BLOQUE II
LA INTERACCIÓN GRAVITATORIA

Contenidos

1. Concepciones del Universo.
2. Leyes de Kepler
   - 2.1. Primera ley (ley de las órbitas)
   - 2.2. Segunda ley (ley de las áreas)
   - 2.3. Tercera ley (ley de los períodos)
3. Interacción gravitatoria. Ley de Gravitación Universal.
   - 3.1. La ley de Newton: su deducción a partir de las leyes de Kepler.
   - 3.2. La Ley de Gravitación Universal y la materia oscura.
4. Concepto de campo.
5. Campo gravitatorio.
   - 5.1. El campo gravitatorio como ejemplo de campo conservativo.
6. Energía potencial.
7. Potencial gravitatorio. Superficies equipotenciales.
   - 7.1. Campo, potencial y energía potencial de una distribución de masas puntuales.
   - 7.2. Intensidad de campo y potencial gravitatorio en el interior y exterior de una distribución esférica y uniforme de masa.
8. Campo gravitatorio terrestre.
9. Velocidad de escape.
10. Satélites.
11. Algunas aclaraciones.
12. Teoría del Caos.
13. Ejercicios y actividades.

Criterios de evaluación

- Asociar el campo gravitatorio a la existencia de masa y caracterizarlo por la intensidad del campo y el potencial.
- Reconocer el carácter conservativo del campo gravitatorio por su relación con una fuerza central y asociarle en consecuencia un potencial gravitatorio.
- Interpretar las variaciones de energía potencial y el signo de la misma en función del origen de coordenadas energéticas elegido.
- Justificar las variaciones energéticas de un cuerpo en movimiento en el seno de campos gravitatorios.
- Relacionar el movimiento orbital de un cuerpo con el radio de la órbita y la masa generadora del campo.
- Conocer la importancia de los satélites artificiales de comunicaciones, GPS y meteorológicos y las características de sus órbitas.
- Interpretar el caos determinista en el contexto de la interacción gravitatoria.

1. Concepciones del Universo

La observación de los objetos celestes ha interesado al hombre desde los albores de la civilización y podemos decir que el interés y estudio de los objetos y de los fenómenos

observados en los cielos, es sin lugar a dudas, el punto de partida del desarrollo de las ciencias. Dado el carácter no terrenal de estos objetos, la astronomía se desarrolló bajo el amparo y el control de los sacerdotes. Los datos astronómicos obtenidos por los sacerdotes caldeos (pueblo mesopotámico) en el 4000 a.C., nos indican que sus observaciones eran bastante precisas. Entre otras podemos citar que habían establecido para el año una duración de 365 días, agrupados en 12 meses. Fueron los egipcios los que añadieron un día más al año cada cuatro años. Esta práctica se mantiene en la actualidad.

Estos conocimientos astronómicos sirvieron, entre otros, para que los sacerdotes mantuviesen su clase privilegiada, ya que podían predecir algunos acontecimientos astronómicos o indicar la mejor fecha para la siembra, pero no sirvieron para dejar de lado las descripciones puramente mitológicas del Universo por otras más realistas.

Los primeros en dar una actitud científica a la Astronomía fueron los griegos, planteándose cuestiones que aún están vigentes en nuestros días: ¿cuál es la materia prima del Universo? ¿cuál es el proceso de formación del Universo?

Según narra Herodoto, fue Tales de Mileto, el que predijo con toda exactitud un eclipse de Sol, lo que no deja de ser un hecho sorprendente ya que consideraba a la Tierra como un disco circular.

Los Pitagóricos cambian la forma de disco por la de una esfera. Consideraban que el Sol, la Luna y los planetas giran en círculos concéntricos, unidos cada uno de ellos a una esfera y produciendo al moverse unos sonidos musicales denominados armónicos. A mediados del siglo IV a. de C. Heráclito explicaba correctamente la alternancia del día y la noche como consecuencia de la rotación de la Tierra en torno a su propio eje.

Platón y Aristóteles se mostraban defensores del modelo geocéntrico (¿antropocéntrico?), según el cual la Tierra se mantiene inmóvil en el centro del Universo y todos los cuerpos celestes giran en torno a ella. Este modelo es incapaz de explicar el movimiento de los planetas (del griego planete que significa vagabundo). La defensa a ultranza de este modelo obliga a sus defensores a elaborar modelos cada vez más complejos para poder explicar el movimiento de los planetas. Así, Ptolomeo de Alejandría (s. II a. C.), desarrolló una complicada teoría de epicicloides para describir el movimiento observado en los planetas Este modelo es recogido en su obra Syntaxis Mathematica (en el siglo IX fue traducida al árabe como Kitab Al-magisti de donde derivó el nombre de Almagesto con el que normalmente se le conoce).

Santo Tomás de Aquino se encargó de unir las ideas Aristotélicas con las de la teología cristiana, reforzando la idea del hombre como ser supremo y centro del Universo. Cualquier otro modelo que discrepara con la idea de Aristóteles o del Santo Oficio tendría serias dificultades para ser aceptada.

Fue el polaco Nicolás Copérnico (1473-1543) en su obra De Revolutionibus Orbium Caelistium (de las revoluciones de las órbitas celestes) el que describe un modelo heliocéntrico. Las hipótesis básicas de esta teoría son:

- No existe un único punto central de las esferas celestes.

- El centro de la Tierra no es el centro del mundo, sino sólo el de la órbita de la Luna.
- Todas las órbitas rodean al Sol, como si éste estuviera en el centro de todas, por ello el centro del mundo está en el Sol.

El gran astrónomo danés Tycho Brahe (1546-1601), obtuvo con gran precisión las posiciones de numerosas estrellas y de los planetas visibles a simple vista (no utilizó el telescopio) dando lugar a las denominadas Tablas Rudolfinas, en donde, a modo de base de datos, se iban recogiendo los datos de las observaciones astronómicas de la fecha. Su discípulo Joannes Kepler (1571-1630), fue el encargado de terminar la labor emprendida por Tycho Brahe, y tras laboriosos cálculos con los datos obtenidos, consiguió sentar las bases de la cinemática del Sistema Solar, demostrando la validez del sistema heliocéntrico (él no fue capaz de encontrar la fuerza responsable del movimiento de los planetas). Esta labor de Kepler se vio complementada con la profunda tarea experimentadora de Galileo Galilei (1564-1642); Galileo, tras fabricarse su propio telescopio, efectuó un gran número de descubrimientos que demostraron la exactitud del modelo heliocéntrico. Estas pruebas en favor de una teoría que era tenida en su época como contraria a la de la Iglesia Católica llevó a Galileo a un proceso ante el Santo Oficio. Sus obras permanecieron en el ***Índice de obras prohibidas*** hasta mediados del siglo XIX pero su "rehabilitación" definitiva no se ha producido hasta comienzos de 1980.

Podemos decir que Kepler y Galileo fueron dos personajes que influyeron decisivamente en el desarrollo de una nueva forma de hacer Ciencia.

2. Leyes de Kepler

Son leyes empíricas, y por tanto son un resumen de los hechos observados. Se obtuvieron del trabajo desarrollado en la búsqueda de las regularidades de los datos recogidos por Tycho Brahe. Casi cien años más tarde, Newton demostró que estas leyes eran consecuencia de una fuerza que existe entre dos masas cualesquiera.

2.1. Primera ley (ley de las órbitas)

Los planetas en su movimiento alrededor del Sol describen órbitas planas en forma de elipse en uno de cuyos focos está el Sol.

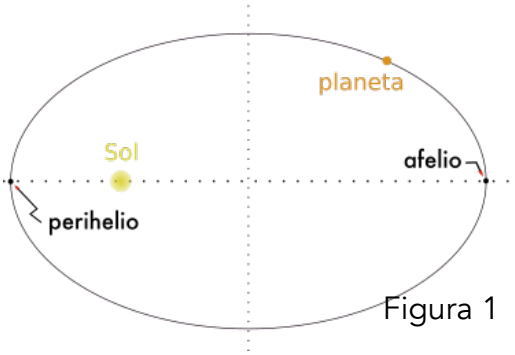


Figura 1

2.2. Segunda ley (ley de las áreas)

La velocidad con que se mueven los planetas es tal que sus vectores de posición, con respecto al Sol, barren áreas iguales en tiempos iguales.

Por lo tanto, la superficie delimitada por P_1SP_2 es igual a la delimitada por P_3SP_4.

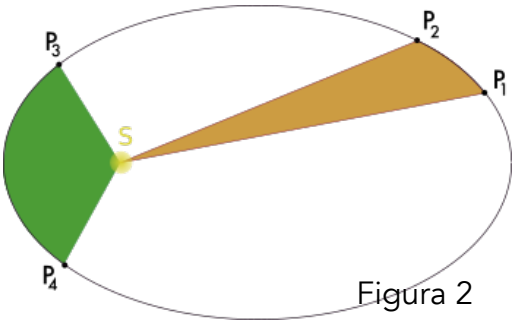


Figura 2

2.3. Tercera ley (ley de los períodos)

La relación entre los cuadrados de los períodos de revolución, T de los diferentes planetas y los cubos de los semiejes mayores, R, es constante.

