \omega\Delta t$ y por lo tanto:

$$\theta - \theta_0 = \omega(t - t_0)$$

Si elegimos $t_0 = 0$, se obtiene:

$$\theta - \theta_0 = \omega(t - t_0) \implies \theta = \theta_0 + \omega t$$

Dependiendo del sentido de movimiento, ω puede tener un sentido u otro, por lo que la ecuación del movimiento del MCU queda:

$$\theta = \theta_0 \pm \omega t \qquad \textbf{VI.18}$$

Una de las características de este movimiento es que se trata de un movimiento periódico, ya que se repite cada cierto tiempo. Este movimiento es posible estudiarlo en función de magnitudes periódicas:

- **Periodo** (T). Es el tiempo que tarda un cuerpo en dar una vuelta completa (o repetir su posición).
- **Frecuencia** (f). Es el número de vueltas (o número de veces que se repite una posición) por unidad de tiempo. Su unidad es el s^{-1} y que se denomina **hercio (Hz)**.

Periodo y frecuencia son, por tanto, inversas:

$$T = \frac{1}{f} \qquad \textbf{VI.19}$$

Si el tiempo que tarda en dar una vuelta es T (periodo) , y tenemos en cuenta que una vuelta se corresponde con 2π rad , la velocidad angular nos queda como:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \qquad \textbf{VI.20}$$

Otro aspecto que no debemos olvidar es la aceleración que presenta este movimiento. Es un movimiento acelerado ya que su velocidad está cambiando en dirección (no en su módulo) y por tanto presenta **aceleración normal** o centrípeta:

$$a_c = \frac{v^2}{R} \qquad \textbf{VI.21}$$

Con la expresión VI.21 y VI.17 se puede obtener la relación entre la aceleración normal y la velocidad angular.

3.2. Movimiento circular uniformemente acelerado.

Cuando varía la velocidad angular de un cuerpo que se mueve describiendo círculos, se dice que está dotado de **aceleración angular** (α) . La aceleración angular es la rapidez con que varía la velocidad angular (ω), por tanto:

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \qquad \text{VI.22}$$

En el Sistema Internacional la unidad de la aceleración angular es el rad/s^2

Si la aceleración angular es constante, se dice que el **movimiento circular es uniformemente acelerado** (MCUA).

De la misma manera que hemos deducido las ecuaciones de movimiento y de velocidad del MRUA, podemos obtener las correspondientes al MCUA.

MOVIMIENTO CIRCULAR			
Aceleración angular = 0	MCU	Posición angular	$\theta = \theta_0 \pm \omega t$
		Velocidad angular	constante
aceleración angular constante distinta de cero.	MCUA	Posición angular	$\theta = \theta_0 + \omega_o t \pm \frac{1}{2}\alpha t^2$
		Velocidad angular	$\omega = \omega_0 \pm \alpha t$

Obsérvese la analogía entre estas ecuaciones y las correspondientes del movimiento rectilíneo, solo hay que cambiar las magnitudes lineales por magnitudes angulares.

El MCUA, además de tener aceleración normal, tiene aceleración tangencial, puesto que la rapidez está cambiando. Siguiendo con las relaciones entre magnitudes lineales y angulares que hemos visto, la relación entre la aceleración tangencial y la aceleración angular es:

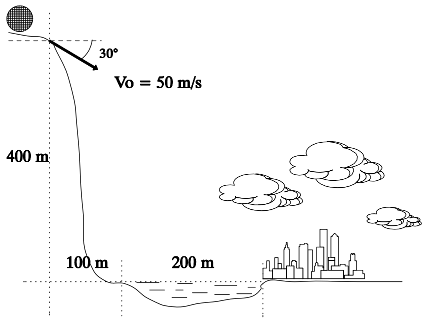
$$a_t = \alpha \ R \qquad \text{VI.23}$$

4. Actividades

1. Si se le da una patada a un balón a 1 m de altura sobre el suelo y sale verticalmente hacia arriba, tarda 5 s en llegar al suelo. Tomando la aceleración de la gravedad como 10 m/s^2 calcula: a) ¿con qué velocidad salió disparado el balón?; b) ¿hasta qué altura respecto al suelo subió?; c) ¿Al cabo de qué tiempo vuelve a pasar por la altura inicial de 1 m?
2. Un globo aerostático sube con velocidad constante de módulo 5,00 m/s. Una persona situada en el globo suelta un saco de arena cuando el globo está a 40,0 m sobre el suelo. Después de que se suelta, el saco está en caída libre. Calcule: a) la posición y velocidad del saco a 0,250 s y 1,00 s después de soltarse; b) ¿Cuántos segundos tardará el saco en chocar contra el suelo? ; c) ¿Con qué rapidez chocará el saco contra el suelo?; d) ¿qué altura

máxima alcanza el saco sobre el suelo? e) dibuje las gráficas aceleración-tiempo, velocidad-tiempo y posición-tiempo para el movimiento. Dato: tomar g = 9,80 m/s^2

