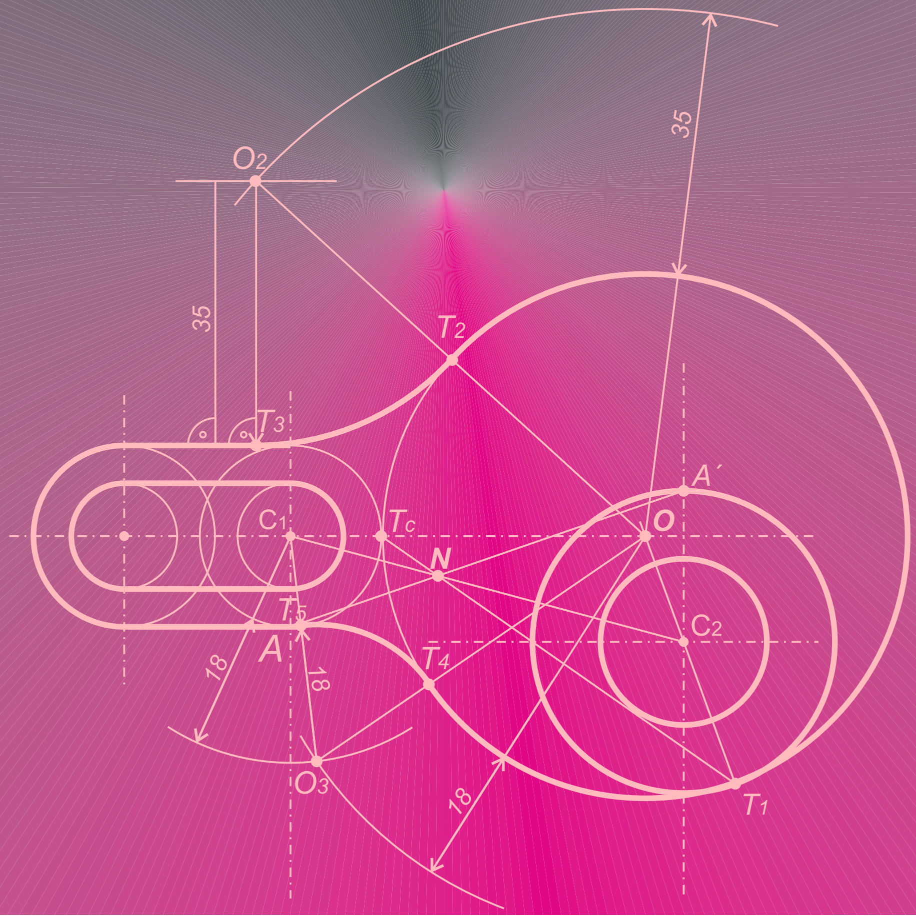
DIBUJO TÉCNICO II. 2º BACHILLERATO

TANGENCIAS

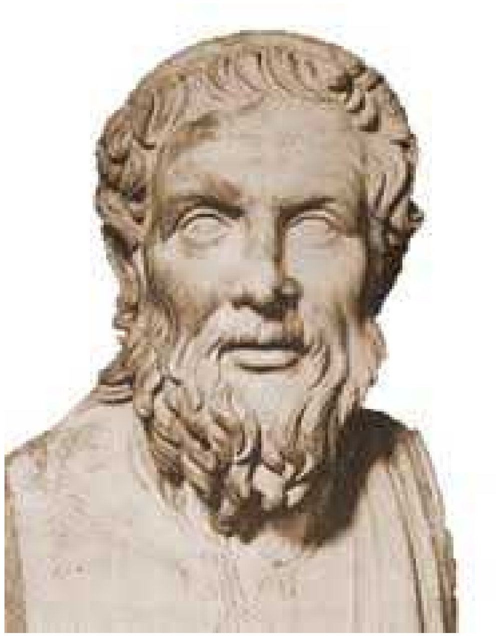
PROBLEMAS DE APOLONIO

TANGENCIAS COMO APLICACIÓN DE LOS CONCEPTOS DE POTENCIA E INVERSIÓN



JUAN DÍAZ ALMAGRO

PROBLEMAS DE APOLONIO



Apolonio de Pérgamo (Pergamo, c. 262 - Alejandría, c. 190 a. C.) fue un geómetra griego famoso por su obra sobre las secciones cónicas. Fue Apolonio quien dio el nombre de elipse, parábola e hipérbola, a las figuras que conocemos.

También se le atribuye la hipótesis de las órbitas excéntricas o teoría de los epiciclos para intentar explicar el movimiento aparente de los planetas y de la velocidad variable de la Luna.

Sus extensos trabajos sobre geometría tratan de las secciones cónicas y de las curvas planas y la cuadratura de sus áreas.

Recopiló su obra en ocho libros y fue conocido con el sobrenombre de El Gran Geómetra.

Propuso y resolvió el problema de hallar las circunferencias tangentes a tres círculos dados, conocido como problema de Apolonio.

El problema aparece en su obra, hoy perdida,

Las Tangencias o Los Contactos,

PROBLEMAS DE APOLONIO

Dado tres objetos tales que cada uno de ellos puede ser ***un punto, una recta o una circunferencia,*** dibujar una ***circunferencia que sea tangente*** a cada uno de los tres elementos dados

Este problema da lugar a 10 casos posibles y en alguno de ellos aparecen situaciones que obligan a un tratamiento particular

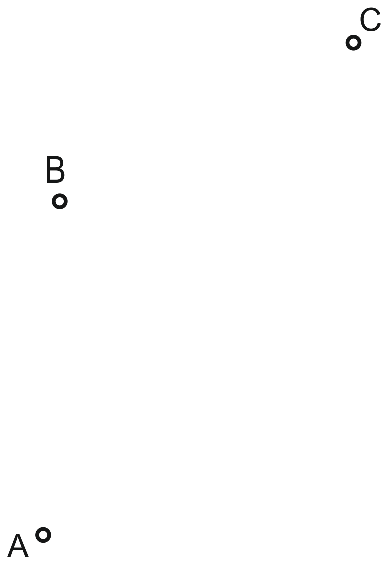
En los siguientes casos nos referiremos al punto, la recta y la circunferencia por sus iniciales:

P: punto
R: recta
C: circunferencia

PROBLEMAS DE APOLONIO

PPP

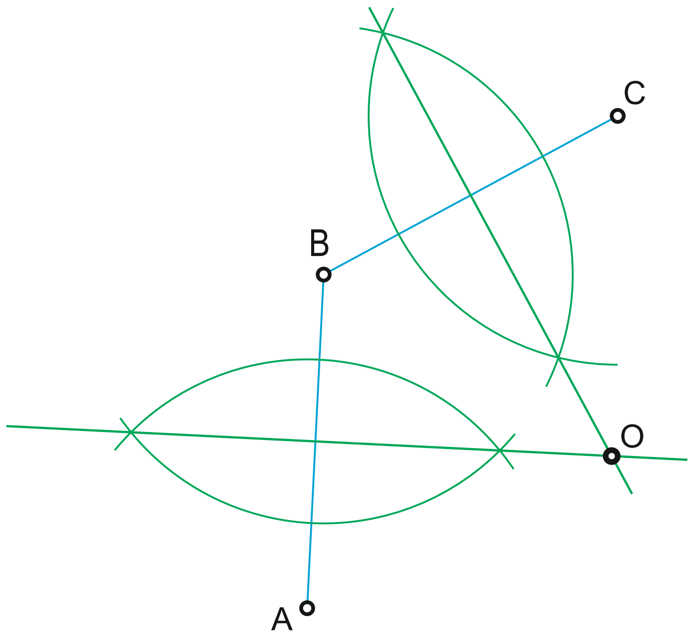
Trazar la circunferencia que pasa por tres puntos



PROBLEMAS DE APOLONIO

PPP

Trazar la circunferencia que pasa por tres puntos

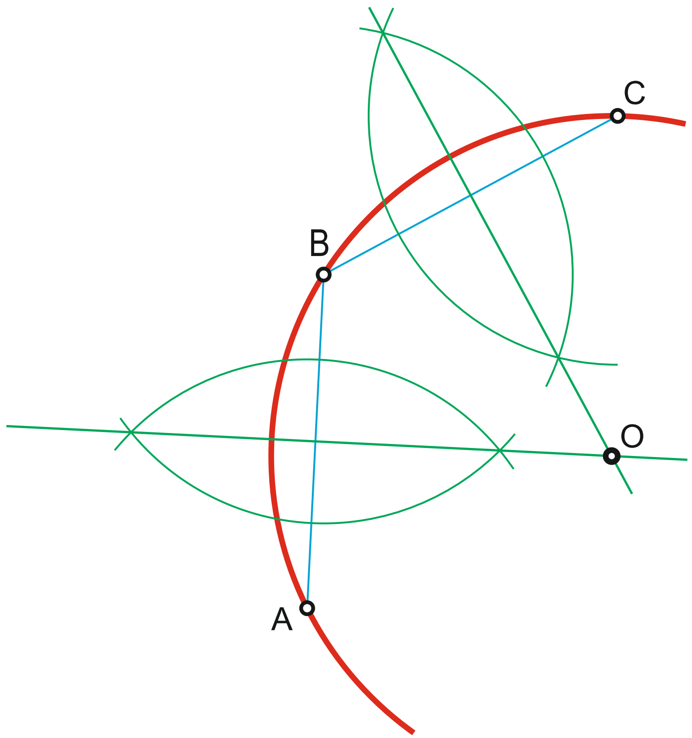


1. Trazamos las mediatrices de los segmentos que forman dos parejas de los puntos dados, en este caso de AB y BC, y obtenemos el punto O

PROBLEMAS DE APOLONIO

PPP

Trazar la circunferencia que pasa por tres puntos

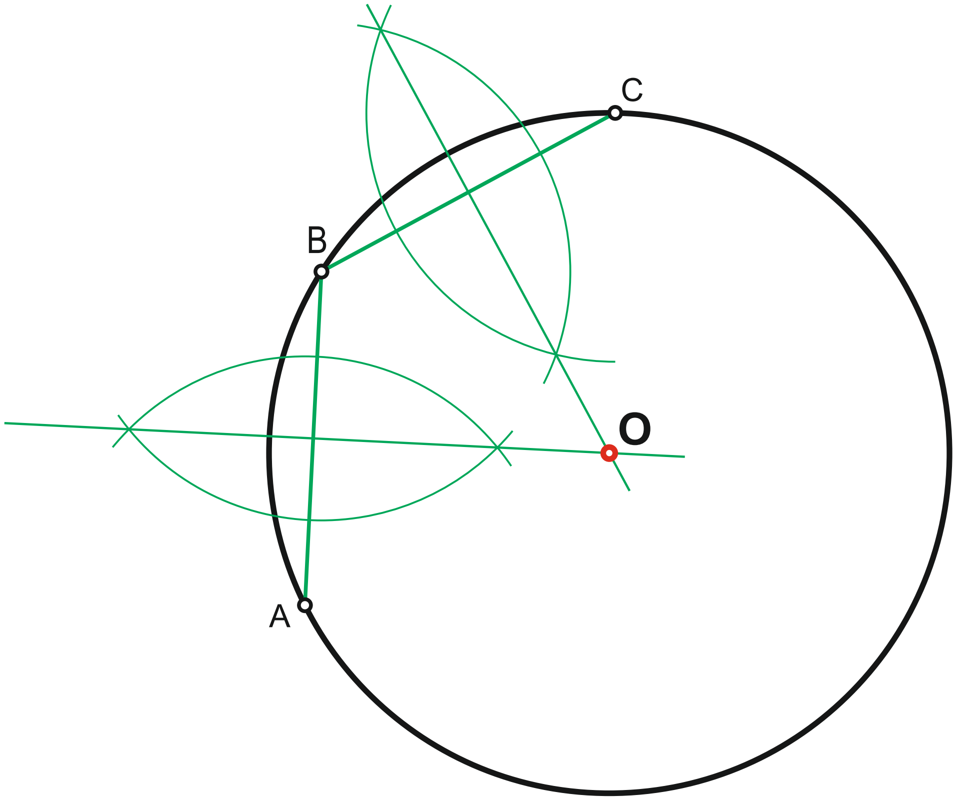


2. Si hacemos centro en O y trazamos un arco de radio OA, el arco pasará por los tres puntos A, B y C

PROBLEMAS DE APOLONIO

PPP

Trazar la circunferencia que pasa por tres puntos

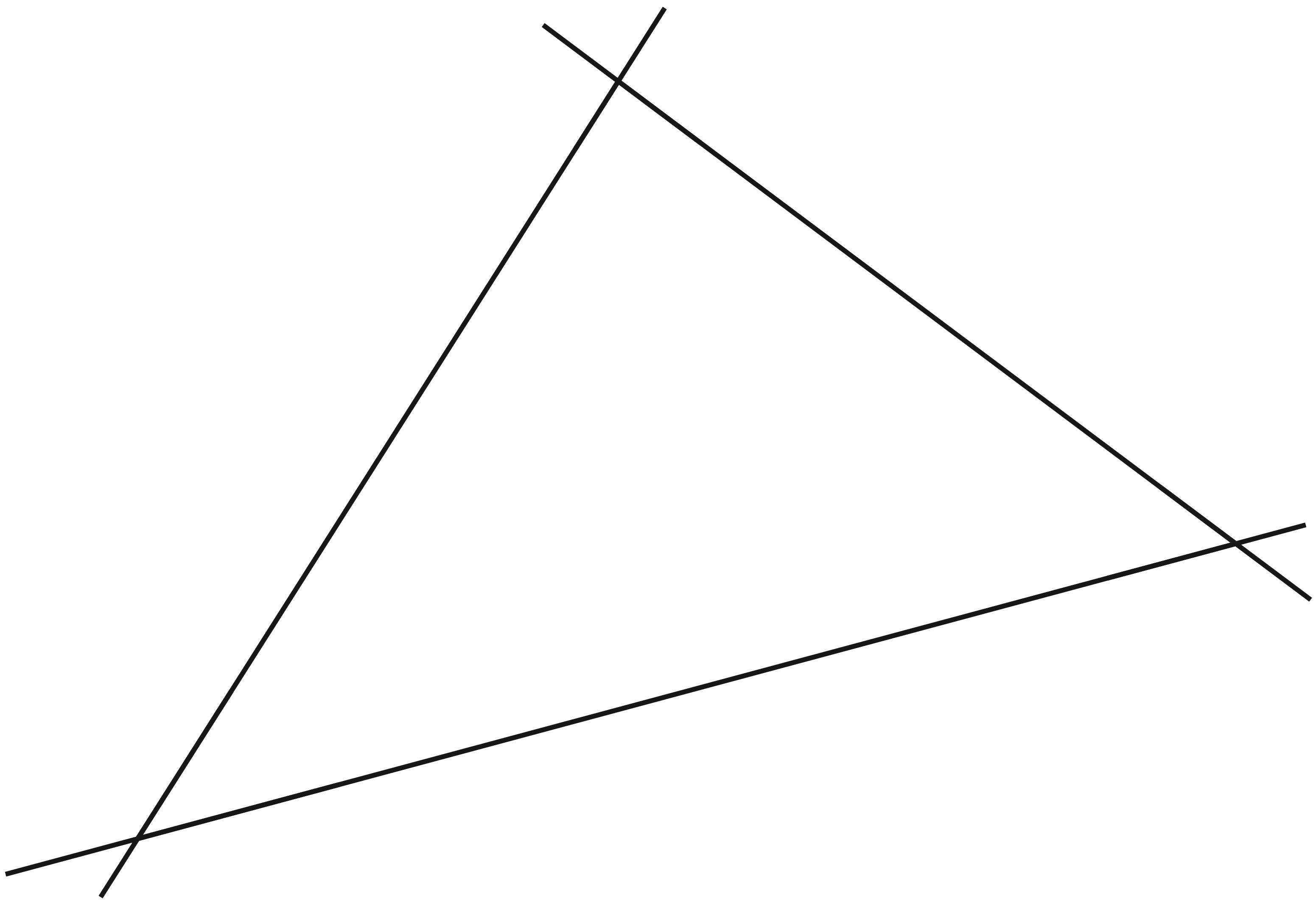


Este procedimiento también se puede utilizar a la inversa para encontrar el centro desconocido de una circunferencia dada.
Se trazan dos secantes y sus mediatrices

PROBLEMAS DE APOLONIO

RRR

Circunferencias tangentes a tres rectas que se cortan entre sí

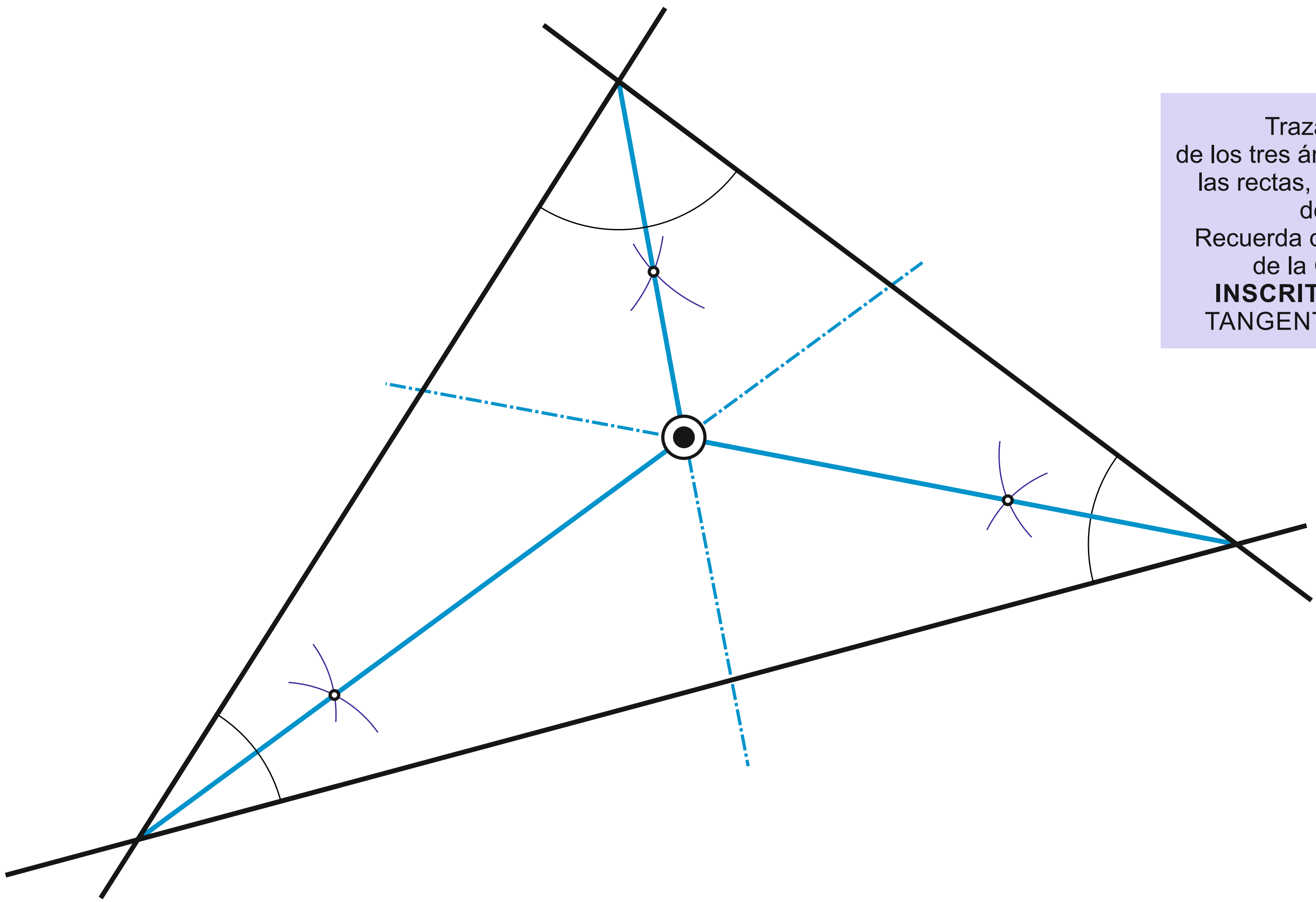


JUAN DÍAZ ALMAGRO

PROBLEMAS DE APOLONIO

RRR

Circunferencias tangentes a tres rectas que se cortan entre sí

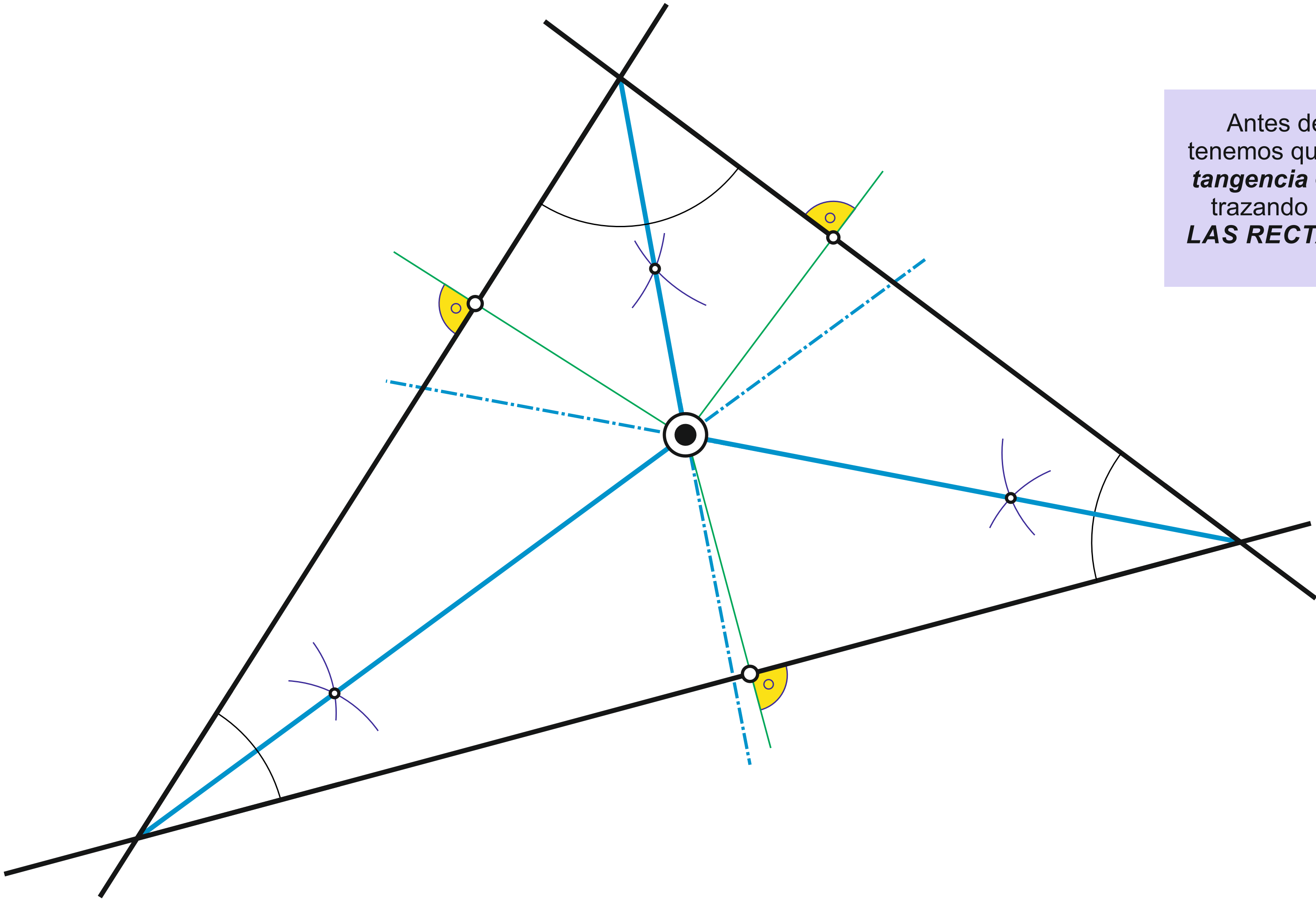


Trazamos las bisectrices de los tres ángulos interiores que forman las rectas, obteniendo el ***INCENTRO*** de dicho triángulo.
Recuerda que el incentro es el centro de la **CIRCUNFERENCIA INSCRITA** en el triángulo, que es TANGENTE a los lados del mismo

PROBLEMAS DE APOLONIO

RRR

Circunferencias tangentes a tres rectas que se cortan entre sí



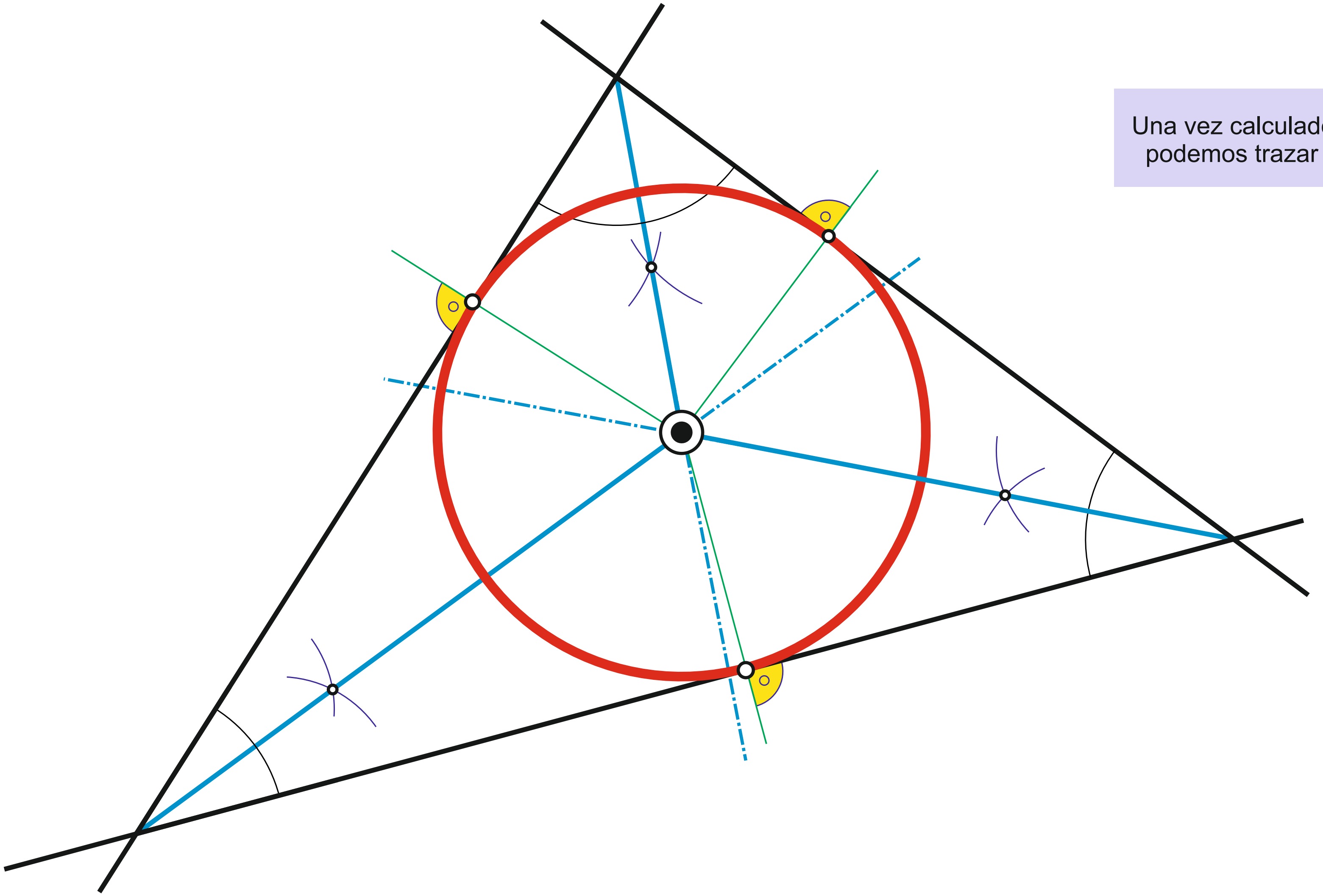
Antes de trazar la circunferencia tenemos que ***encontrar los puntos de tangencia*** de las rectas, que se hayan trazando ***PERPENDICULARES A LAS RECTAS DESDE EL INCENTRO***

JUAN DÍAZ ALMAGRO

PROBLEMAS DE APOLONIO

RRR

Circunferencias tangentes a tres rectas que se cortan entre sí



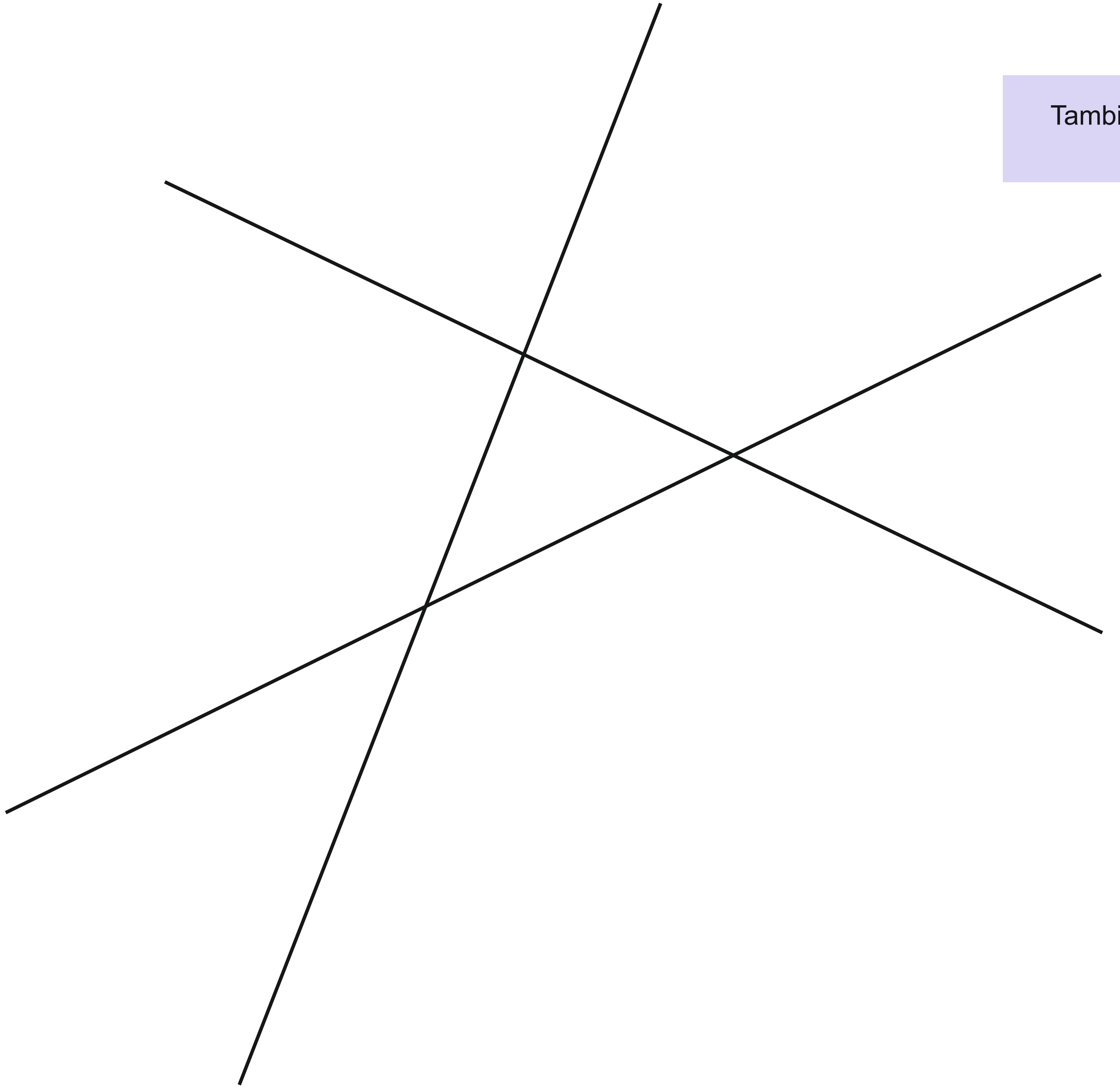
Una vez calculados los puntos de tangencia, podemos trazar la circunferencia tangente

PROBLEMAS DE APOLONIO

RRR

Circunferencias tangentes a tres rectas que se cortan entre sí

También hay otras tres soluciones fuera del triángulo



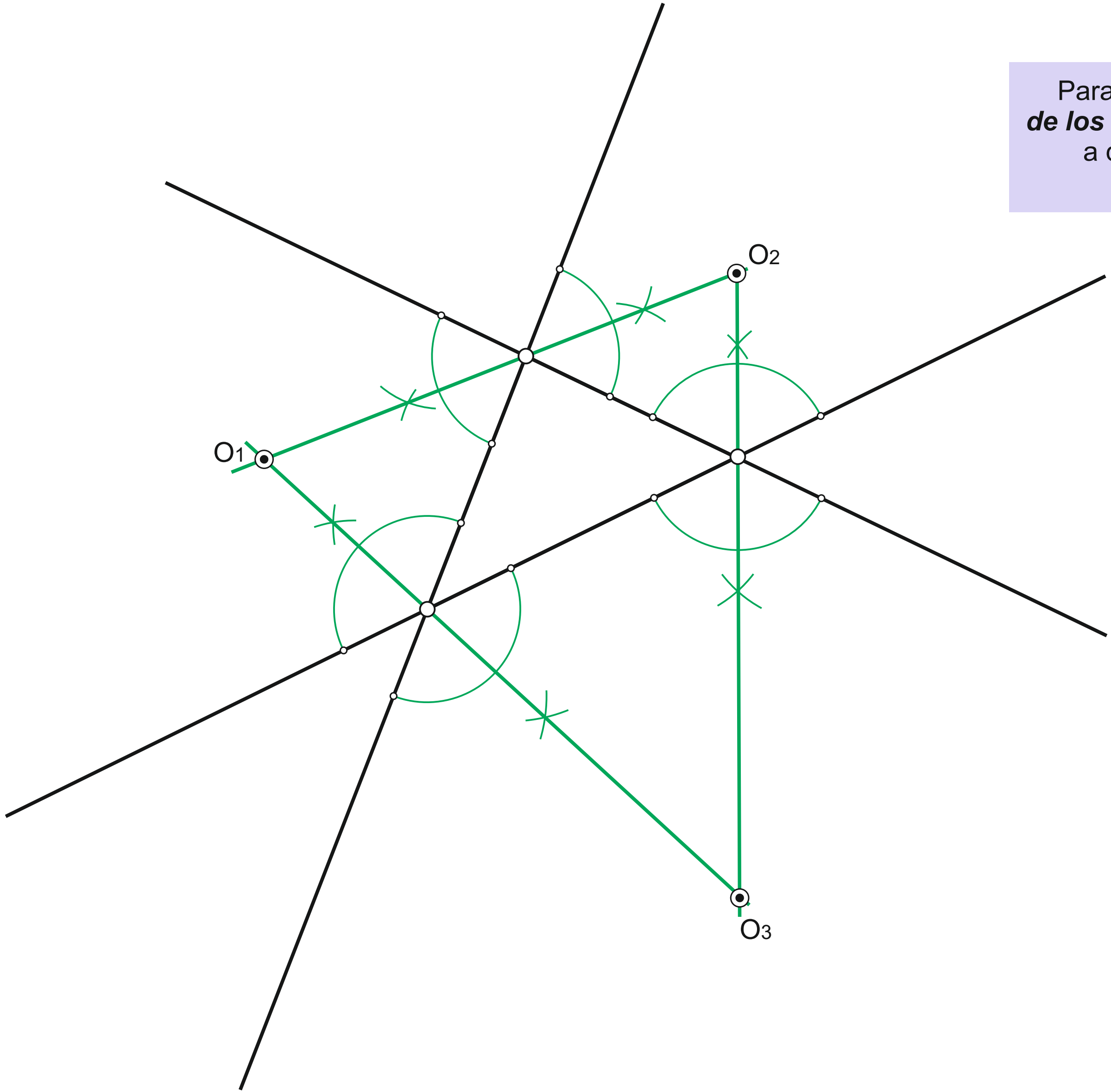
JUAN DÍAZ ALMAGRO

PROBLEMAS DE APOLONIO

RRR

Circunferencias tangentes a tres rectas que se cortan entre sí

Para ello debemos trazar las ***bisectrices de los ángulos exteriores,*** que se cortan dos a dos en los centros de las otras tres soluciones

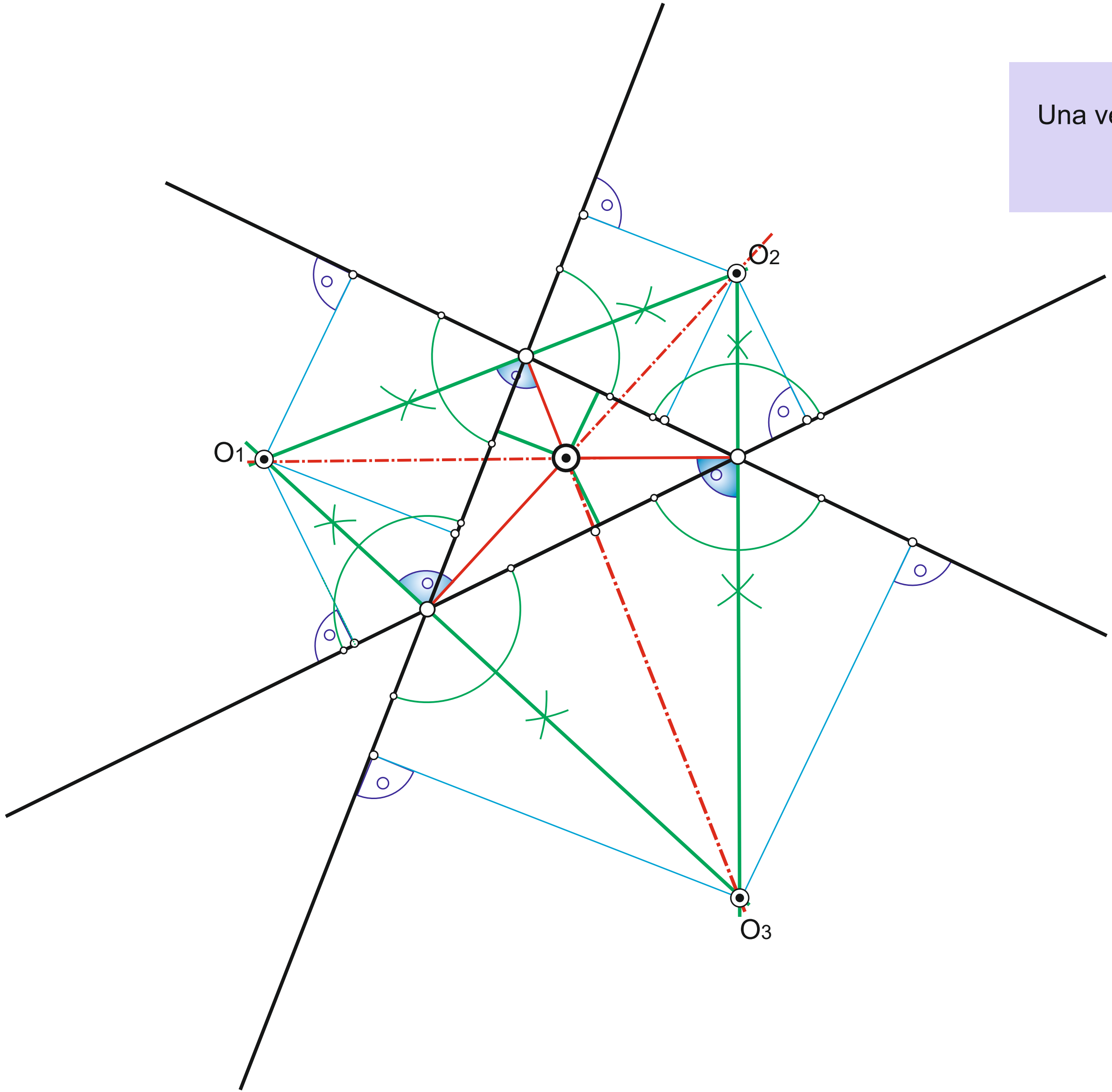


PROBLEMAS DE APOLONIO

RRR

Circunferencias tangentes a tres rectas que se cortan entre sí

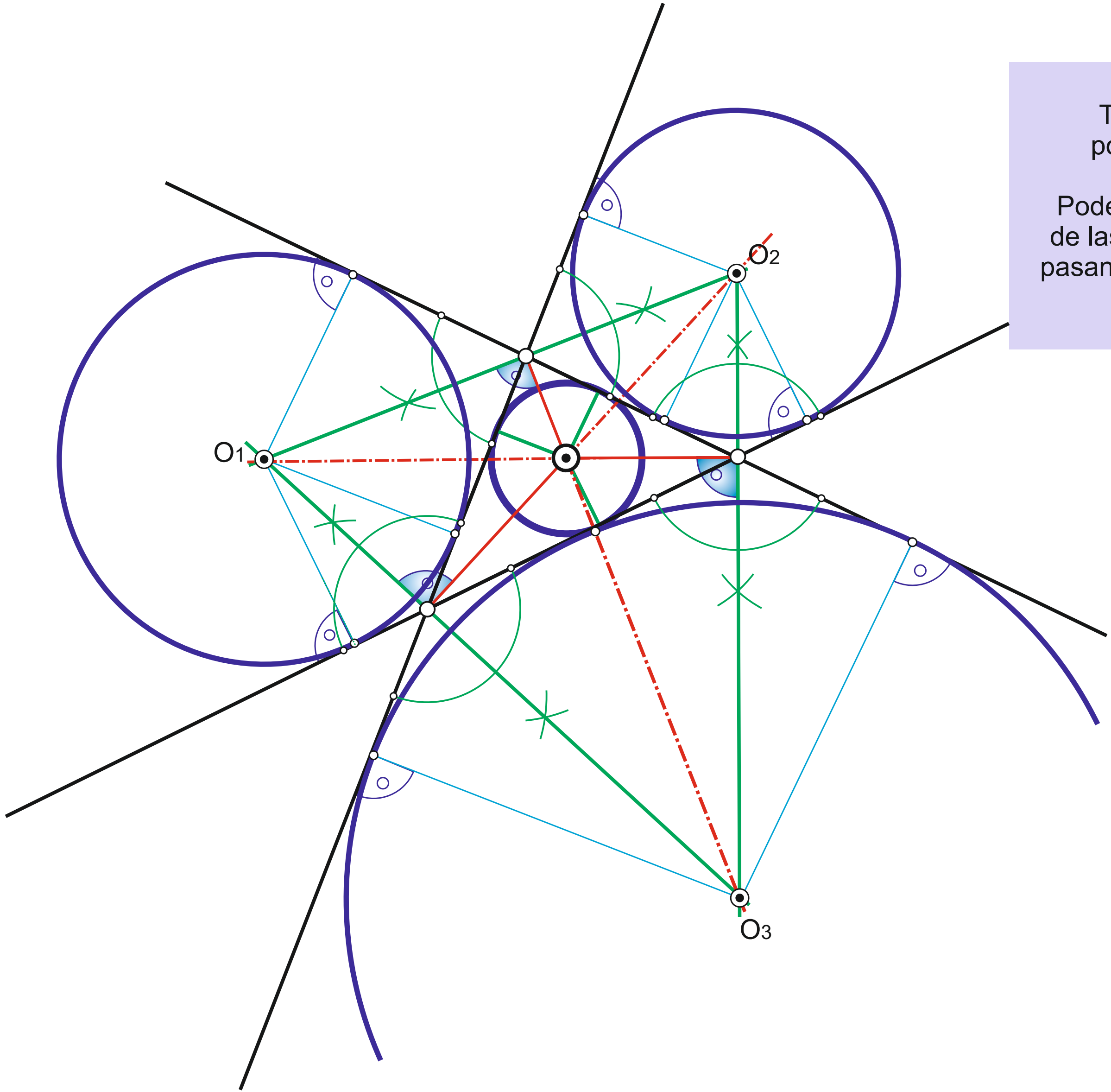
Una vez hallamos los centros, buscamos los ***puntos de tangencia***



PROBLEMAS DE APOLONIO

RRR

Circunferencias tangentes a tres rectas que se cortan entre sí



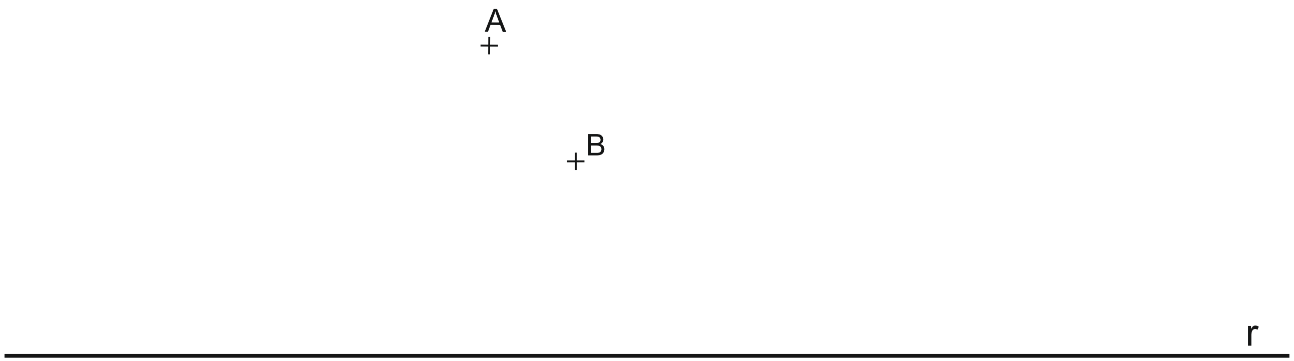
Teniendo los puntos de tangencia, podemos trazar las circunferencias.