Podemos expresar esta ley como:

$$\frac{T_1^2}{R_1^3} = \frac{T_2^2}{R_2^3} = cte \qquad \textbf{II.1}$$

3. Interacción gravitatoria. Ley de Gravitación Universal

Las leyes de Kepler constituyen la cinemática del movimiento planetario. Fue Isaac Newton (1642-1727) quién explicó la causa de estos movimientos. En un genial proceso de síntesis, propuso que la causa del movimiento planetario es la misma que la causa del movimiento de caída de los cuerpos; esa causa es la interacción gravitatoria entre los cuerpos materiales.

Newton identificó la órbita de la Luna como la de un cuerpo que estuviera siempre cayendo hacia la Tierra, pero sin poder llegar al suelo. En palabras del propio Newton "... cuando es proyectada una piedra...está forzada a describir una línea curva en el aire y, por virtud de esta línea curvada termina por caer al suelo; cuanto mayor es la velocidad con la que es proyectada tanto más lejos irá antes de caer a tierra....Si imaginamos cuerpos proyectados en las direcciones de líneas paralelas al horizonte desde diferentes alturas...estos cuerpos, según sus diferentes velocidades y diferentes fuerzas de gravedad a las diferentes alturas, describirán bien arcos concéntricos con la Tierra o diversamente excéntricos y se irán girando a través de los cielos en órbitas lo mismo que hacen los planetas en las suyas...".

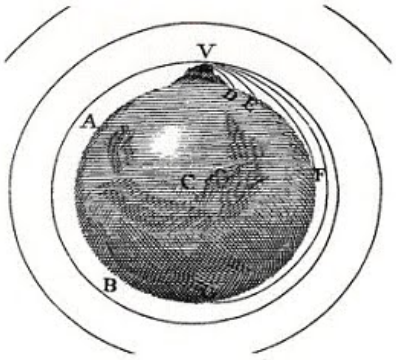


Figura 3

Newton deja claro que la causa tanto de la caída de una piedra como la del movimiento de los planetas es la gravedad (Universalidad). La interacción gravitatoria es una propiedad universal de toda la materia.

Fue el propio Newton quién probó que la fuerza de la gravedad depende de la distancia (las distancias se entienden desde los centros de los cuerpos) y concluyó que: las fuerzas de la gravedad terrestre decrecen con el inverso del cuadrado de la distancia al centro de la Tierra.

Generalizando este descubrimiento para todos los cuerpos del Universo, estableció la Ley de Gravitación Universal: ***todo cuerpo material atrae a otro con una fuerza directamente proporcional a sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre sus centros.***

Si consideramos dos cuerpos de masas m_1 y m_2 cuyos centros C_1 y C_2 están separados una distancia r y supongamos que $\vec{u}$ es un vector unitario en la dirección de la recta que pasa por C_1

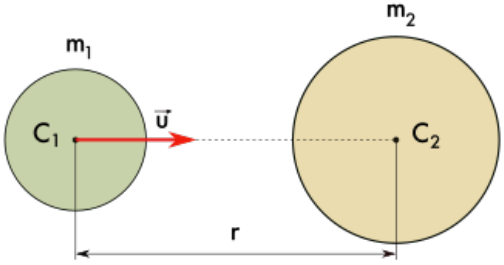


Figura 4

y C_2 y cuyo sentido es de C_1 hacia C_2. (figura-4)

La fuerza con que el cuerpo de masa m_1 atrae al de masa m_2 la podemos escribir:

$$\overrightarrow{F} = -G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}\overrightarrow{u} \qquad \textbf{II.2}$$

(la fuerza con la que m_2 atrae a m_1 tiene el mismo módulo y dirección pero el sentido opuesto al anterior).

En la expresión II.2, la constante G, llamada constante de Gravitación Universal, es la misma para todos los medios materiales en cualquier medio y lugar. Su valor fue determinado experimentalmente por Henry Cavendish (1731-1810) mediante la balanza de torsión. En el Sistema Internacional su valor es de:

$$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\frac{N \cdot m^2}{kg^2} \qquad \textbf{II.3}$$

La ecuación II.2 tiene sus limitaciones: sólo puede aplicarse a cuerpos puntuales (de dimensiones despreciables en comparación a la distancia entre ellos) o a cuerpos homogéneos con simetría esférica.

Una de las características de la fuerza gravitatoria, además de ser una fuerza atractiva y no "apantallable", es que se trata de una fuerza central, ya que tiene siempre la dirección de la recta que pasa por los centros de ambos cuerpos. Más adelante podremos apreciar su carácter conservativo.

3.1. La ley de Newton: su deducción a partir de las leyes de Kepler

A partir de las leyes de Kepler se puede llegar de una manera sencilla a la Ley de Gravitación de Newton. Si suponemos (no se pierde la generalidad) que las órbitas de los planetas son circulares en lugar de elípticas. Si el radio de la órbita de un planeta es R, su aceleración normal o centrípeta es:

$$a_n = \frac{v^2}{R} \qquad \textbf{II.4}$$

Si recordamos la segunda ley de Newton y la aplicamos a cualquier planeta, tenemos:

$$F = ma = m\frac{v^2}{R} = m\frac{4\pi^2 R}{T^2} \qquad \textbf{II.5}$$

Donde hemos utilizado la segunda ley de Kepler (en el caso de órbitas circulares, el módulo de la velocidad no varía) y m es la masa del planeta y T su período. Teniendo en cuenta la tercera ley de Kepler, $T^2 = kR^3$, la expresión II.5 nos queda de la siguiente manera:

$$F = k'\frac{m}{R^2} \qquad \textbf{II.6}$$

Resultando que la fuerza es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. Puesto que, por la tercera ley de Newton, la interacción es mutua, la misma expresión nos daría la

fuerza que el planeta ejerce sobre el Sol, pero incluyendo la masa M del Sol. Por tanto, debe aparecer la masa del Sol incluida en la constante. Poniéndola en la forma $k' = GM$, nos queda:

$$F = G\frac{mM}{R^2} \qquad \textbf{II.7}$$

3.2. La ley de Gravitación Universal y la materia oscura

Hemos visto cómo la Ley de Gravitación Universal explica el movimiento de los planetas del sistema solar, y cómo ha permitido descubrir otros nuevos, pero ¿es capaz de explicar el movimiento de todos los cuerpos celestes que componen el Universo?

De acuerdo con la ley de gravitación, se sabe que las estrellas giran, en órbitas circulares o elípticas, en torno al centro de su galaxia correspondiente; también se sabe que las estrellas más lejanas del centro galáctico giran con una velocidad orbital inferior a la velocidad a la que giran las estrellas más cercanas.

Desde 1914 se observó el movimiento de rotación de las galaxias y desde entonces se ha medido con mucha precisión el movimiento de muchas de ellas. En 1975, midiendo la velocidad de estrellas lejanas al centro galáctico se comprobó que tienen una velocidad de rotación muy superior a la esperada por la ley de gravitación. También se ha comprobado esta "anomalía" en velocidades de rotación de galaxias. No se sabe por qué ocurre, pero sí se sabe que la velocidad de rotación de las estrellas depende de la masa de la galaxia y a su vez la masa depende de su luminosidad.

La opción más aceptada es admitir la existencia de la hipotética **materia oscura** (materia que no emite suficiente radiación electromagnética como para poder ser detectada)

Si admitimos la existencia de la materia oscura se podría explicar otros fenómenos observados como el de las lentes gravitacionales.

4. Concepto de campo

¿Cómo es posible explicar la "acción a distancia" y el carácter simultáneo de las fuerzas gravitatorias? Hasta al propio Newton le parecía irracional el concepto de fuerza a distancia, por eso lo rechazaba con estas palabras: " …que cualquier cuerpo pueda actuar sobre otro, a través del vacío, sin mediación de algo más, a través de lo cual pueda conducirse la acción de la fuerza, es para mí un absurdo tan grande que no creo que exista un hombre con la facultad de pensar en materias filosóficas que pueda creer en ello".

Para justificar estas características haremos uso del concepto de **campo** para estudiar los efectos gravitatorios de un cuerpo sobre otros.

Decimos que en una zona del espacio tenemos definido un campo vectorial $\vec{V}$, cuando para cada punto P de esa zona , la magnitud $\vec{V}$ toma un único valor que depende exclusivamente de las coordenadas del punto P (función de posición).

Si $\vec{V}$ es una fuerza hablaremos de un campo de fuerzas.

Si la magnitud es escalar (temperatura, presión,…) tendremos un campo escalar.