3. Un gran peñasco descansa sobre un barranco, 400 metros por encima de un pueblo, en tal posición que si rodase, saldría despedido con una rapidez de 50 m/s. Existe una laguna de 200 m de diámetro con su borde a 100 metros del borde del barranco, como aparece en la figura. Las casas del pueblo están junto a la laguna. Un alumno de física afirma que el peñasco caería dentro de la laguna. ¿Está en lo cierto? Dato : tomar g = 9,80 m/s^2

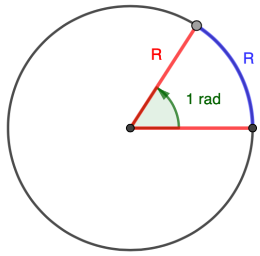


4. Un satélite orbita a 500 km de altura sobre la superficie terrestre. Si tarda 1,57 h en dar una vuelta completa a la Tierra, y su órbita es circular, determina: a) Tipo de movimiento que lleva el satélite; b) su velocidad angular; c) su velocidad (velocidad lineal); d) la aceleración normal (centrípeta) a que está sometido. Dato: Radio terrestre 6370 km.
5. Tres objetos, A, B y C, cuyas masas son 10, 3 y 5 kg, respectivamente, son lanzados horizontalmente con la misa velocidad. Ordénalos según el alcance. Razona la respuesta.
6. Una persona que está a cierta altura sobre el suelo tira una pelota hacia arriba con una rapidez v_0 y después arroja otra hacia abajo con la misma rapidez , ¿cuál de las dos pelotas tendrá mayor rapidez al llegar al suelo?
7. Una persona está a punto de perder su tren. En un desesperado intento, corre con una velocidad constante de rapidez 6 m/s. Cuando está a 32 m de la última puerta del vagón de cola, el tren arranca con una aceleración constante de 0,5 m/s^2. ¿Logrará nuestro viajero su propósito?
8. Desde igual altura y al mismo tiempo se lanzan dos objetos con idéntica rapidez inicial, uno hacia arriba y otro hacia abajo. Si el primero tarda 5 s más en llegar al suelo, ¿con qué rapidez fueron lanzados? Dato g = 10 m/s^2
9. Una persona salta en caída libre desde un helicóptero que vuela a 90 km/h y a 30 m de altura. Debe caer sobre unas colchonetas a bordo de un barco que viaja a 54 km/h en su mismo sentido. ¿A qué distancia horizontal debe estar el barco en el momento del salto? Dato g = 10 m/s^2
10. Un disco de vinilo gira a 33 rpm. Al desconectar el tocadiscos, el disco tarda 5 s en parar. ¿Cuál ha sido la aceleración angular de frenado? ¿Cuántas vueltas ha dado hasta pararse?
11. Sea un disco que gira a 45 rpm. Calcula: a) la velocidad angular y lineal de todos los puntos del disco que disten 1 cm del centro de rotación; b) La velocidad angular y lineal de los puntos que disten 5 cm del centro de rotación; c) ¿cuál tiene mayor aceleración normal?; d) el período y la frecuencia de este movimiento.

Soluciones

1. a) 24,8 m/s; b) 31,8 m ; c) 4,96 s
2. a) 40,9 m y 40,1 m; b) 3,41 s; c) 28,4 m/s; d) 41,3 m. e)
3. Si (Ver simulación)
4. a) MCU; b) $1{,}11 \cdot 10^{-3}$ rad/s; c) 7,64 km/s ; d) 8,49 m/s^2
5. Los tres tienen el mismo alcance.
6. Las dos tendrán la misma rapidez.
7. Sí lo logrará, a los 8 segundos.
8. 25 m/s
9. 24 m
10. 0,69 rad/s^2 (frenado) ; 1,4 vueltas
11. a) $1{,}5\pi$ rad/s ; $1{,}5\pi$ cm/s b) $1{,}5\pi$ rad/s; $7{,}5\pi$ cm/s; c) los que distan 5 cm; d) 1,3 s; 0,75 Hz

Anexo



Un **radián** (rad) se define como el ángulo de una circunferencia que abarca un ángulo de igual longitud que el radio de la misma. Si recorremos la circunferencia completa, la distancia recorrida es 2πR y, por tanto, el ángulo descrito es de 2π radianes. Esto nos permite obtener la relación entre los grados sexagesimales y los radianes: 360° equivale a 2π rad.

La definición de radián trae consigo la relación que existe entre el ángulo, θ, el arco descrito, **s**, y el radio, **R**:

$$\theta = \frac{s}{R}$$

de esta definición, como se puede comprobar, se infiere que es adimensional.

Bibliografía:

Tipler, Paul A. Física Editorial Reverté SA