Podemos comprobar que la prolongación de las bisectrices de los ángulos interiores pasan por los centros de las circunferencias tangentes exteriores

PROBLEMAS DE APOLONIO

PPR

Circunferencias que pasan por dos puntos y son tangentes a una recta



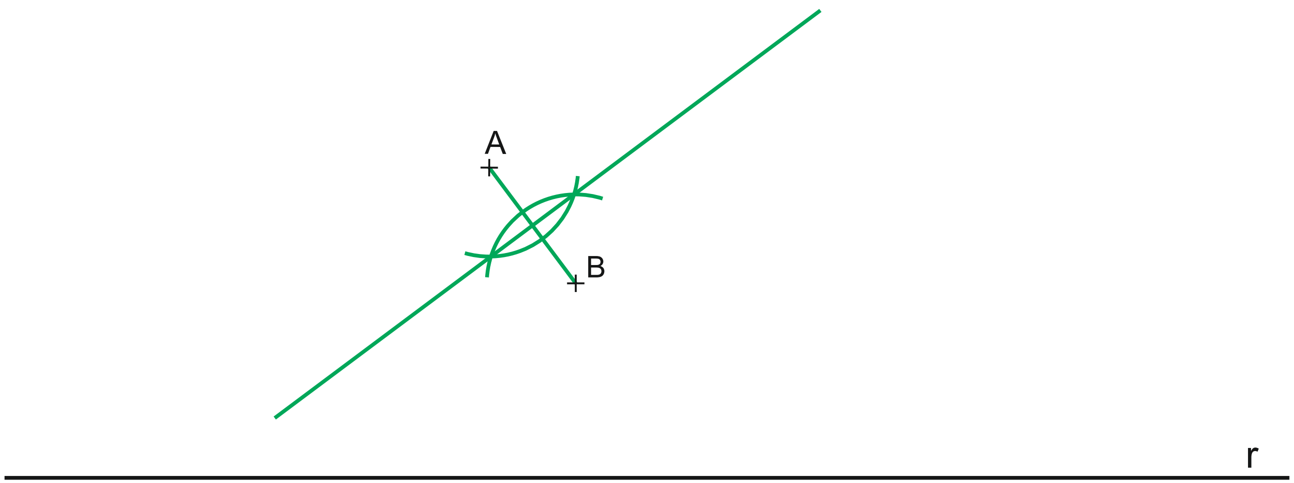
JUAN DÍAZ ALMAGRO

PROBLEMAS DE APOLONIO

PPR

Circunferencias que pasan por dos puntos y son tangentes a una recta

En primer lugar, sabemos que habrá dos circunferencias solución que pasen por los puntos A y B y a su vez sean tangentes a la recta r.
También sabemos que los centros de estas dos circunferencias se encontrarán en la mediatriz de AB (ver caso PPP), por tanto lo primero que hacemos es la mediatriz entre A y B

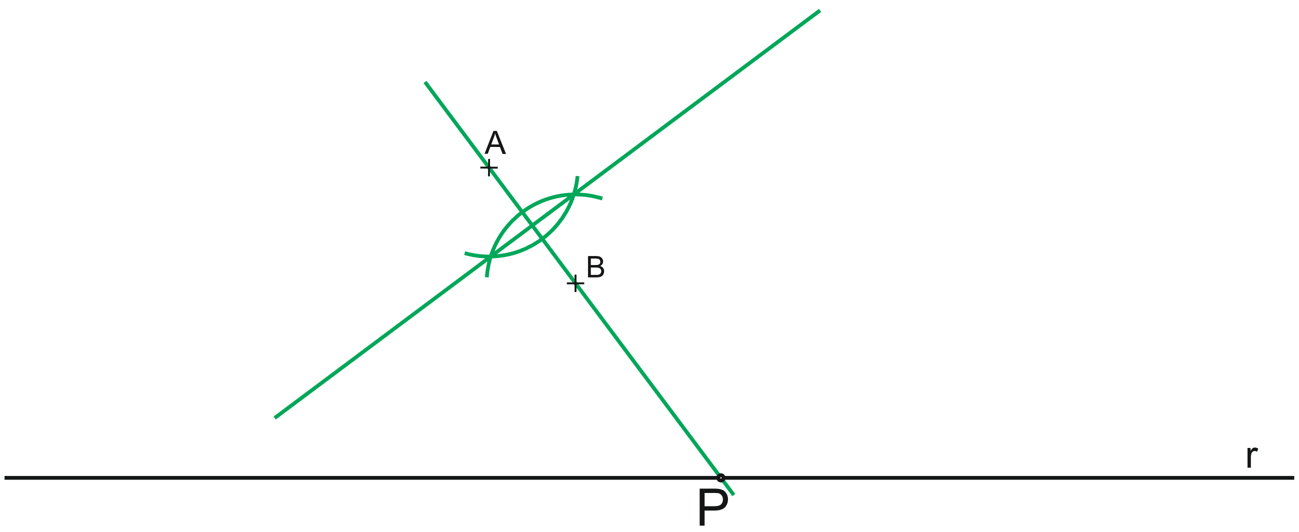


PROBLEMAS DE APOLONIO

PPR

Circunferencias que pasan por dos puntos y son tangentes a una recta

Trazamos la recta AB, que será el EJE RADICAL DE las dos circunferencias solución. prolongamos la recta AB hasta que corta a la recta r en el punto P

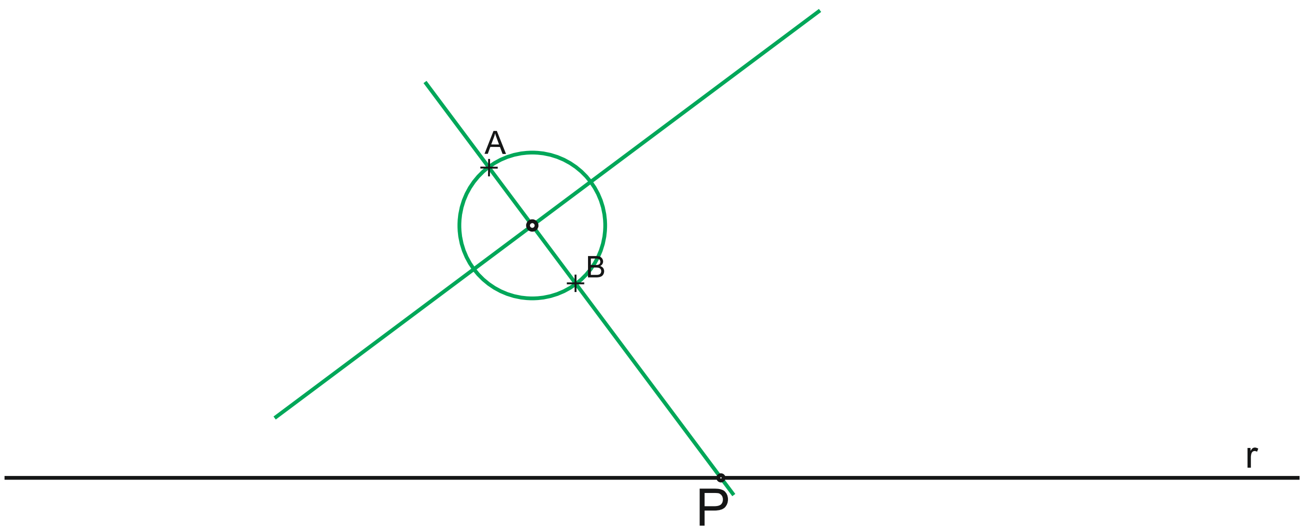


PROBLEMAS DE APOLONIO

PPR

Circunferencias que pasan por dos puntos y son tangentes a una recta

Trazamos la circunferencia auxiliar de diámetro AB, para posteriormente calcular los puntos de tangencia desde P a dicha circunferencia



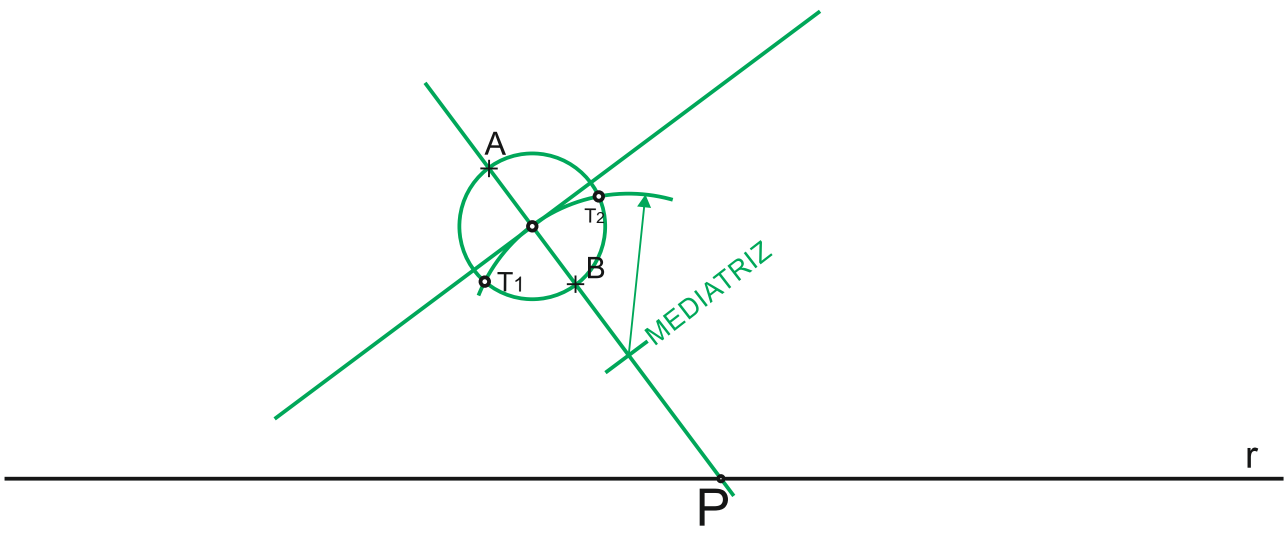
JUAN DÍAZ ALMAGRO

PROBLEMAS DE APOLONIO

PPR

Circunferencias que pasan por dos puntos y son tangentes a una recta

Calculamos los puntos de tangencia desde P a la circunferencia auxiliar
(consultar tangentes de un punto a una circunferencia)

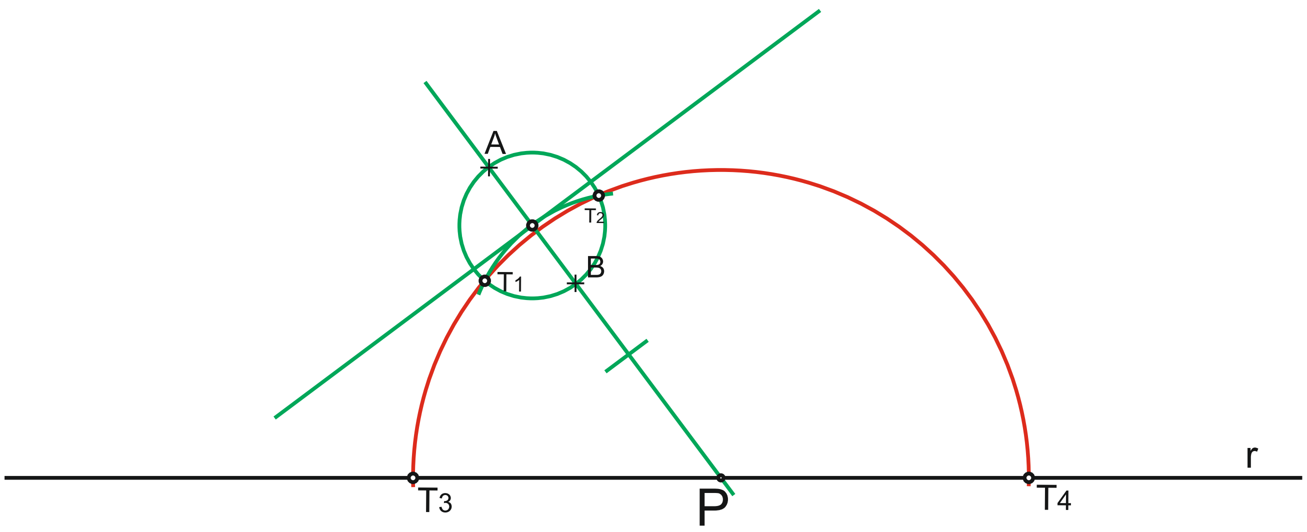


PROBLEMAS DE APOLONIO

PPR

Circunferencias que pasan por dos puntos y son tangentes a una recta

Trazamos la circunferencia de P a T1 y T2. Esta circunferencia cortará a la recta r en los puntos de tangencia T3 y T4, que son los puntos de tangencia de la recta r con las circunferencias que estamos buscando.

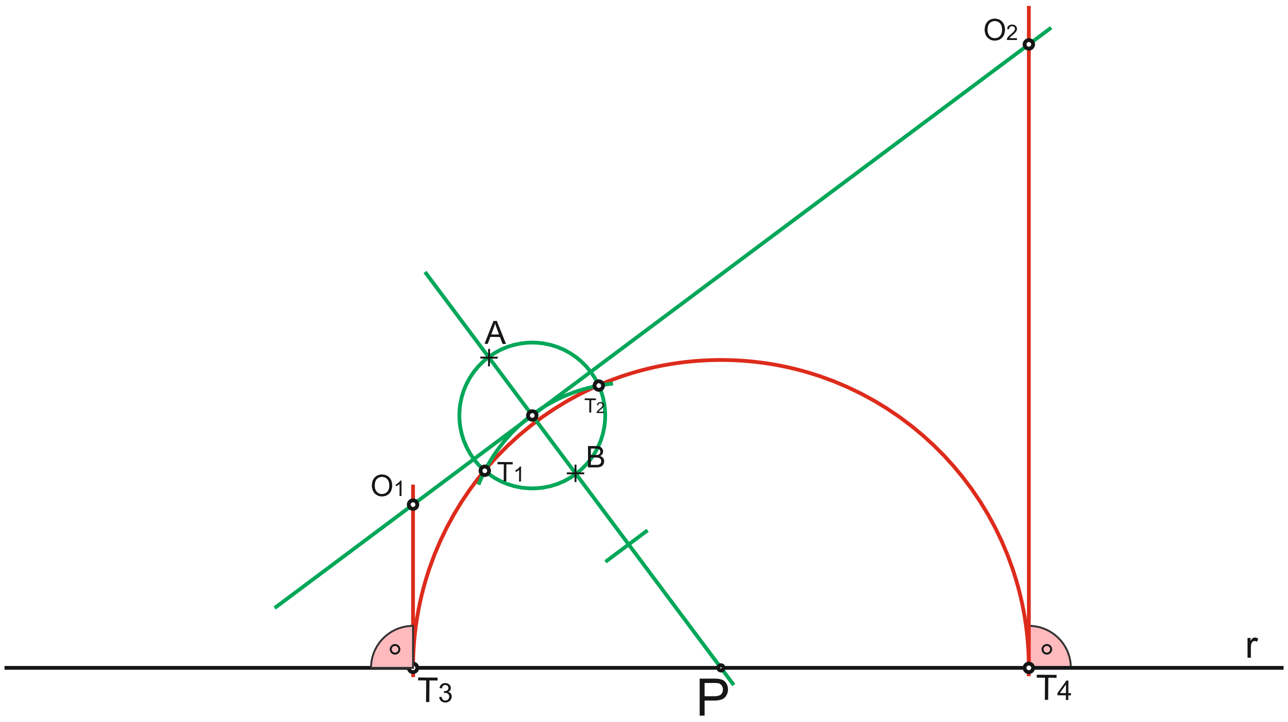


PROBLEMAS DE APOLONIO

PPR

Circunferencias que pasan por dos puntos y son tangentes a una recta

Desde T3 y T4 trazamos ambas perpendiculares que cortarán a la mediatriz de AB en los puntos O1 y O2, que son los centros de las dos circunferencias solución

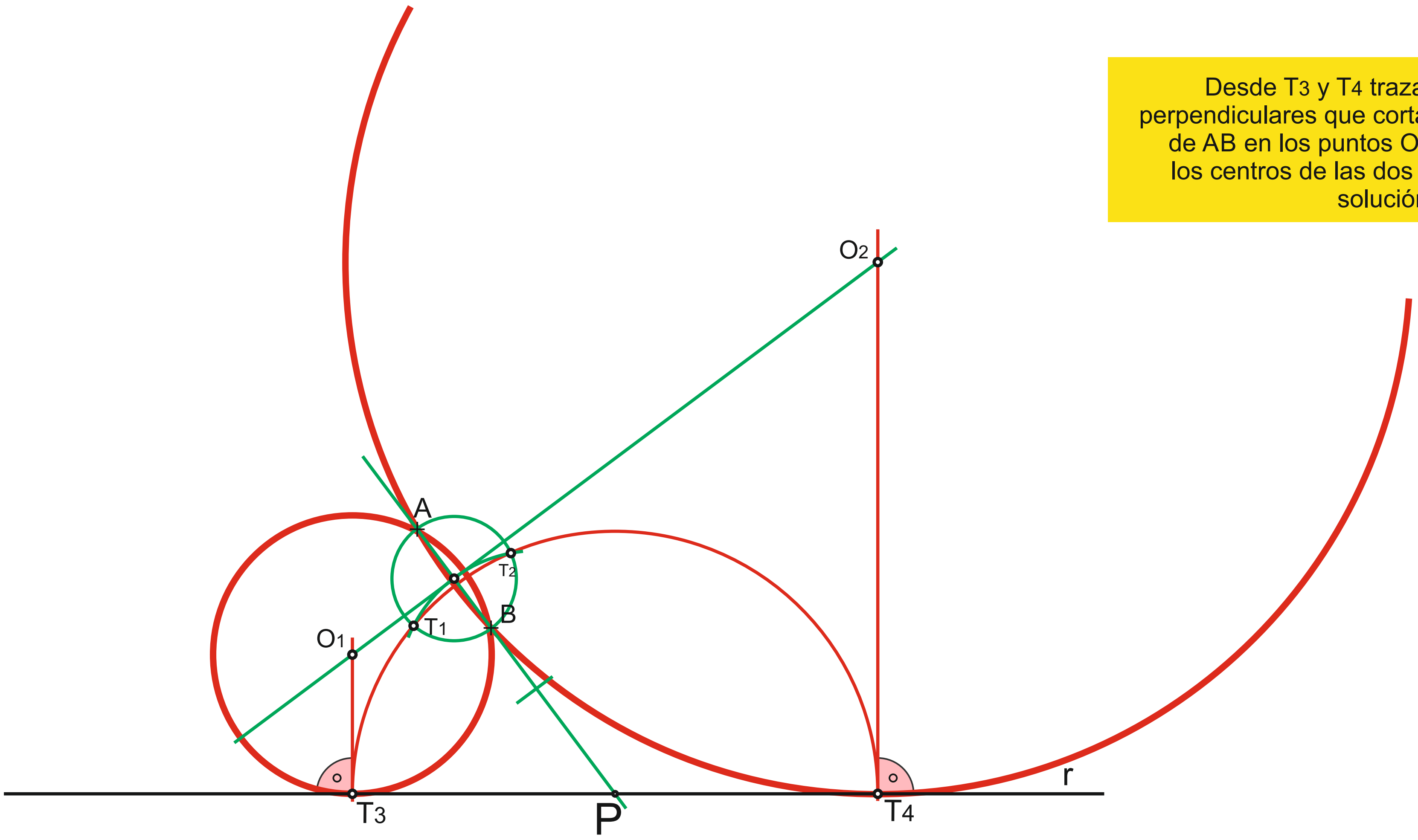


PROBLEMAS DE APOLONIO

PPR

Circunferencias que pasan por dos puntos y son tangentes a una recta

Desde T_3 y T_4 trazamos ambas perpendiculares que cortarán a la mediatriz de AB en los puntos O_1 y O_2, que son los centros de las dos circunferencias solución



JUAN DÍAZ ALMAGRO

PROBLEMAS DE APOLONIO

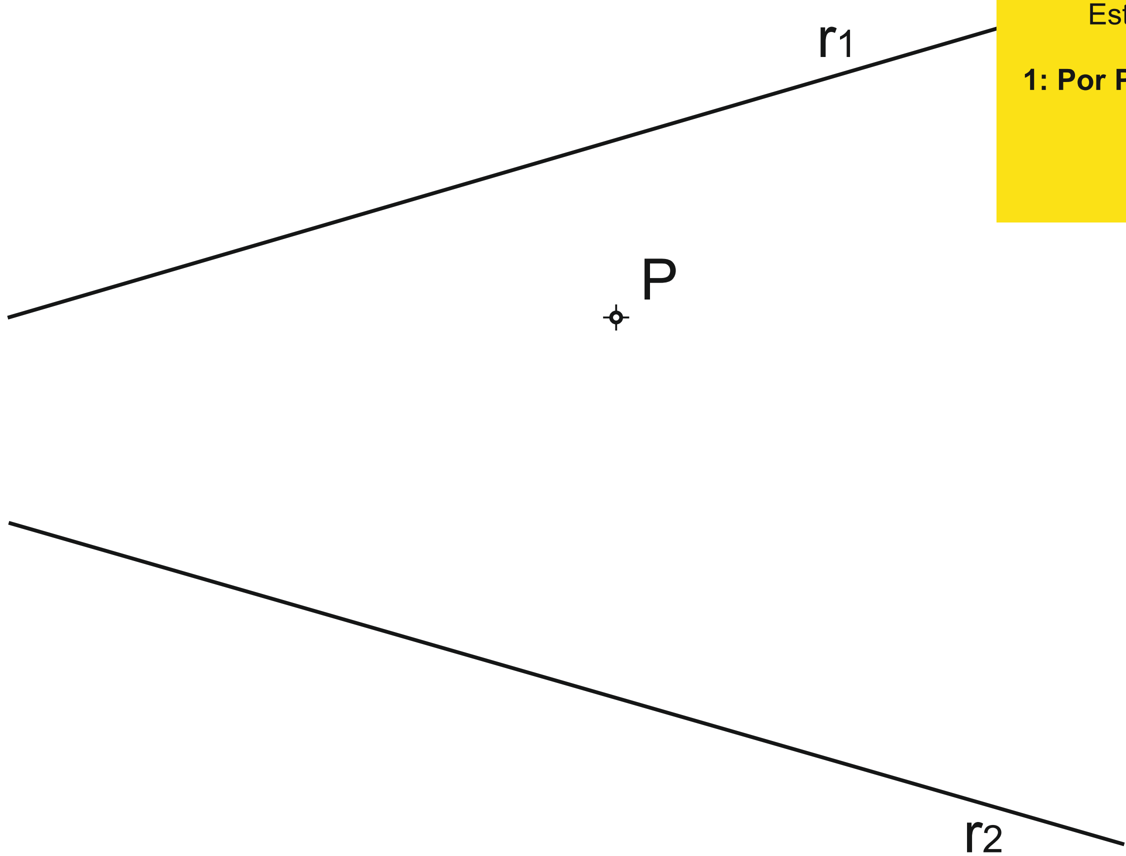
RRP

Circunferencias que pasan por un punto y son tangentes a dos rectas

Este ejercicio tiene dos soluciones:

1: Por POTENCIA, convirtiendo el problema en un problema de PPR

2: Por HOMOTECIA

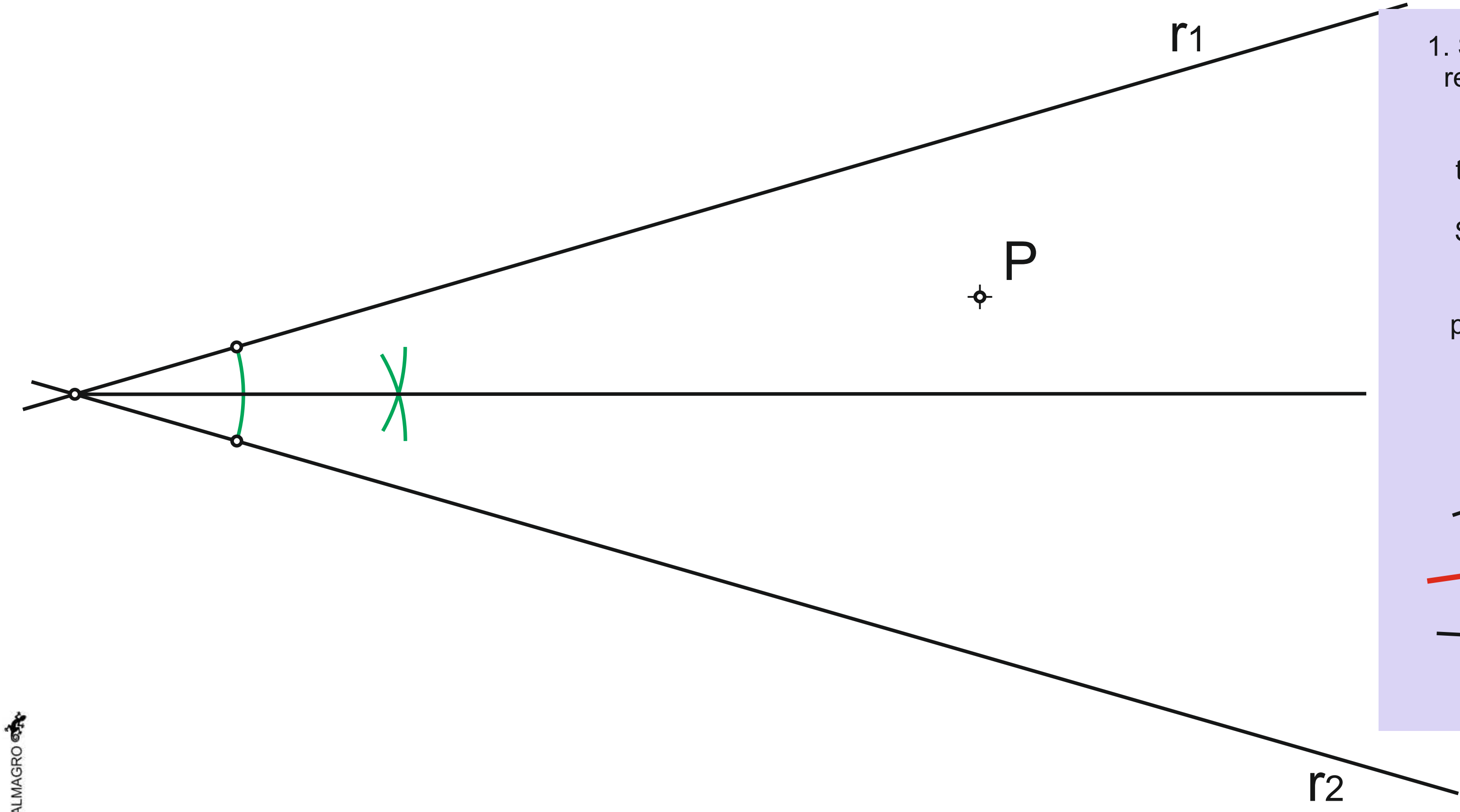


PROBLEMAS DE APOLONIO

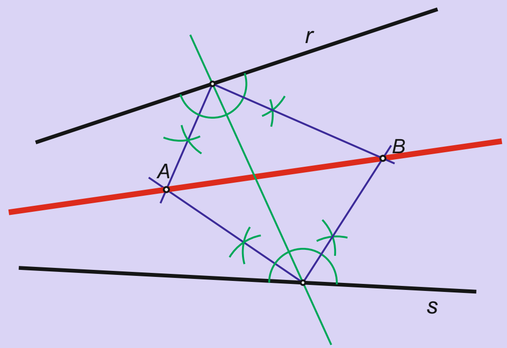
RRP

Circunferencias que pasan por un punto y son tangentes a dos rectas

1ª SOLUCIÓN: **Por POTENCIA,** convirtiendo el problema en un problema de PPR



1. Sabemos que si las circunferencias resultantes han de ser tangentes al ángulo sus centros estarán en la bisectriz del mismo, por tanto trazamos la **bisectriz del ángulo** que forman las dos rectas.
Si cabe en el papel se prolongan las rectas hasta que corten, si no se aplica cualquiera de los procedimientos que ya conocemos para cuando no se ve el vértice



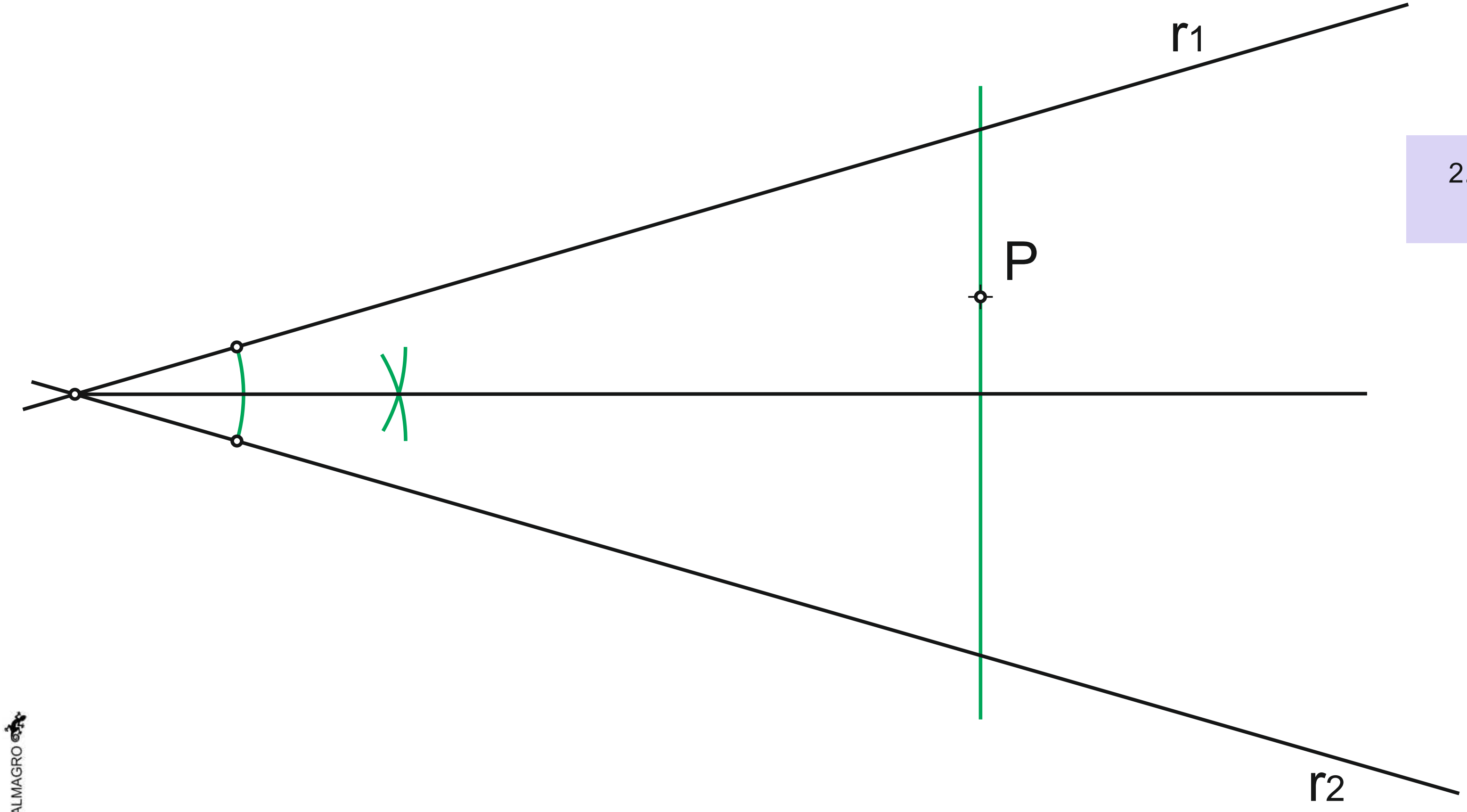
JUAN DÍAZ ALMAGRO

PROBLEMAS DE APOLONIO

RRP

Circunferencias que pasan por un punto y son tangentes a dos rectas

1ª SOLUCIÓN: Por POTENCIA, convirtiendo el problema en un problema de PPR



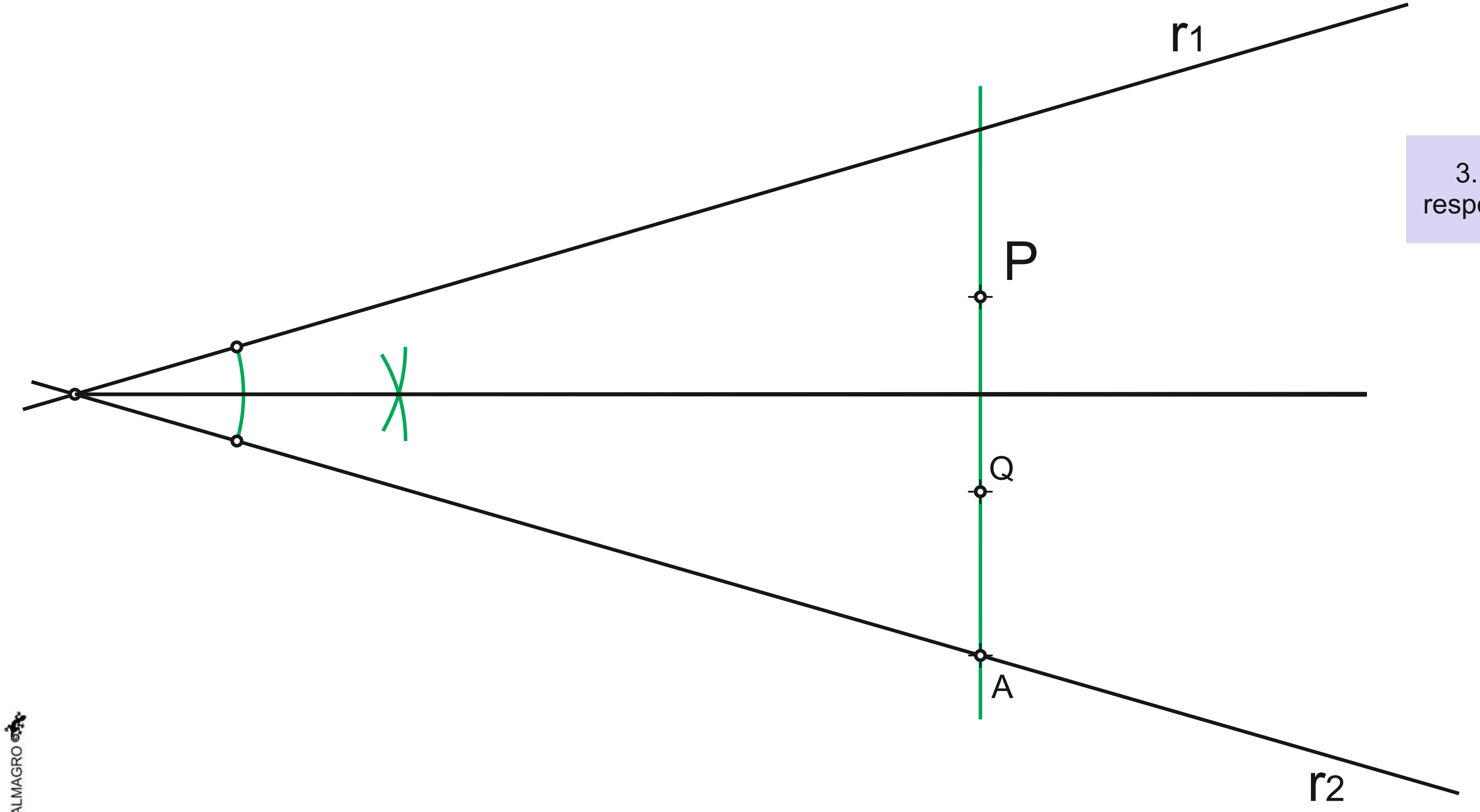
2. Trazamos una perpendicular a la bisectriz desde el punto P

PROBLEMAS DE APOLONIO

RRP

Circunferencias que pasan por un punto y son tangentes a dos rectas

1ª SOLUCIÓN: Por POTENCIA, convirtiendo el problema en un problema de PPR



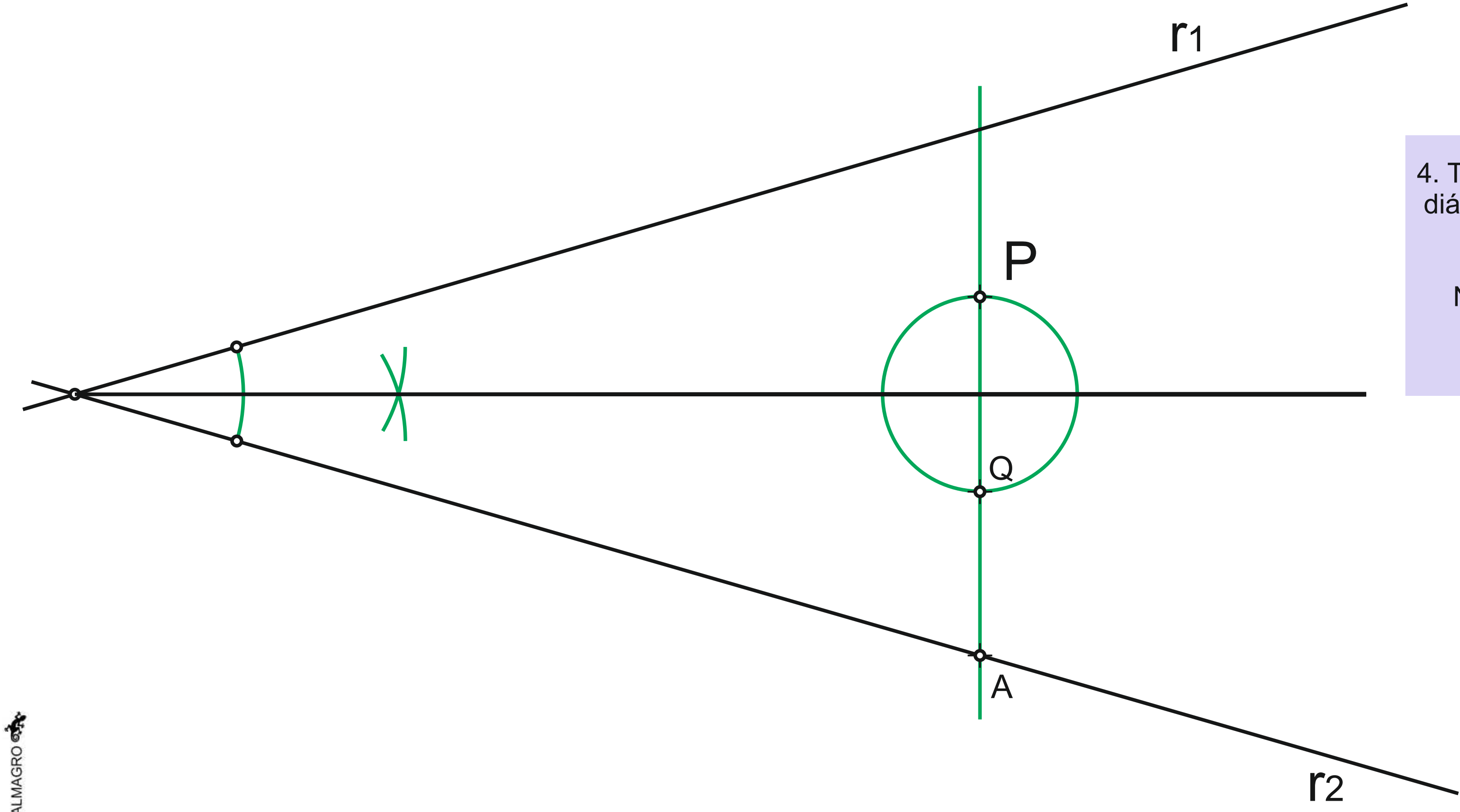
3. Hallamos el punto simétrico a P respecto a la bisectriz de las dos rectas

PROBLEMAS DE APOLONIO

RRP

Circunferencias que pasan por un punto y son tangentes a dos rectas

1ª SOLUCIÓN: **Por POTENCIA,** convirtiendo el problema en un problema de PPR



4. Trazamos la circunferencia auxiliar de diámetro PQ. De esta manera vamos a resolver el problema como en el caso anterior de PPR.
Nos olvidamos de r1 y resolvemos el problema entre r2, P y Q.
(consultar caso anterior PPR)