Los campos que no dependen del tiempo se denominan **estacionarios** o **estáticos**.

Un campo escalar se representa mediante las superficies de nivel, que son el lugar geométrico para el cual la magnitud escalar tiene un mismo valor.

Un campo vectorial se representa gráficamente por líneas de campo, que son líneas tangentes en cada punto al vector campo definidos en ellos. En el caso de un campo de fuerzas hablaremos de líneas de fuerza.

Las propiedades de las líneas de campo son:

- Su sentido de recorrido y el del vector que representa el campo coinciden en cada punto.
- Pueden ser cerradas (campos magnéticos) o abiertas (campo gravitatorio).
- Las líneas de campo no se pueden cortar.
- Parten de **manantiales** y convergen en los **sumideros**.
- Si el campo es uniforme (el mismo valor de la magnitud en todos sus puntos del campo), las líneas de campo son paralelas.
- El número de líneas de campo es indicativo de la intensidad del campo: a mayor número de líneas de campo mayor intensidad del campo.

5. CAMPO GRAVITATORIO

Volviendo a la interacción gravitatoria, consideraremos que la presencia de un cuerpo material modifica las propiedades de los puntos del espacio que lo rodea, de forma que cualquier otro cuerpo material situado en las proximidades del primero se verá sometido a una atracción de características descritas por la Ley de Newton. Decimos entonces que esa atracción se debe al campo gravitatorio creado por el primer cuerpo (no olvidemos que el segundo cuerpo crea su propio campo gravitatorio que afecta el primero)

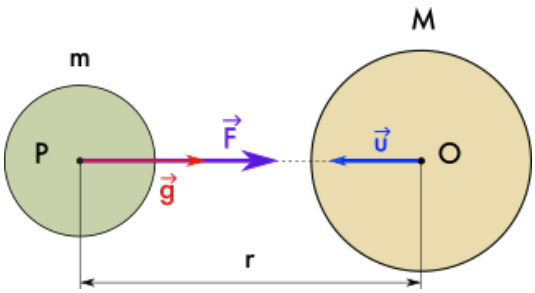


Figura 5

Para cada punto del campo gravitatorio creado por una masa M se define la **intensidad del campo** $\vec{g}$, como la fuerza que actúa sobre la unidad de masa situada en ese punto.

Sea una masa puntual M (figura 5) situada en el punto O y sea r la distancia entre el punto O y otro punto cualquiera P en el que colocaremos una masa de prueba, también puntual: la intensidad, $\vec{g}$ del campo gravitatorio creado por la masa M en el punto P es:

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{-G\frac{M \cdot m}{r^2}\vec{u}}{m} = -G\frac{M}{r^2}\vec{u} \qquad \text{II.8}$$

Como se puede comprobar, la intensidad del campo gravitatorio es una magnitud vectorial , y en el Sistema Internacional se mide en N/kg (aceleración)

Si suponemos que la masa m se coloca en el punto A y se le deja moverse libremente, figura 6, la atracción que ejerce M sobre ella hará que ocupe una serie de posiciones sucesivas B, C, D… que en conjunto constituye una de las líneas de fuerza del campo gravitatorio creado por la masa M.

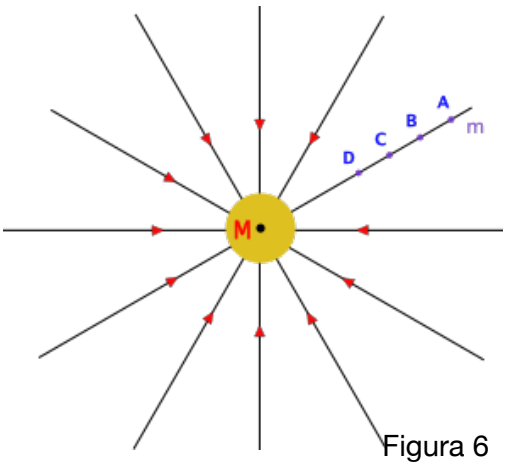


Figura 6

Aunque en este caso la línea de fuerza coincide con la trayectoria que seguiría la masa de prueba, eso no es así en todos los casos. Lo que siempre es cierto es que la dirección del vector intensidad del campo gravitatorio es tangente a la línea de campo en todos sus puntos.

Puesto que todas las líneas del campo gravitatorio creado por la masa M se dirigen hacia el punto donde se encuentra dicha masa, podemos decir que los cuerpos materiales son **sumideros** de las líneas de fuerza.

Dado que la fuerza que actúa sobre una masa m situada en un punto del campo gravitatorio creado por otra partícula material es única, las líneas de fuerza del campo gravitatorio no se cortan, excepto en el punto donde se encuentra la masa que crea el campo, en el que convergen todas las líneas de fuerza (consideraremos, por tanto, que una masa puntual no está sometida a los efectos se su propio campo gravitatorio).

5.1. El campo gravitatorio como ejemplo de campo conservativo

Sea un campo de fuerzas cualquiera en el que se coloca una partícula de masa m. Por cada desplazamiento $\Delta\vec{r}$ que realice la partícula, la fuerza del campo (que ejerce el campo) habrá realizado un trabajo:

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} \qquad \textbf{II.9}$$

Cuando una partícula se desplaza desde el punto A hasta otro B, el camino se puede considerar como suma de trocitos muy pequeños, $\Delta\vec{r}$, realizando en cada uno de ellos un trabajo; el trabajo total W realizado será la suma de los realizados en cada intervalo:

$$W = \sum \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} \qquad \textbf{II.10}$$

El valor que tome el trabajo puede depender o no de la trayectoria seguida en ir desde A hasta B, es decir del camino seguido. En los casos de campos de fuerzas en los que el trabajo realizado solo depende de los puntos inicial y final y no del camino seguido, los campos reciben el nombre de campos conservativos. Comprobaremos que el campo gravitatorio creado por un cuerpo material es conservativo. Para ello demostraremos que el trabajo realizado para desplazar una masa m entre los puntos A y B del campo gravitatorio creado por una partícula de masa M es independiente del camino seguido (ver figura 7)

Cualquier camino entre A y B se puede considerar formado por desplazamientos circulares (sobre una circunferencia de centro en O, en donde se encuentra M) y por desplazamientos radiales (rectas que pasan por O).

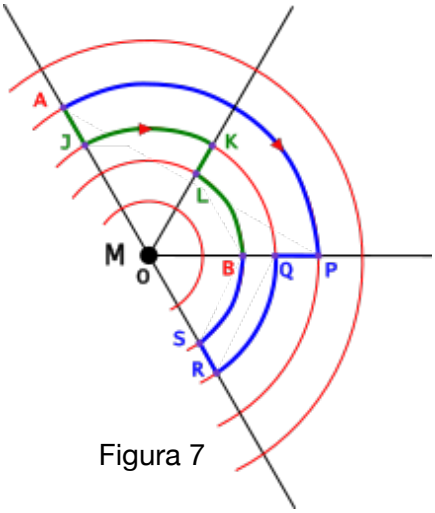


Figura 7

Supongamos que el camino I entre A y B pasa por J, K y L y que el camino II pasa por P,Q,R y S. En los desplazamientos circulares (por ejemplo J y K) no se realiza trabajo, puesto que la dirección de la fuerza gravitatoria ejercida por la masa M sobre m es perpendicular al desplazamiento .

En los desplazamientos radiales la dirección de la fuerza y el desplazamiento coincide. Así, por ejemplo, el trabajo entre A y J y entre P y Q tiene el mismo valor, por lo tanto, podemos expresar el trabajo por cada uno de los caminos como:

$$\underbrace{W_{A\to B}}_{camino\ I} = W_{A\to J} + W_{J\to K} + W_{K\to L} + W_{L\to B} = W_{A\to J} + W_{K\to L}$$

$$\underbrace{W_{A\to B}}_{camino\ II} = W_{A\to P} + W_{P\to Q} + W_{Q\to R} + W_{R\to S} + W_{S\to B} = W_{P\to Q} + W_{R\to S}$$

$$W_{A\to J} + W_{K\to L} = W_{P\to Q} + W_{R\to S}$$

de lo que se deduce:

$$\underbrace{W_{A\to B}}_{camino\ I} = \underbrace{W_{A\to B}}_{camino\ II} \qquad \textbf{II.11}$$

y por tanto, el trabajo es el mismo por los dos caminos, y concluimos que el campo gravitatorio creado por un cuerpo material es conservativo.

Se infiere de lo anterior que en el campo gravitatorio, **el trabajo realizado a lo largo de una trayectoria cerrada es nulo.**

6. Energía potencial

Si en una zona del espacio donde existe un campo de fuerzas conservativo se sitúa un cuerpo de masa m, el trabajo realizado por el campo para llevar el cuerpo m desde el punto A al punto B, no depende del camino recorrido; es evidente que el trabajo realizado entre dos puntos A y B se puede considerar como la diferencia de valor que toma cierta magnitud en dichos puntos. A esta magnitud escalar, función de la posición, cuya variación es el trabajo realizado, se le llama **energía potencial Ep**.