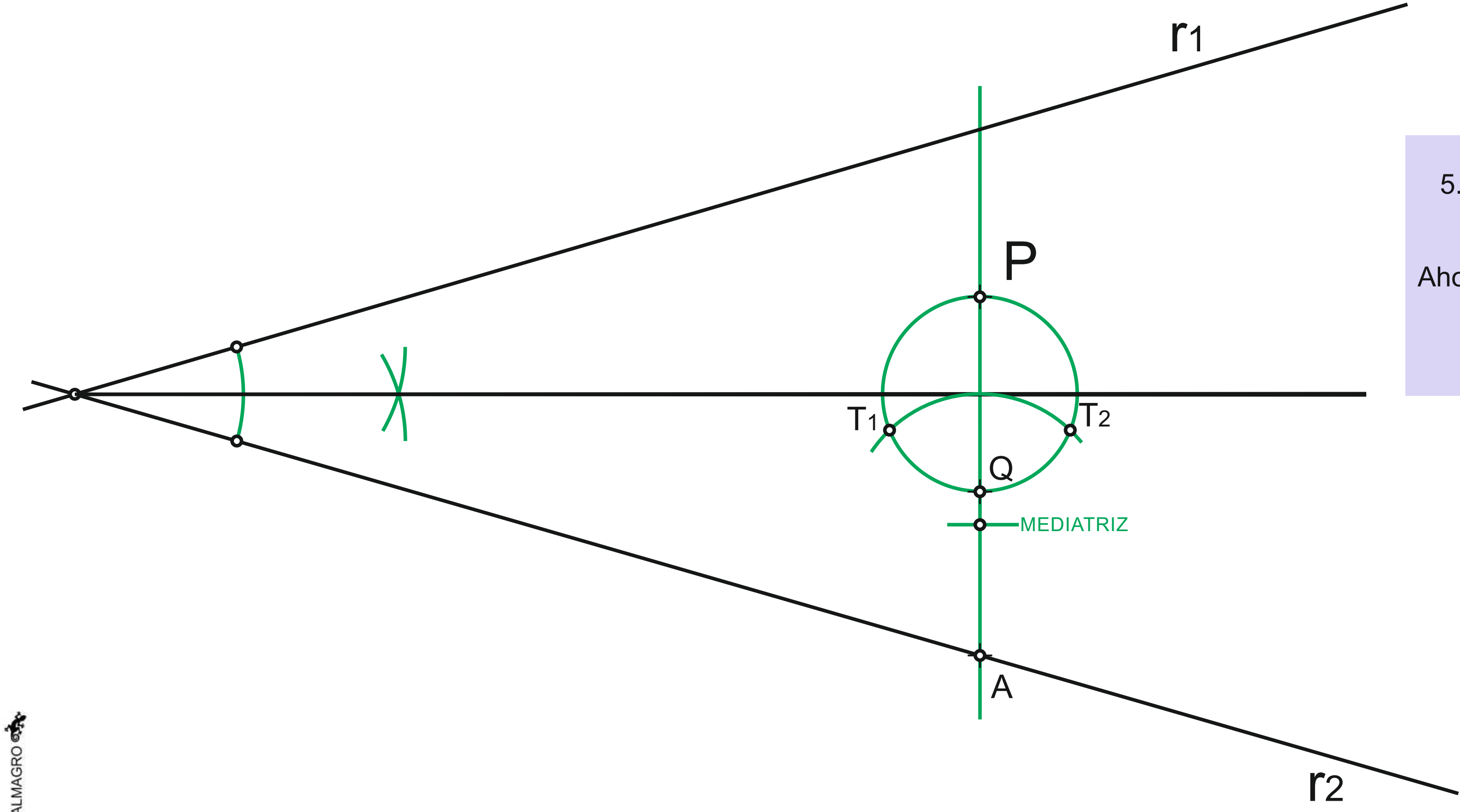
JUAN DÍAZ ALMAGRO

PROBLEMAS DE APOLONIO

RRP

Circunferencias que pasan por un punto y son tangentes a dos rectas

1ª SOLUCIÓN: Por POTENCIA, convirtiendo el problema en un problema de PPR



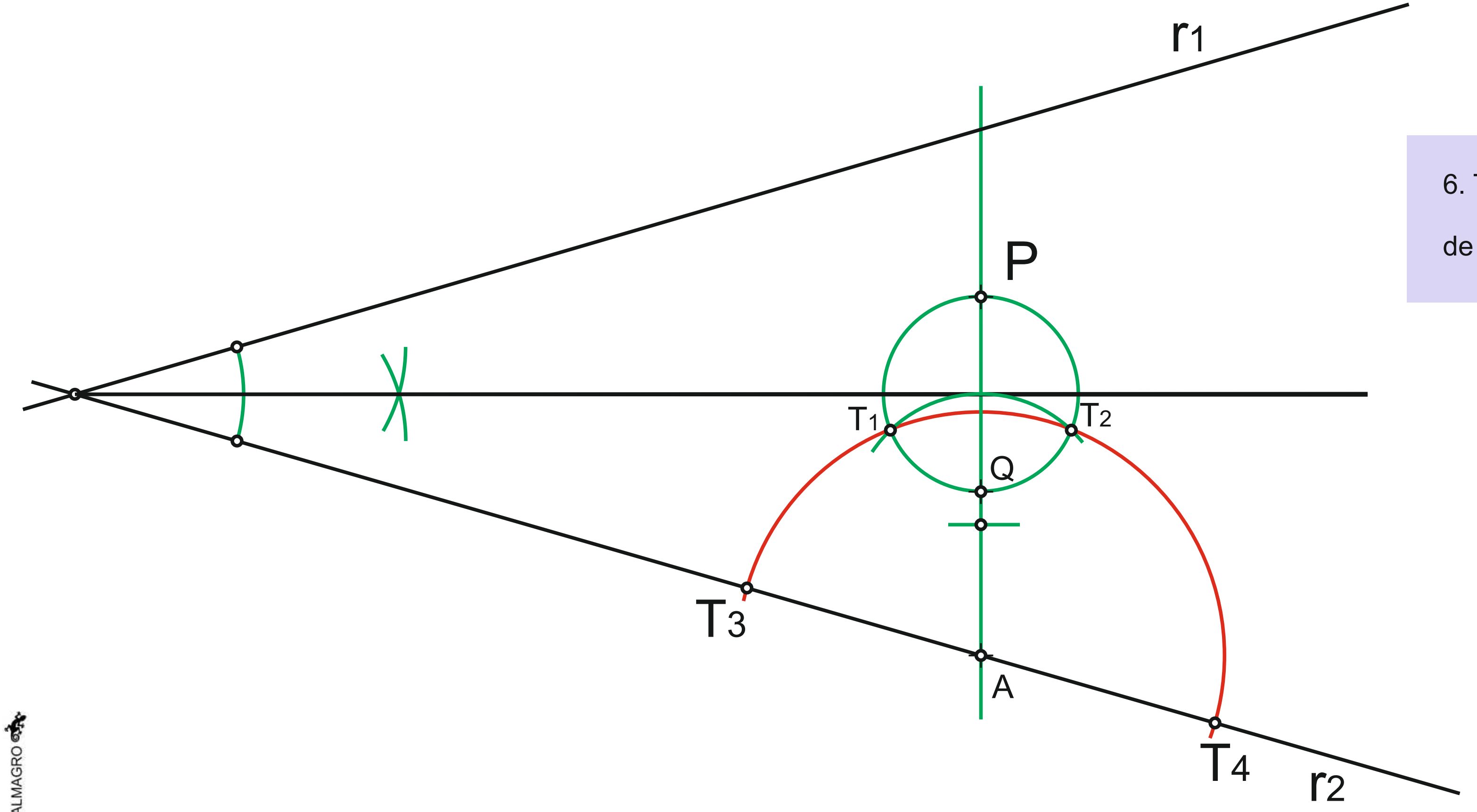
5. La recta que pasa por PQA será el eje radical de las circunferencias resultantes.
Ahora, trazamos los puntos de tangencia de las tangentes desde el punto A a la circunferencia auxiliar

PROBLEMAS DE APOLONIO

RRP

Circunferencias que pasan por un punto y son tangentes a dos rectas

1ª SOLUCIÓN: **Por POTENCIA,** convirtiendo el problema en un problema de PPR



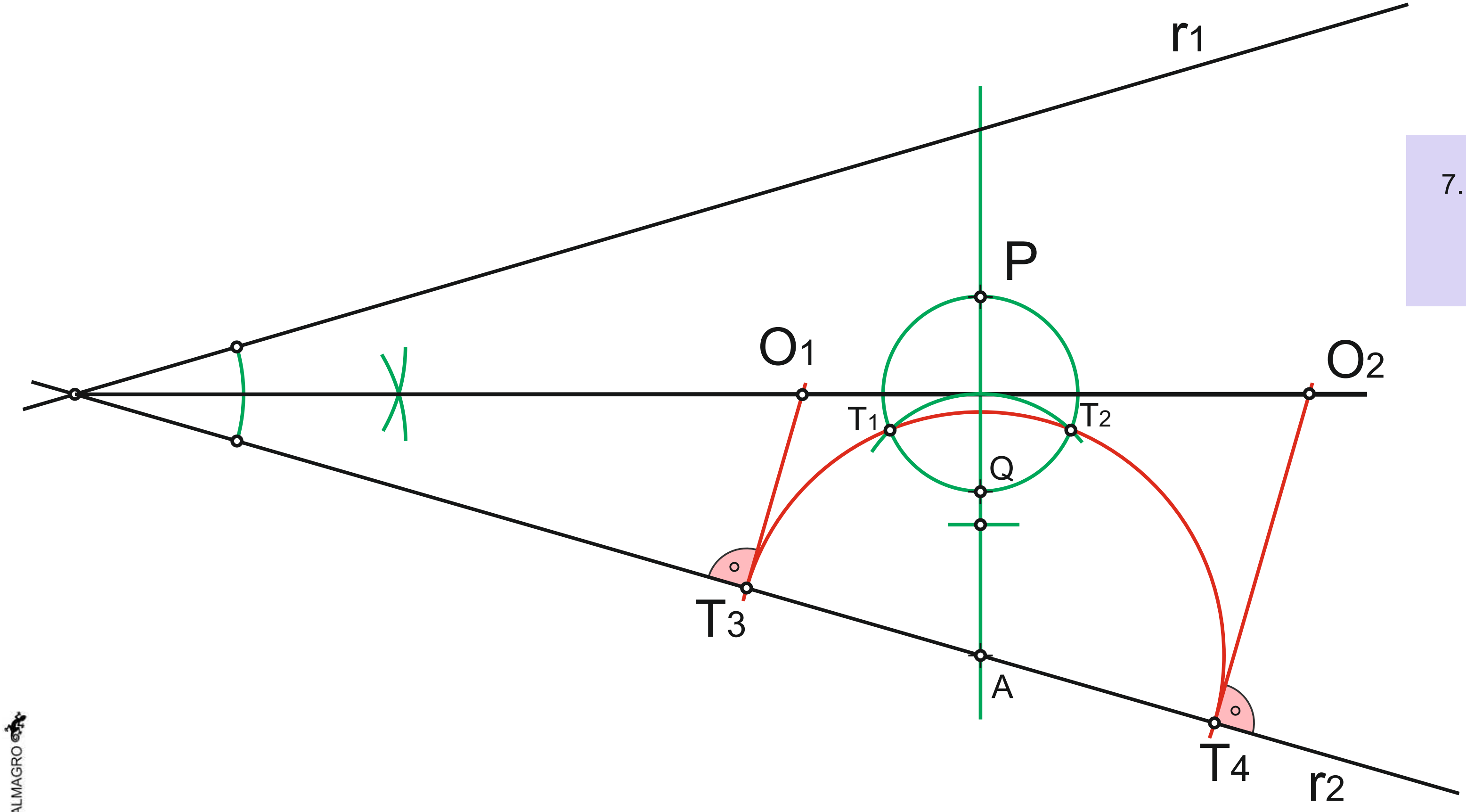
6. Trazando el arco At1 conseguimos T3 y T4, puntos de tangencia de las circunferencias que buscamos

PROBLEMAS DE APOLONIO

RRP

Circunferencias que pasan por un punto y son tangentes a dos rectas

1ª SOLUCIÓN: Por POTENCIA, convirtiendo el problema en un problema de PPR



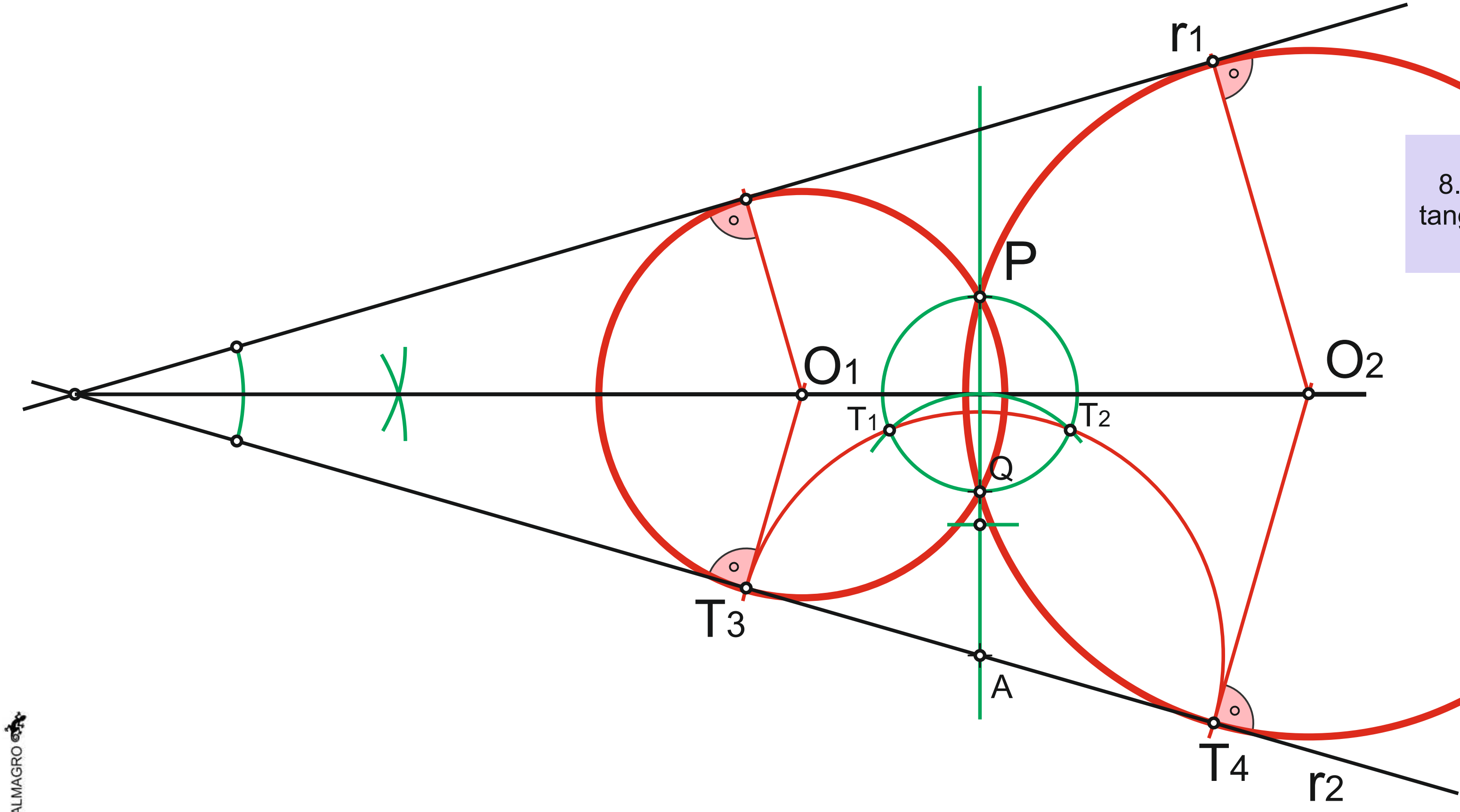
7. Alzamos dos perpendiculares en r2 desde T3 y T4, que cortarán a la bisectriz en O1 y O2, que serán los centros de las circunferencias solución

PROBLEMAS DE APOLONIO

RRP

Circunferencias que pasan por un punto y son tangentes a dos rectas

1ª SOLUCIÓN: **Por POTENCIA,** convirtiendo el problema en un problema de PPR



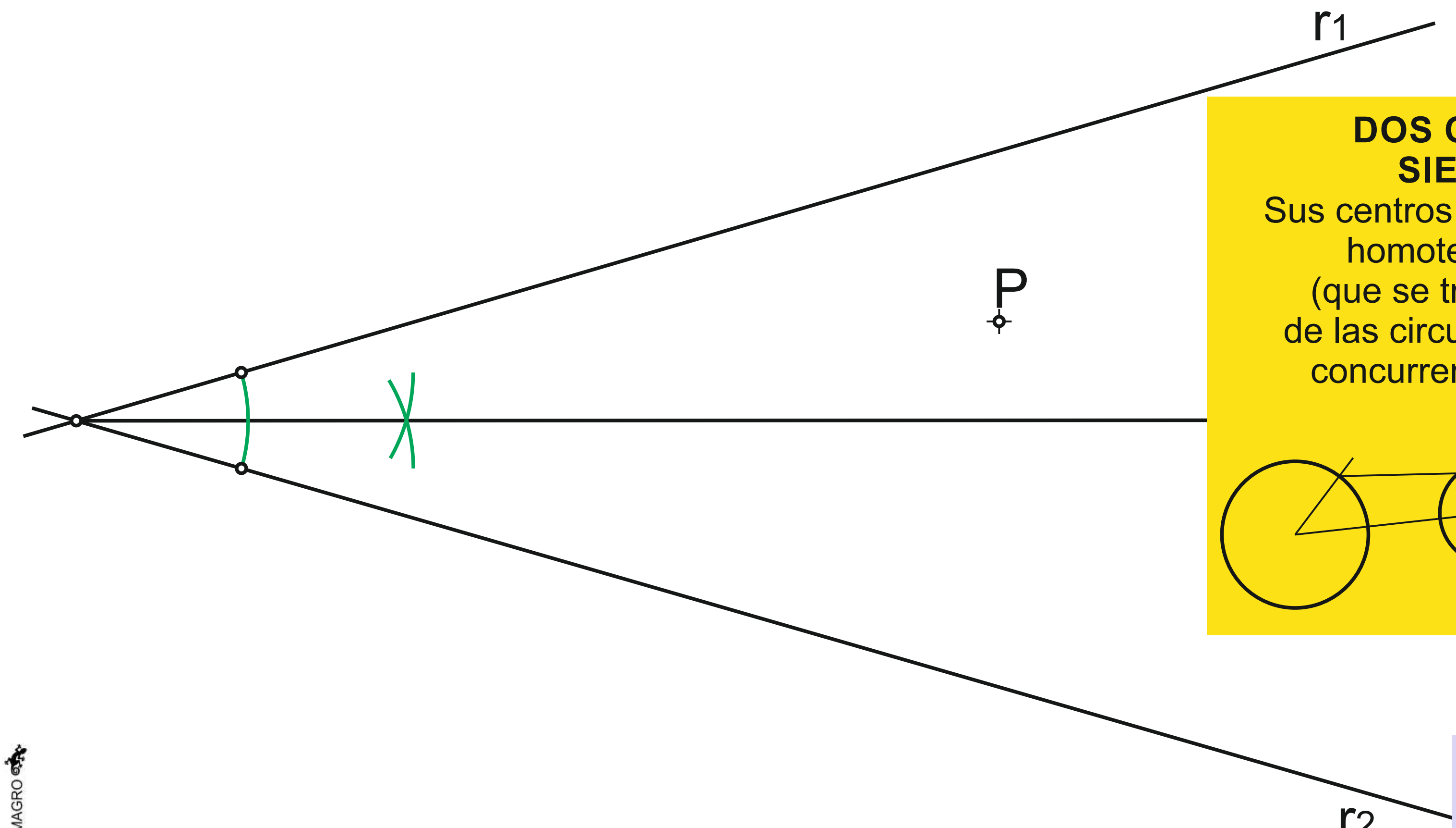
8. Calculanos los otros dos puntos de tangencia y trazamos las circunferencias solución

PROBLEMAS DE APOLONIO

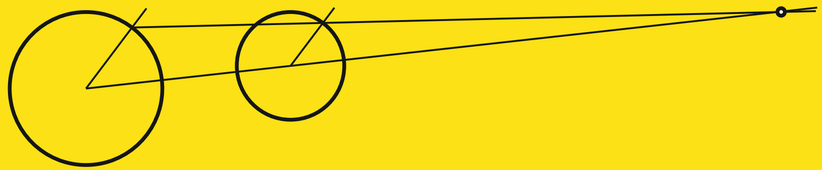
RRP

Circunferencias que pasan por un punto y son tangentes a dos rectas

2ª SOLUCIÓN: Por HOMOTECIA



DOS CIRCUNFERENCIAS SON SIEMPRE HOMOTÉTICAS
Sus centros están alineados con el centro de homotecia y sus radios homotéticos (que se trazan desde las intersecciones de las circunferencias con rectas secantes concurrentes en el centro de homotecia) son paralelos.



1. Trazamos la **bisectriz del ángulo** que forman las dos rectas.

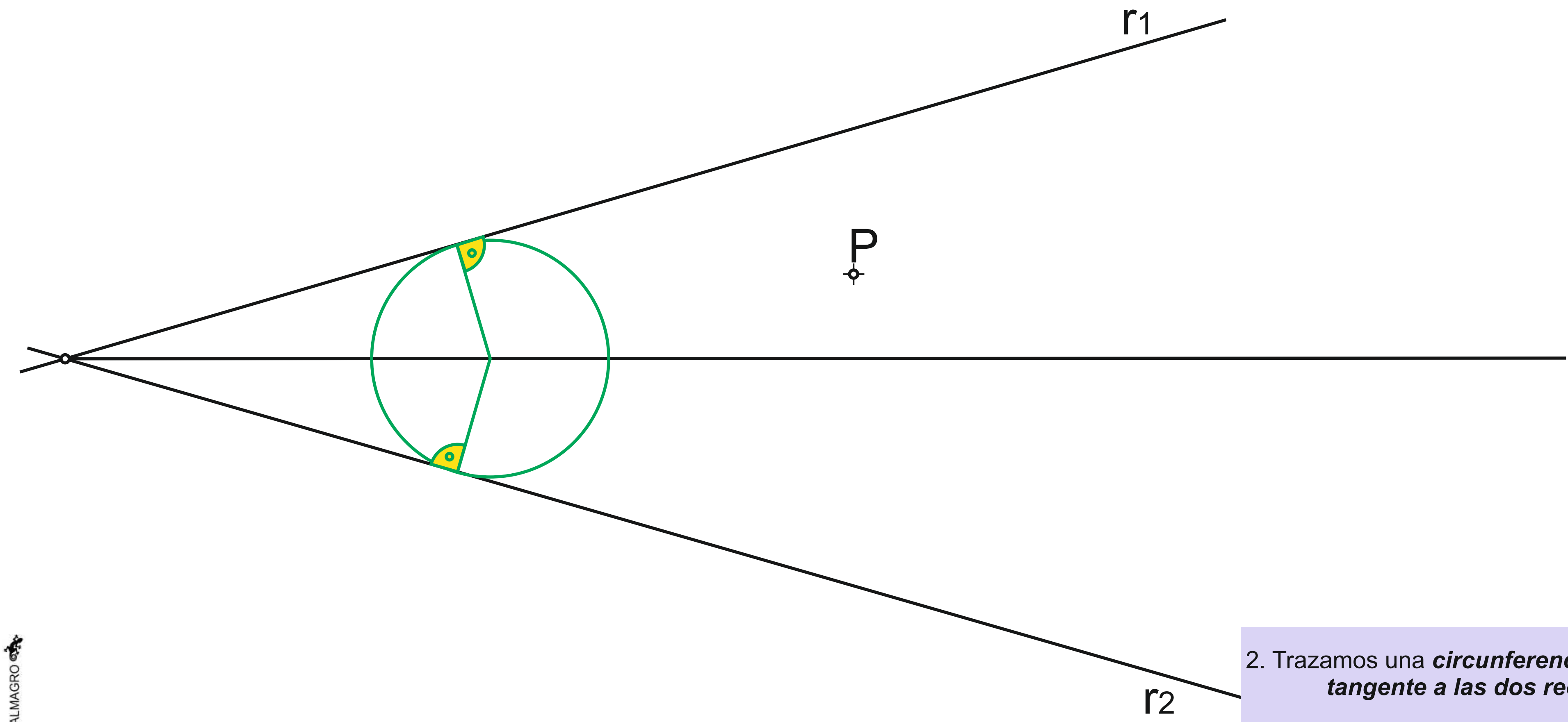
JUAN DÍAZ ALMAGRO

PROBLEMAS DE APOLONIO

RRP

Circunferencias que pasan por un punto y son tangentes a dos rectas

2ª SOLUCIÓN: Por HOMOTECIA



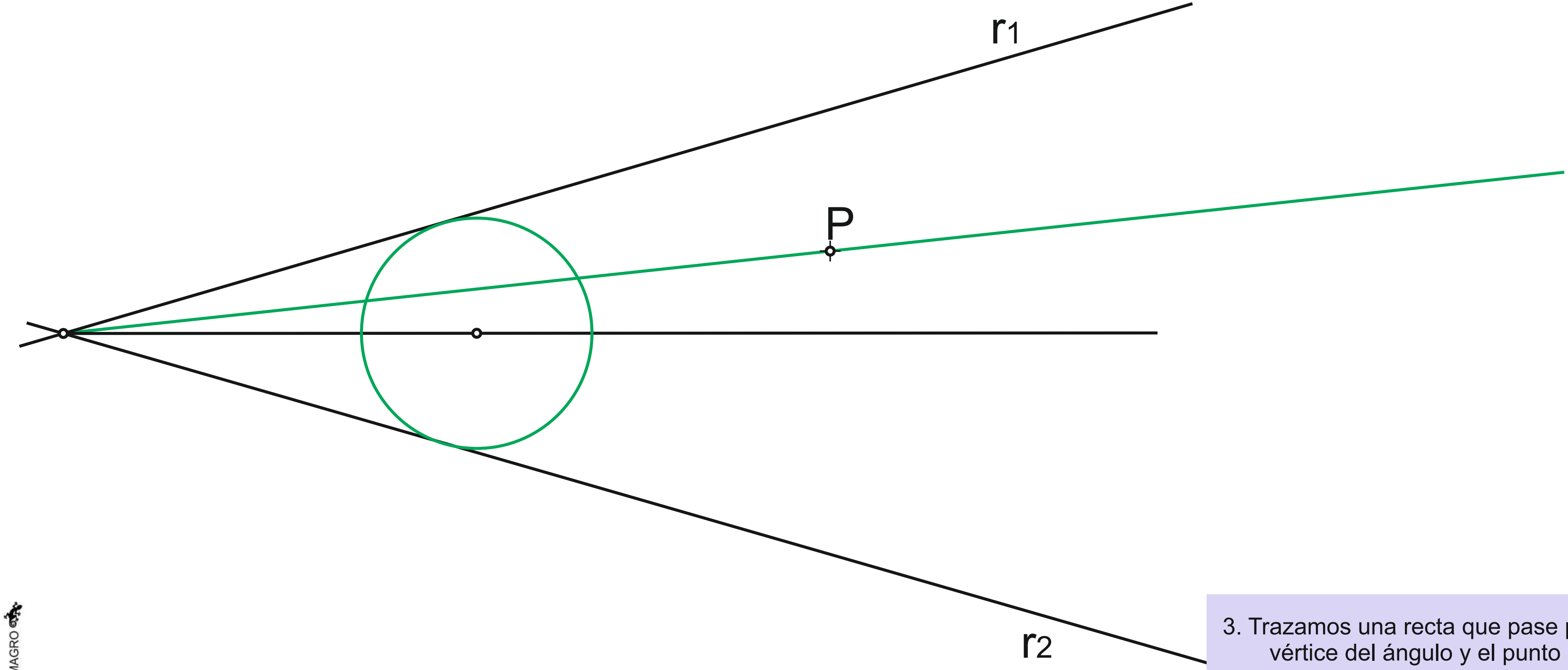
2. Trazamos una ***circunferencia auxiliar tangente a las dos rectas***

PROBLEMAS DE APOLONIO

RRP

Circunferencias que pasan por un punto y son tangentes a dos rectas

2ª SOLUCIÓN: Por HOMOTECIA



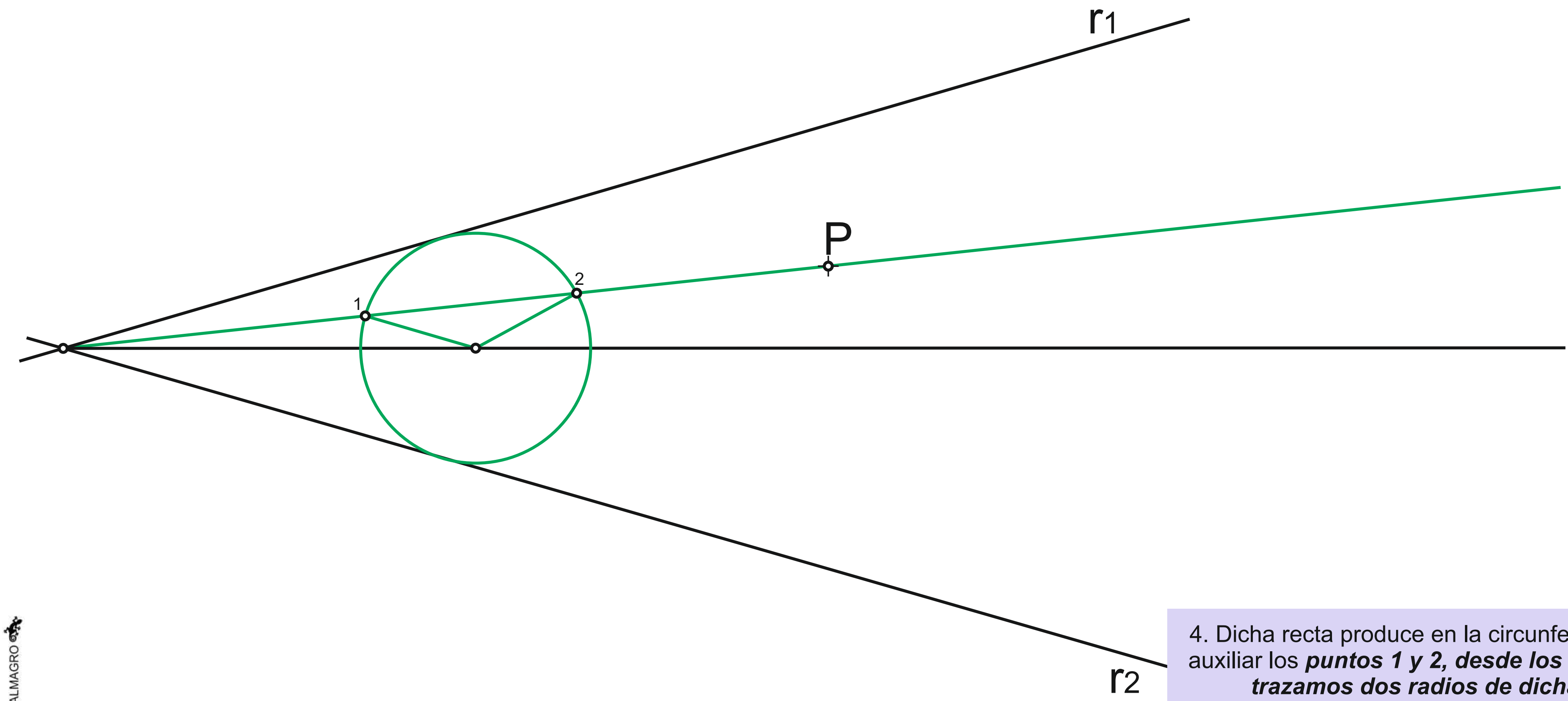
3. Trazamos una recta que pase por el vértice del ángulo y el punto P

PROBLEMAS DE APOLONIO

RRP

Circunferencias que pasan por un punto y son tangentes a dos rectas

2ª SOLUCIÓN: Por HOMOTECIA



4. Dicha recta produce en la circunferencia auxiliar los ***puntos 1 y 2, desde los cuales trazamos dos radios de dicha circunferencia***

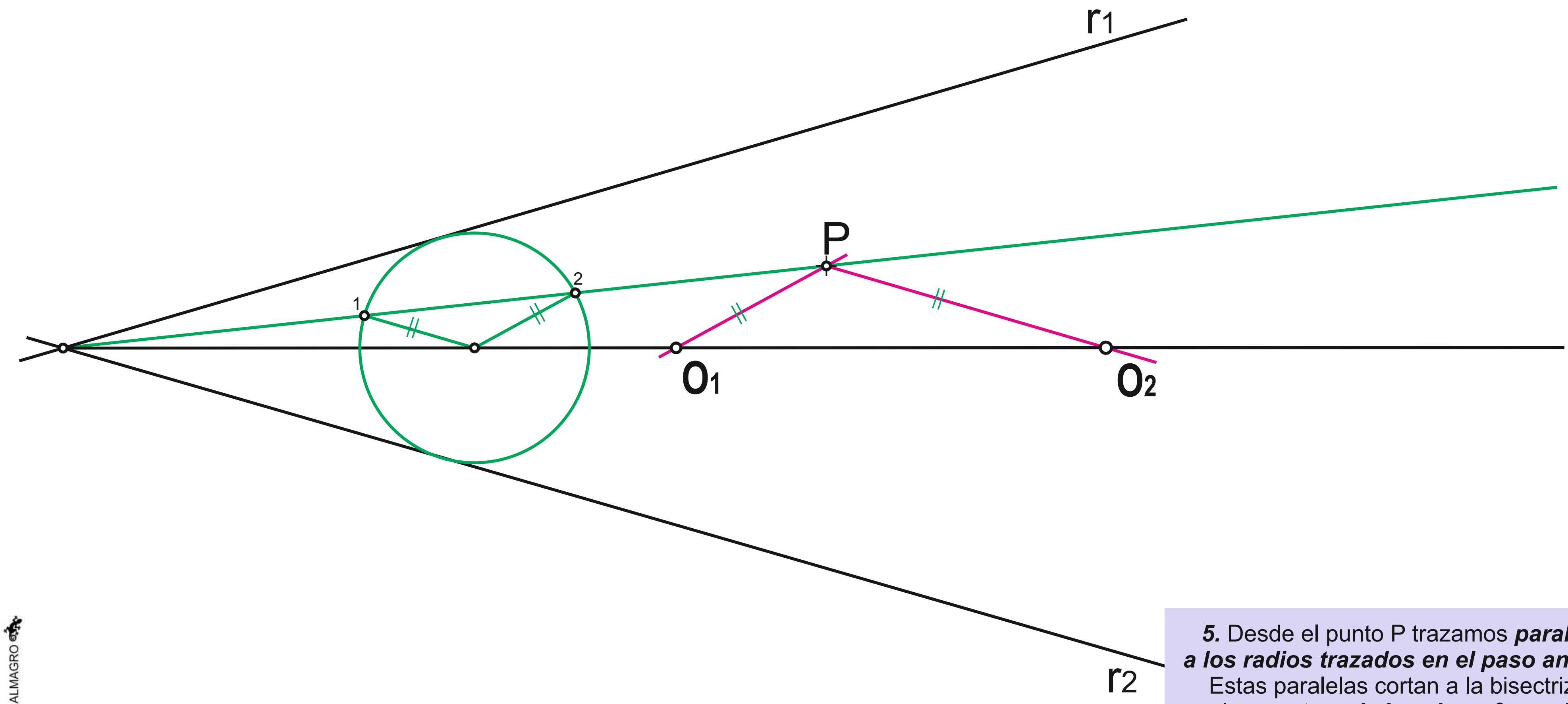
JUAN DÍAZ ALMAGRO

PROBLEMAS DE APOLONIO

RRP

Circunferencias que pasan por un punto y son tangentes a dos rectas

2ª SOLUCIÓN: Por HOMOTECIA



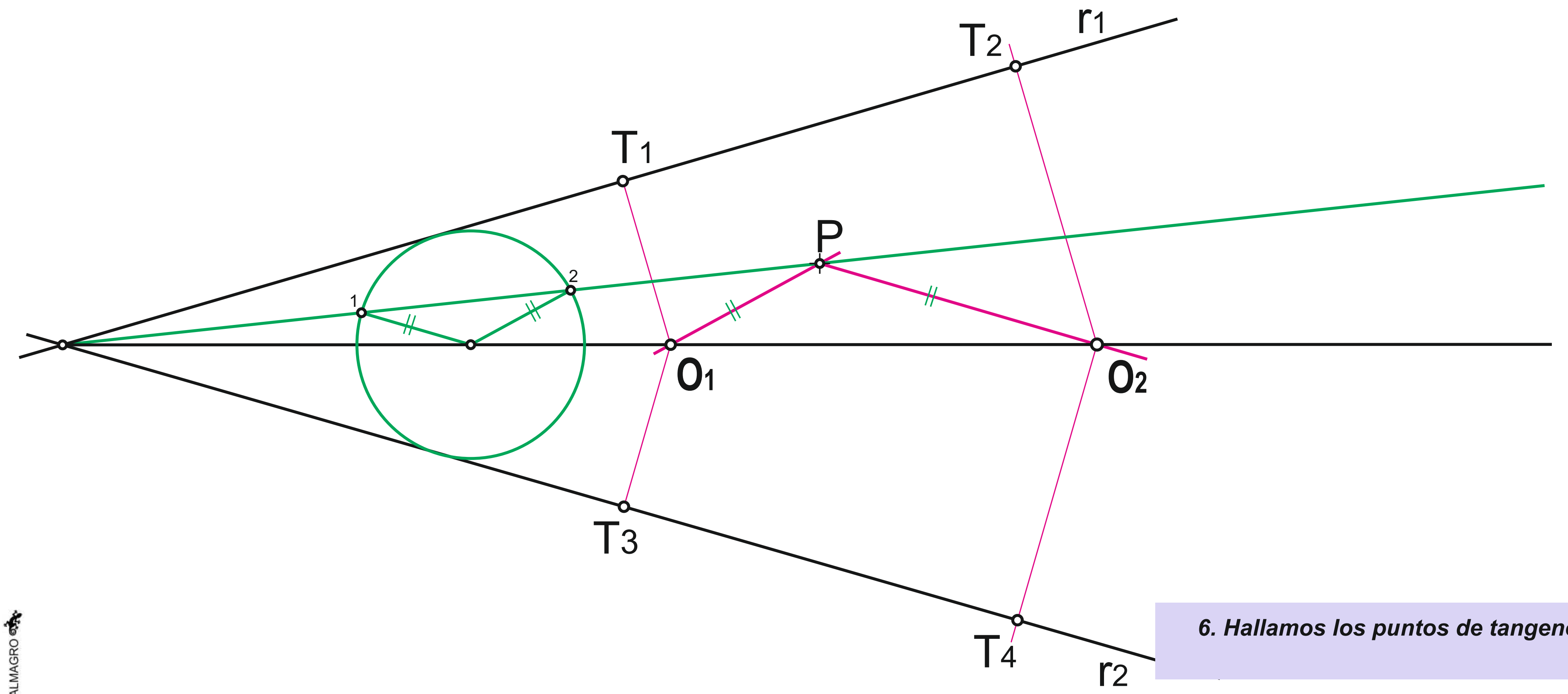
5. Desde el punto P trazamos ***paralelas a los radios trazados en el paso anterior.*** Estas paralelas cortan a la bisectriz en los ***centros de las circunferencias solución, O_1 y O_2***

PROBLEMAS DE APOLONIO

RRP

Circunferencias que pasan por un punto y son tangentes a dos rectas

2ª SOLUCIÓN: Por HOMOTECIA



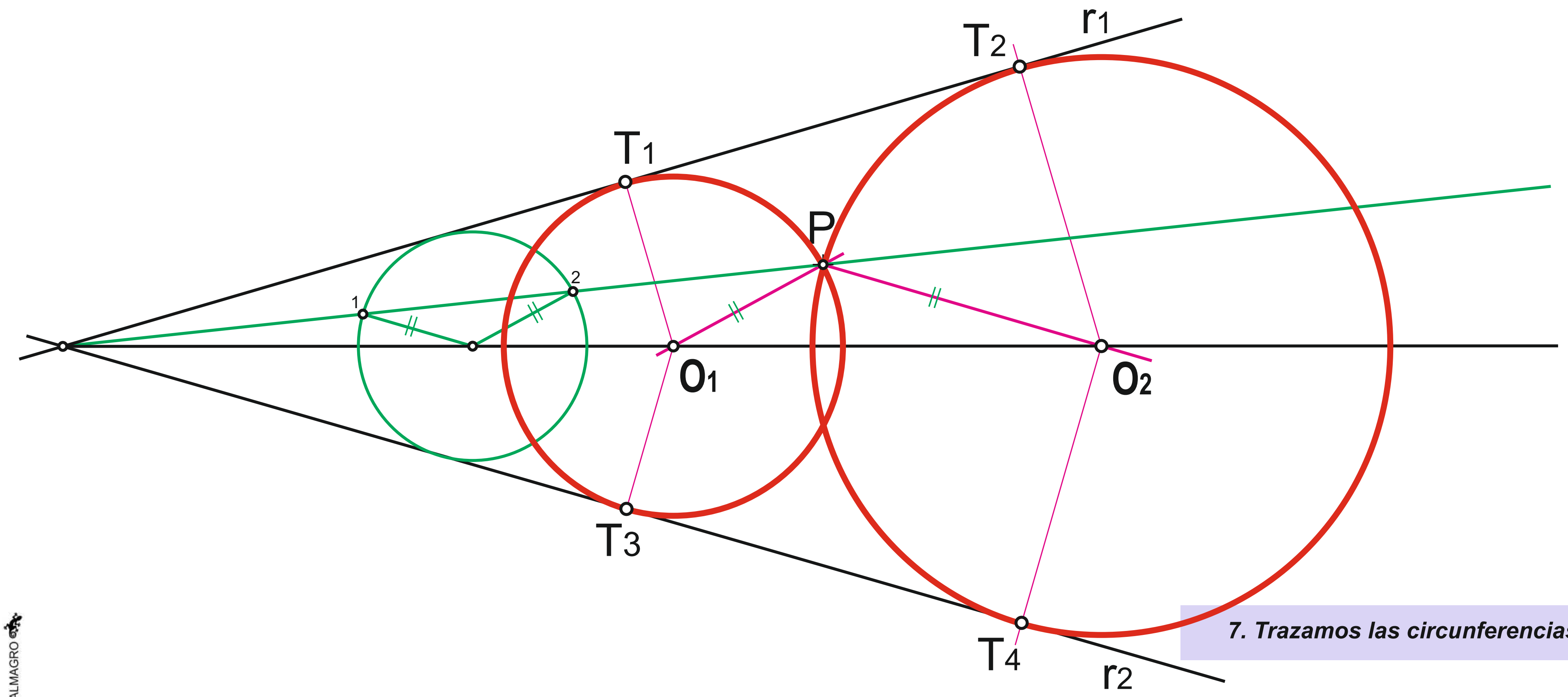
6. Hallamos los puntos de tangencia

PROBLEMAS DE APOLONIO

RRP

Circunferencias que pasan por un punto y son tangentes a dos rectas

2ª SOLUCIÓN: Por HOMOTECIA

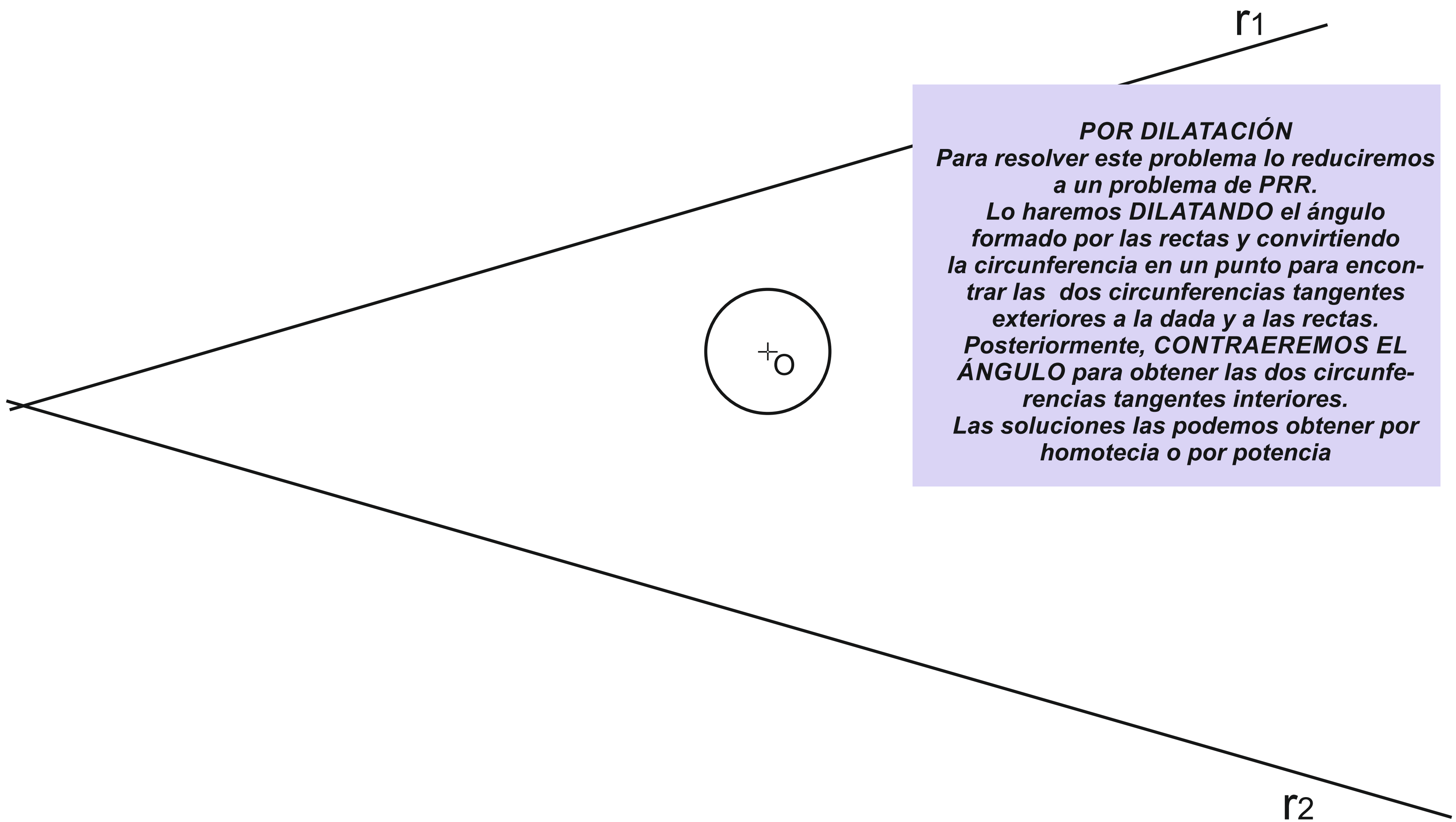


7. Trazamos las circunferencias

PROBLEMAS DE APOLONIO

CRR

Circunferencias tangentes a una circunferencia y a dos rectas

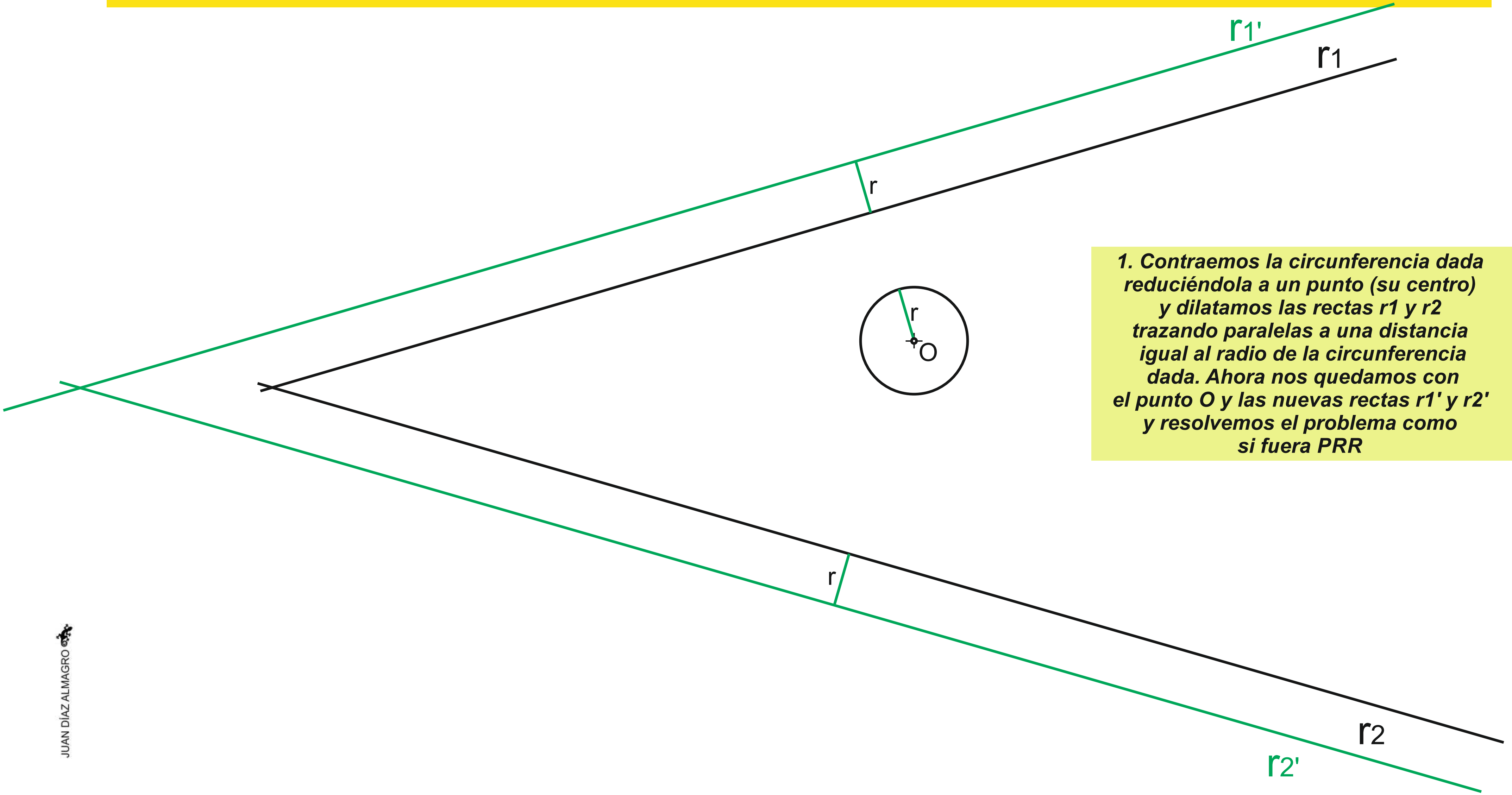


POR DILATACIÓN
Para resolver este problema lo reduciremos a un problema de PRR.
Lo haremos DILATANDO el ángulo formado por las rectas y convirtiendo la circunferencia en un punto para encontrar las dos circunferencias tangentes exteriores a la dada y a las rectas.
Posteriormente, CONTRAEREMOS EL ÁNGULO para obtener las dos circunferencias tangentes interiores.
Las soluciones las podemos obtener por homotecia o por potencia

PROBLEMAS DE APOLONIO

CRR

Circunferencias tangentes a una circunferencia y a dos rectas

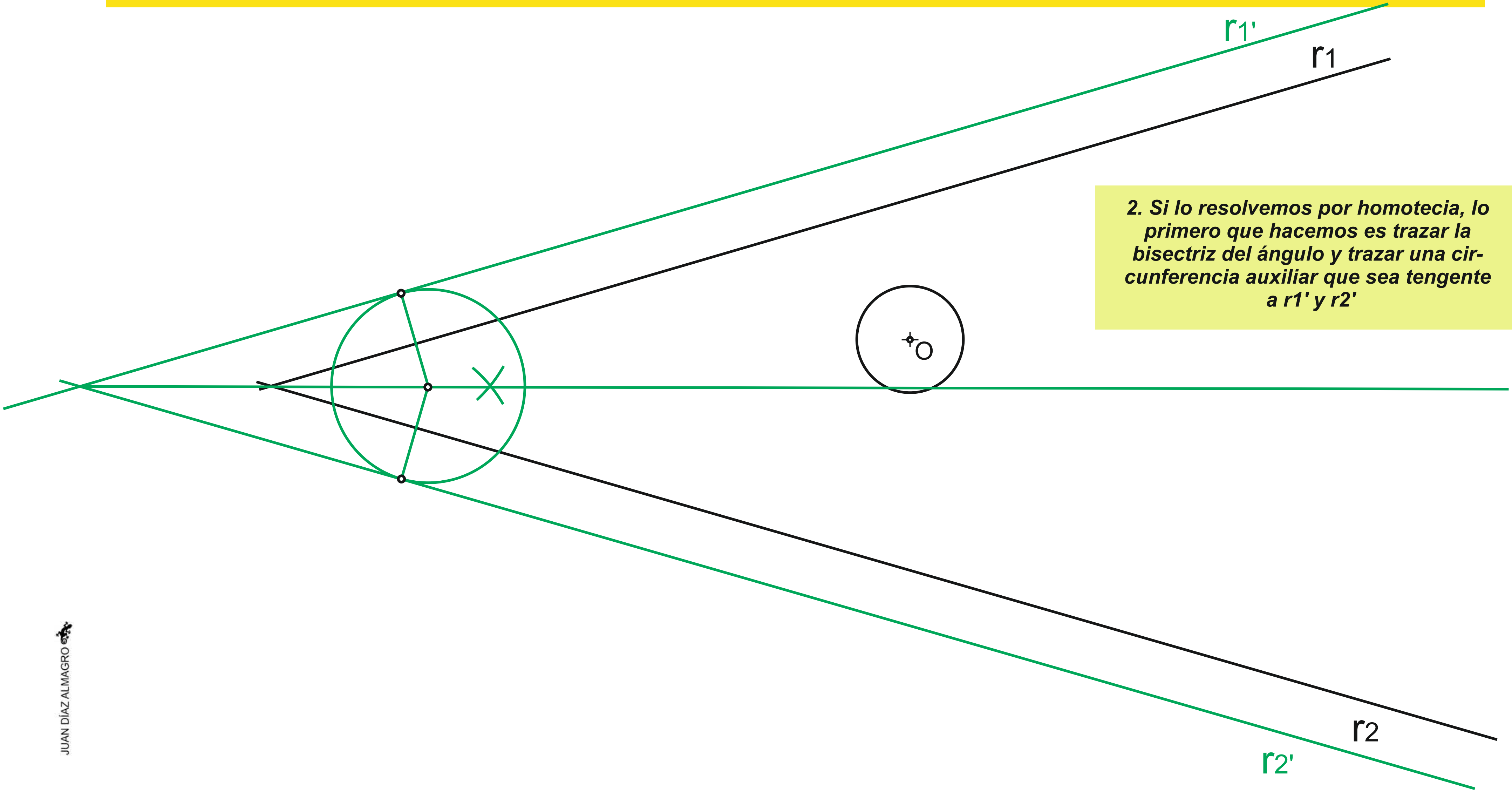


1. Contraemos la circunferencia dada reduciéndola a un punto (su centro) y dilatamos las rectas r1 y r2 trazando paralelas a una distancia igual al radio de la circunferencia dada. Ahora nos quedamos con el punto O y las nuevas rectas r1' y r2' y resolvemos el problema como si fuera PRR

PROBLEMAS DE APOLONIO

CRR

Circunferencias tangentes a una circunferencia y a dos rectas



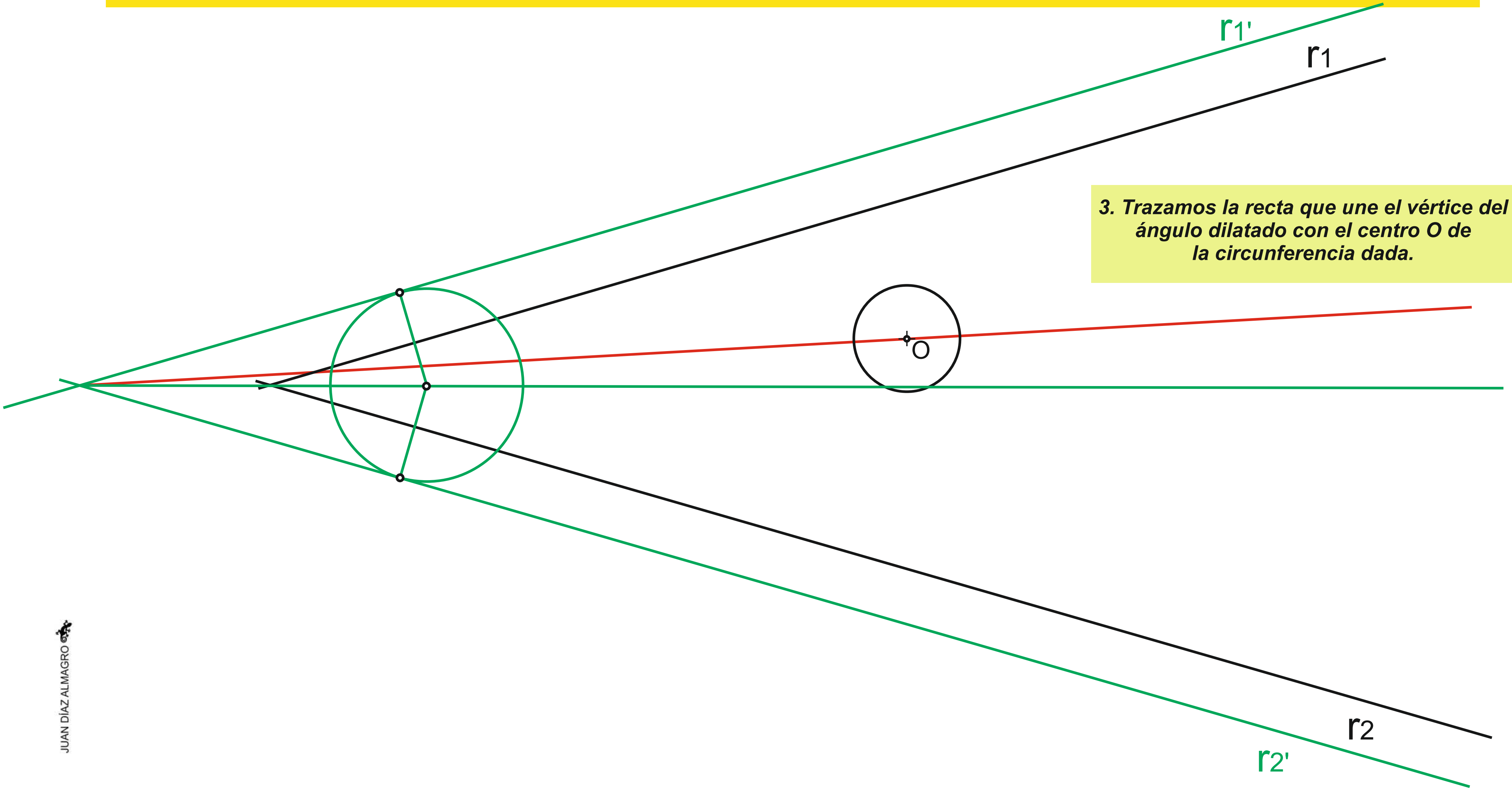
2. Si lo resolvemos por homotecia, lo primero que hacemos es trazar la bisectriz del ángulo y trazar una circunferencia auxiliar que sea tengente a r1' y r2'

PROBLEMAS DE APOLONIO

CRR

Circunferencias tangentes a una circunferencia y a dos rectas

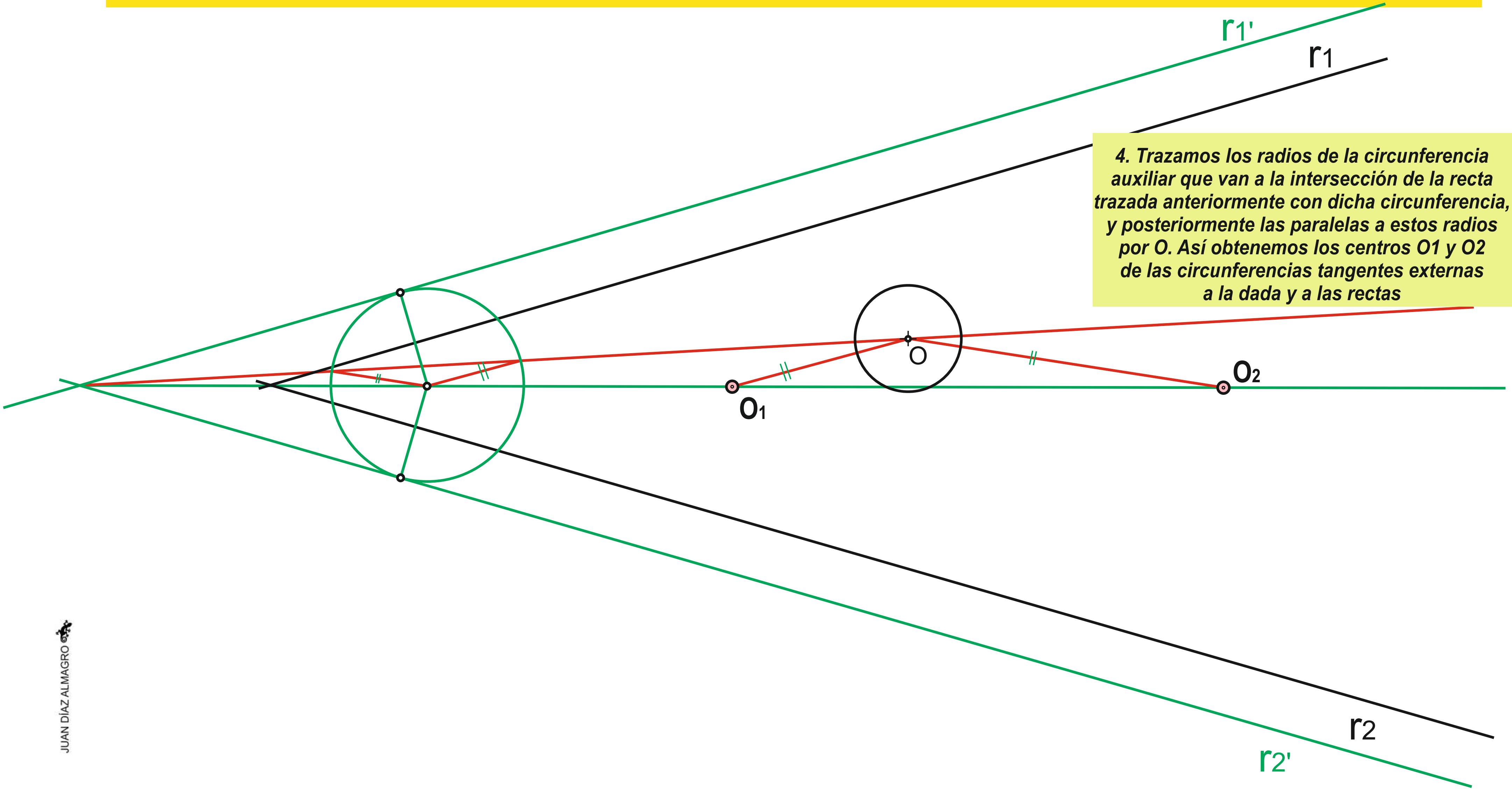
3. Trazamos la recta que une el vértice del ángulo dilatado con el centro O de la circunferencia dada.



PROBLEMAS DE APOLONIO

CRR

Circunferencias tangentes a una circunferencia y a dos rectas



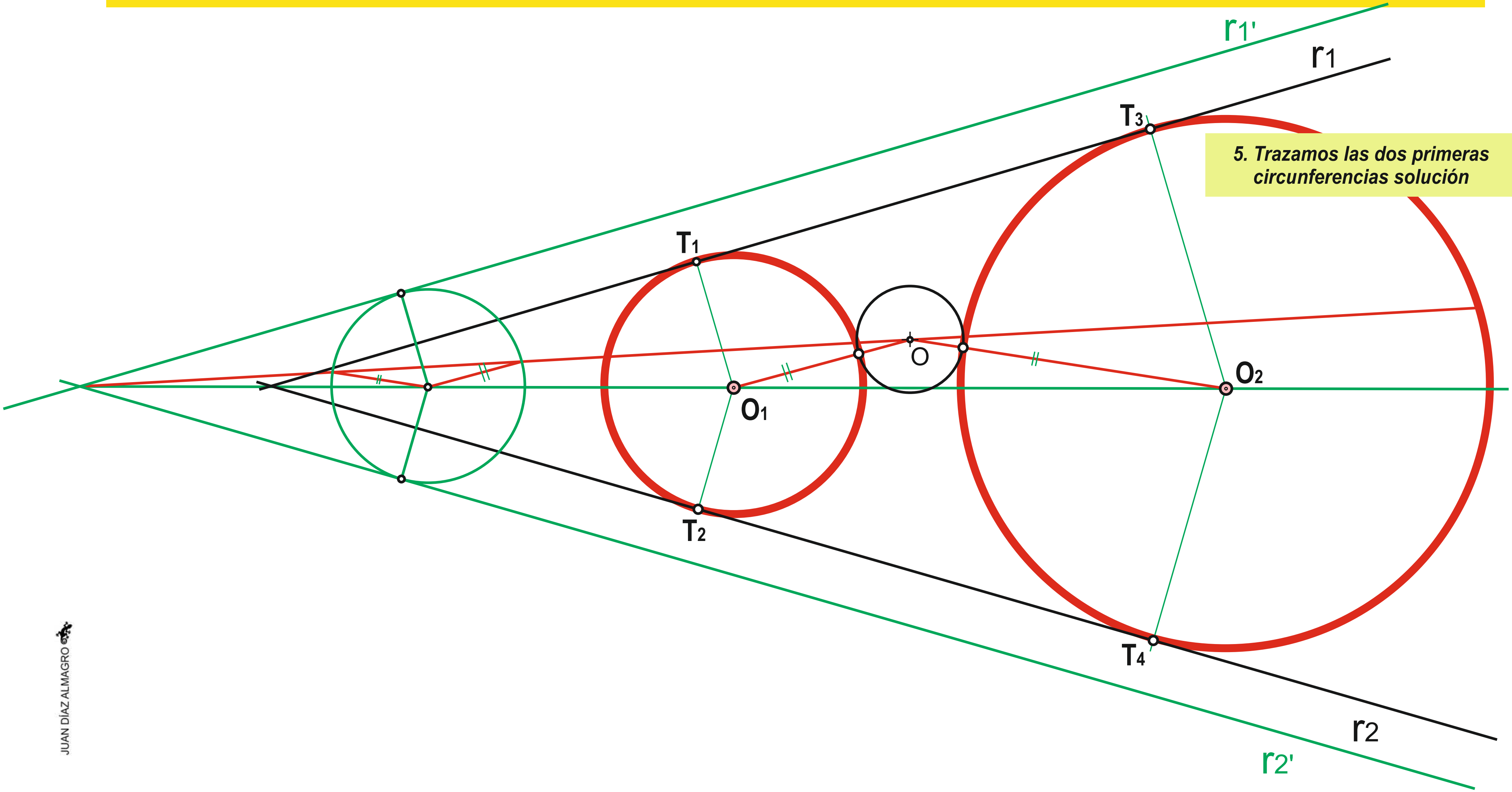
4. Trazamos los radios de la circunferencia auxiliar que van a la intersección de la recta trazada anteriormente con dicha circunferencia, y posteriormente las paralelas a estos radios por O. Así obtenemos los centros O1 y O2 de las circunferencias tangentes externas a la dada y a las rectas

PROBLEMAS DE APOLONIO

CRR

Circunferencias tangentes a una circunferencia y a dos rectas

5. Trazamos las dos primeras circunferencias solución

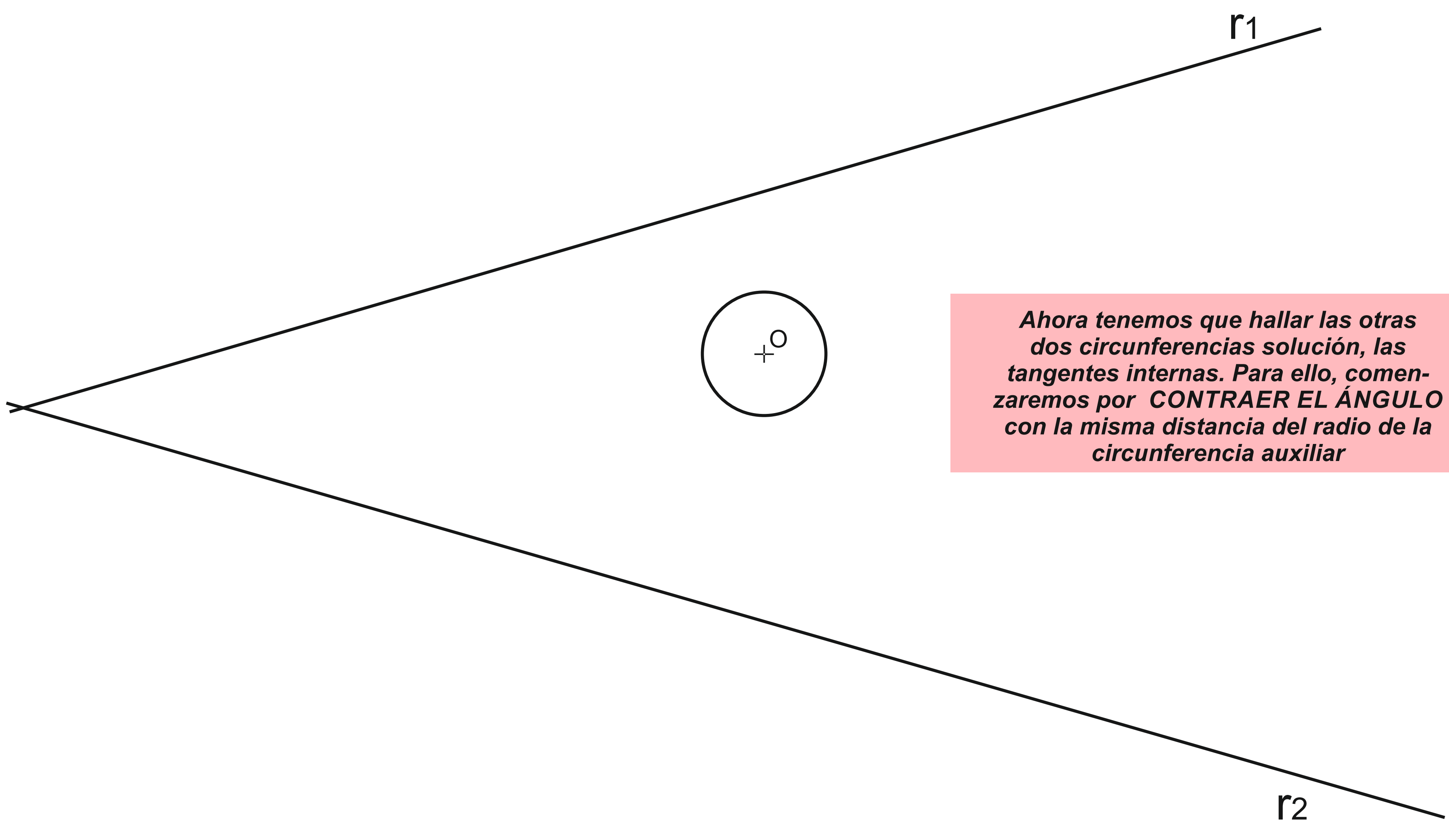


JUAN DÍAZ ALMAGRO

PROBLEMAS DE APOLONIO

CRR

Circunferencias tangentes a una circunferencia y a dos rectas

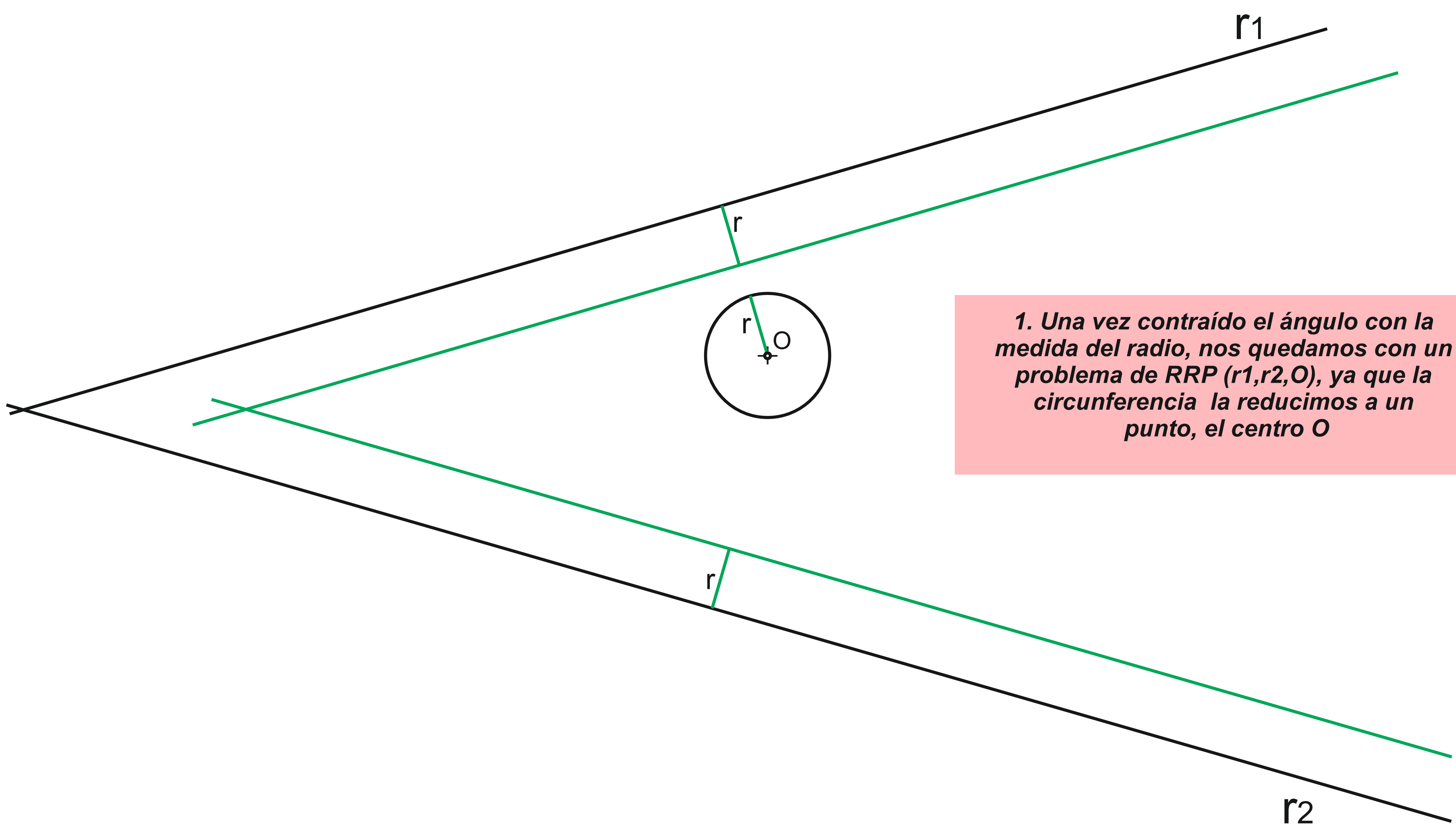


Ahora tenemos que hallar las otras dos circunferencias solución, las tangentes internas. Para ello, comenzaremos por CONTRAER EL ÁNGULO con la misma distancia del radio de la circunferencia auxiliar

PROBLEMAS DE APOLONIO

CRR

Circunferencias tangentes a una circunferencia y a dos rectas

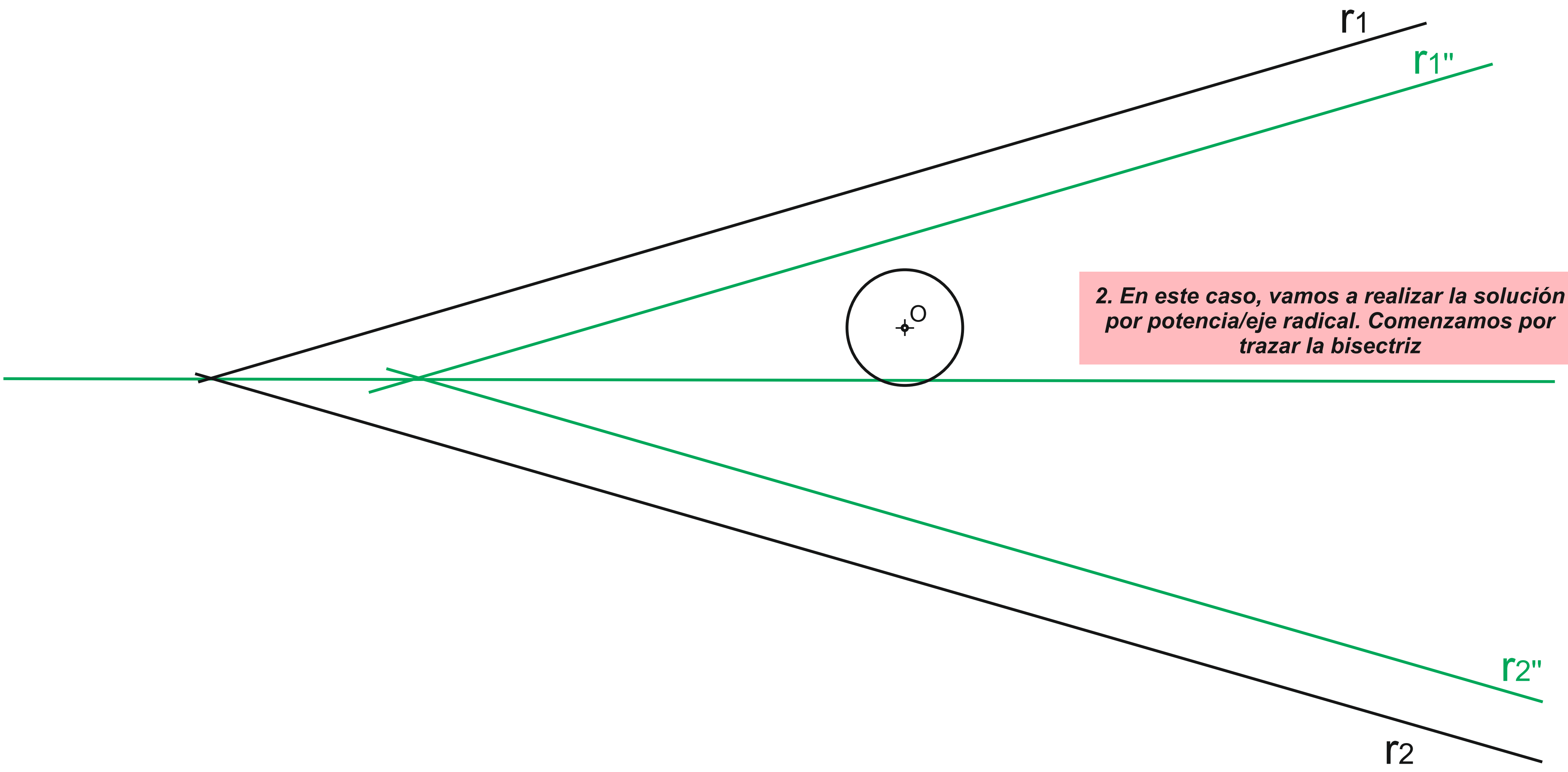


1. Una vez contraído el ángulo con la medida del radio, nos quedamos con un problema de RRP (r1,r2,O), ya que la circunferencia la reducimos a un punto, el centro O