Si calculamos el trabajo que realiza la fuerza peso cuando se deja caer un cuerpo desde una altura h sobre la superficie terrestre, podremos comprobar que el trabajo depende de la

posición y del peso del cuerpo (energía potencial gravitatoria), de forma que el valor del trabajo es la disminución de la energía potencial, es decir:

$$W_{peso} = Ep_{inicial} - Ep_{final} = -\Delta Ep \qquad \textbf{II.12}$$

En general teniendo en cuenta el concepto de trabajo, para un desplazamiento diferencial $d\vec{r}$ (muy pequeño), la energía potencial es una magnitud escalar tal que:

$$dEp = -\vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad \textbf{II.13}$$

Esta expresión nos va a permitir calcular el valor de la energía potencial en campos cuya expresión de la fuerza se conoce.

Como sabemos del curso anterior, el trabajo realizado sobre un cuerpo es igual es igual al incremento de la energía cinética (teorema de las fuerzas vivas):

$$W_{A\to B} = Ec(B) - Ec(A) \qquad \textbf{II.14}$$

Igualando las expresiones II.12 y II.14 , se obtiene:

$$Ep(A) - Ep(B) = Ec(B) - Ec(A) \qquad \textbf{II.15}$$

reordenando términos se obtiene:

$$Ep(A) + Ec(A) = Ep(B) + Ec(B) \qquad \textbf{II.16}$$

que corresponde al principio de conservación de la energía mecánica para un campo conservativo.

En un campo de fuerzas conservativo, la energía mecánica de un cuerpo es la misma cualquiera que sea la posición en que éste se encuentre , es decir la energía mecánica se conserva.

¿Y qué ocurre cuando existen fuerzas no conservativas?

En este caso no podemos aplicar la ecuación II.16. El caso más frecuente es cuando existen fuerzas disipativas (fuerzas de rozamiento). Debemos tener en cuenta que, como la variación de la energía cinética que experimenta una partícula que se desplaza entre dos posiciones A y B es el igual al trabajo realizado por las fuerzas que actúan sobre ella, en ese trabajo debemos incluir tanto el trabajo realizado por las fuerzas no conservativas (disipativas) como por las fuerzas conservativas:

$$\underbrace{W_{A\to B}}_{total} = \underbrace{W_{A\to B}}_{fuerzas\ conservativas} + \underbrace{W_{A\to B}}_{fuerzas\ no\ conservativas} = Ec(B) - Ec(A) \qquad \textbf{II.17}$$

pero como el trabajo de las fuerzas conservativas viene dado por II.12, la expresión II.17 la podemos expresar como:

$$Ep(A) - Ep(B) + \underbrace{W_{A\to B}}_{fuerzas\ no\ conservativas} = Ec(B) - Ec(A) \qquad \textbf{II.18}$$

reagrupando términos, la expresión II.18, y recordando el concepto de energía mecánica, queda:

$$E_{M_B} - E_{M_A} = \underbrace{W_{A\to B}}_{fuerzas\ no\ conservativas} \qquad \textbf{II.19}$$

este resultado indica que el trabajo realizado por las fuerzas no conservativas en el desplazamiento entre las posiciones A y B coincide con la diferencia de energía mecánica entre esas dos posiciones.

Conviene dejar claro que la no conservación de la energía mecánica no significa una pérdida de la energía y por tanto una violación del principio de conservación de la energía.

6.1. Energía potencial gravitatoria

Para determinar la función energía potencial (Ep) del sistema formado por una partícula de masa m y la Tierra en el punto A, calcularemos el trabajo que realiza el campo (la fuerza gravitatoria) al desplazar un cuerpo de masa m por una trayectoria arbitraria desde una posición A, a una distancia r_A del cuerpo de masa M responsable del campo, hasta una posición final B que dista r_B de M (ver figura 8).

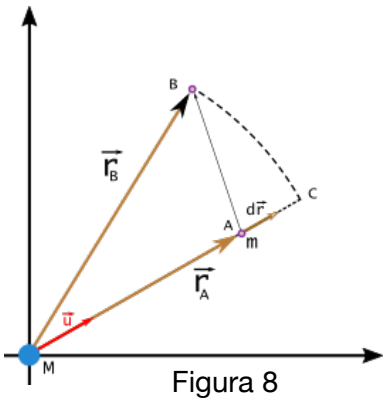


Figura 8

Debemos tener en cuenta que tanto la dirección como el módulo de la fuerza gravitatoria varían de un punto a otro de la trayectoria. El trabajo total será la suma de todos los trabajos elementales que se realizan en desplazamientos tan pequeños como podamos considerar (recordar II.10)

Cuando el número de estos sumandos tiende al infinito, el cálculo de esa suma infinita de sumandos nos lleva al concepto de integral, y la expresión II.10 se expresa:

$$W = \int_{r_A}^{r_B} \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad \textbf{II.20}$$

Como sabemos la fuerza gravitatoria es conservativa y en consecuencia, el trabajo realizado es independiente de la trayectoria seguida; podemos escoger una trayectoria "más cómoda" para calcular el valor de la integral II.20. La trayectoria que elegiremos será A-C-B.

Como el trabajo realizado por el campo es independiente de la trayectoria, solo depende de los puntos inicial y final; esto nos permite caracterizar al campo gravitatorio mediante una magnitud escalar, que denominaremos energía potencial gravitatoria.

El trabajo que realiza el campo desde A hasta B es:

$$W_{A\to B} = W_{A\to C} + W_{C\to B} \qquad \textbf{II.21}$$

Sabemos que el trabajo realizado desde C a B es cero, ya que la fuerza y el desplazamiento son perpendiculares. La expresión II.21 queda:

$$W_{A\to B} = W_{A\to C} = \int_{r_A}^{r_B} -G\frac{M\cdot m}{r^2}\overrightarrow{u}\cdot d\vec{r} \qquad \textbf{II.22}$$

En el tramo A-C, el vector unitario $\overrightarrow{u}$ y el vector $d\vec{r}$ forman un ángulo de 0° , por lo que su producto escalar es igual al producto de sus módulos, es decir dr; la expresión II.22 queda:

$$W_{A\to B} = W_{A\to C} = \int_{r_A}^{r_B} -G\frac{M\cdot m}{r^2}dr \qquad \textbf{II.23}$$

Restaría resolver la integral [en estos momentos del curso nos hace falta un acto de fe]:

$$W_{A\to B} = \int_{r_A}^{r_B} -G\frac{M\cdot m}{r^2}dr = G\frac{M\cdot m}{r}\Big|_{r_A}^{r_B} = G\frac{Mm}{r_B} - G\frac{Mm}{r_A} \qquad \textbf{II.24}$$

Teniendo en cuenta II.12 y II.24, es decir:

$$W_{A\to B} = Ep(A) - Ep(B) \quad \text{y} \quad W_{A\to B} = G\frac{Mm}{r_B} - G\frac{Mm}{r_A}$$

podemos decir que:

$$Ep(A) - Ep(B) = -G\frac{Mm}{r_A} + G\frac{Mm}{r_B} \qquad \textbf{II.25}$$

Definida la energía potencial de esta forma **solo tiene sentido hablar de la diferencia de energía potencial gravitatoria entre dos puntos** ya que es imposible conocer el valor de la energía potencial gravitatoria absoluta; parece claro, que debemos elegir un origen de energía potencial gravitatoria. Dado que la acción gravitatoria de M sobre m es nula si el cuerpo de masa m se encuentra infinitamente alejado del cuerpo M, podemos elegir el origen de energía potencial en el infinito (Ep=0), y por tanto la expresión II.25 queda:

$$Ep_A - Ep(\infty) = -G\frac{Mm}{r_A} + 0 \implies Ep(A) = -\frac{GMm}{r_A} \quad (origen\ Ep = 0\ \ en\ el\ \infty) \qquad \textbf{II.26}$$

El localizar el origen de energía potencial gravitatoria en el infinito implica que la energía potencial gravitatoria es siempre negativa, y por ello aumenta su valor a medida que lo hace la distancia entre sus masas. El signo menos viene a indicar que, dada la interacción gravitatoria de M sobre m, para desplazar una masa desde el punto A hasta el infinito, se realiza trabajo en contra del campo.