PROBLEMAS DE APOLONIO

CRR

Circunferencias tangentes a una circunferencia y a dos rectas

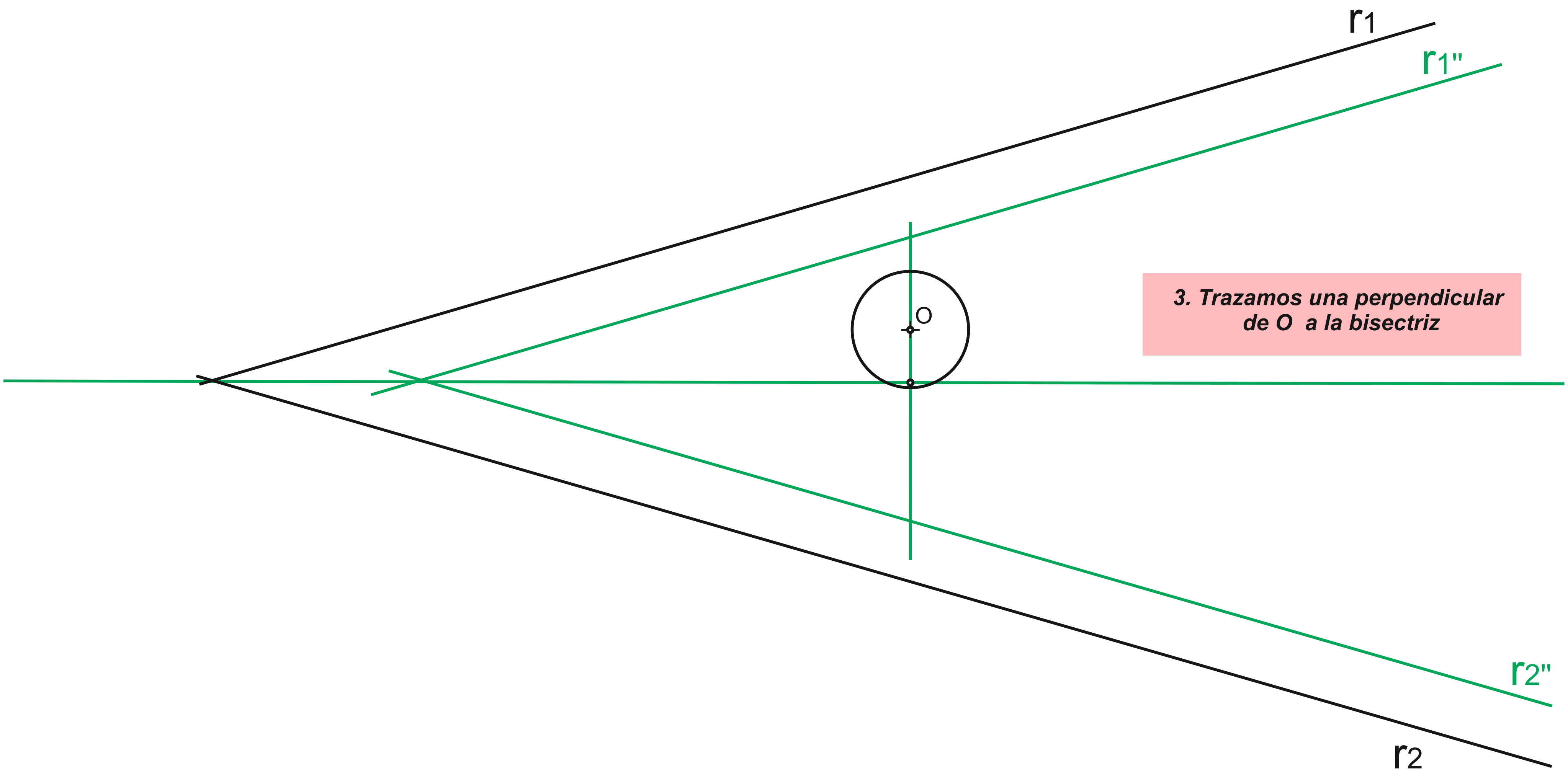


2. En este caso, vamos a realizar la solución por potencia/eje radical. Comenzamos por trazar la bisectriz

PROBLEMAS DE APOLONIO

CRR

Circunferencias tangentes a una circunferencia y a dos rectas

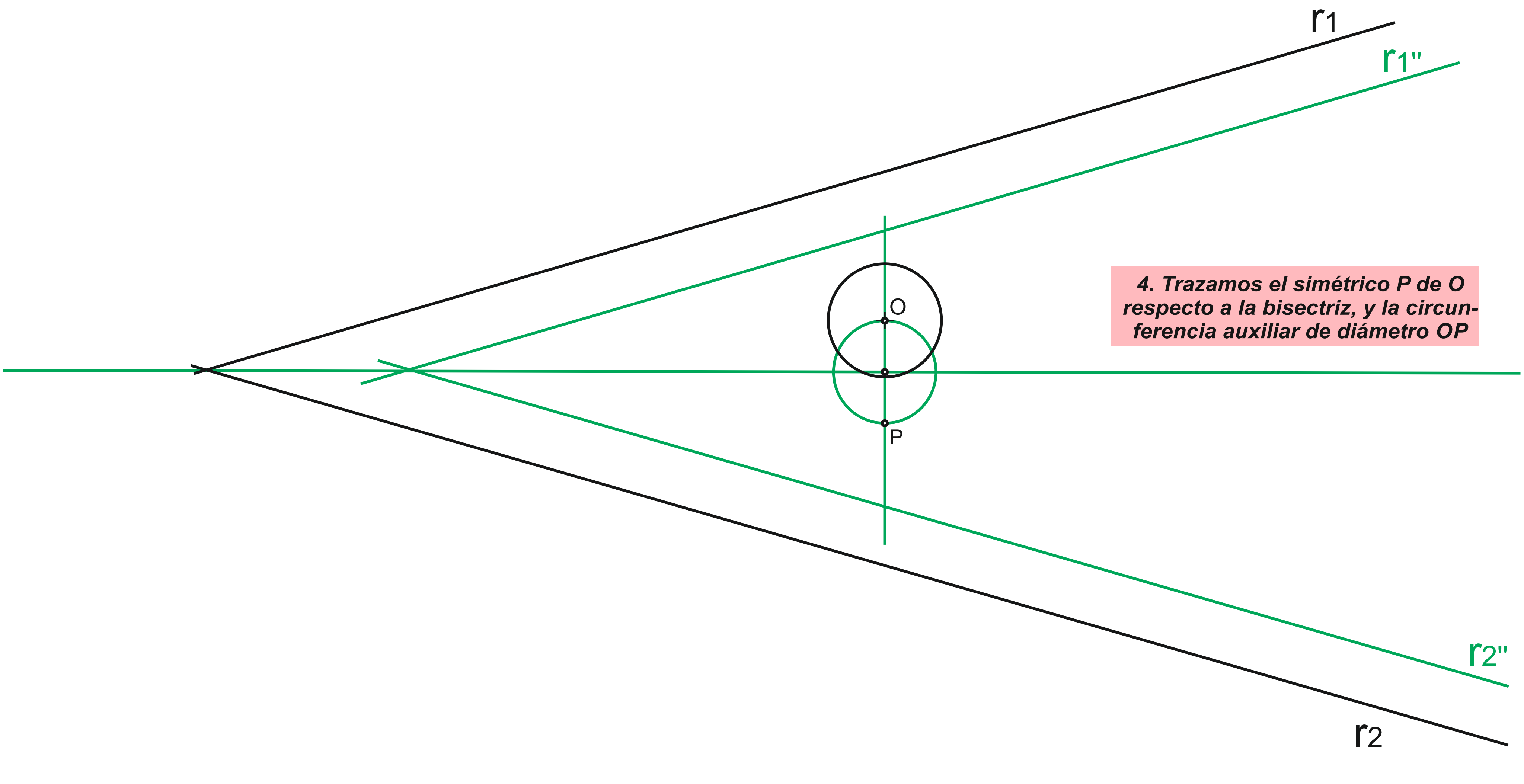


3. Trazamos una perpendicular de O a la bisectriz

PROBLEMAS DE APOLONIO

CRR

Circunferencias tangentes a una circunferencia y a dos rectas

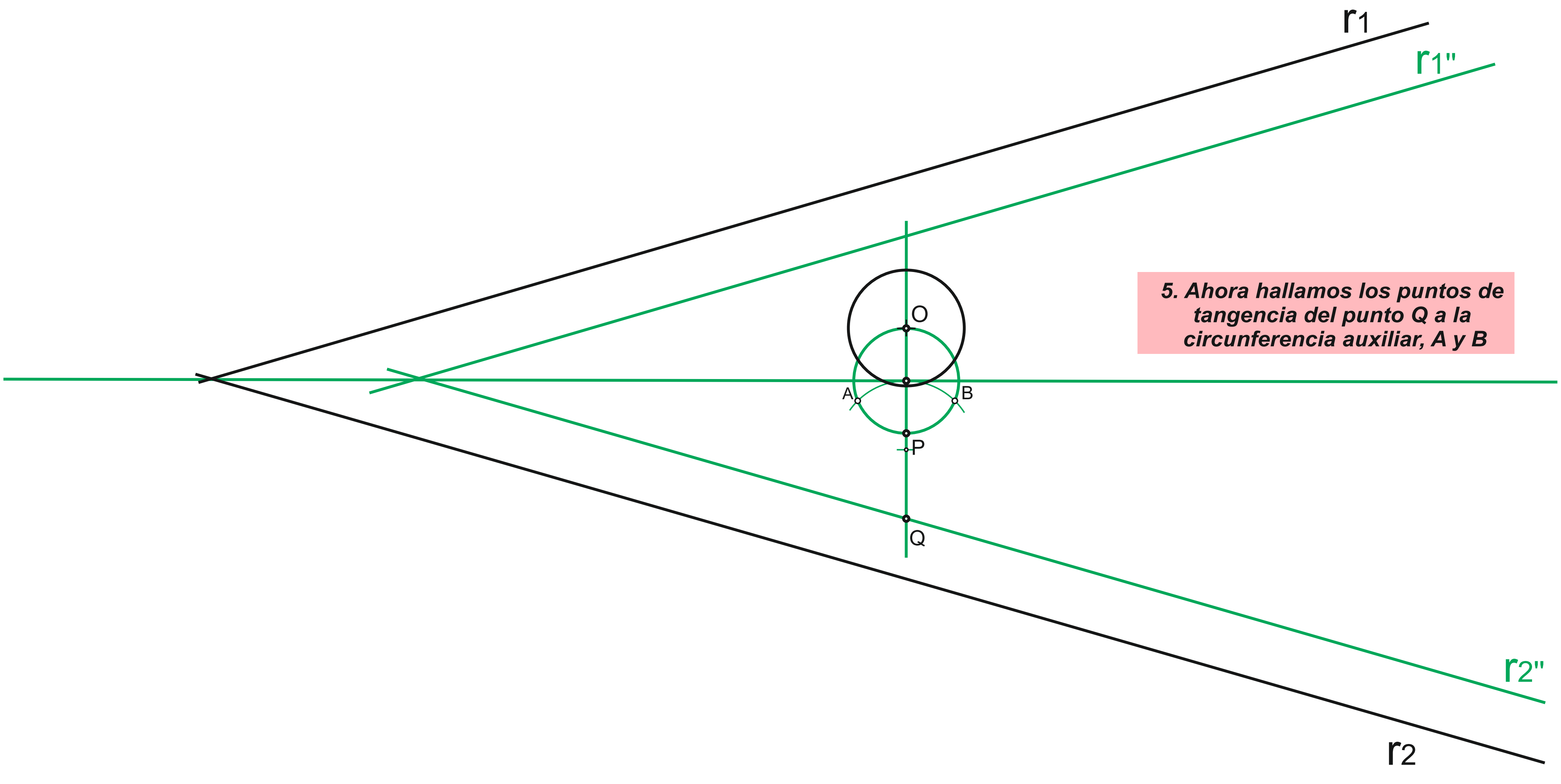


4. Trazamos el simétrico P de O respecto a la bisectriz, y la circunferencia auxiliar de diámetro OP

PROBLEMAS DE APOLONIO

CRR

Circunferencias tangentes a una circunferencia y a dos rectas

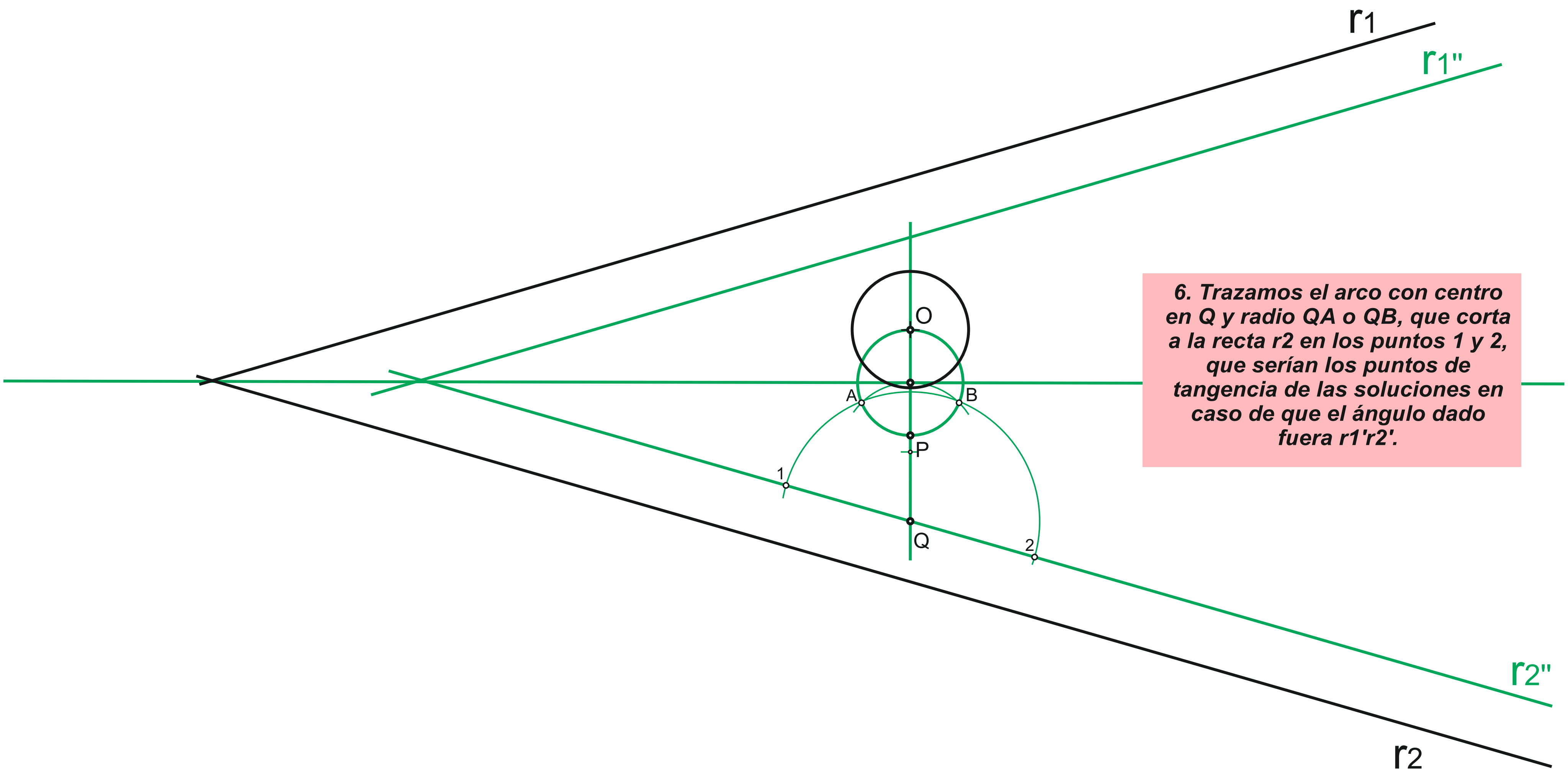


5. Ahora hallamos los puntos de tangencia del punto Q a la circunferencia auxiliar, A y B

PROBLEMAS DE APOLONIO

CRR

Circunferencias tangentes a una circunferencia y a dos rectas

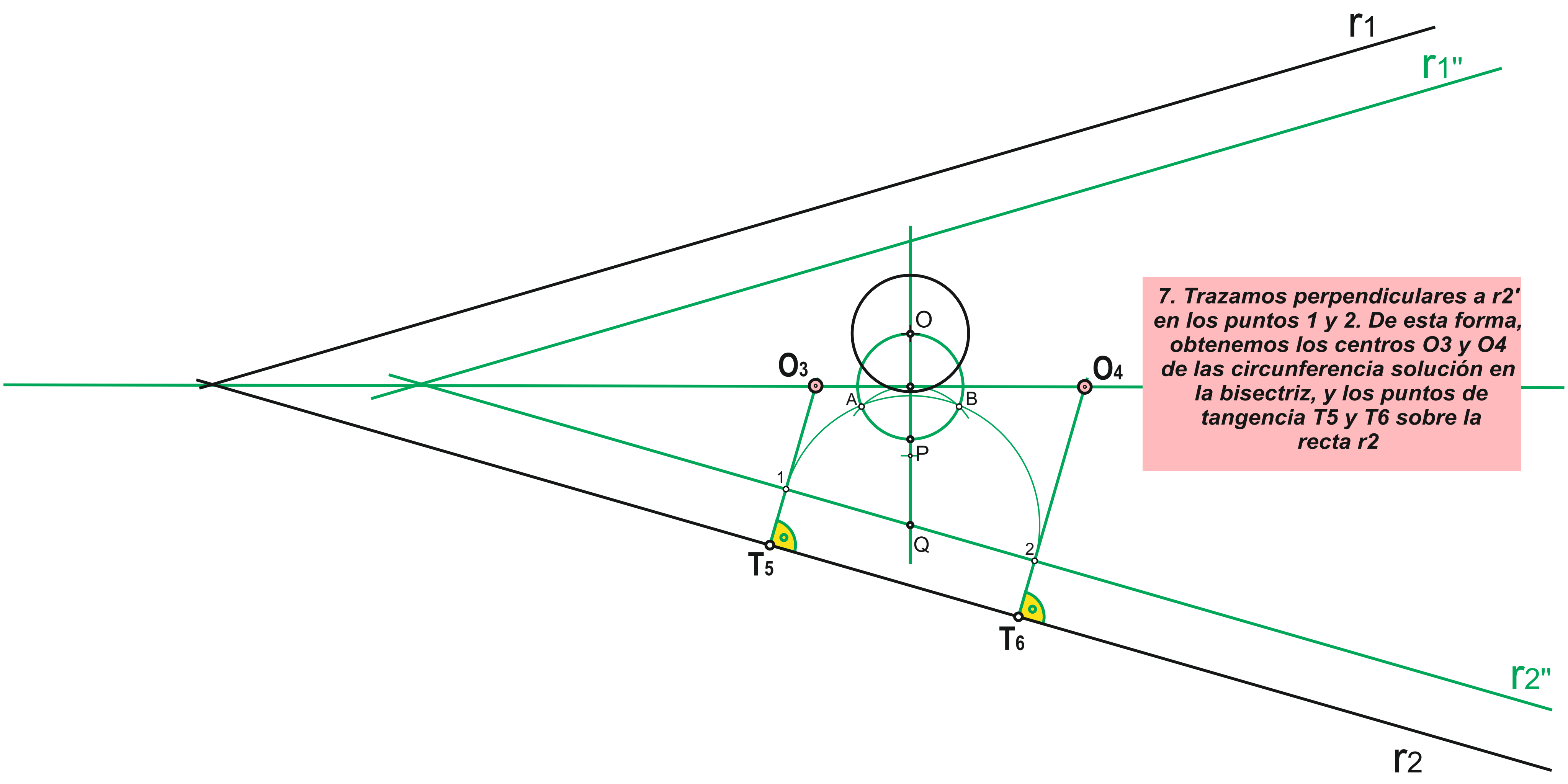


6. Trazamos el arco con centro en Q y radio QA o QB, que corta a la recta r2 en los puntos 1 y 2, que serían los puntos de tangencia de las soluciones en caso de que el ángulo dado fuera r1'r2'.

PROBLEMAS DE APOLONIO

CRR

Circunferencias tangentes a una circunferencia y a dos rectas



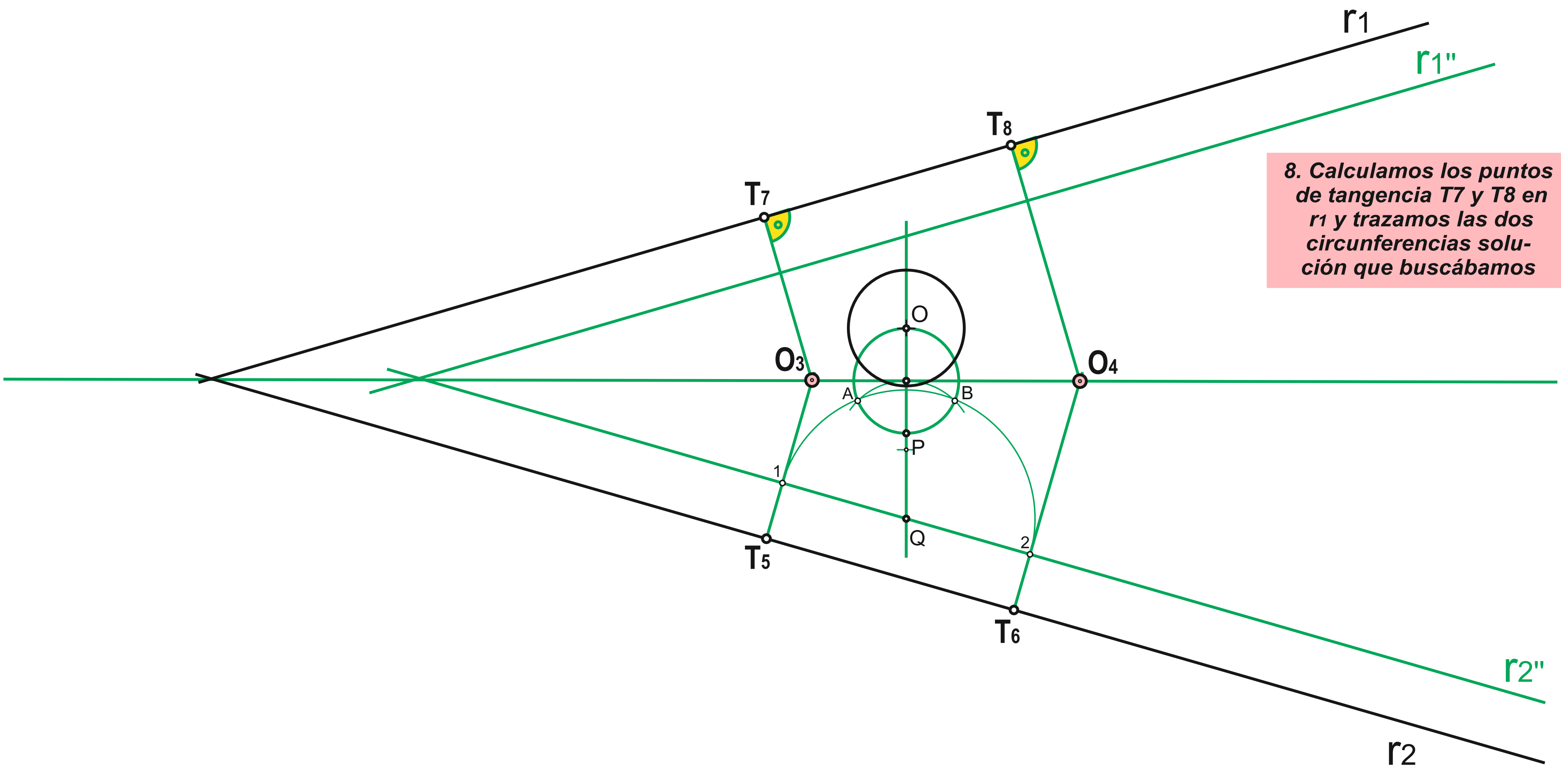
7. Trazamos perpendiculares a r2' en los puntos 1 y 2. De esta forma, obtenemos los centros O3 y O4 de las circunferencia solución en la bisectriz, y los puntos de tangencia T5 y T6 sobre la recta r2

JUAN DÍAZ ALMAGRO

PROBLEMAS DE APOLONIO

CRR

Circunferencias tangentes a una circunferencia y a dos rectas

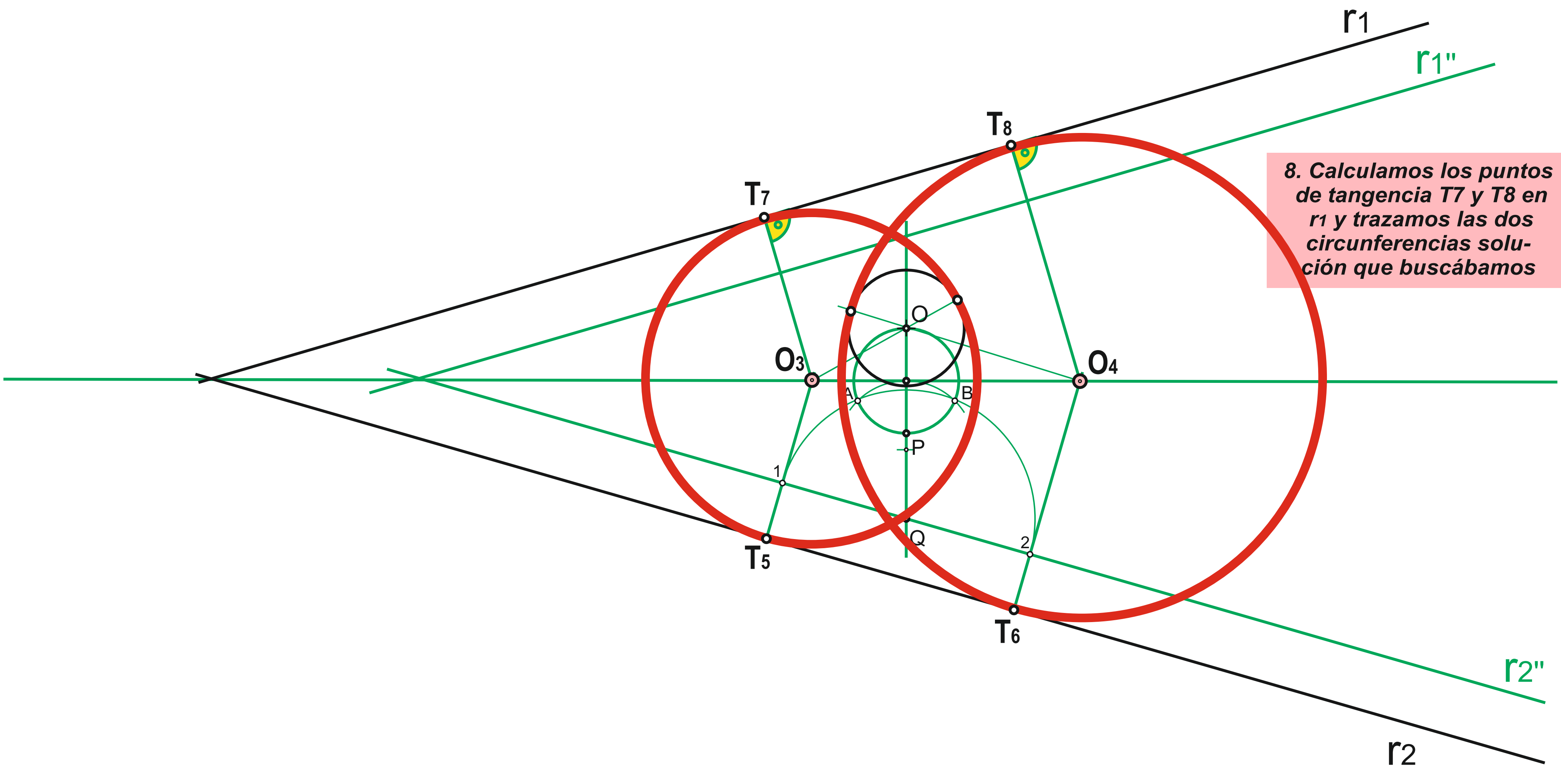


8. Calculamos los puntos de tangencia T7 y T8 en r1 y trazamos las dos circunferencias solución que buscábamos

PROBLEMAS DE APOLONIO

CRR

Circunferencias tangentes a una circunferencia y a dos rectas



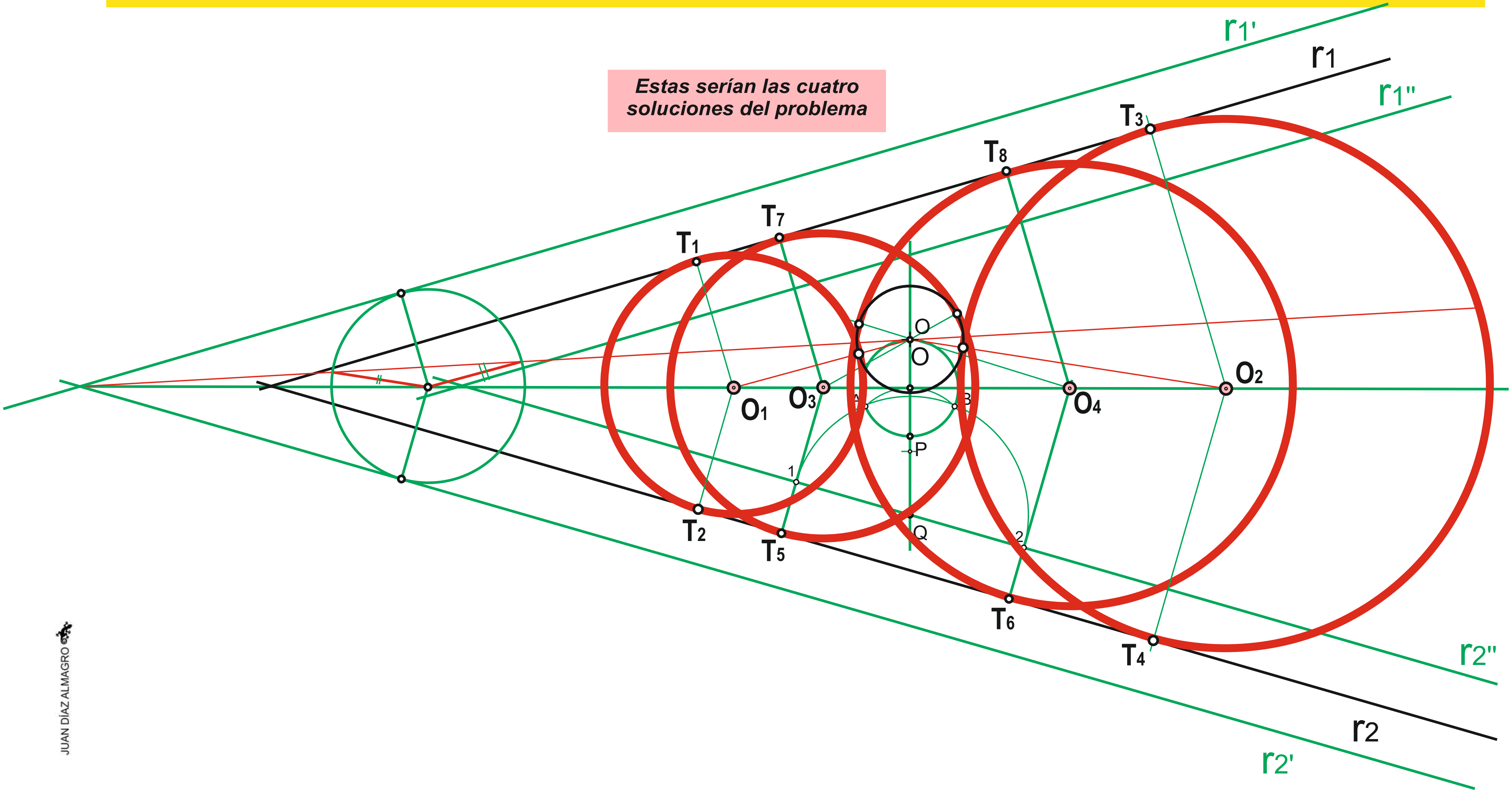
8. Calculamos los puntos de tangencia T7 y T8 en r1 y trazamos las dos circunferencias solución que buscábamos

JUAN DÍAZ ALMAGRO

PROBLEMAS DE APOLONIO

CRR

Circunferencias tangentes a una circunferencia y a dos rectas

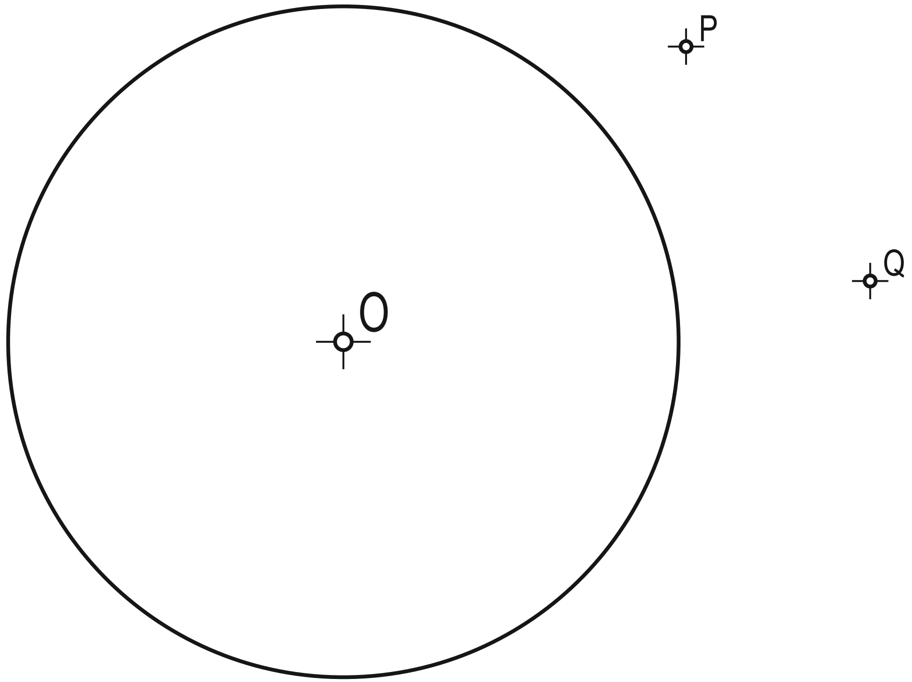


PROBLEMAS DE APOLONIO

CPP

Circunferencias que pasan por dos puntos y son tangentes a una circunferencia

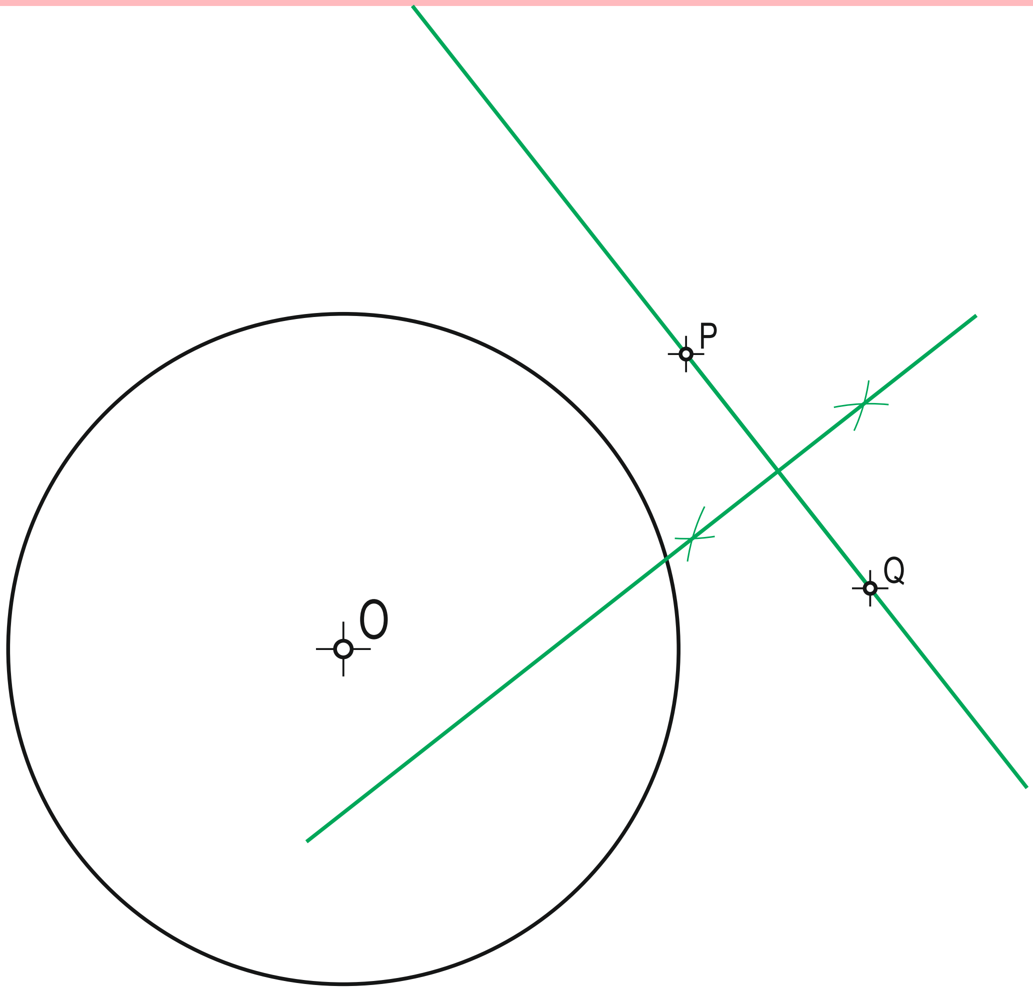
Este problema lo resolveremos por ***POTENCIA.***
Hallaremos un eje radical auxiliar que nos ayudará a encontrar el centro radical de la circunferencia del enunciado y las dos de la solución



PROBLEMAS DE APOLONIO

CPP

Circunferencias que pasan por dos puntos y son tangentes a una circunferencia



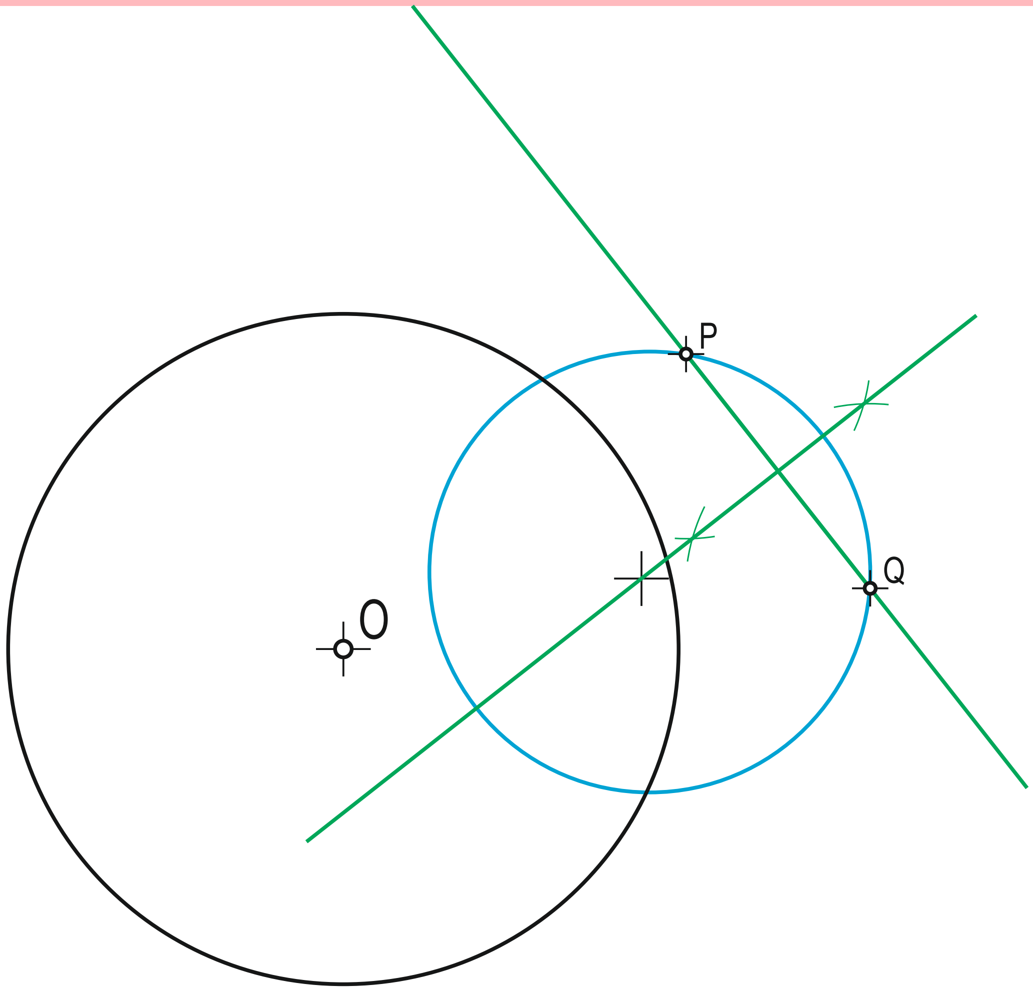
1. Trazamos la recta que pasa por los dos puntos P y Q, y hallamos la mediatriz del segmento que pasa por ambos puntos, ya que sobre esta mediatriz estarán los centros de las soluciones

PROBLEMAS DE APOLONIO

CPP

Circunferencias que pasan por dos puntos y son tangentes a una circunferencia

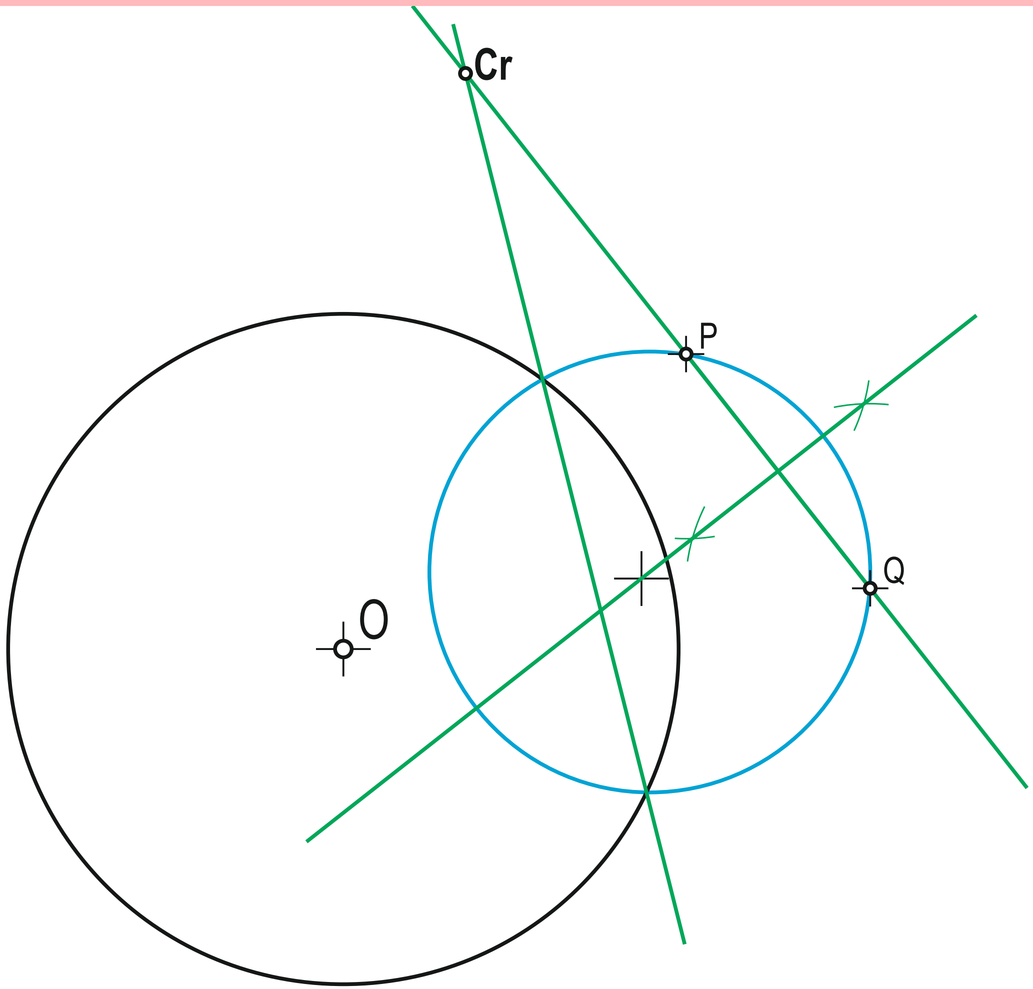
2. Trazamos una circunferencia auxiliar con centro en la mediatriz de PQ y que pase por ambos puntos



PROBLEMAS DE APOLONIO

CPP

Circunferencias que pasan por dos puntos y son tangentes a una circunferencia

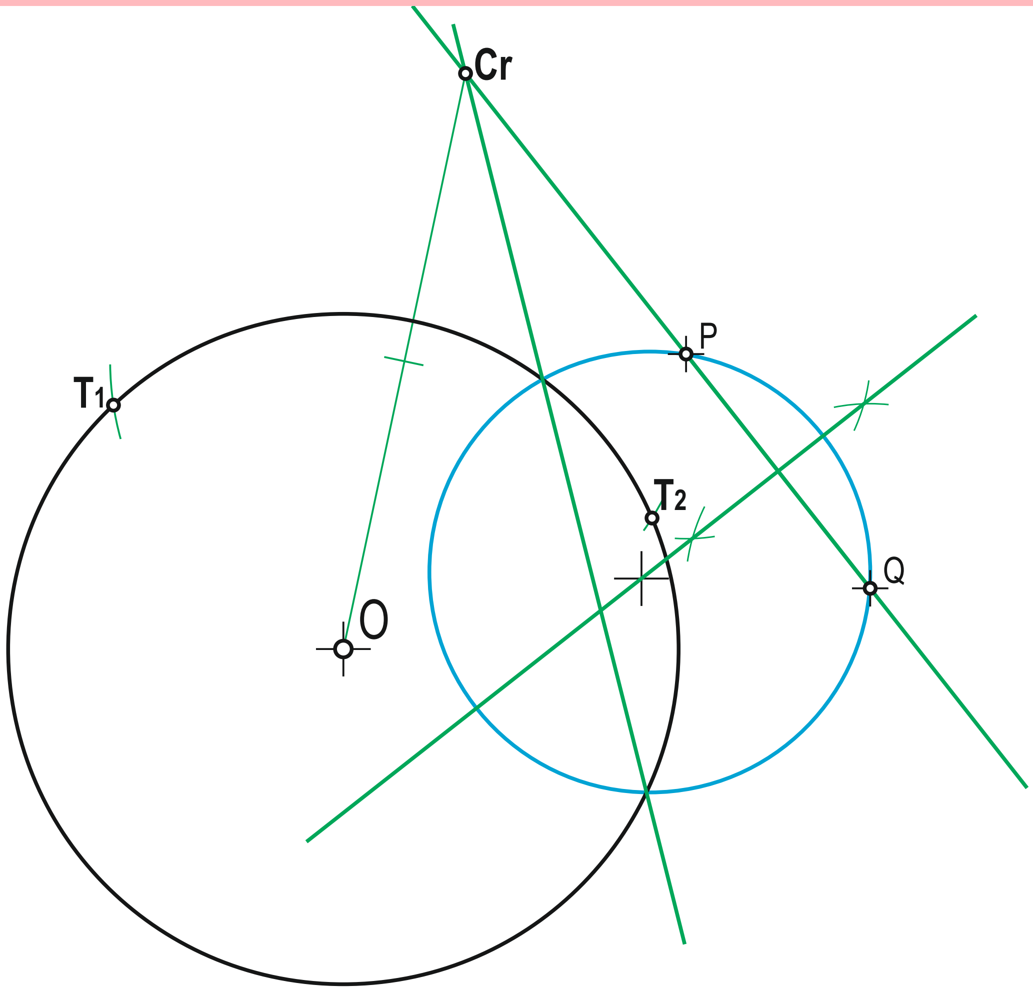


3. Trazamos el eje radical entre la circunferencia dada y la auxiliar, que corta a la recta que pasa por P y Q en el centro radical Cr de las circunferencias solución con la dada

PROBLEMAS DE APOLONIO

CPP

Circunferencias que pasan por dos puntos y son tangentes a una circunferencia

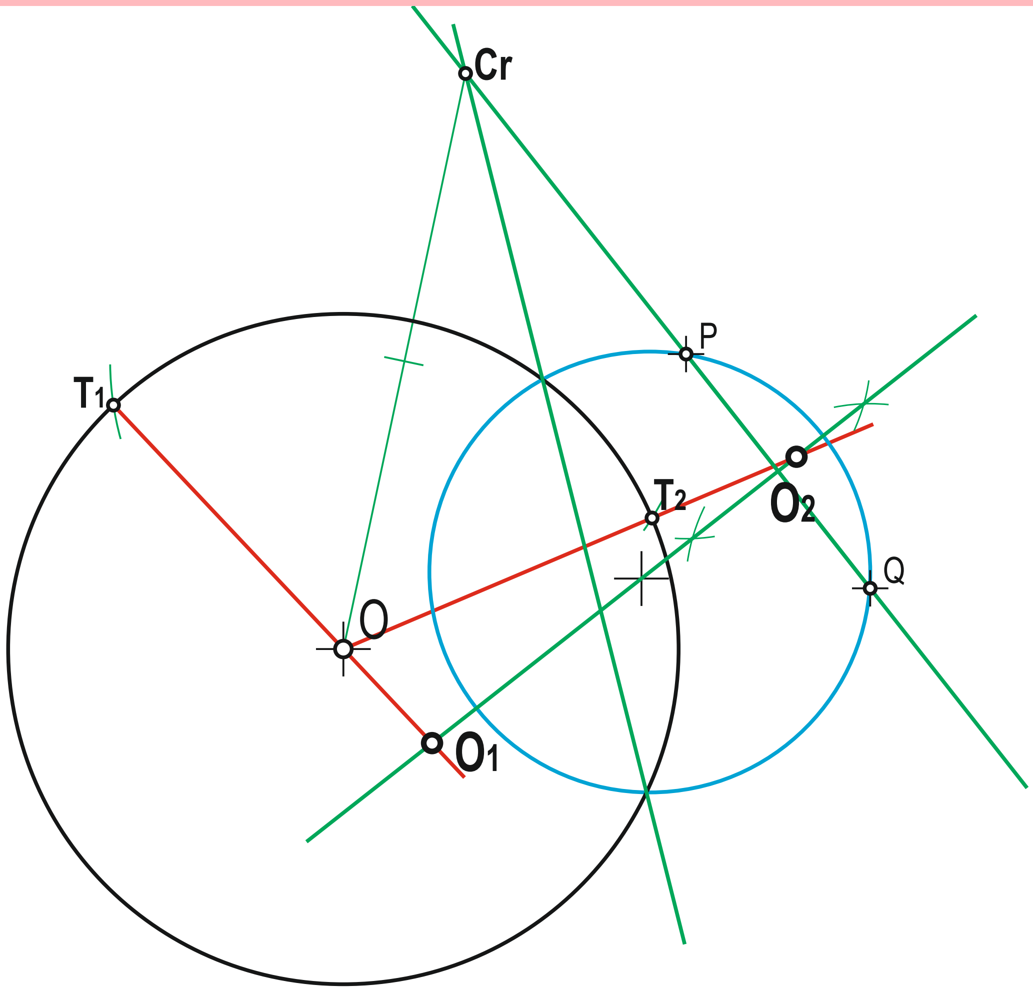


4. Hallamos los puntos de tangencia T1 y T2 de las rectas tangentes exteriores desde Cr a la circungferencia dada O. Estos puntos serán los puntos de tangencia de las soluciones finales.

PROBLEMAS DE APOLONIO

CPP

Circunferencias que pasan por dos puntos y son tangentes a una circunferencia



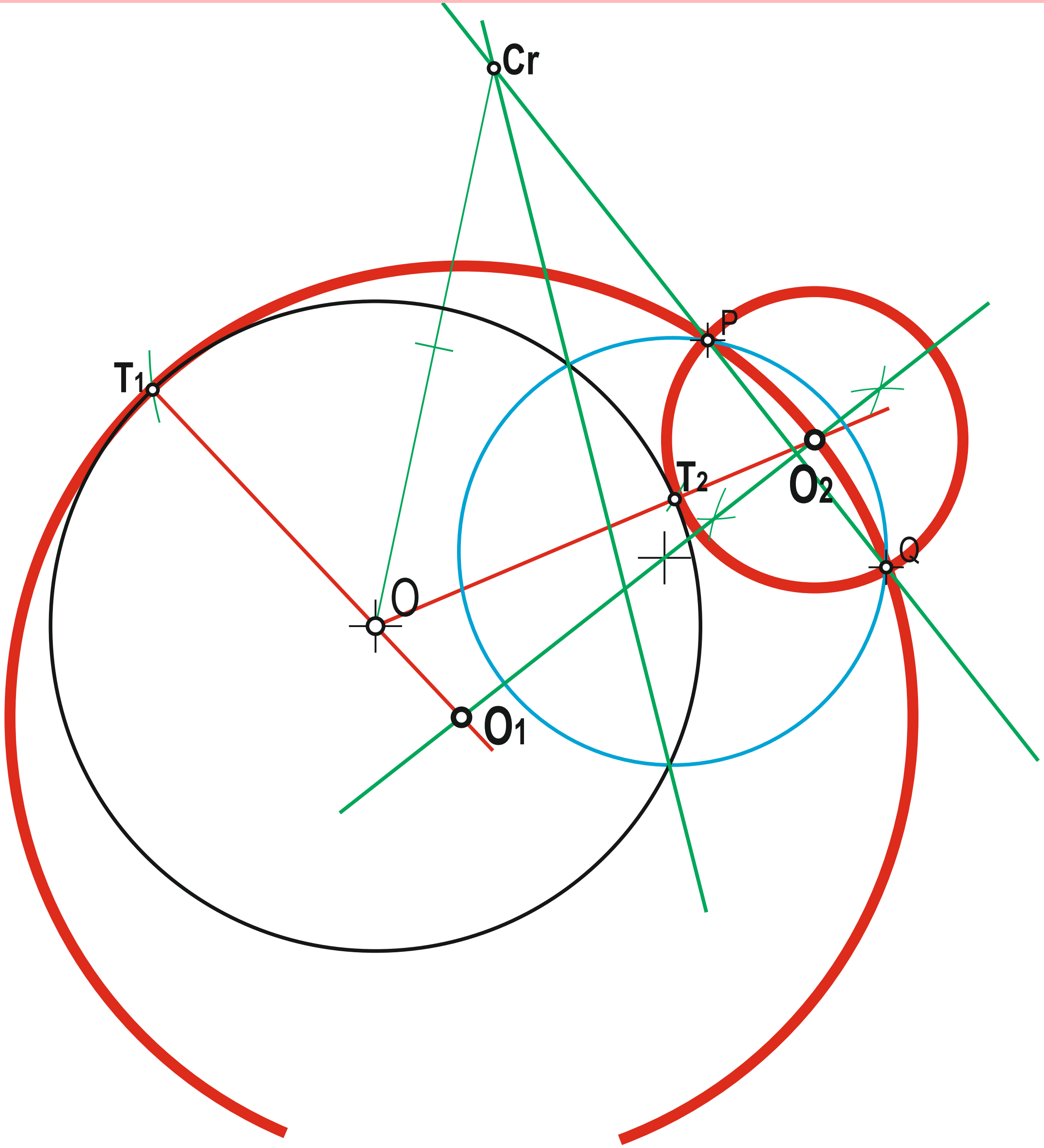
5. Unimos T1 y T2 con el centro O de la circunferencia dada, y ambas rectas cortarán a la mediatriz de PQ en O1 y O2, centros de las circunferencias solución.

PROBLEMAS DE APOLONIO

CPP

Circunferencias que pasan por dos puntos y son tangentes a una circunferencia

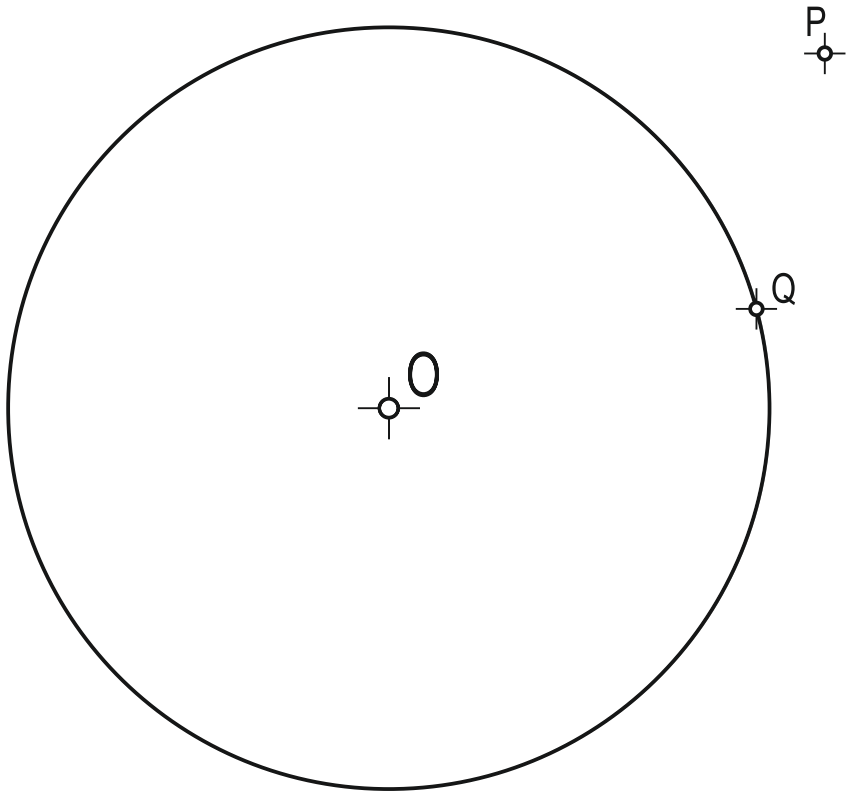
6. Trazamos las circunferencias solución



PROBLEMAS DE APOLONIO

CPP

Circunferencias que pasan por dos puntos y son tangentes a una circunferencia

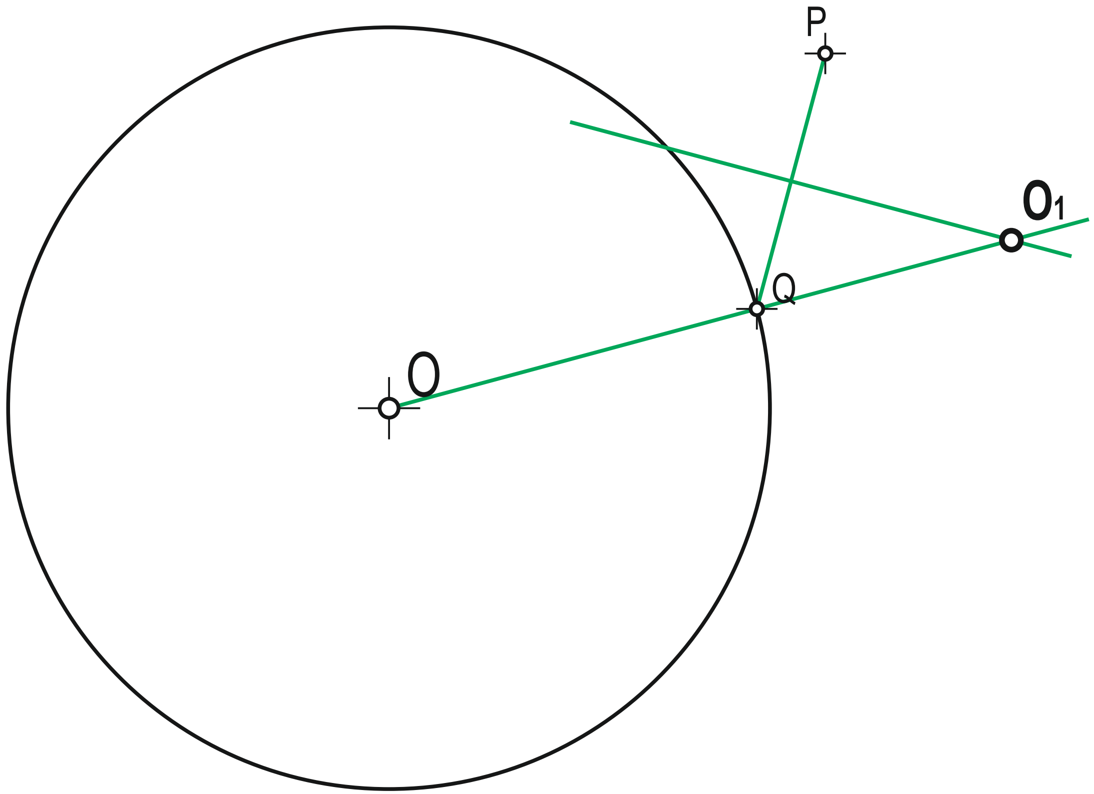


Si el problema tuviera uno de los puntos en la circunferencia la solución hubiera sido más fácil y rápida de ejecutar

PROBLEMAS DE APOLONIO

CPP

Circunferencias que pasan por dos puntos y son tangentes a una circunferencia



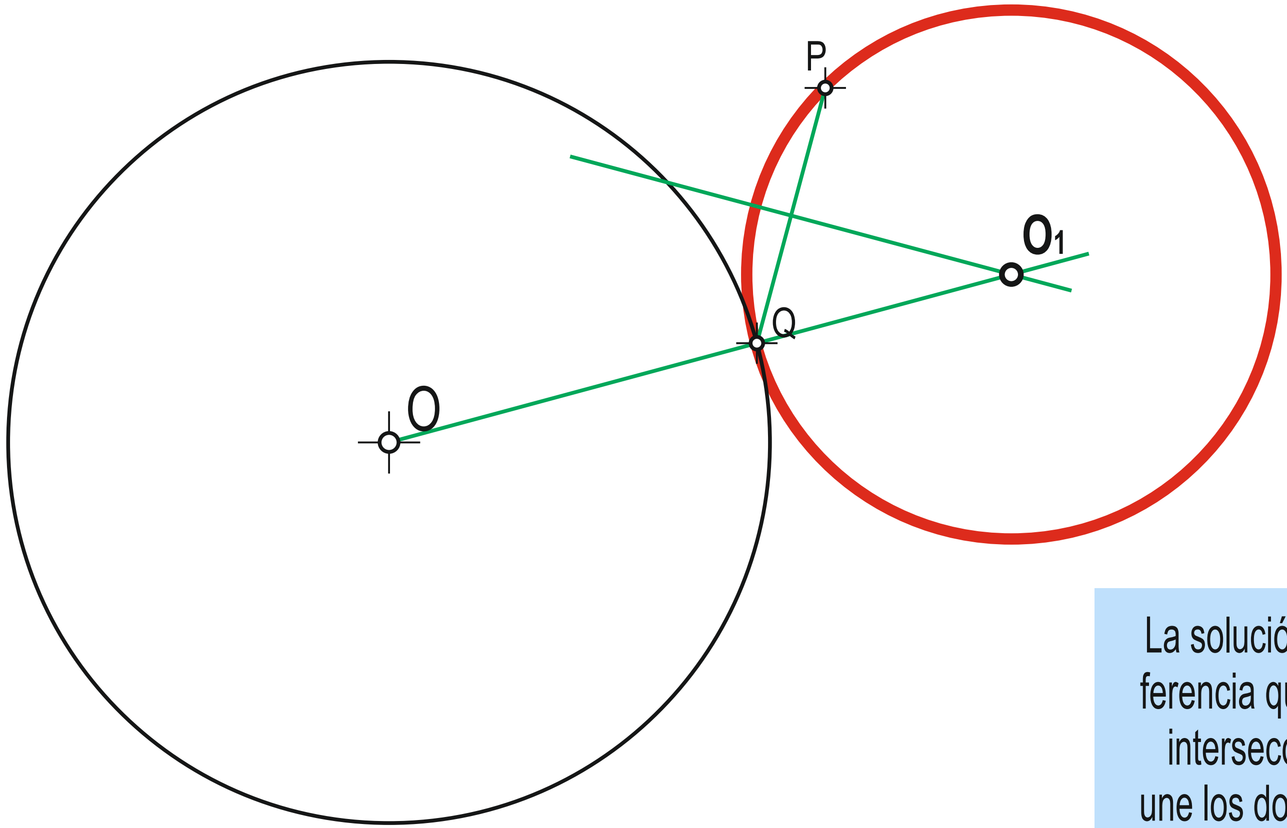
La solución sería una única circunferencia que tendría su centro en la intersección de la mediatriz que une los dos puntos con la recta que une el centro de la circunferencia y el punto que está en la misma (Q)

JUAN DÍAZ ALMAGRO

PROBLEMAS DE APOLONIO

CPP

Circunferencias que pasan por dos puntos y son tangentes a una circunferencia

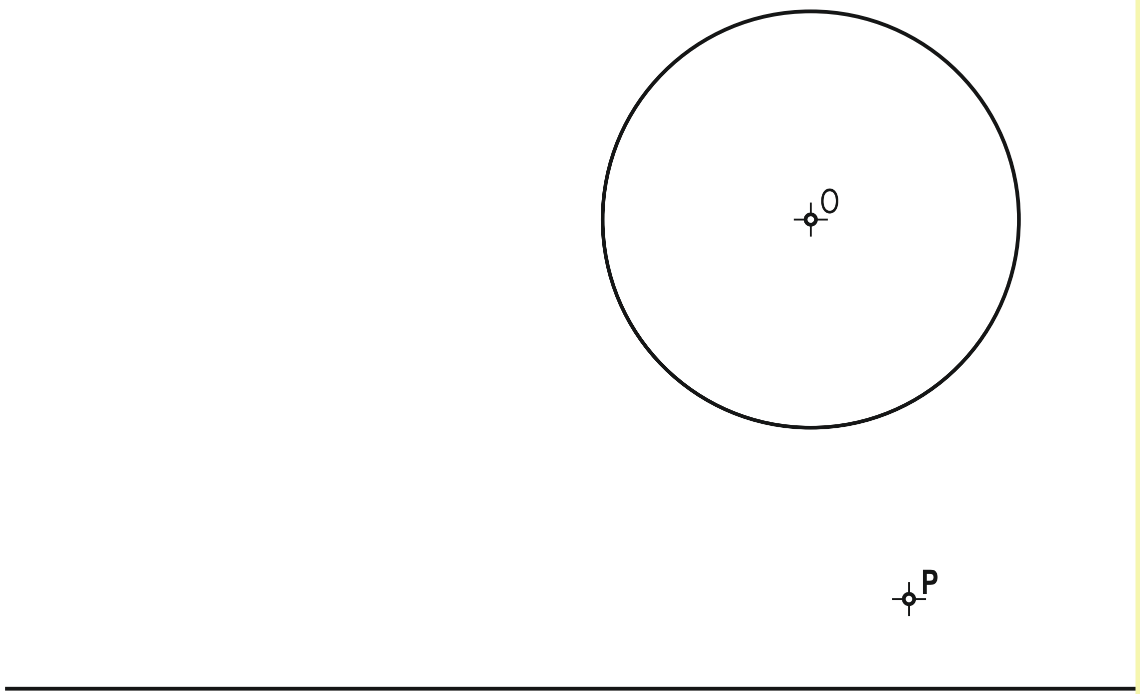


La solución sería una única circunferencia que tendría su centro en la intersección de la mediatriz que une los dos puntos con la recta que une el centro de la circunferencia y el punto que está en la misma (Q)

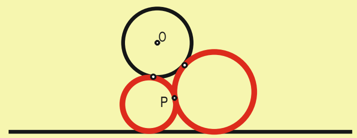
PROBLEMAS DE APOLONIO

CPR

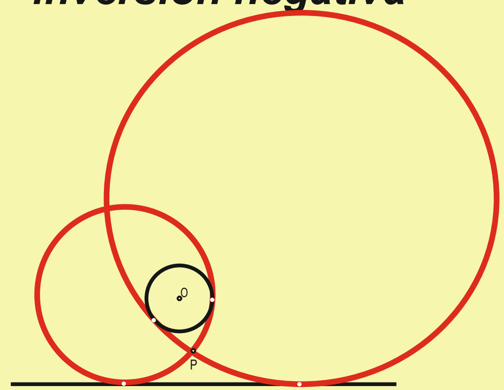
Circunferencias tangentes a una circunferencia y a una recta, que pasan por un punto exterior a ambas



Aunque se puede resolver por otros métodos, aquí se va a desarrollar mediante ***INVERSIÓN.***
De las cuatro circunferencias solución, primero haremos dos mediante una ***inversión positiva,***



y luego las otras dos por una ***inversión negativa***



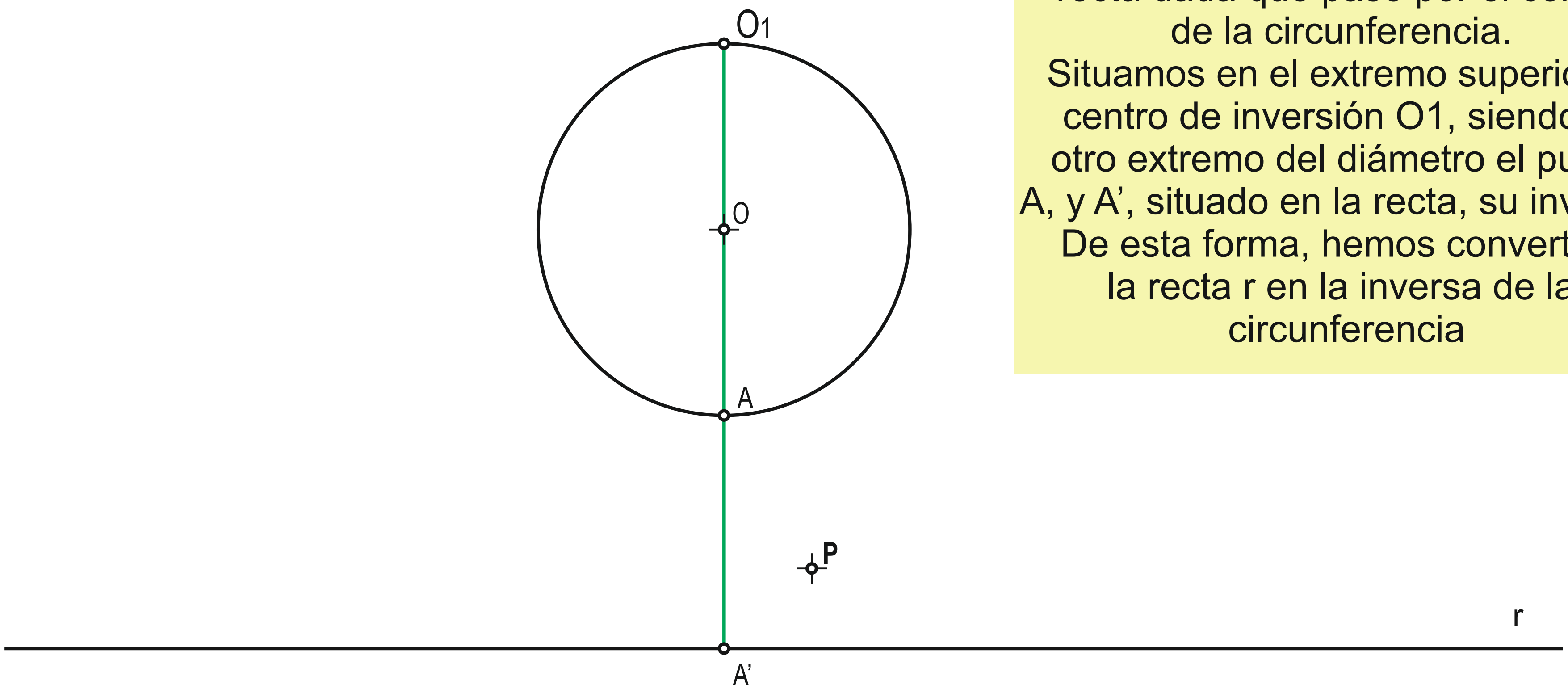
PROBLEMAS DE APOLONIO

CPR

Circunferencias tangentes a una circunferencia y a una recta, que pasan por un punto exterior a ambas

1.INVERSIÓN POSITIVA. K > 0

1.1. Trazamos una perpendicular a la recta dada que pase por el centro de la circunferencia.
Situamos en el extremo superior el centro de inversión O1, siendo el otro extremo del diámetro el punto A, y A', situado en la recta, su inverso.
De esta forma, hemos convertido la recta r en la inversa de la circunferencia



JUAN DÍAZ ALMAGRO

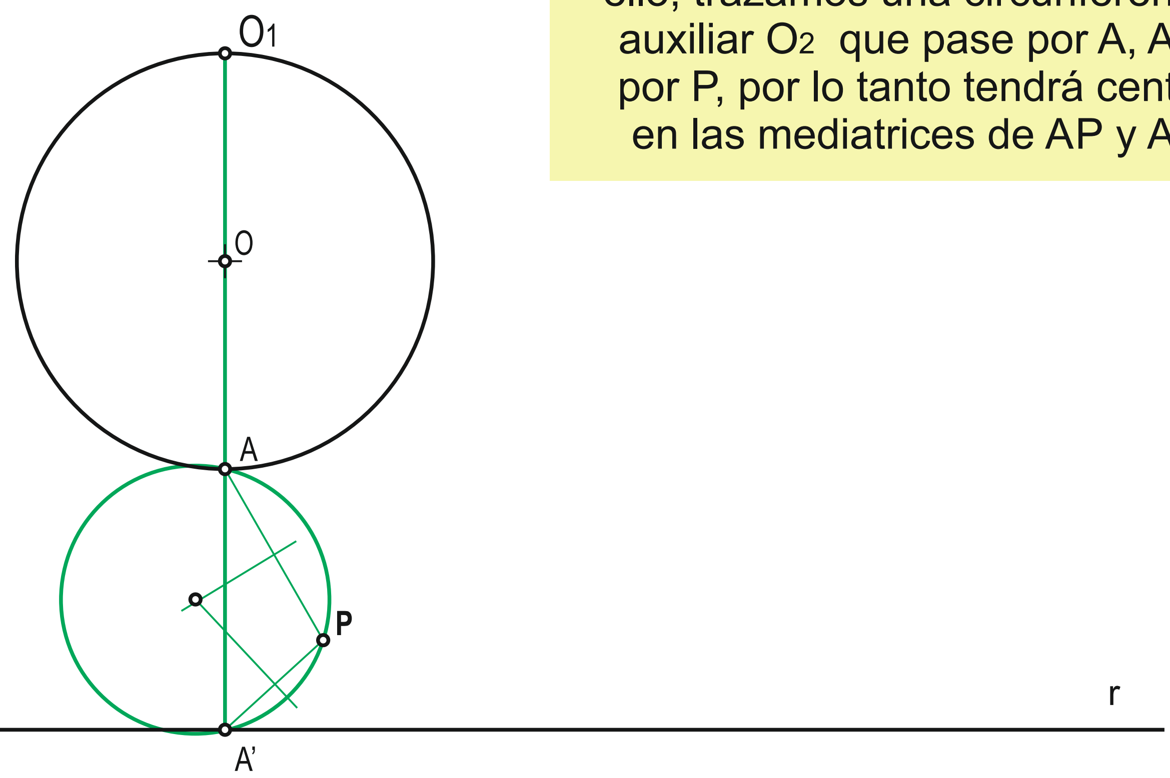
PROBLEMAS DE APOLONIO

CPR

Circunferencias tangentes a una circunferencia y a una recta, que pasan por un punto exterior a ambas

1.INVERSIÓN POSITIVA. K > 0

1.2. Hallamos el ***inverso de P.*** Para ello, trazamos una circunferencia auxiliar O_2 que pase por A, A' y por P, por lo tanto tendrá centro en las mediatrices de AP y AA'



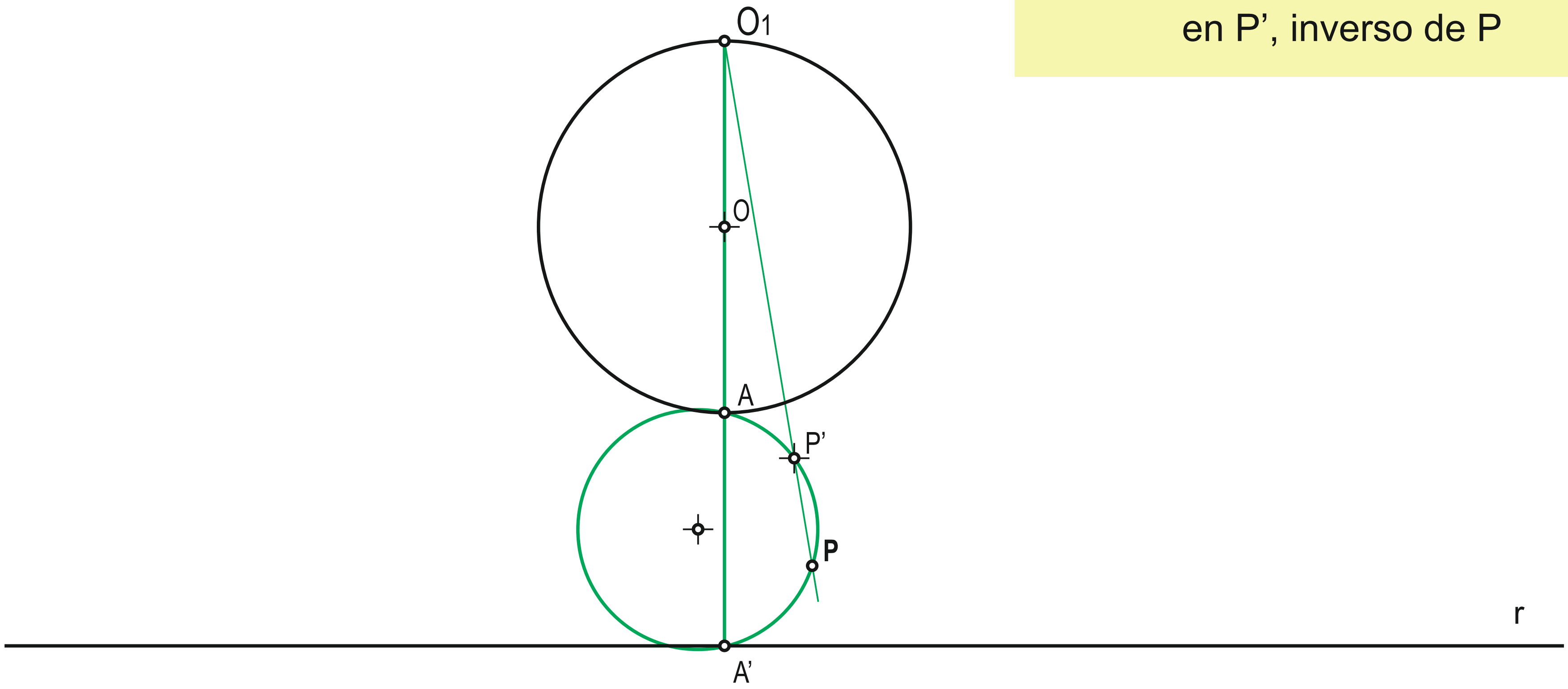
PROBLEMAS DE APOLONIO

CPR

Circunferencias tangentes a una circunferencia y a una recta, que pasan por un punto exterior a ambas

1.INVERSIÓN POSITIVA. K > 0

1.3. Trazamos la recta OP, que cortará a la circunferencia auxiliar en P’, inverso de P



JUAN DÍAZ ALMAGRO

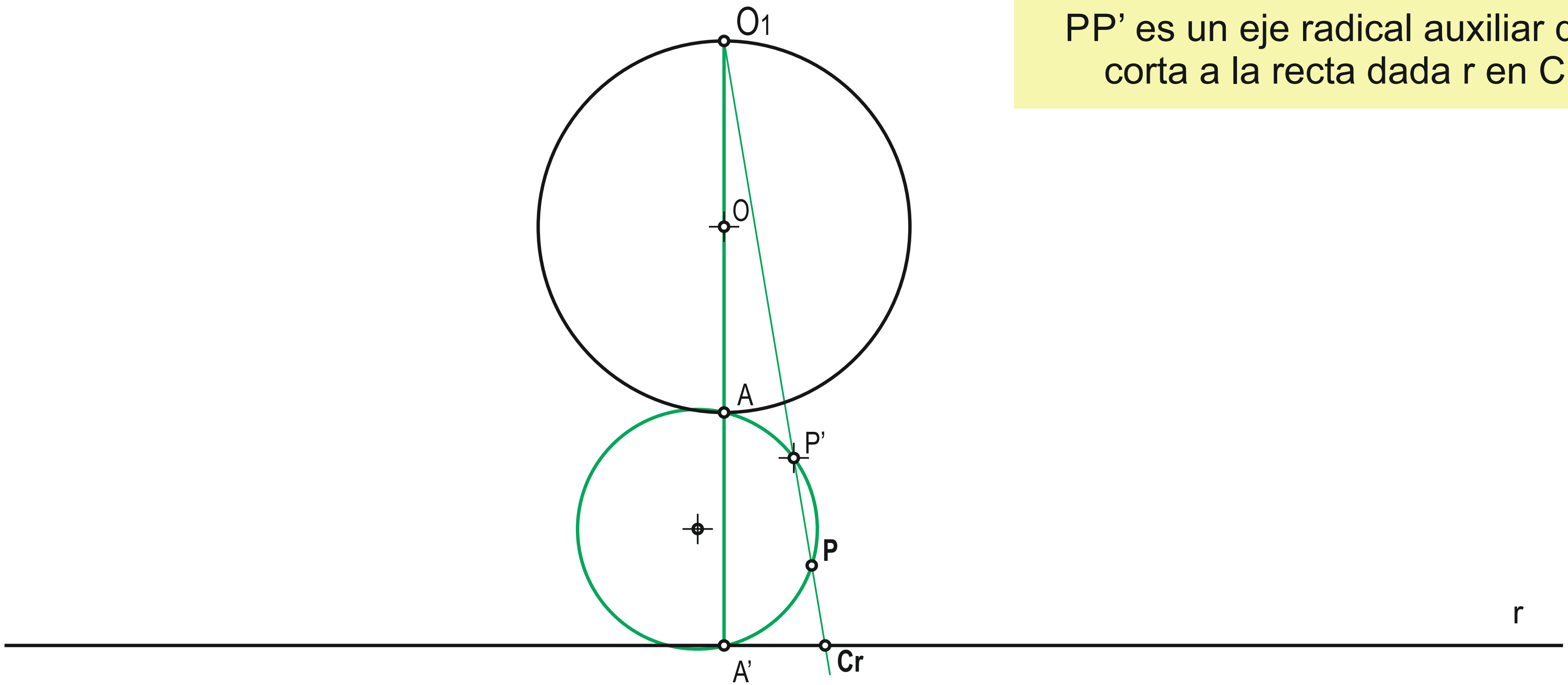
PROBLEMAS DE APOLONIO

CPR

Circunferencias tangentes a una circunferencia y a una recta, que pasan por un punto exterior a ambas

1.INVERSIÓN POSITIVA. K > 0

1.4. A partir de ahora el problema se convierte en PPR.
PP’ es un eje radical auxiliar que corta a la recta dada r en Cr



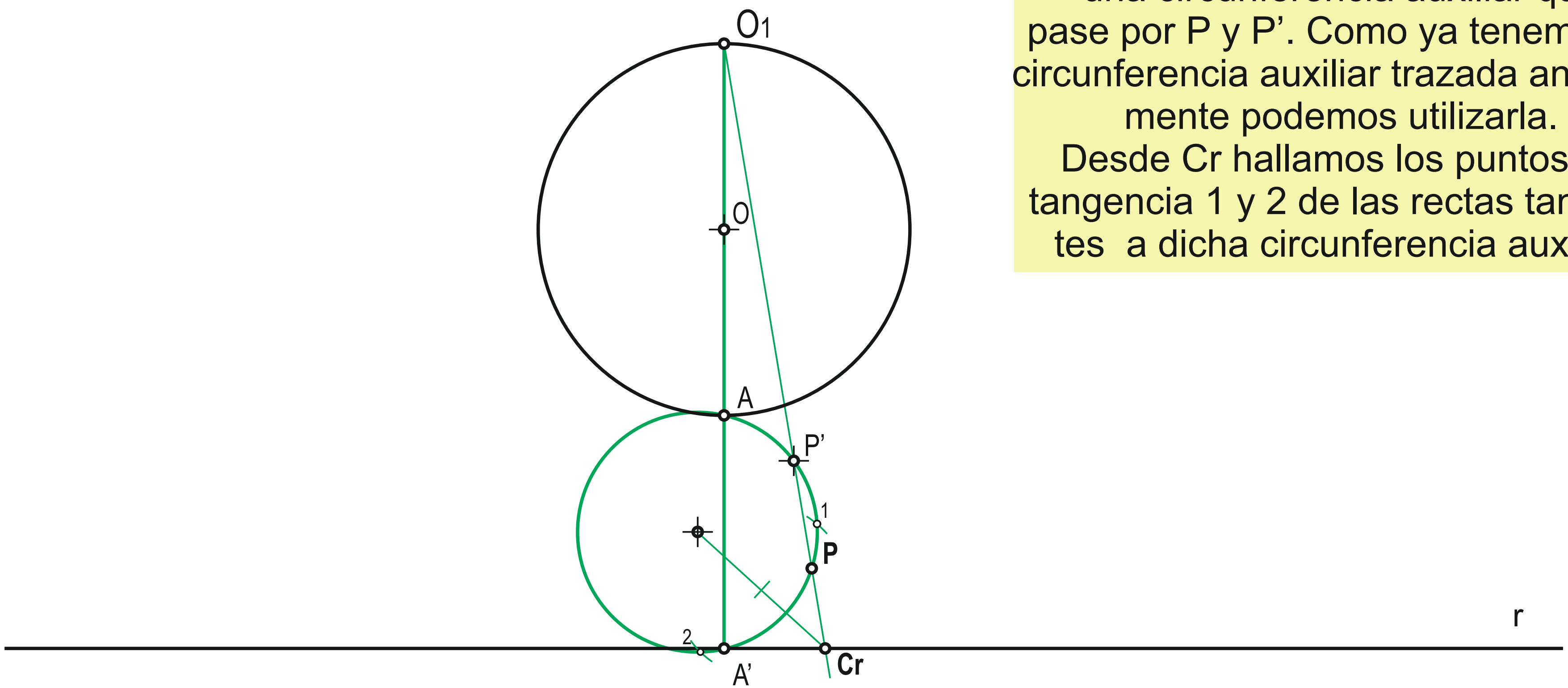
PROBLEMAS DE APOLONIO

CPR

Circunferencias tangentes a una circunferencia y a una recta, que pasan por un punto exterior a ambas

1.INVERSIÓN POSITIVA. K > 0

1.5. A continuación, necesitamos una circunferencia auxiliar que pase por P y P'. Como ya tenemos la circunferencia auxiliar trazada anteriormente podemos utilizarla.
Desde Cr hallamos los puntos de tangencia 1 y 2 de las rectas tangentes a dicha circunferencia auxiliar



JUAN DÍAZ ALMAGRO

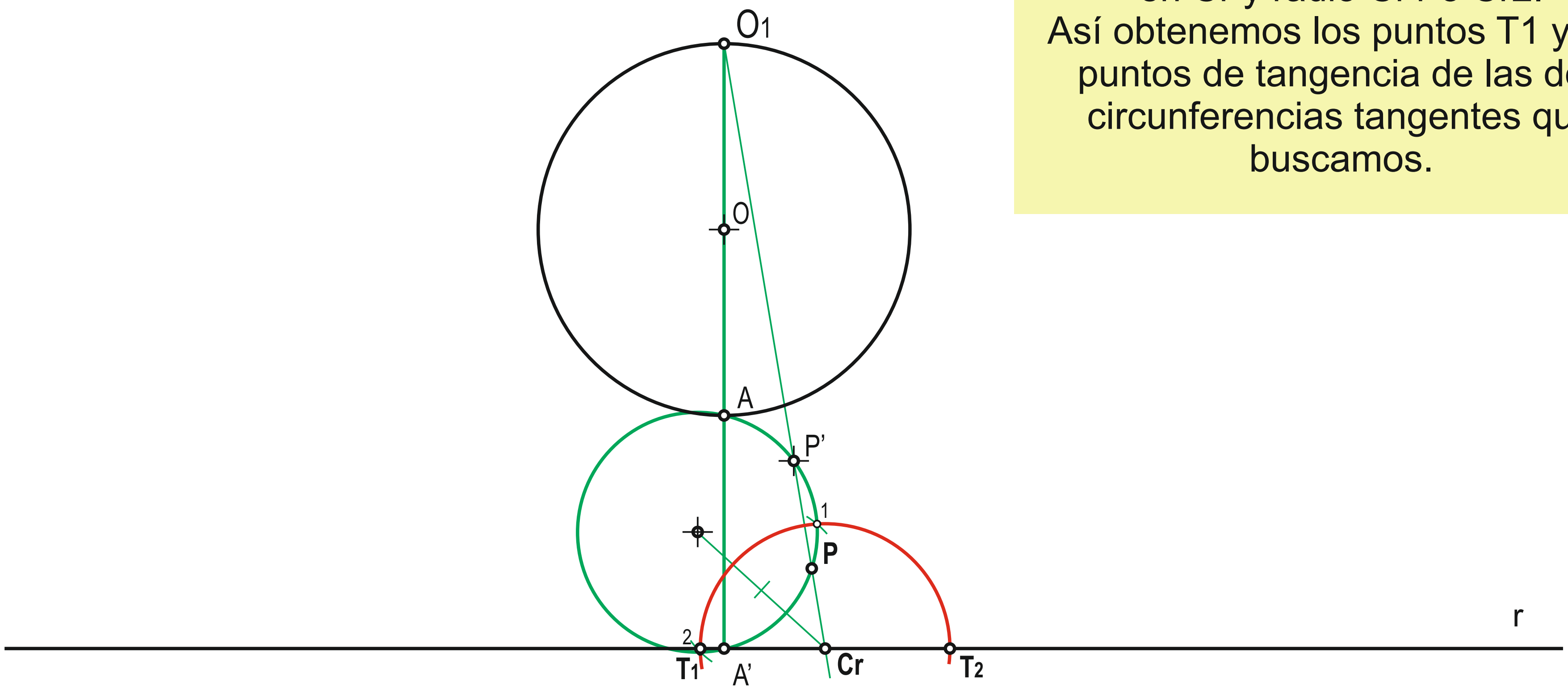
PROBLEMAS DE APOLONIO

CPR

Circunferencias tangentes a una circunferencia y a una recta, que pasan por un punto exterior a ambas

1.INVERSIÓN POSITIVA. K> 0

1.6. Trazamos el arco con centro en Cr y radio Cr1 o Cr2.
Así obtenemos los puntos T1 y T2, puntos de tangencia de las dos circunferencias tangentes que buscamos.