7. Potencial gravitatorio. Superficies equipotenciales

Además de caracterizar el campo por una intensidad de campo gravitatorio (magnitud vectorial) se le puede asociar una magnitud escalar, **potencial gravitatorio U**, que se define como la energía potencial gravitatoria por unidad de masa colocada en ese punto:

$$U_A = \frac{Ep(A)}{m} \qquad \textbf{II.27}$$

Teniendo en cuenta II.26 se obtiene:

$$U_A = -\frac{\frac{GMm}{r_A}}{m} = -\frac{GM}{r_A} \quad (Ep_\infty = 0) \qquad \textbf{II.28}$$

entre dos puntos A y B :

$$U_A - U_B = -\frac{GM}{r_A} - \left(-\frac{GM}{r_B}\right) \qquad \textbf{II.29}$$

U_A-U_B recibe el nombre de **diferencia de potencial entre esos dos puntos**.

Evidentemente, el origen de potenciales (U=0) está fijado en el infinito.

El valor del potencial gravitatorio en un punto del campo gravitatorio coincide con el trabajo externo que debemos realizar para trasladar la unidad de masa desde el infinito hasta dicho punto, aplicando sobre ella una fuerza exterior igual y opuesta a la fuerza gravitatoria.

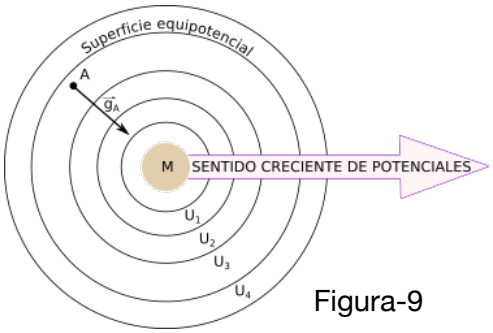


Figura-9

Por su definición, **el potencial gravitatorio es una magnitud escalar** cuyas dimensiones son las de trabajo/masa y que en el Sistema Internacional se mide en J/kg. De acuerdo con II.28, el potencial gravitatorio tiene el mismo valor en todos los puntos que estén a la misma distancia de la masa puntual que crea el campo. En el espacio que rodea a la masa puntual que crea el campo, las superficies equipotenciales son esféricas (en el plano son circunferencias) concéntricas y de valores crecientes para radios cada vez mayores (ver figura 9).

Dada la forma de las superficies equipotenciales, resulta evidente que el vector intensidad del campo gravitatorio es perpendicular en todos los puntos a la superficie equipotencial. El sentido de la intensidad del campo gravitatorio (que está dado por $-\vec{u}$) es el de los potenciales decrecientes.

7.1. Campo, potencial y energía potencial de una distribución de masas puntuales.

Si queremos calcular la intensidad del campo o el potencial en el caso de que sean varias masas las que crean el campo gravitatorio, utilizaremos **el principio de superposición**.

La intensidad del campo gravitatorio (magnitud vectorial) creado por varias masas puntuales en un punto P es la suma vectorial de las intensidades del campo en dicho punto suponiendo que estuviera creado por una sola masa cada vez.

De forma análoga, el potencial gravitatorio (magnitud escalar) dado por una distribución de masas puntuales es la suma algebraica de los potenciales en ese punto debidos a cada masa por separado.

Supongamos el caso más sencillo para luego generalizar. Sean dos masas puntuales M1 y M2 que se encuentran en los puntos O1 y O2 y queremos determinar la intensidad del campo gravitatorio creado por ambas en el punto P. (figura-10).

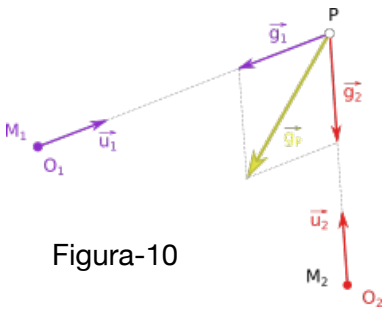


Figura-10

La intensidad en el punto P del campo gravitatorio debido a M1 (como si no estuviese el otro cuerpo) es:

$$\vec{g}_1 = -\, g_1 \cdot \vec{u}_1$$

Actuando del mismo modo para el cuerpo M_2, la intensidad en P será:

$$\vec{g}_2 = -\, g_2 \cdot \vec{u}_2$$

Aplicando el principio de superposición, la intensidad del campo gravitatorio en el punto P , debido a las dos masas es:

$$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2$$

Generalizando para n masas puntuales:

$$\vec{g} = \sum_{i=1}^{n} \vec{g}_i \qquad \textbf{II.30}$$

Las líneas de fuerza del campo gravitatorio creado por dos masas puntuales (o por más) ya no son, en general, rectas sino curvas.

La intensidad del campo gravitatorio es en cada punto, tangente a la línea de fuerza. En el caso de dos masas puntuales iguales, el campo gravitatorio es nulo en el punto medio entre las dos masas puesto que, en este caso, la suma vectorial se anula por tener ambos el mismo módulo, dirección y sentidos opuestos.

El potencial gravitatorio en un punto P del campo debido a dos masas será la suma escalar del potencial debido a una masa (suponiendo que la otra masa no estuviese) y del potencial debido a la segunda masa (suponiendo que no existiese la primera); en nuestro caso (figura-10) el potencial en el punto P es:

$$U_P = U_1 + U_2 \qquad \textbf{II.31}$$

Generalizando para n masas puntuales:

$$U = \sum_{i=1}^{n} U_i \qquad \textbf{II.32}$$

Como el potencial gravitatorio en un punto representa la energía potencial de la unidad de masa en ese punto, se podrá establecer una relación entre la diferencia de potencial entre dos puntos de un campo gravitatorio y las diferencias de energías potenciales entre esos dos puntos:

$$U_A - U_B = \frac{E_{P_A}}{m} - \frac{E_{P_B}}{m} = \frac{E_{P_A} - E_{P_B}}{m} \qquad \textbf{II.33}$$

y por tanto:

$$E_{P_A} - E_{P_B} = \left(U_A - U_B\right) m \qquad \textbf{II.34}$$

y como la diferencia de energía potencial entre dos puntos es el trabajo que realiza el campo (la fuerza gravitatoria) , II.12 :

$$W_{A\to B} = \left(U_A - U_B\right) m \qquad \textbf{II.35}$$

Si el trabajo realizado por el campo es positivo, el proceso es espontáneo: todo cuerpo libre se desplaza en un campo gravitatorio hacia energías potenciales decrecientes.

Con respecto a la energía potencial total de un sistema de tres o más partículas es la suma llevada a cabo sobre todos los pares de partículas que forman el sistema. Si tenemos tres partículas debemos sumar tres factores correspondientes a las tres interacciones posibles entre cada dos partículas. El valor de la energía potencial de un sistema de partículas es el trabajo externo que debería realizarse para separar hasta el infinito las partículas, es como una "cierta energía de enlace" de ese sistema de partículas.

7.2. Intensidad de campo y potencial gravitatorio en el interior y exterior de una distribución esférica y uniforme de masa.

Si la distribución es continua es necesario el empleo del cálculo integral, en ocasiones bastante dificultoso, y que fue desarrollado por el propio Newton para dar solución a ese problema. Otra forma más directa es la aplicación del teorema de Gauss (lo veremos en la interacción electromagnética). Cualquiera de esos dos procedimientos nos llevaría al siguiente resultado:

el campo y el potencial creado por una distribución esférica y homogénea de masa en un punto exterior a la misma tiene igual intensidad que el campo creado por una masa puntual igual a la masa total a la distribución esférica y que estuviera situada en el centro de la esfera.

Supongamos una esfera maciza y homogénea de masa M, radio R y centro en el punto C y consideremos un punto P situado a una distancia r_p , de forma que ($r_p \geq R$); la intensidad del campo gravitatorio creado por la esfera en el punto P es:

$$\overrightarrow{g}_P = -GM\frac{1}{r_P{}^2}\overrightarrow{u} \qquad \textbf{II.36}$$

y el potencial gravitatorio en ese punto P tiene un valor de:

$$U_P = -GM\frac{1}{r_P} \qquad \textbf{II.37}$$

Si el punto P fuera interior a la distribución esférica ($r_p < R$) la intensidad del campo gravitatorio sería:

$$\overrightarrow{g}_P = -GM\frac{1}{R^3}r_P\overrightarrow{u} \qquad \textbf{II.38}$$

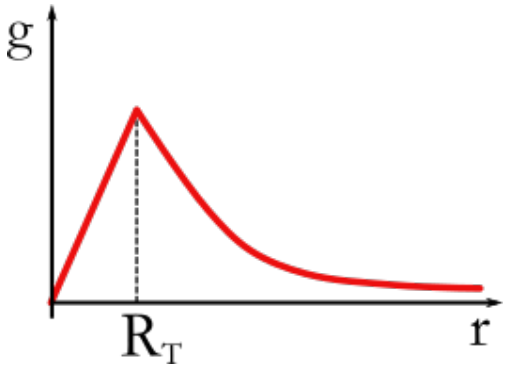


Figura 11

Dado que G, M y R son constantes, la expresión II.38 indica que el módulo de la intensidad del campo gravitatorio en el interior de una distribución esférica y homogénea de masa crece linealmente con la distancia r al centro de la distribución (figura 11). En el exterior varia inversamente con el cuadrado de la distancia al centro II.36

El valor del potencial gravitatorio para puntos interiores a una esfera maciza es:

$$U = \frac{GM}{2R^3}(r_p^2 - 3R^2) \qquad \textbf{II.39}$$

Los resultados obtenidos en II.36 y en II.38 se siguen cumpliendo cuando la distribución no sea homogénea siempre y cuando la masa esté distribuida con simetría esférica, es decir cuando la densidad puede variar de unos puntos a otros pero manteniendo el mismo valor para puntos situado a la misma distancia del centro de la distribución.