JUAN DÍAZ ALMAGRO

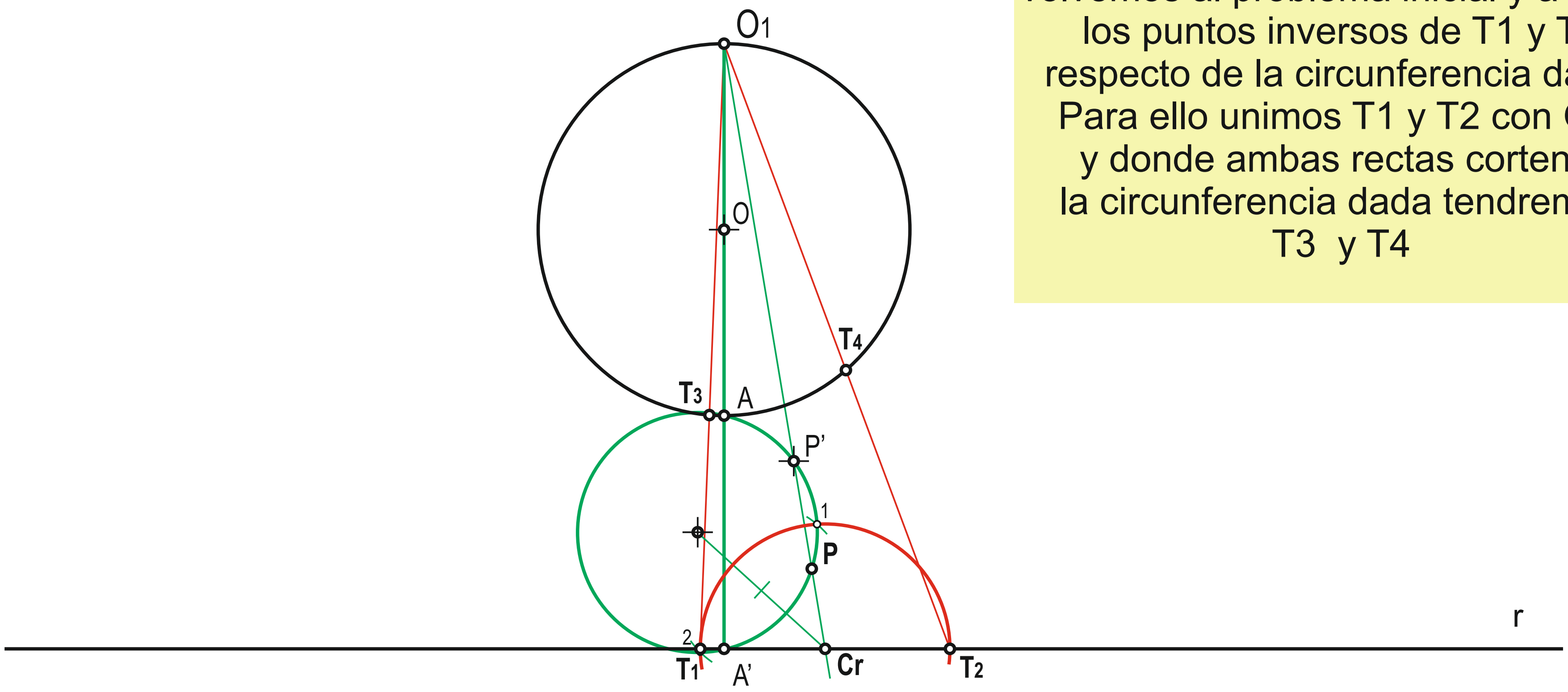
PROBLEMAS DE APOLONIO

CPR

Circunferencias tangentes a una circunferencia y a una recta, que pasan por un punto exterior a ambas

1.INVERSIÓN POSITIVA. K> 0

1.7. Ahora que tenemos T1 y T2 volvemos al problema inicial y a sacar los puntos inversos de T1 y T2 respecto de la circunferencia dada. Para ello unimos T1 y T2 con O1, y donde ambas rectas corten a la circunferencia dada tendremos T3 y T4



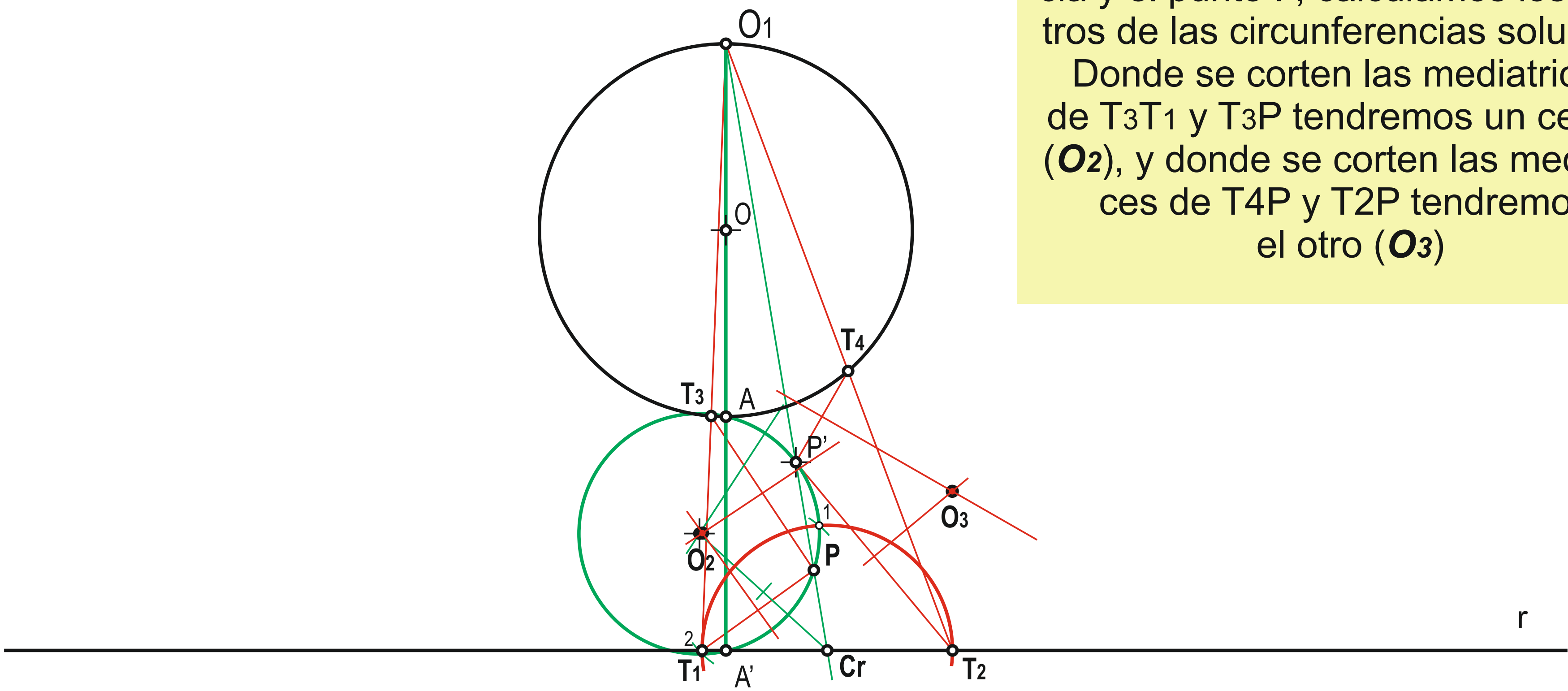
PROBLEMAS DE APOLONIO

CPR

Circunferencias tangentes a una circunferencia y a una recta, que pasan por un punto exterior a ambas

1.INVERSIÓN POSITIVA. K > 0

1.8. Teniendo los puntos de tangencia y el punto P, calculamos los centros de las circunferencias solución. Donde se corten las mediatrices de T_3T_1 y T_3P tendremos un centro (***O_2***), y donde se corten las mediatrices de T4P y T2P tendremos el otro (***O_3***)



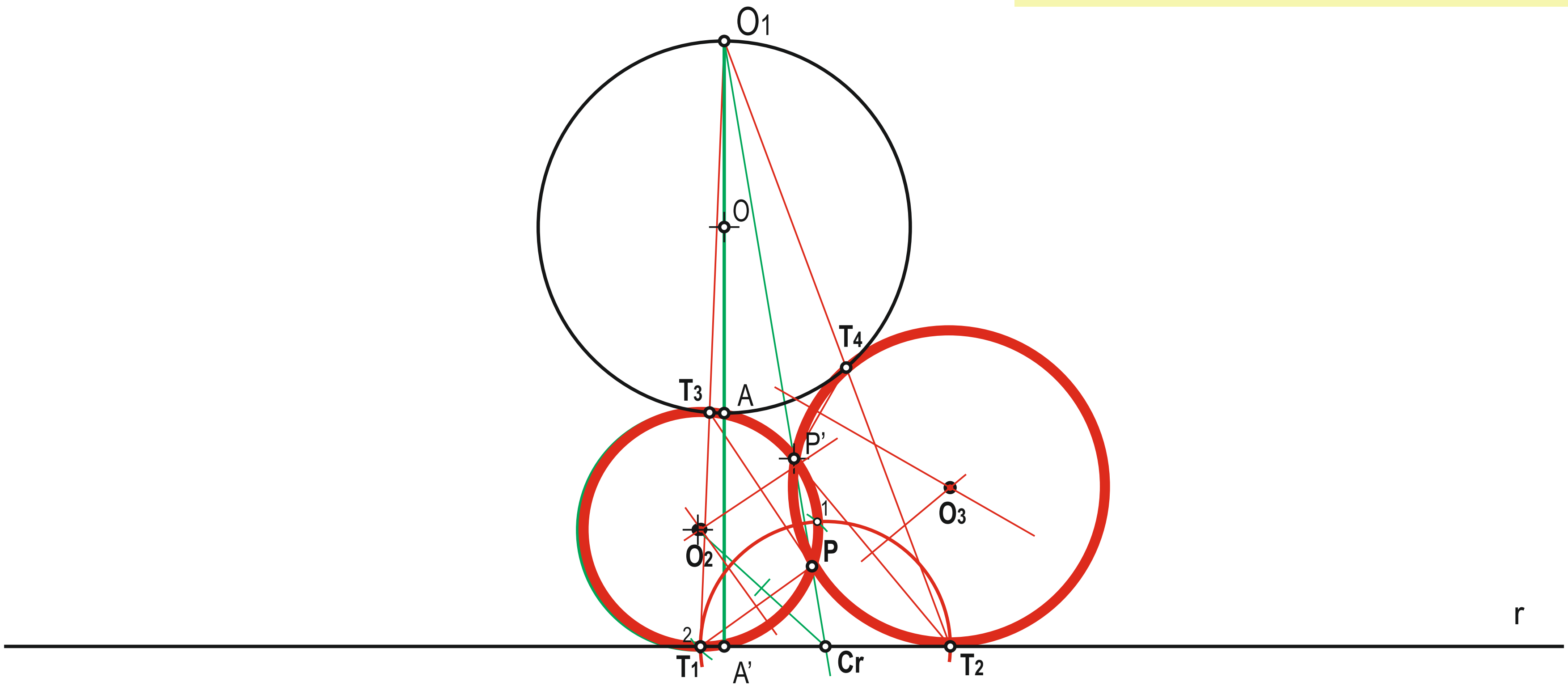
PROBLEMAS DE APOLONIO

CPR

Circunferencias tangentes a una circunferencia y a una recta, que pasan por un punto exterior a ambas

1.INVERSIÓN POSITIVA. K> 0

1.9.Trazamos las circunferencias

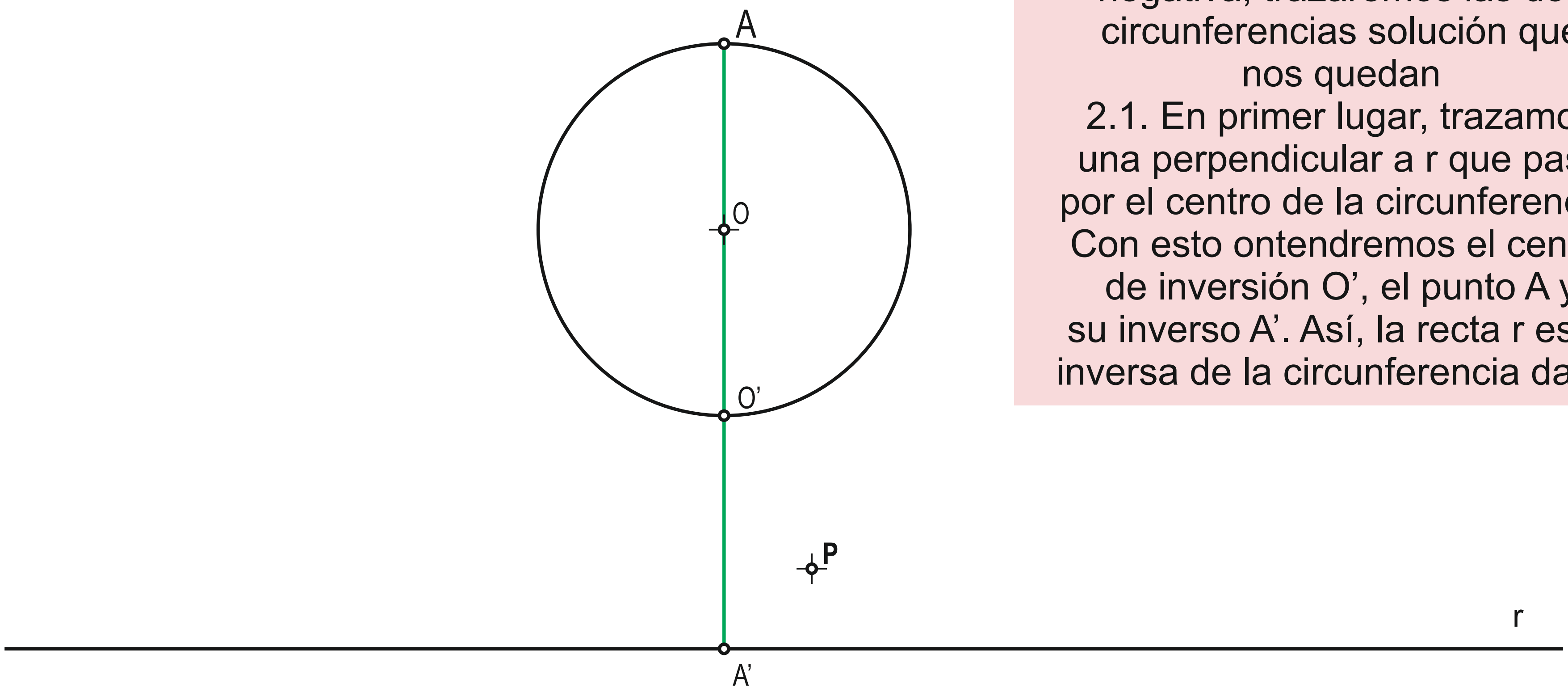


JUAN DÍAZ ALMAGRO

PROBLEMAS DE APOLONIO

CPR

Circunferencias tangentes a una circunferencia y a una recta, que pasan por un punto exterior a ambas



2. INVERSIÓN NEGATIVA. K< 0

Ahora, mediante una inversión negativa, trazaremos las dos circunferencias solución que nos quedan

2.1. En primer lugar, trazamos una perpendicular a r que pase por el centro de la circunferencia. Con esto ontendremos el centro de inversión O', el punto A y su inverso A'. Así, la recta r es la inversa de la circunferencia dada.

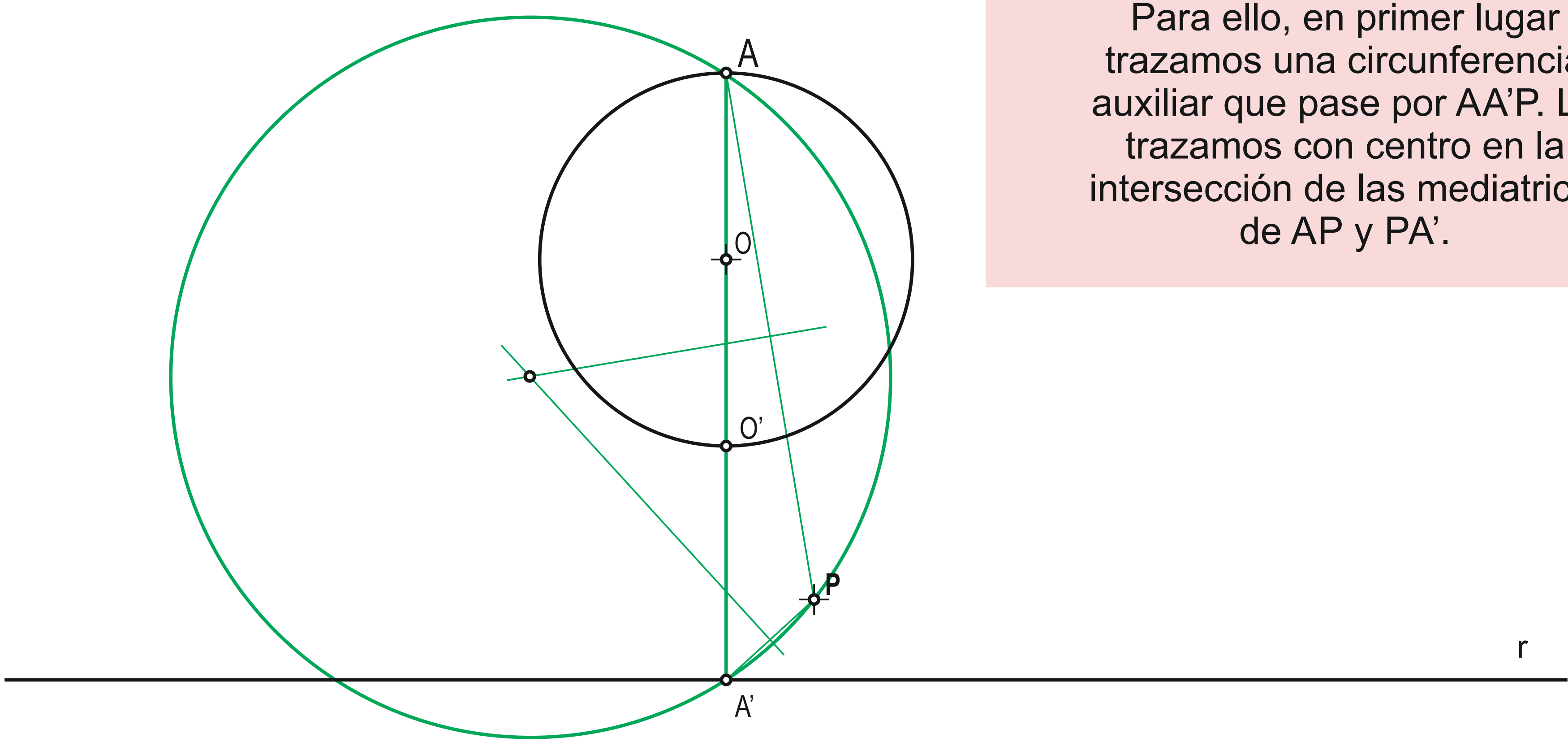
PROBLEMAS DE APOLONIO

CPR

Circunferencias tangentes a una circunferencia y a una recta, que pasan por un punto exterior a ambas

2. INVERSIÓN NEGATIVA. K< 0

2.2. Hallamos el inverso de P. Para ello, en primer lugar trazamos una circunferencia auxiliar que pase por AA’P. La trazamos con centro en la intersección de las mediatrices de AP y PA’.



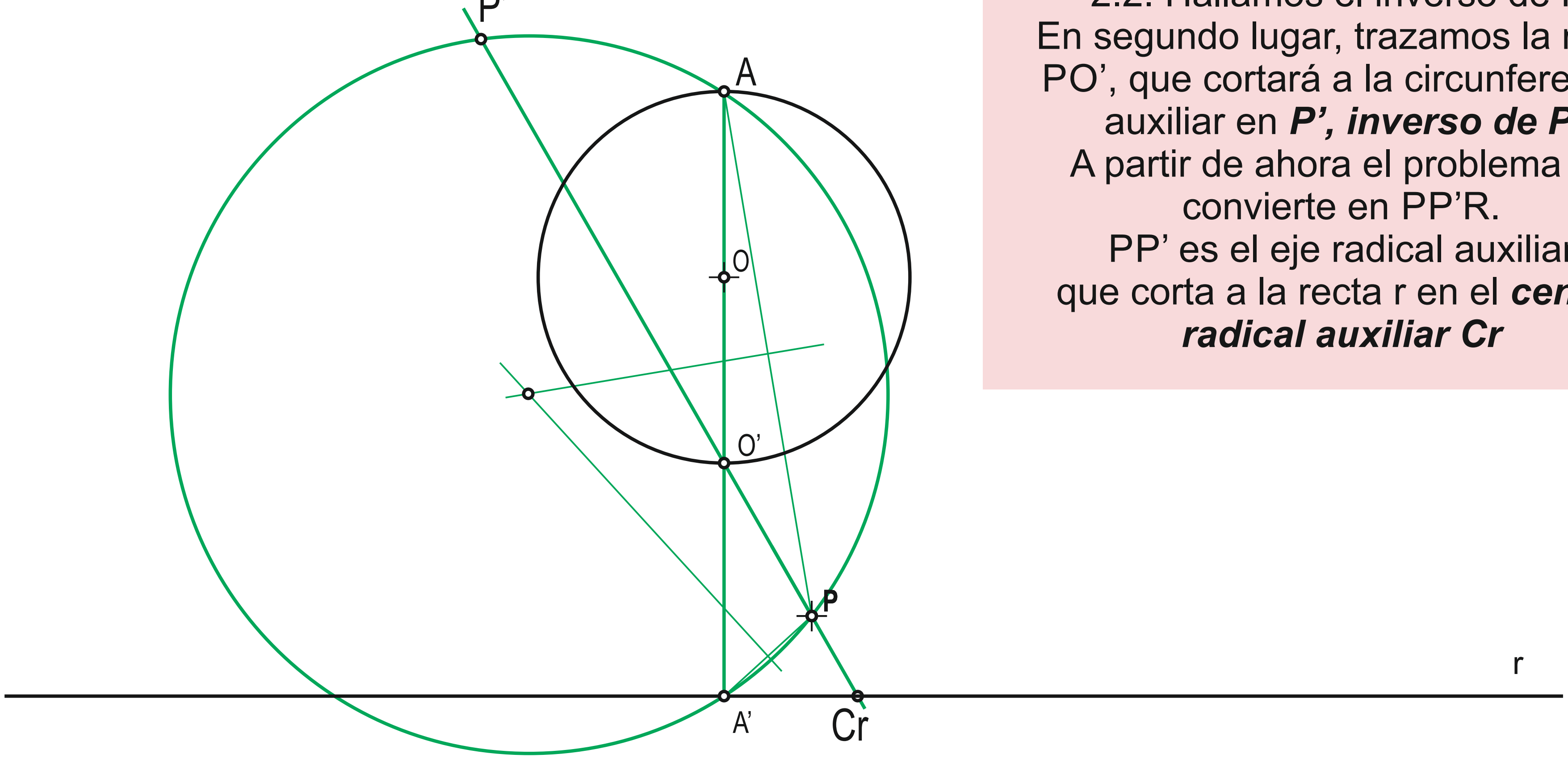
PROBLEMAS DE APOLONIO

CPR

Circunferencias tangentes a una circunferencia y a una recta, que pasan por un punto exterior a ambas

2. INVERSIÓN NEGATIVA. K< 0

2.2. Hallamos el inverso de P.
En segundo lugar, trazamos la recta PO’, que cortará a la circunferencia auxiliar en ***P’, inverso de P.***
A partir de ahora el problema se convierte en PP’R.
PP’ es el eje radical auxiliar que corta a la recta r en el ***centro radical auxiliar Cr***



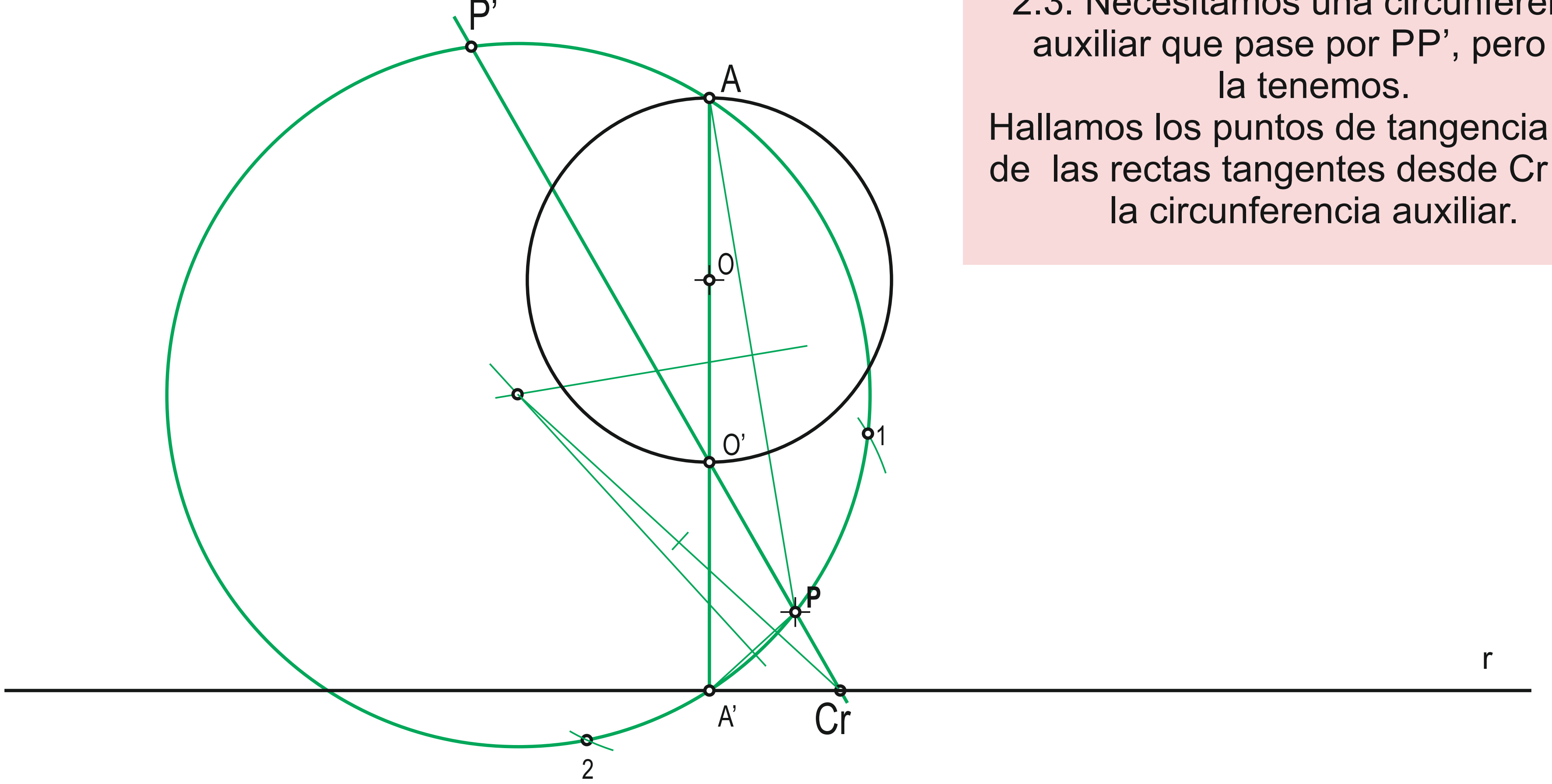
PROBLEMAS DE APOLONIO

CPR

Circunferencias tangentes a una circunferencia y a una recta, que pasan por un punto exterior a ambas

2. INVERSIÓN NEGATIVA. K< 0

2.3. Necesitamos una circunferencia auxiliar que pase por PP', pero ya la tenemos.
Hallamos los puntos de tangencia 1 y 2 de las rectas tangentes desde Cr hasta la circunferencia auxiliar.



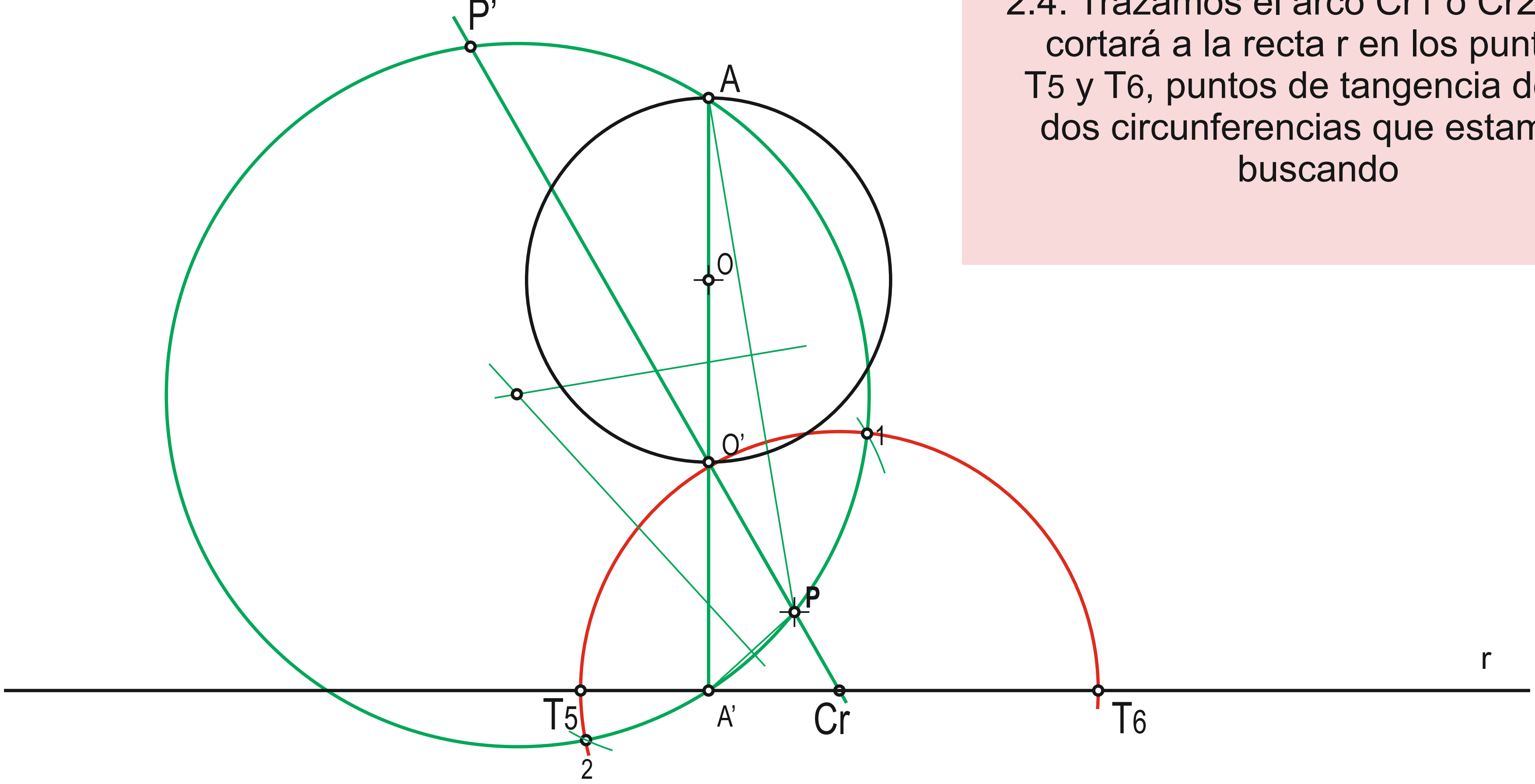
PROBLEMAS DE APOLONIO

CPR

Circunferencias tangentes a una circunferencia y a una recta, que pasan por un punto exterior a ambas

2. INVERSIÓN NEGATIVA. K 0

2.4. Trazamos el arco Cr1 o Cr2, que cortará a la recta r en los puntos T_5 y T_6, puntos de tangencia de las dos circunferencias que estamos buscando



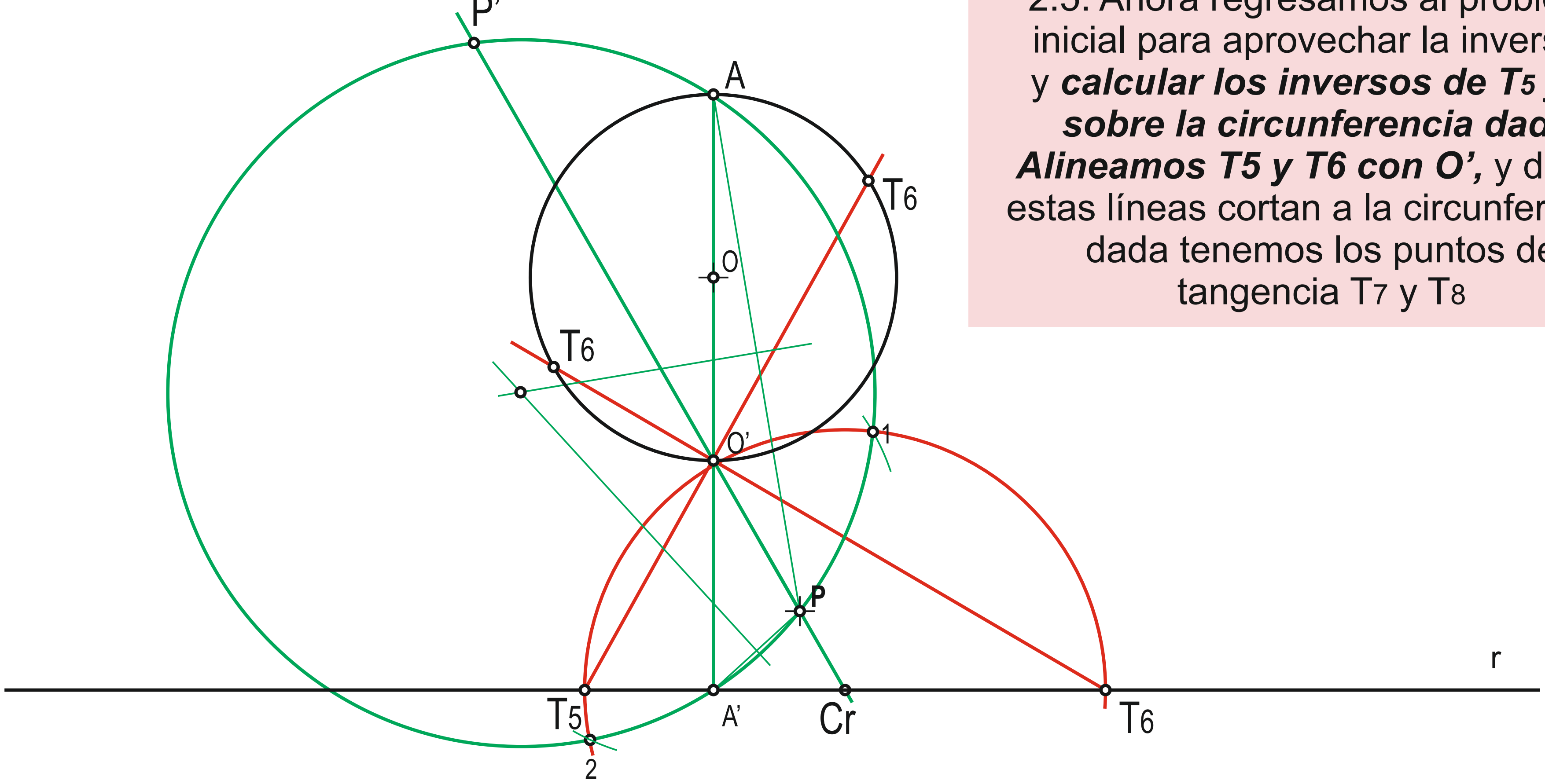
PROBLEMAS DE APOLONIO

CPR

Circunferencias tangentes a una circunferencia y a una recta, que pasan por un punto exterior a ambas

2. INVERSIÓN NEGATIVA. $K < 0$

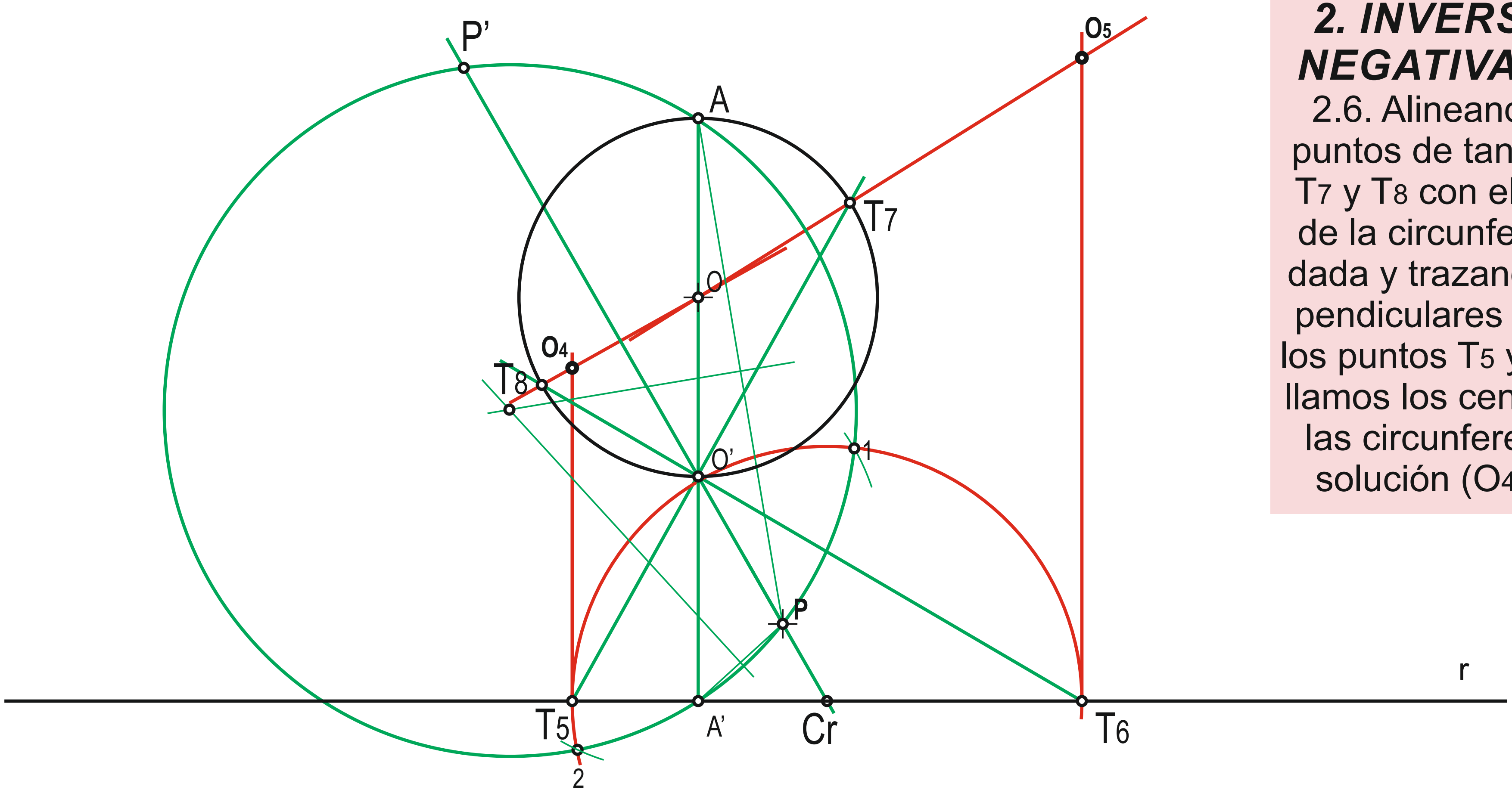
2.5. Ahora regresamos al problema inicial para aprovechar la inversión y ***calcular los inversos de T_5 y T_6 sobre la circunferencia dada. Alineamos T5 y T6 con O',*** y donde estas líneas cortan a la circunferencia dada tenemos los puntos de tangencia T_7 y T_8



PROBLEMAS DE APOLONIO

CPR

Circunferencias tangentes a una circunferencia y a una recta, que pasan por un punto exterior a ambas



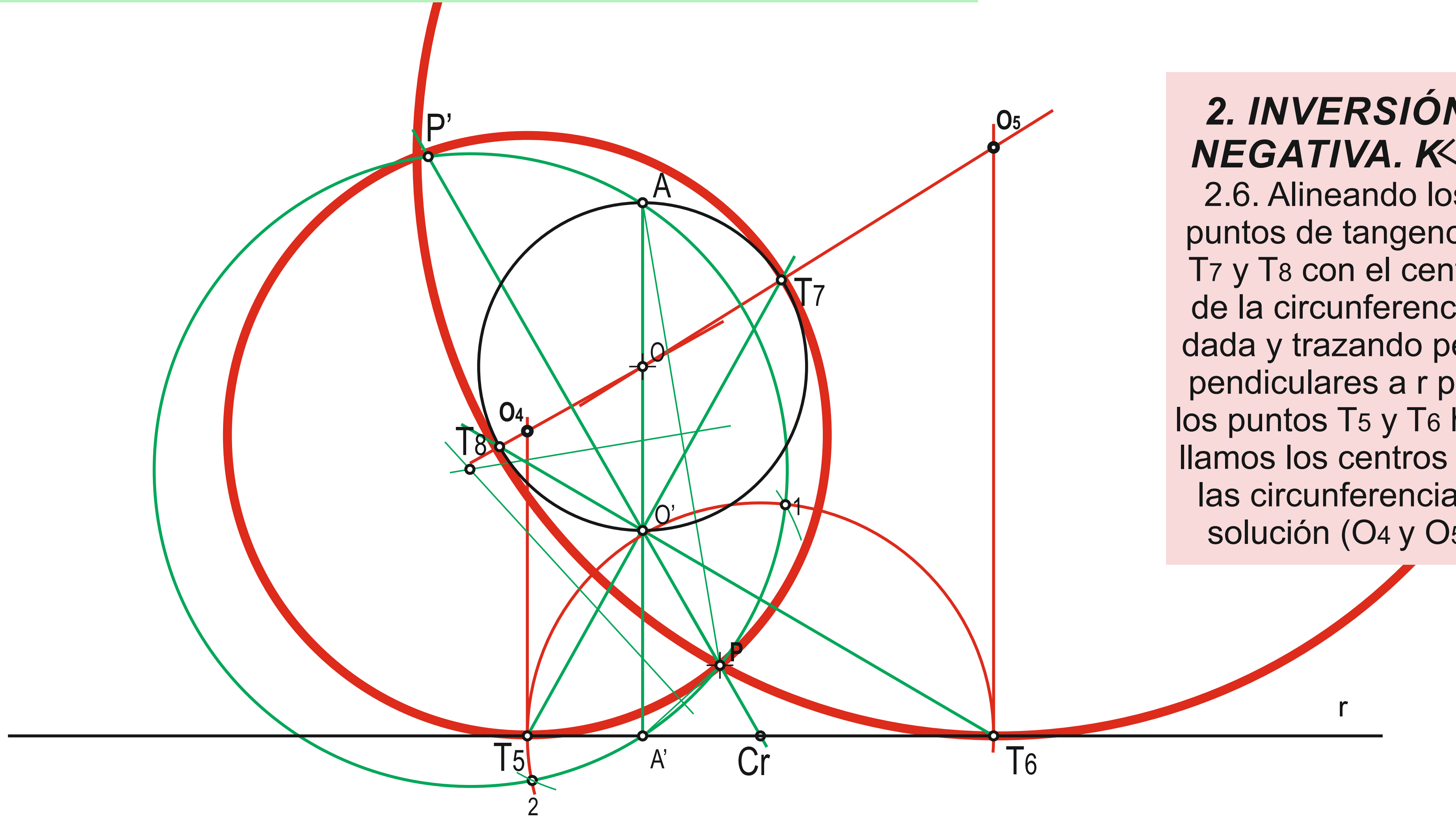
2. INVERSIÓN NEGATIVA. K< 0

2.6. Alineando los puntos de tangencia T_7 y T_8 con el centro de la circunferencia dada y trazando perpendiculares a r por los puntos T_5 y T_6 hallamos los centros de las circunferencias solución (O_4 y O_5)

PROBLEMAS DE APOLONIO

CPR

Circunferencias tangentes a una circunferencia y a una recta, que pasan por un punto exterior a ambas



2. INVERSIÓN NEGATIVA. K< 0

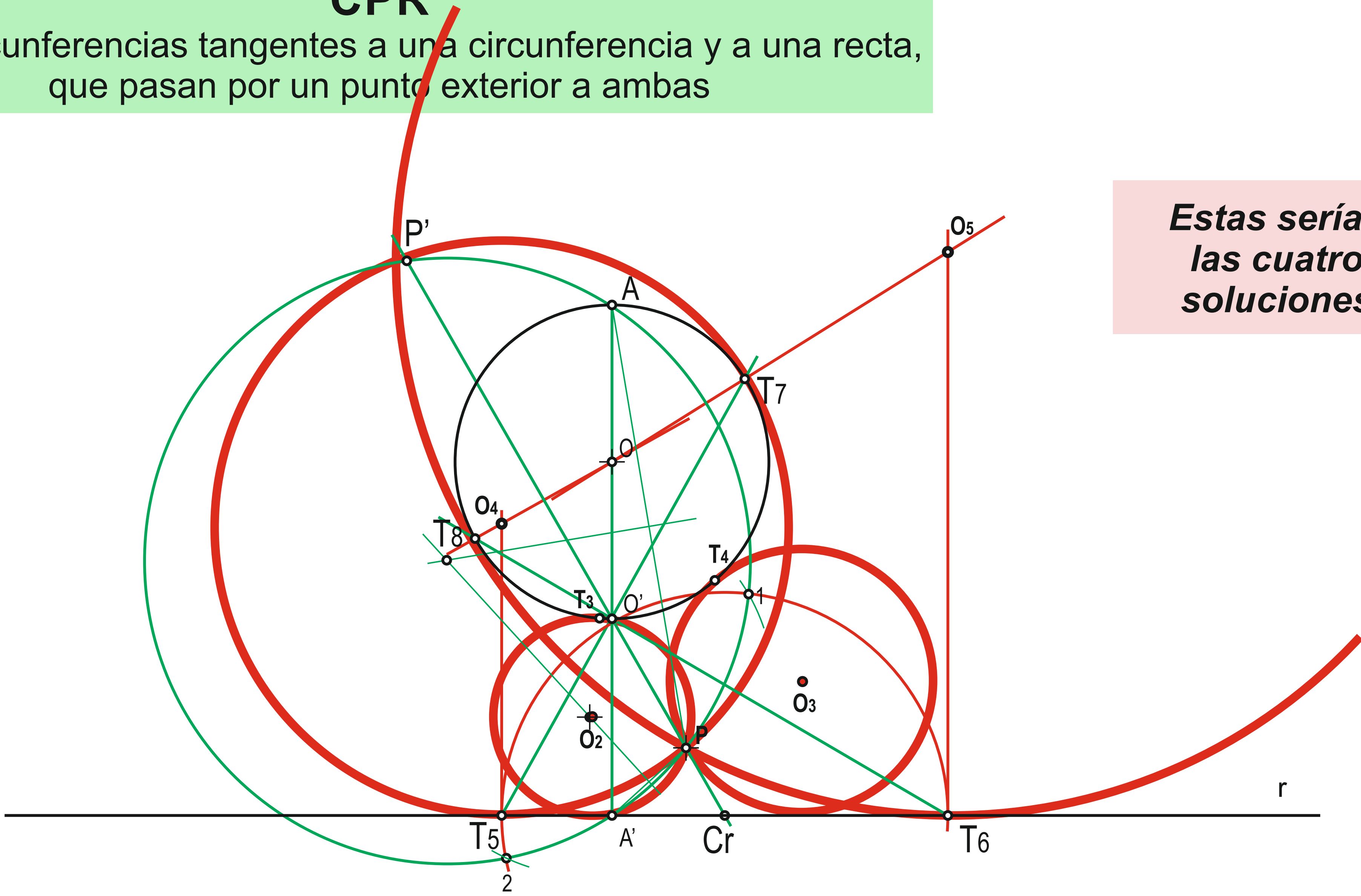
2.6. Alineando los puntos de tangencia T_7 y T_8 con el centro de la circunferencia dada y trazando perpendiculares a r por los puntos T_5 y T_6 hallamos los centros de las circunferencias solución (O_4 y O_5)