Esto último justifica la consideración de Newton de que las distancias entre los cuerpos celestes, Sol, Luna, planetas…, se deben entender como distancia entre sus centros. La forma de estos cuerpos es prácticamente esférica y aunque no sean homogéneos (recordar la constitución interna de la Tierra) se puede considerar que la masa está distribuida con simetría esférica.

La expresión II.38 para los puntos interiores es válida considerando que la densidad es la misma en todos los puntos lo que solo ocurre en distribuciones esféricas y homogéneas; por tanto, no se cumple rigurosamente en las distribuciones no homogéneas como es el caso de nuestro planeta.

8. Campo gravitatorio terrestre

La forma de nuestro planeta y la distribución de su masa con simetría aproximadamente esférica dan validez a las expresiones II.36 para la intensidad del campo gravitatorio y II.37 para el potencial gravitatorio en puntos exteriores. La expresión II.38 para la intensidad del campo gravitatorio en puntos interiores no es rigurosamente válida aunque podemos aceptarla para cálculos que no requieran gran precisión.

Si aplicamos expresión II.36, con los datos de la masa y el radio terrestre obtenemos que, en puntos próximos a la superficie terrestre, la intensidad del campo gravitatorio terrestre (en módulo) es de aproximadamente 9,8 m/s^2.

Ese valor se puede considerar constante para puntos próximos a la superficie terrestre. Si el alejamiento es elevado los errores empiezan a hacerse considerables. Para tener una idea, si la altura es 6400 km el valor del módulo de la intensidad del campo es la cuarta parte que en la superficie.

Podríamos preguntarnos por las dimensiones de un volumen próximo a la superficie terrestre donde podamos suponer que el campo gravitatorio se comporte como uniforme (valor constante en todos sus puntos) . Por una parte la base del volumen buscado debe ser lo suficientemente pequeño para ignorar la curvatura dela Tierra y considerarla como una superficie plana; podríamos considerar esta situación como aquella en la que la dirección de una plomada no se desvíe más de un cierto valor. Si suponemos que el ángulo no debe superior a 1°, la distancia es aproximadamente 110 km [se propone llegar a este resultado].

El otro aspecto a tener en cuenta es la altura; es necesario elevarse unos 30 km por encima de la superficie terrestre para conseguir una variación de la gravedad del 1% [se propone llegar a este resultado].

Podemos representar ese espacio, en donde las superficies equipotenciales son planos paralelos a la superficie terrestre y el campo gravitatorio es el mismo en todos los puntos (figura 12).

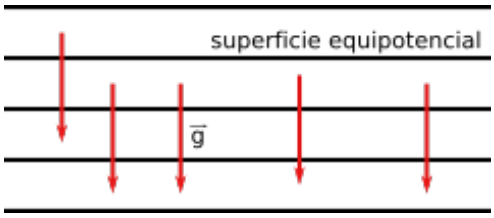


Figura 12

El potencial gravitatorio en puntos próximos a la superficie terrestre, por aplicación de II.37 vale, en unidades del Sistema Internacional, $-62{,}8\cdot10^6$ J/kg.

Al igual que ocurre con la intensidad del campo gravitatorio, el potencial gravitatorio se puede considerar constante en puntos próximos a la superficie , pero varía con la distancia. Así, para un punto situado a unos 6400 km de altura, el potencial es la mitad que en la superficie, lo que significa un aumento (tener en cuenta el signo menos).

La simetría esférica de la distribución de masa de nuestro planeta se traduce en que las superficies equipotenciales son esféricas y concéntricas centradas en el centro de la Tierra.

La dirección del vector intensidad del campo gravitatorio terrestre en cada punto es la de la recta que pasa por ese punto y el centro del la Tierra (dirección radial) siendo, por tanto, perpendicular a las superficies equipotenciales en cada punto.

La energía potencial gravitatoria terrestre de una masa m en un punto de la superficie del planeta valdrá, según II.37, $-62{,}8\cdot10^6$ m J

Al igual que el potencial gravitatorio, la energía potencial gravitatoria aumenta con la distancia a la Tierra. Hasta ahora, cuando hemos tenido que operar con la energía potencial gravitatoria terrestre, ha sido habitual asignar el nivel cero a puntos de la superficie, mientras que a puntos por encima de ella y situados a una altura h les correspondía un valor positivo de $E_p = mgh$

En este tema hemos elegido el origen de energías potenciales en el infinito. En apariencia estas dos elecciones de nivel de referencia son opuestas; sin embargo vienen a indicar lo mismo, que el valor de la energía potencial en un punto es mayor cuanto más alejado esté ese punto del centro de la Tierra.

Otra consideración importante; cuando establecíamos la diferencia de energía potencial entre dos puntos, como mgh siendo h la diferencia de altura entre esos dos puntos, aceptábamos que el valor de $\overrightarrow{g}$ era el mismo entre esos dos puntos. Eso es correcto solo si la diferencia de altura entre esos dos puntos es despreciable frente a la distancia de cualquiera de ellos al centro de la Tierra. En efecto, sean A y B dos puntos situados respectivamente, a las distancias r_A y r_B del centro de la Tierra; la diferencia de energía potencial entre esos dos puntos, para una masa m, según II.25:

$$Ep(A) - Ep(B) = -G\frac{M_T m}{r_A} + G\frac{M_T m}{r_B} = GM_T m\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right) \qquad \textbf{II.40}$$

expresión válida para cualquier par de puntos A y B exteriores, sea cual sea la distancia entre ellos y la superficie terrestre.

Si los puntos A y B están próximos entre sí, de manera que la diferencia de altura entre ellos $r_A - r_b = h$ sea muy pequeña en comparación con r_A (o con r_B), resultará:

$$Ep(A) - Ep(B) = GM_T m\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_B + h}\right) = GM_T m\left(\frac{h}{r_B^2 + r_B h}\right) \qquad \textbf{II.41}$$

y como h es mucho menor que r_B, podemos despreciar $r_B h$ frente a r^2_B con lo que tendremos:

$$Ep(A) - Ep(B) = GM_T m\left(\frac{h}{r_B^2}\right) = mgh \qquad \textbf{II.42}$$

donde se ha tenido en cuenta II.8.

Si los puntos A o B están cerca de la superficie terrestre el módulo de la intensidad del campo gravitatorio es aproximadamente 9,8 m/s^2; si no es así tendremos que aplicar la ecuación II.37

A partir de ahora, cuando hagamos cálculos basados en el principio de conservación de la energía mecánica debemos de tener en cuenta que las variaciones de energía potencial gravitatoria entre dos puntos se determinarán como mgh si esos puntos están muy próximos entre sí; en otro caso debemos hacer uso de la expresión II.40.

9. Velocidad de escape

Cuando desde la superficie terrestre se lanza un cuerpo hacia arriba alcanza alturas tanto mayores cuanto mayor sea la velocidad de lanzamiento, pero la atracción gravitatoria termina por hacerlo volver al suelo. Se llama **velocidad de escape** desde un punto, a la velocidad con que habría que lanzar un cuerpo desde ese punto para que se pudiera alejar infinitamente.

Corresponde a un valor teórico, ya que es la velocidad que le permite a un cuerpo escapar de la acción del campo gravitatorio de otro cuerpo y llegar al infinito sin velocidad.

Para calcular esa velocidad podemos hacer uso del principio de conservación de la energía mecánica. Así, por ejemplo, la velocidad de escape desde la superficie terrestre la podemos determinar considerando que la energía mecánica de un cuerpo en un punto de la superficie terrestre desde ser la misma que en un punto infinitamente alejado (donde su energía potencial es nula por ser así como se elige el origen de energías potenciales, y su energía cinética también es nula en ese punto puesto que pretendemos únicamente que no regrese a la superficie terrestre).

Con esas consideraciones y despreciando el rozamiento con la atmósfera y la existencia de otros cuerpos (Sol, planetas,…) será:

$$-GM_T m\frac{1}{r_T}+\frac{1}{2}mv_E^2=0$$

despejando se obtiene:

$$v_E=\sqrt{\frac{2GM_T}{r_T}} \qquad \textbf{II.43}$$

al sustituir por los valores correspondientes a nuestro planeta en la ecuación II.43, se obtiene un valor aproximadamente de 11,2 km/s como valor de velocidad de escape desde un punto de la superficie terrestre.

10.Satélites

Al igual que los planetas describen órbitas alrededor del Sol que siguen las leyes de Kepler, hay cuerpos que giran en torno a los planetas y que también cumplen las leyes de Kepler, son los satélites. La Tierra tiene un satélite natural, la Luna, y desde hace años, muchos satélites artificiales.

Para que el satélite se mantenga en órbita, no debe estar en reposo sino moviéndose con la velocidad adecuada. Deduciremos esa velocidad orbital suponiendo que el movimiento en torno a la Tierra es circular. Sobre el satélite solo existe la fuerza que ejerce la Tierra sobre el satélite, y por aplicación de la segunda ley de Newton, obtenemos:

$$\left|\overrightarrow{F}_g\right|=G\frac{M_T m_s}{r^2}$$

$$\left|\overrightarrow{F}_g\right|=m_s\frac{v^2}{r}$$

y por tanto, $m_s\frac{v^2}{r}=G\frac{M_T m_s}{r^2}$ y despejando se obtiene:

$$v=\sqrt{\frac{GM_T}{r}} \qquad \textbf{II.44}$$

La energía mecánica del satélite en órbita vale:

$$E_{M_S} = -\frac{GM_T m_s}{r} + \frac{1}{2} m_s v^2$$

sustituyendo el valor de la velocidad orbital que se ha obtenido en II.44 se obtiene:

$$E_{M_S} = -\frac{GM_T m_s}{r} + \frac{1}{2}\frac{GM_T m_s}{r} = -\frac{1}{2}\frac{GM_T m_s}{r} \qquad \textbf{II.45}$$

el resultado obtenido indica que la energía mecánica del satélite es negativa como corresponde al hecho de que, al mantenerse en órbita, se mantiene ligado a la Tierra. Si queremos que se aleje debemos comunicarle energía.

Resultados análogos se hubieran obtenido para los satélites de cualquier otro planeta o para los propios planetas en su movimiento alrededor del Sol, sin más que sustituir la masa de la Tierra por la masa correspondiente.

Los satélites pueden obtener distintas órbitas estables alrededor del centro de la Tierra; la elección de la órbita se determina en función de la finalidad del satélite.

Según la altura a que se encuentren los satélites respecto de la superficie terrestre, sus órbitas se clasifican en órbitas bajas (LEO) , órbitas medias (MEO) y órbitas geostacionarias (GEO).

Los satélites LEO tienen poca cobertura. Se encuentran entre los 600-2000 km. Consumen una gran energía debido a la gran rapidez a la que se desplazan. Se emplean para proporcionar datos geológicos, telefonía móvil, y utilizan un ancho de banda entre baja y media. Gran problema de basura espacial.

Los satélites MEO se encuentran entre 10000 y 20000 km y por tanto tienen una mayor cobertura que los anteriores aunque presentan el mismo problema de chatarra espacial; necesitan menos combustible porque su velocidad es menor; se emplean en telecomunicaciones, televisión y telefonía móvil; utilizan banda ancha (Mbps).

Los satélites GEO tienen sus órbitas situadas a una altura fija: 35786 km sobre el ecuador; a esta altura el período del satélite coincide con el de la tierra, es decir el satélite tarda 24 horas en dar una vuelta sobre nuestro planeta; por esta razón reciben el nombre de geoestacionarios o geosíncronos. Se utilizan para servicios meteorológicos y con tres de ellos se puede cubrir toda la tierra y asegurar un sistema de comunicación mundial. Como inconveniente podríamos indicar que requieren dispositivos para mantenerse en una órbita fija y esos dispositivos suelen ser muy pesados; al encontrarse a esa gran altura hay un cierto retraso en la señal recibida o enviada.

El tipo de trayectoria que presenta un satélite respecto al centro de un planeta puede establecerse en función de su energía mecánica, dando lugar a las siguientes posibilidades:

11.Algunas aclaraciones

Vamos a indicar ahora algunas diferencias entre las siguientes situaciones, ***falta de gravedad, ingravidez y vacío***, en las que se suele producir confusiones. Todos hemos visto imágenes de astronautas en naves "flotando" como si no pesaran. Es frecuente considerar que eso se debe

a la "falta de gravedad" y no es cierto; a la distancia a la que orbitan los satélites artificiales es verdad que la "gravedad" es mucho menor que sobre la superficie terrestre, pero no es nula, no hay "falta de gravedad".

Energía mecánica	Tipo de órbita
$E_M < 0$	Si la energía mecánica del satélite es negativa, no puede escapar de la fuerza gravitatoria terrestre. Describe una órbita elíptica con la Tierra en uno de los focos; la excentricidad de la órbita aumenta con la rapidez. Situación particular es cuando la energía mecánica del satélite es la mitad de la energía potencial, pues en este caso la órbita es circular con la Tierra como centro.
$E_M = 0$	En este caso, el satélite posee suficiente energía para escapar de la atracción terrestre y describe una órbita abierta que corresponde a una parábola.
$E_M > 0$	Si la energía mecánica del satélite es positiva, podría llegar al infinito con energía cinética sobrante y la trayectoria descrita es una hipérbola

Es también frecuente considerar que los cuerpos en el vacío no pesan y eso tampoco es cierto. Es verdad que en un lugar del espacio suficientemente alejado de cualquier planeta u otros cuerpos la intensidad del campo gravitatorio puede ser tan pequeña que podemos considerar que en ese lugar hay "falta de gravedad" al mismo tiempo que la muy escasa densidad de partículas materiales permite decir que hay "vacío" pero no es por el "vacío" por lo que hay "falta de gravedad" sino por tratarse de un lugar suficientemente alejado de cualquier cuerpo material. Los astronautas que "flotan" en la nave se encuentran "ingrávidos" como consecuencia de estar cayendo libremente hacia la Tierra. (Recordar la explicación de Newton).

Por otra parte, si los cohetes propulsores de la nave se pusieran en funcionamiento y la nave se moviera aceleradamente, los astronautas se "pegarían" al suelo, y un objeto que se les escapara de las manos "caería" aceleradamente de la misma forma que si la nave hubiera estado posada sobre un planeta u otro cuerpo que ejerciera efectos gravitatorios. Si los astronautas no pudieran ver lo que les rodea ni oír el ruido de los motores no podrían distinguir si la nave está posada en un planeta o se está moviendo aceleradamente lejos de toda acción gravitatoria. (Recordemos que la intensidad del campo gravitatorio tiene unidades de aceleración).

En su Teoría General de la Relatividad, Albert Einstein estableció un Principio de equivalencia por el que los fenómenos físicos que ocurren en un sistema acelerado son idénticos a los que ocurren en un sistema en reposo bajo la acción de un campo gravitatorio.

12.Teoría del caos

La teoría del caos estudia el comportamiento cualitativo de los sistemas caóticos deterministas.

Un sistema dinámico es un sistema que evoluciona con el tiempo. Podemos hacer la siguiente clasificación de los sistemas dinámicos:

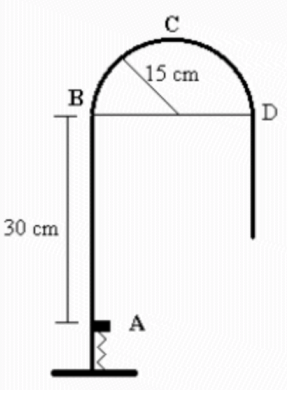
SISTEMAS DINÁMICOS		
ESTABLES	INESTABLES	CAÓTICOS
Pequeños cambios en las condiciones iniciales no provocan grandes cambios. Existen leyes que gobiernan el sistema, las ecuaciones que lo rigen son lineales y tienden a un punto o a una órbita estable. Ejemplo: Sistema Solar	Este tipo de sistemas tienen una gran dependencia de las condiciones iniciales, pequeñas variaciones iniciales provocan grandes variaciones en el comportamiento. No hay leyes que lo gobiernen. Ejemplo: atasco de tráfico.	Son muy sensibles a las variaciones de las condiciones iniciales; son sistemas que están regidos por leyes (deterministas) ya que su evolución temporal está determinada por leyes bien definidas, aunque éstas no son lineales. Aunque parecen desordenados, no lo son. Ejemplos: estudio del clima o meteorología.

La teoría del caos surge con el problema de los tres cuerpos, es decir determinar en cualquier instante las posiciones y velocidades de tres cuerpos de cualquier masa, sometidos a su atracción gravitatoria mutua y partiendo de unas posiciones y velocidades iniciales. Se ha comprobado que el problema tiene una solución aleatoria, incluso introduciendo algunos supuestos que lo simplifica.

Un caso particular, el más sencillo, es considerar que los dos cuerpos están en órbitas circulares. Aun así, el problema restringido es caótico, aunque existen cinco puntos de equilibrios conocidos como los cinco puntos de Lagrange.

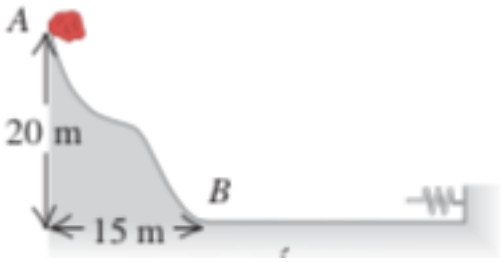
E. Lorenz trató mediante cálculo en ordenador el comportamiento de un sistema de ecuaciones diferenciales para modelar la evolución de la atmósfera. Después de muchos ensayos, comprobó que para condiciones iniciales muy próximas, las simulaciones eran muy diferentes, aunque todas convergían hacia un atractor (sistema dinámico determinista) en forma de mariposa. [ver video péndulo doble]

Actividades

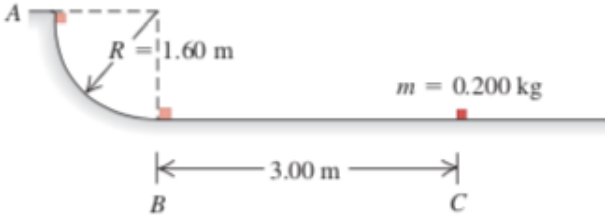


1. Si el radio de la órbita circular de un planeta A es cuatro veces mayor que la de otro B, ¿en qué relación están sus períodos? ¿Y sus velocidades medias?
2. Un bloque de 200 g permanece en reposo en A cuando el muelle de constante 500 N/m está comprimido 7,5 cm. Se suelta el dispositivo de sujeción y el bloque recorre el camino ABCD. (g= 9,80 m/s^2) Calcular:
   - La velocidad del bloque cuando pasa por B, C y D.
   - La reacción del raíl cuando pasa por el punto más alto, C.
3. Calcular las energías (a) potencial, (b) cinética y (c) mecánica, de un laboratorio espacial de 30 Mg de masa que describe una órbita de 70 Mm de radio alrededor de la Tierra. (d) ¿cuál de todas esas energías (si existe alguna) aumentaría cuando el radio de la órbita disminuye? Datos: Radio terrestre: 6370 km; g_0= 9,80 m/s^2
4. Una piedra de 15,0 kg baja deslizándose una colina nevada partiendo del punto A con una rapidez de 10,0 m/s (ver figura). No hay rozamiento en la colina entre los puntos A y B,

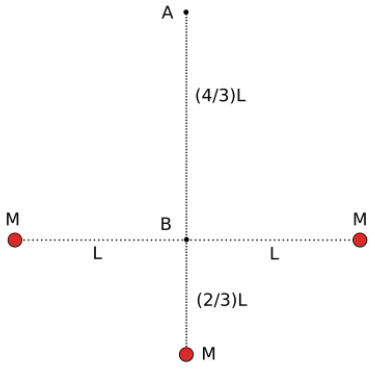
pero si en el terreno plano de la base , entre B y la pared. Después de entrar en la zona con rozamiento, la piedra recorre 100 m y choca con un resorte muy largo y ligero, cuya constante de elasticidad es 2,00 N/m. El coeficiente cinético de rozamiento entre la piedra y el suelo es 0,2. (a) ¿qué rapidez tiene la piedra en B? (b) ¿qué distancia comprimirá la piedra al resorte? g= 9,80 m/s^2



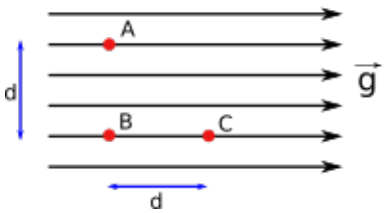
5. En un puesto de carga de camiones de una oficina de correos, un paquete pequeño de 0,200 kg se suelta del reposo en el punto A de una vía que forma un cuarto de círculo con radio de 1,60 m. El paquete se desliza por la vía y llega al punto B con una rapidez de 4,80 m/s. A partir de aquí, el paquete desliza 3,00 m sobre una superficie horizontal hasta el punto C, donde se detiene. a) ¿qué coeficiente de rozamiento tiene la superficie horizontal? (b) ¿cuánto trabajo realiza la fricción sobre el paquete al deslizar éste por el arco circular entre A y B? g= 9,80 m/s^2



6. (Examen 18-19) Tres partículas iguales de masa M están fijas como se indica en la figura. Determina:
   (a) El potencial gravitatorio en los puntos A y B.
   (b) Si situamos una cuarta partícula en el punto A y la soltamos con velocidad inicial nula, se moverá hacia B ¿por qué?.
   (c) La velocidad de la cuarta partícula cuando pase por B.
   Supón conocida G



7. Dos masas puntuales, m_1=5 kg y m_2=10 kg, se encuentran situadas en el plano XY en dos puntos de coordenadas r_1=(0,1)m y r_2=(0,7)m, respectivamente. Determina la intensidad del campo gravitatorio en un punto A, de coordenadas (4,4) m.
8. Una masa de 250 gramos que parte del reposo desde una posición situada a 0,50 metros de altura sobre el suelo se deja caer deslizando por un plano inclinado, llegando al suelo con una rapidez de 2,0 m/s. ¿cuál ha sido el trabajo realizado por el peso y cuál el efectuado por la fuerza de rozamiento? (g=10 m/s^2)
9. Un satélite describe una órbita en torno a la Tierra con un período de revolución igual al terrestre. A) Explica cuántas órbitas son posibles y calcule su(s) radio. B) Determine la relación entre la velocidad de escape desde un punto de su órbita y la velocidad orbital del satélite. Datos: Radio terrestre=6400 km; g_0 = 10 m/s^2
10. En una región del espacio existe un campo gravitatorio uniforme de intensidad g, representado en la figura por sus



líneas de campo. A) Razona el valor del trabajo que se realiza al trasladar la unidad de masa desde el punto A al B y desde el B al C. B) Analiza las analogías y diferencias entre el campo descrito y el campo gravitatorio terrestre.

11. Sean A y B dos puntos de la órbita elíptica de un cometa alrededor del Sol, estando A más alejado del Sol que B. A) Haga un análisis energético del movimiento del cometa y compare los valores de la energía cinética y potencial en A y en B. B) ¿En cuál de los puntos es mayor el módulo de la velocidad' ¿Y el de la aceleración?
12. Un meteorito se encuentra inicialmente en reposo a una distancia sobre la superficie terrestre igual a 6 veces el radio de la Tierra. Calcular la velocidad con que llegaría a la superficie terrestre si en su caída prescindimos del rozamiento con la atmósfera. Datos: G = $6{,}67\cdot10^{-11}$ (SI) ; Masa de la tierra = $5{,}97\cdot10^{24}$ kg; Radio terrestre: 6371 km.
13. La distancia media del Sol a Júpiter es 5,2 veces mayor que la distancia entre el Sol y la Tierra. ¿Cuál es el período de la órbita de Júpiter alrededor del Sol? Dato: el periodo terrestre es conocido.

Soluciones

1. A/B: 8; 0,5
2. B, D: 2,9 m/s; C : 2,3 m/s; Reacción C: 5,1 N
3. a) $-1{,}7\cdot10^{11}$ J; b) $8{,}5\cdot10^{10}$ J; c) $-8{,}5\cdot10^{10}$ J (en realidad $-9\cdot10^{10}$ J); d) energía cinética
4. a) 22,2 m/s; b) 16,4 m
5. a) 0,392 ; b) -0,84 J
6. a) A: -17GM/10L; B: -7GM/2L; b) Si; se mueve hacia potenciales decrecientes; c) $v_B = \sqrt{\frac{18GM}{5L}}$
7. $\vec{g}_A = \left(\frac{-12G}{25}\vec{i} + \frac{3{,}0G}{25}\vec{j}\right)\ \frac{N}{kg}$
8. peso: 1,3 J; rozamiento: -0,75 J
9. A) si es geoestacionario 1, sobre el plano ecuatorial; $4{,}3\cdot10^{4}$ km desde el centro de la Tierra; $3{,}6\cdot10^{4}$ km desde la superficie. [resultados con dos cifras significativas] B) $v_E = \sqrt{2}v_0$
10. A) desde A hasta B el trabajo que realiza el campo es cero, ya que están al mismo potencial gravitatorio; Desde B hasta C, el trabajo realizado por el campo es $\underbrace{W_{B\to C}}_{campo} = gd$ J (por unidad de masa)
11. A) la energía mecánica se conserva (la fuerza gravitatoria es conservativa) ; la energía cinética en B es mayor que en A y ocurre lo contrario con la energía potencial gravitatoria; B) la velocidad y la aceleración en B es mayor que en A
12. 10,4 km/s
13. 11,86 años

Bibliografía:

Tipler, Paul A. Física Editorial Reverté SA