PROBLEMAS DE APOLONIO

CPR

Circunferencias tangentes a una circunferencia y a una recta, que pasan por un punto exterior a ambas

Estas serían las cuatro soluciones



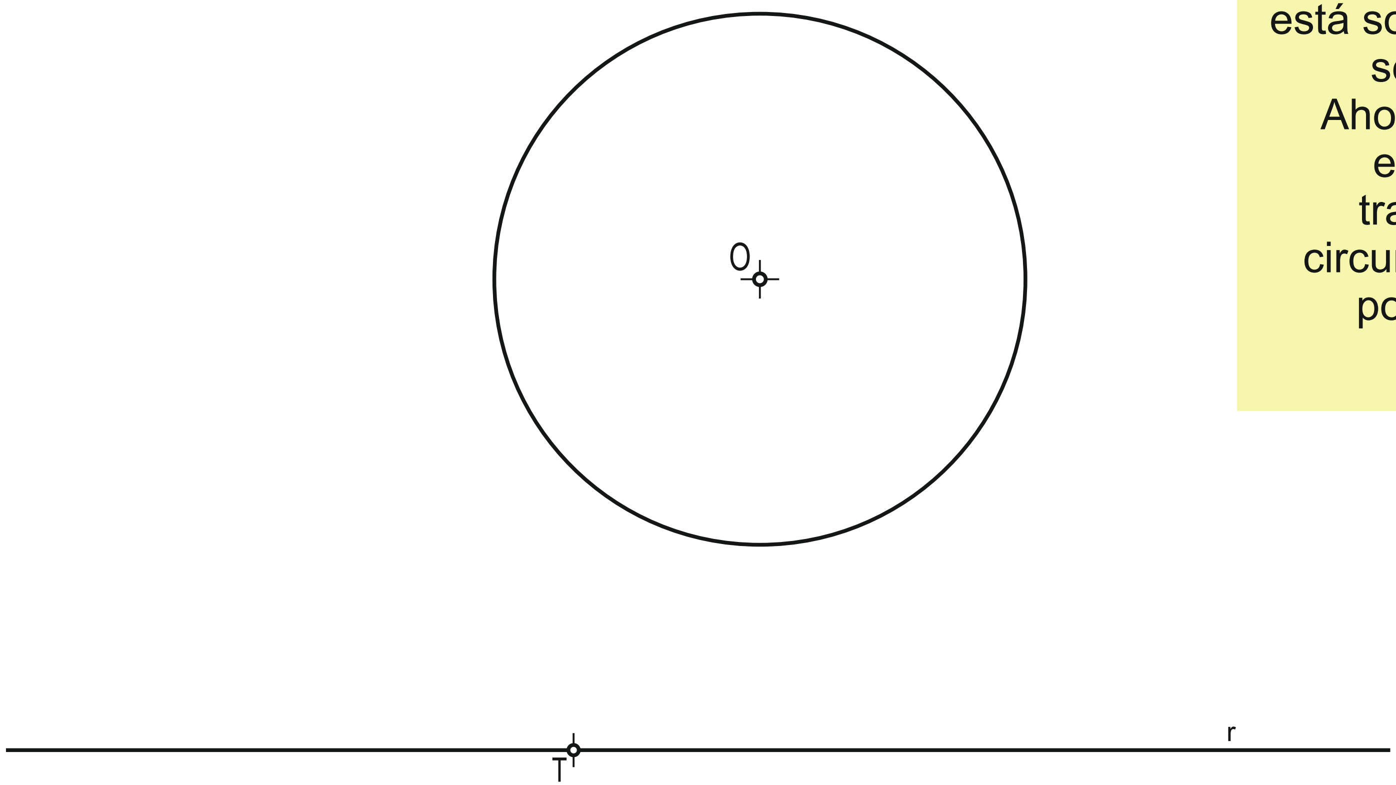
PROBLEMAS DE APOLONIO

CPR

Circunferencias tangentes a una circunferencia y a una recta, ***conociendo el punto de tangencia en dicha recta***

POR INVERSIÓN

POR INVERSIÓN
Cuando el punto de tangencia está sobre la recta, el problema se simplifica mucho.
Ahora el punto inverso se encontrará sobre su transformada (recta o circunferencia) lo cual hace posible resolverlo con pocos trazados

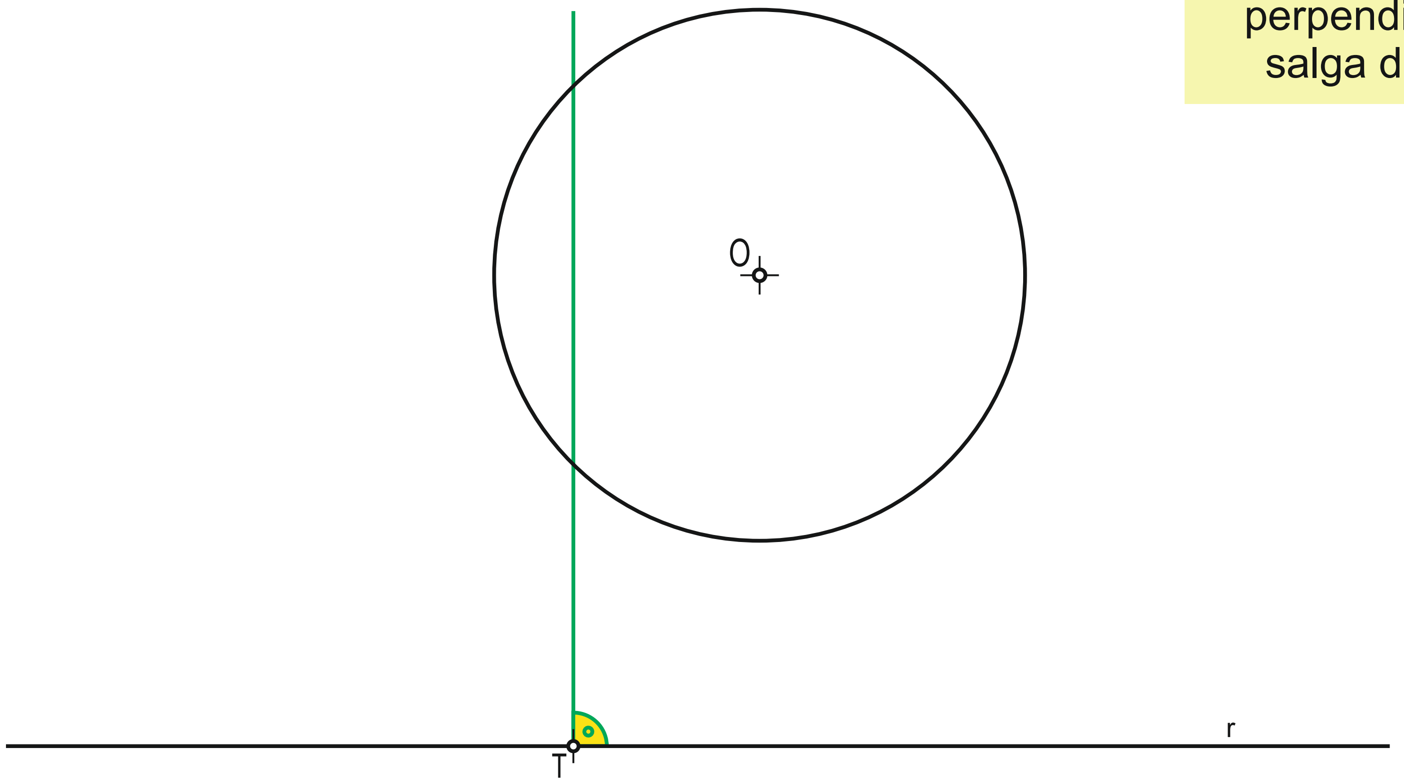


PROBLEMAS DE APOLONIO

CPR

Circunferencias tangentes a una circunferencia y a una recta, ***conociendo el punto de tangencia en dicha recta*** ***POR INVERSIÓN***

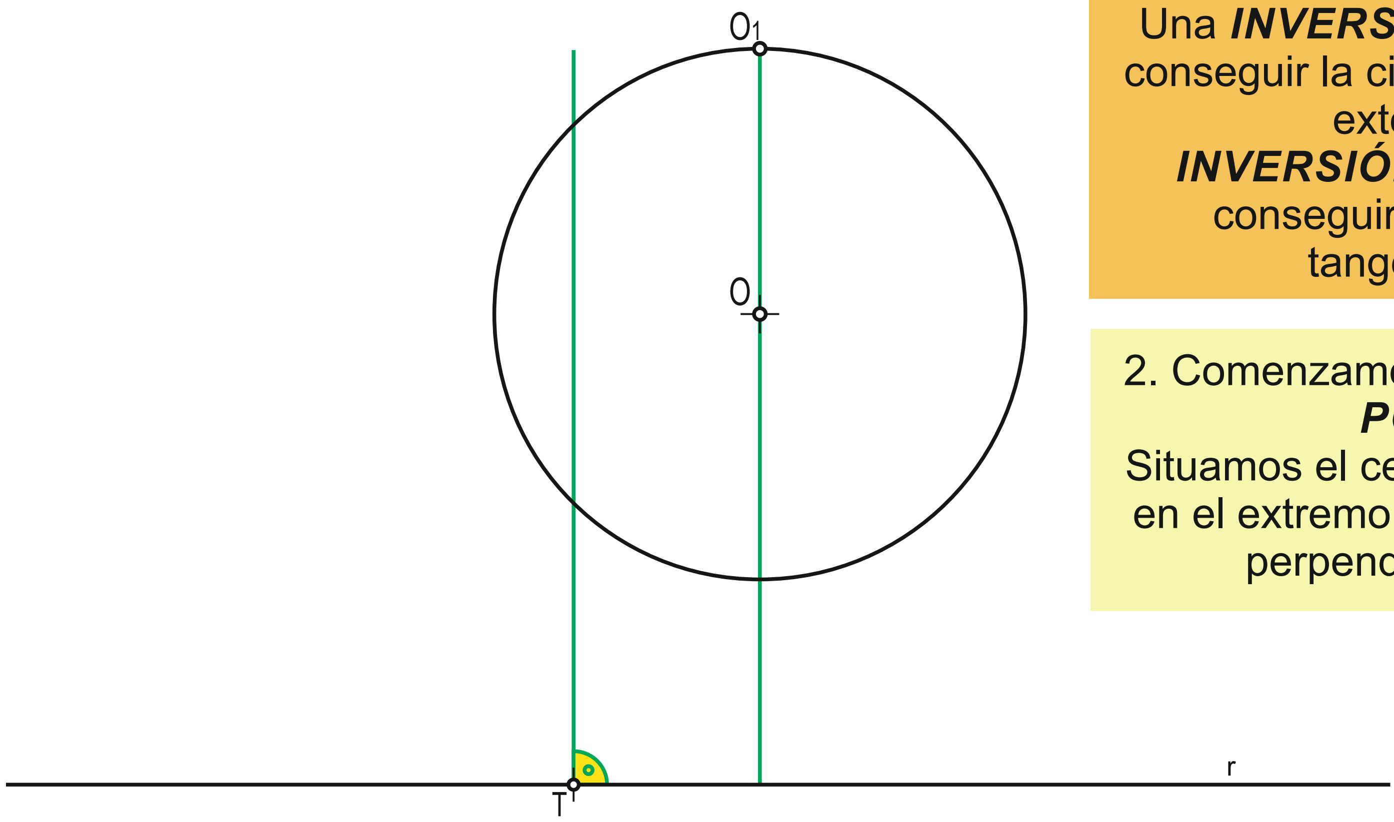
1. El problema tendrá dos soluciones, y ambas se encontrarán sobre una perpendicular a la recta dada que salga del punto T de tangencia.



PROBLEMAS DE APOLONIO

CPR

Circunferencias tangentes a una circunferencia y a una recta, ***conociendo el punto de tangencia en dicha recta*** **POR INVERSIÓN**



Ahora tenemos que aplicar dos inversiones:
Una ***INVERSIÓN POSITIVA*** para conseguir la circunferencia tangente exterior, y una ***INVERSIÓN NEGATIVA*** para conseguir la circunferencia tangente interior.

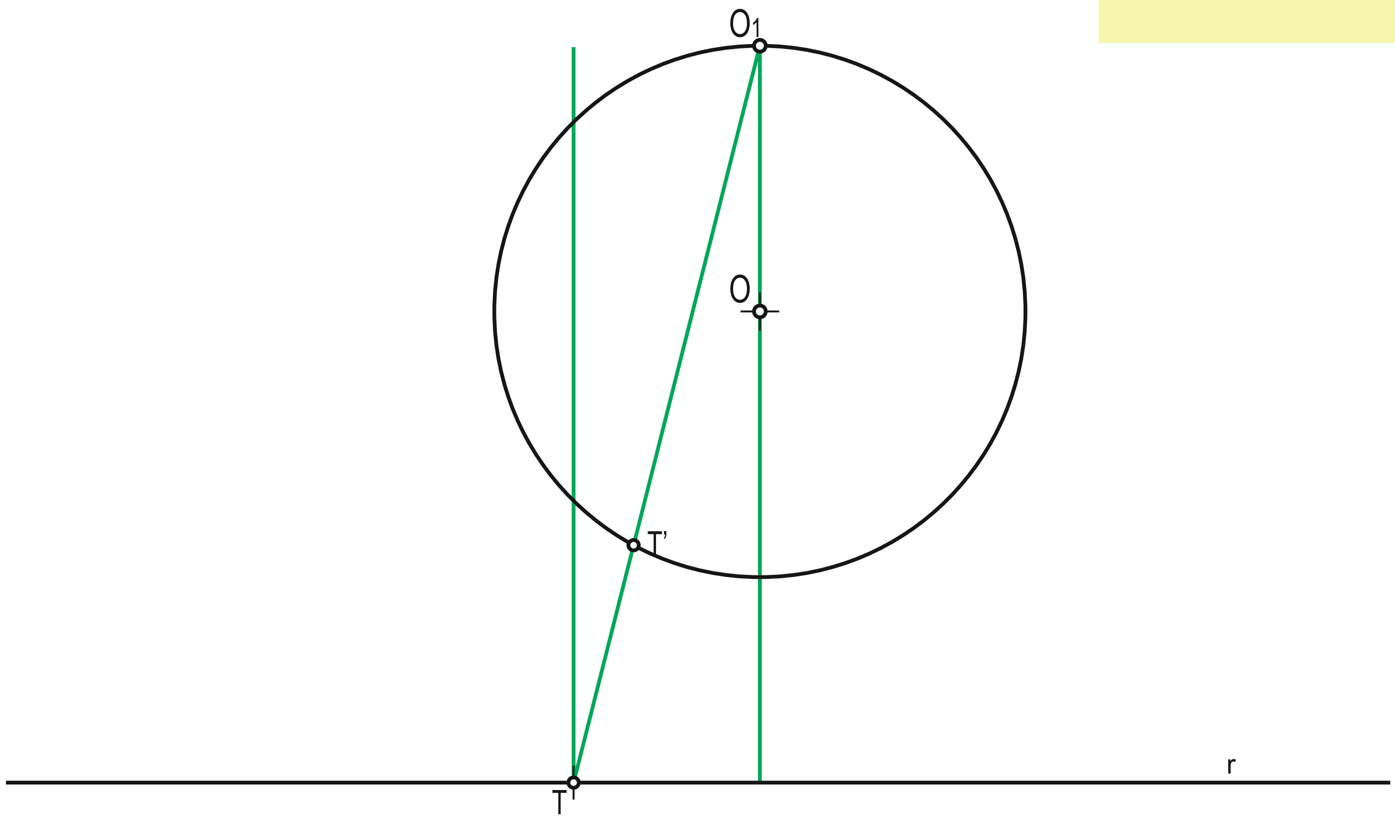
2. Comenzamos por la ***INVERSIÓN POSITIVA***:
Situamos el centro de inversión (O_1) en el extremo superior del diámetro perpendicular a la recta

PROBLEMAS DE APOLONIO

CPR

Circunferencias tangentes a una circunferencia y a una recta, ***conociendo el punto de tangencia en dicha recta*** ***POR INVERSIÓN***

3. Trazamos la recta OT y así obtenemos T', inverso de T.



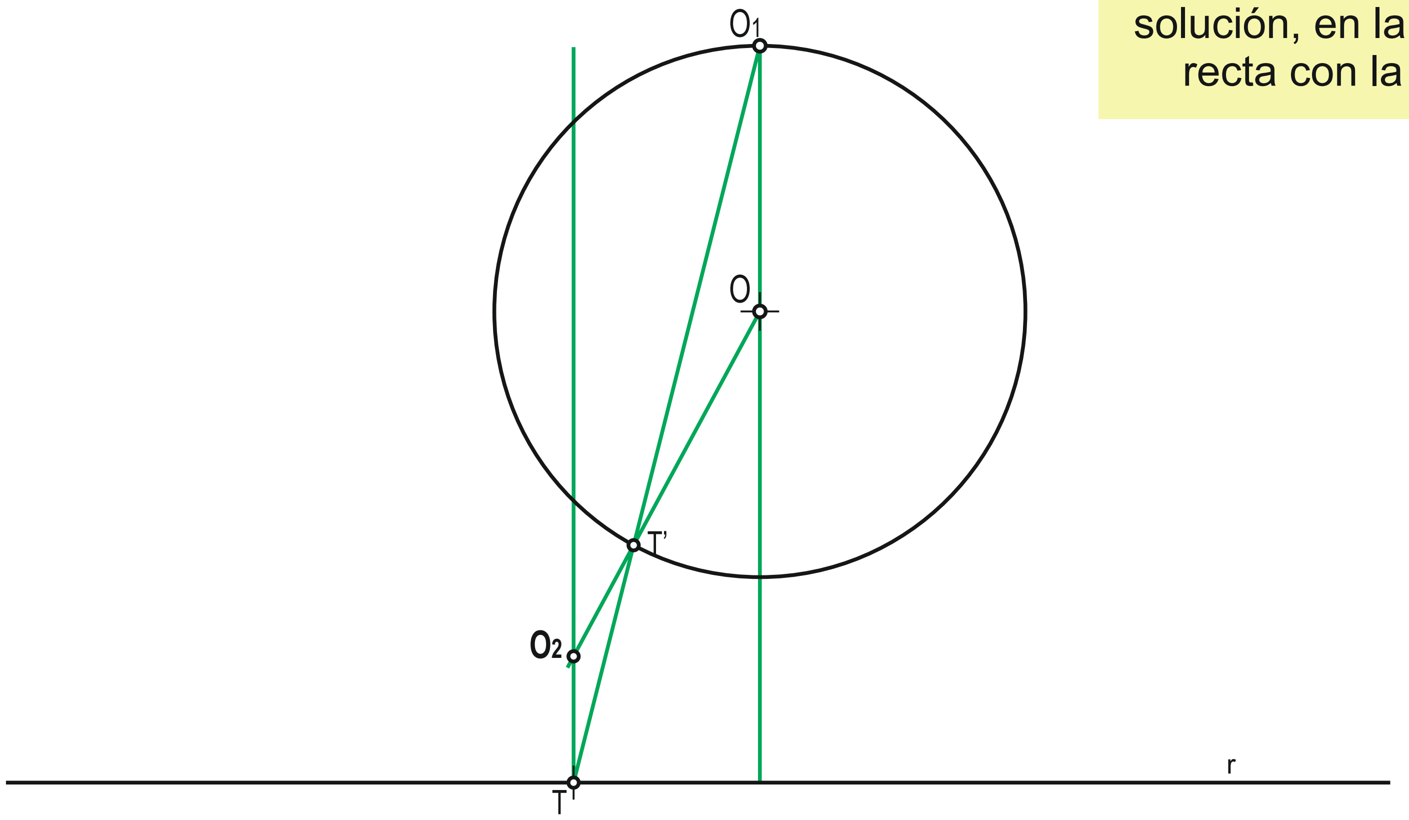
PROBLEMAS DE APOLONIO

CPR

Circunferencias tangentes a una circunferencia y a una recta, ***conociendo el punto de tangencia en dicha recta***

POR INVERSIÓN

4. Uniendo O con T’ obtenemos O_2, centro de la primera circunferencia solución, en la intersección de dicha recta con la perpendicular en T



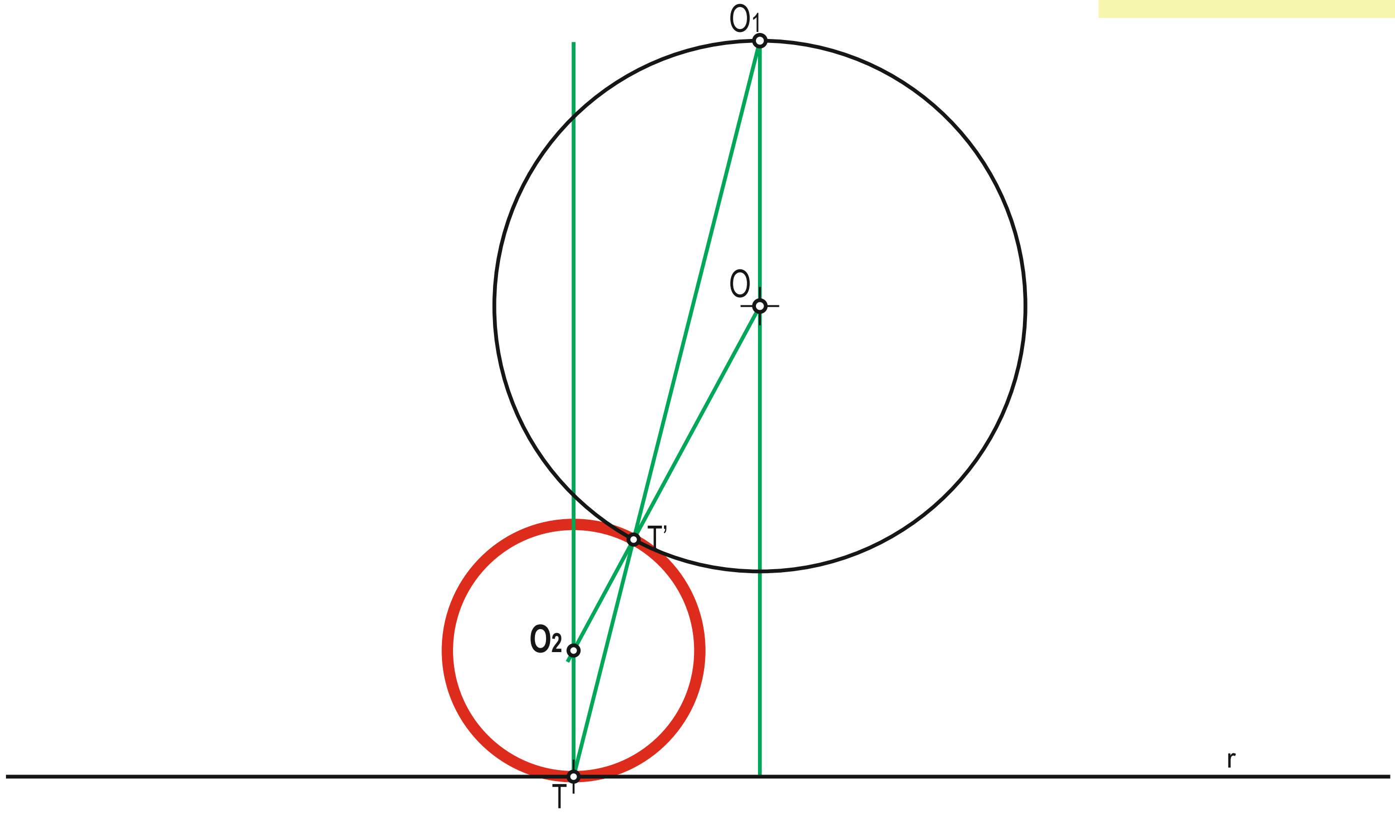
PROBLEMAS DE APOLONIO

CPR

Circunferencias tangentes a una circunferencia y a una recta, ***conociendo el punto de tangencia en dicha recta***

POR INVERSIÓN

5. Con radio O2T trazamos la primera solución

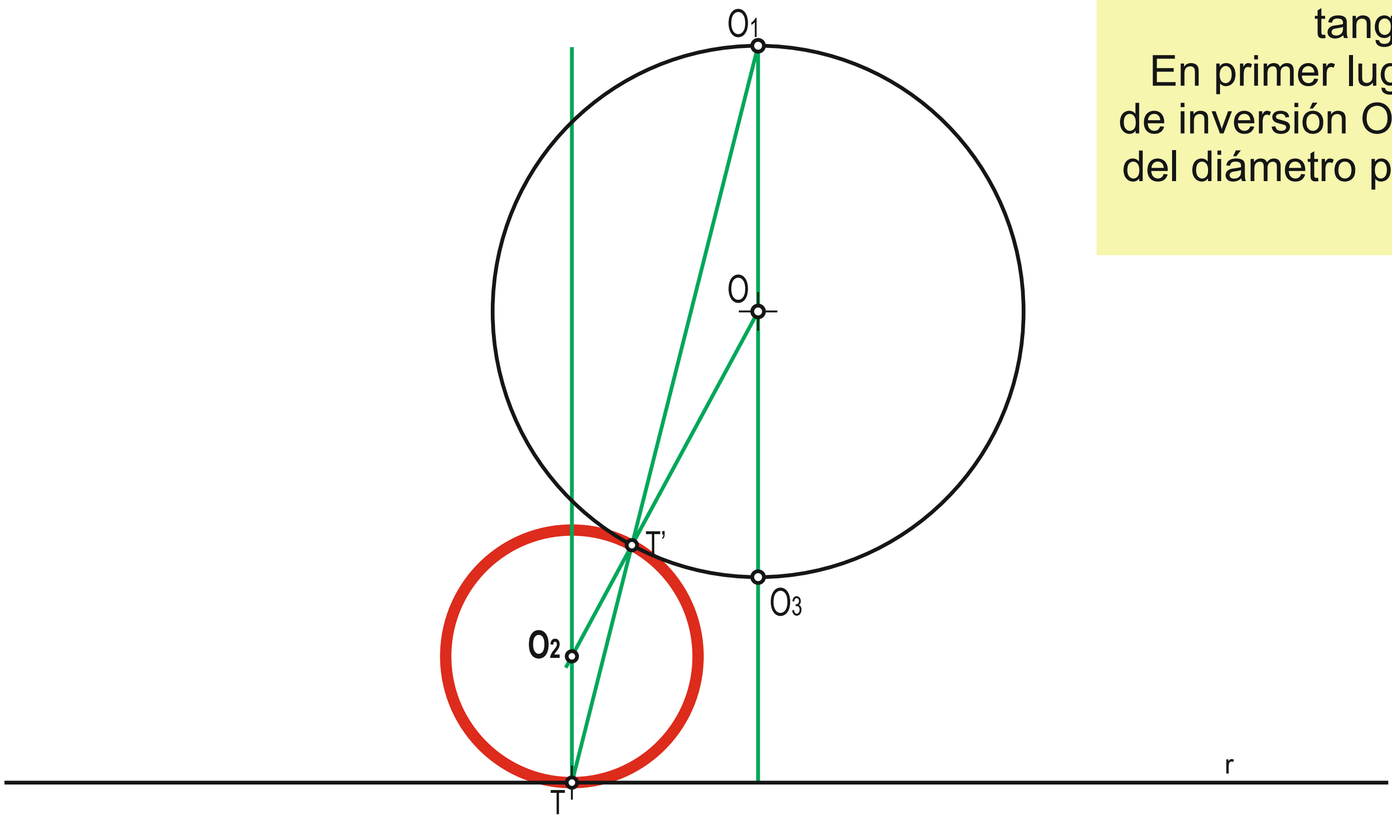


PROBLEMAS DE APOLONIO

CPR

Circunferencias tangentes a una circunferencia y a una recta, ***conociendo el punto de tangencia en dicha recta*** ***POR INVERSIÓN***

6. Ahora hacemos la INVERSIÓN NEGATIVA para hallar la circunferencia tangente interna.
En primer lugar situamos el centro de inversión O3 en el extremo inferior del diámetro perpendicular a la recta.

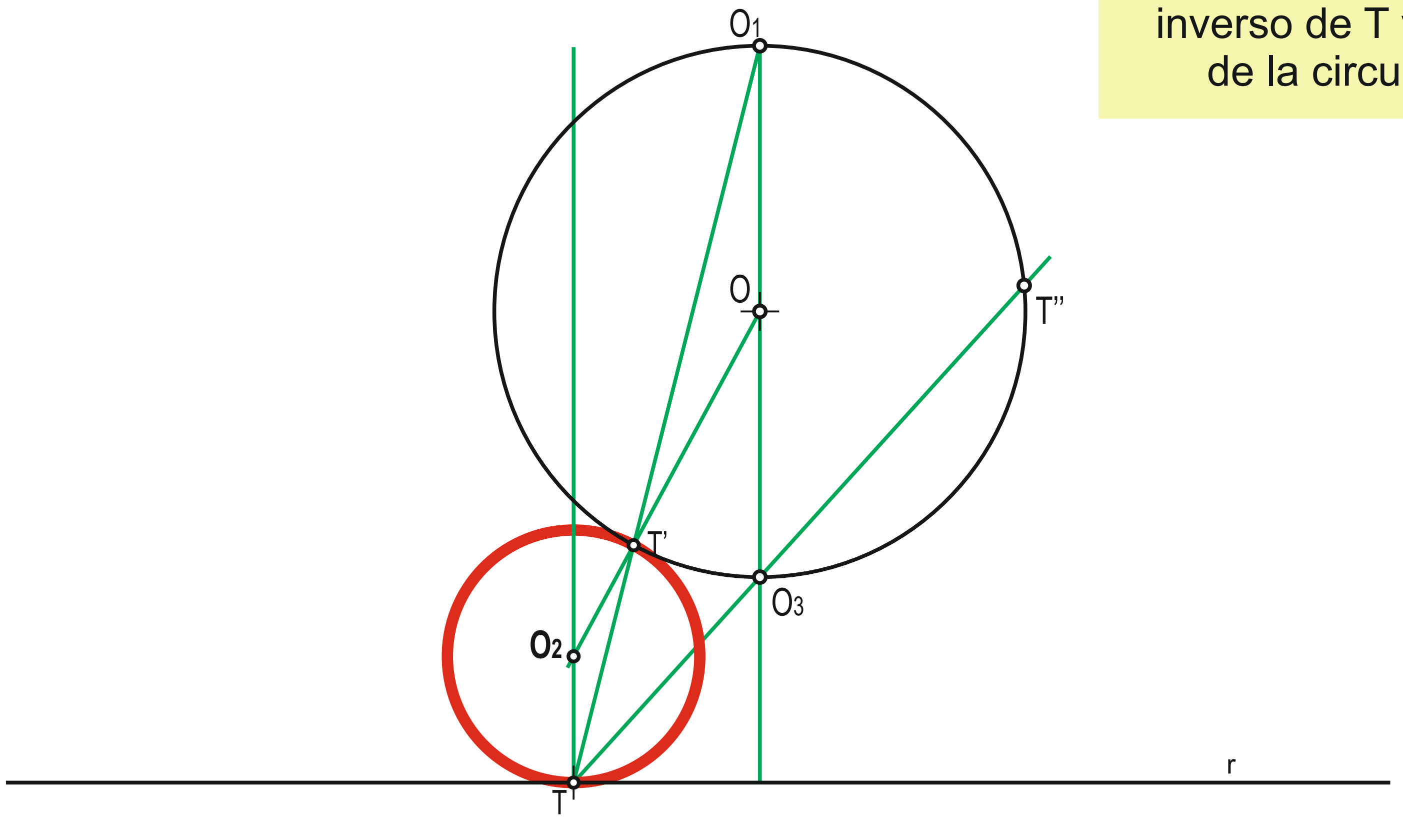


PROBLEMAS DE APOLONIO

CPR

Circunferencias tangentes a una circunferencia y a una recta, ***conociendo el punto de tangencia en dicha recta*** ***POR INVERSIÓN***

7. Uniendo T con O3 cortamos la circunferencia en el punto T'', inverso de T y punto de tangencia de la circunferencia solución

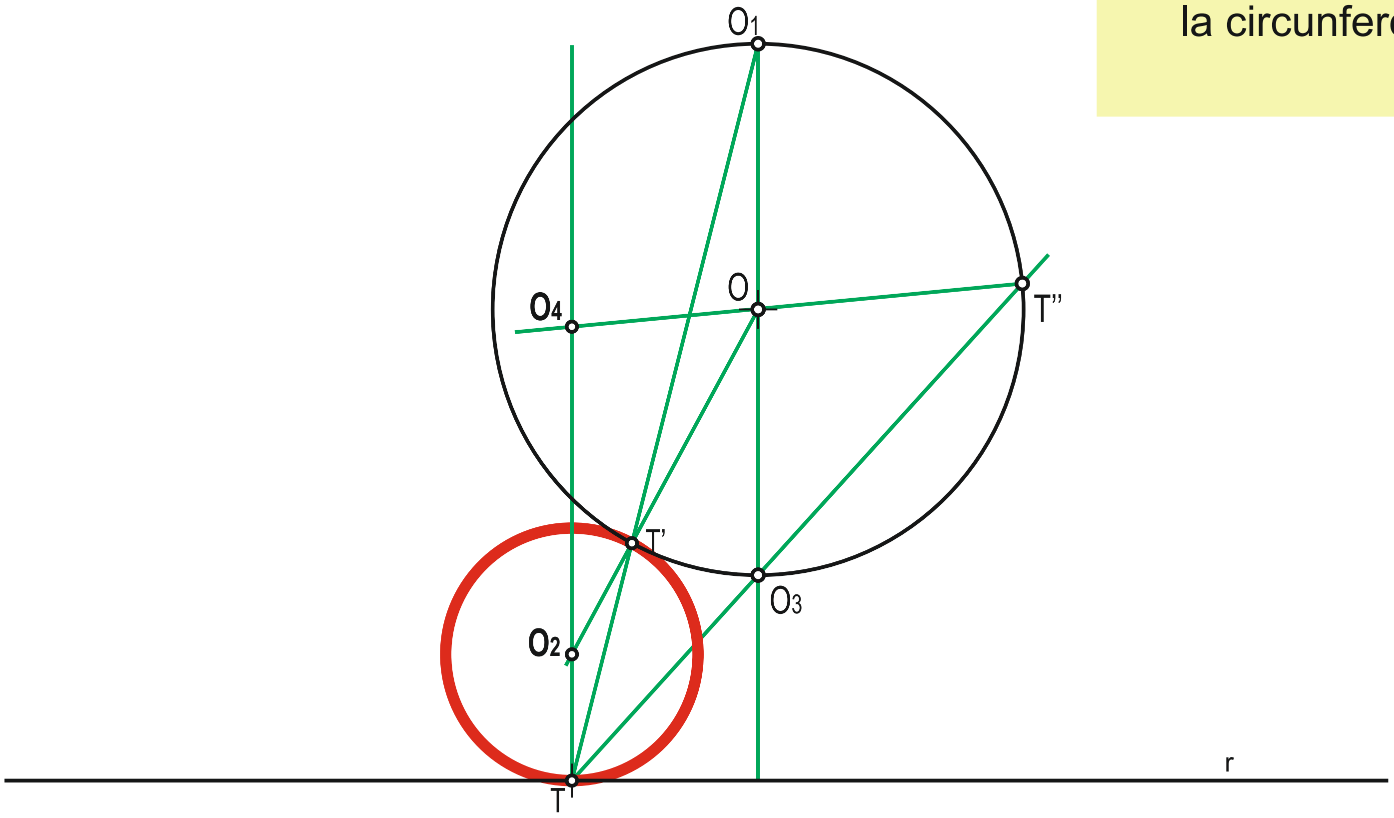


PROBLEMAS DE APOLONIO

CPR

Circunferencias tangentes a una circunferencia y a una recta, ***conociendo el punto de tangencia en dicha recta*** ***POR INVERSIÓN***

8. Uniendo T'' con O cortaremos la perpendicular de T en O_4, centro de la circunferencia que buscamos



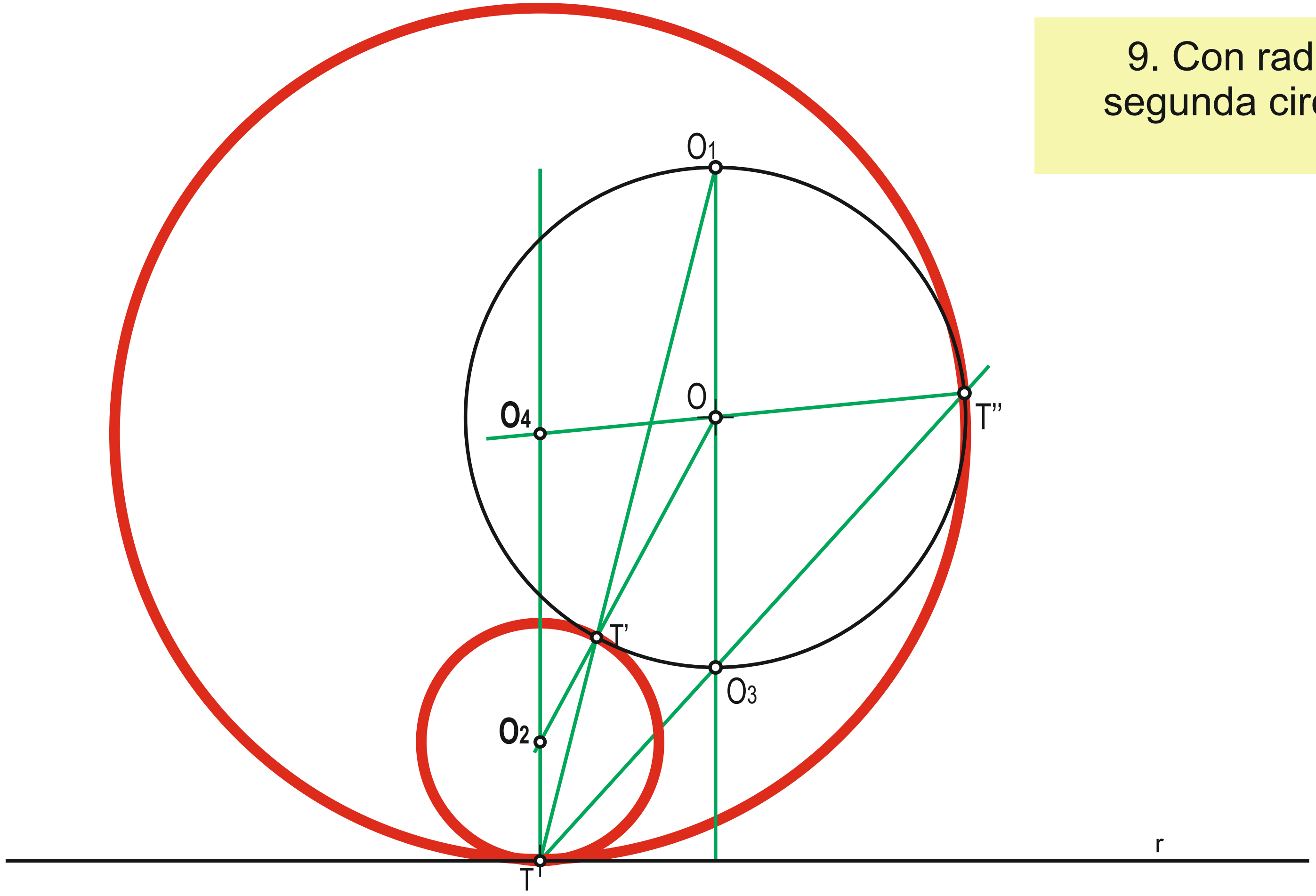
PROBLEMAS DE APOLONIO

CPR

Circunferencias tangentes a una circunferencia y a una recta, ***conociendo el punto de tangencia en dicha recta***

POR INVERSIÓN

9. Con radio O4T trazamos la segunda circunferencia solución



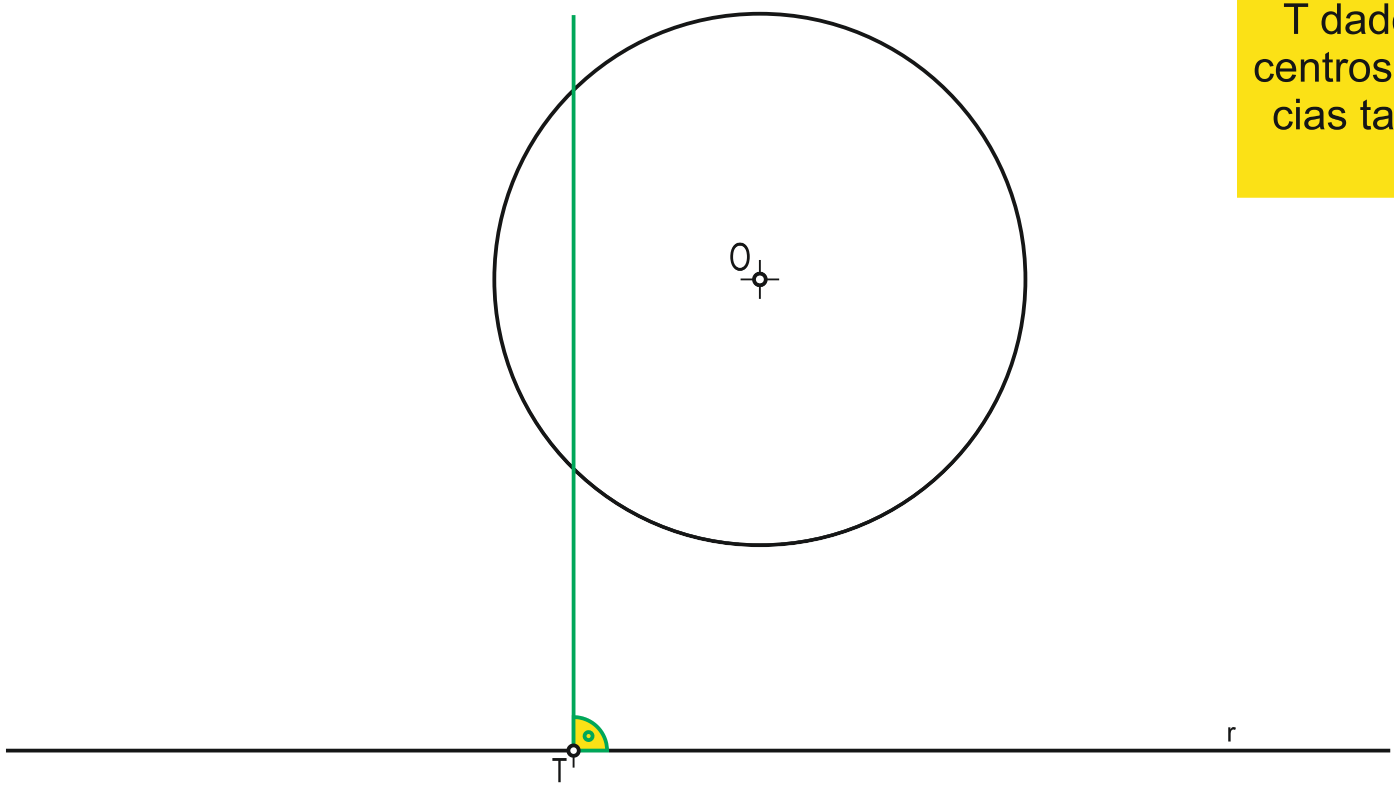
PROBLEMAS DE APOLONIO

CPR

Circunferencias tangentes a una circunferencia y a una recta, ***conociendo el punto de tangencia en dicha recta*** ***POR POTENCIA***

POR POTENCIA

1. La perpendicular por el punto T dado a la recta contiene los centros de todas las circunferencias tangentes a la recta por el punto dado



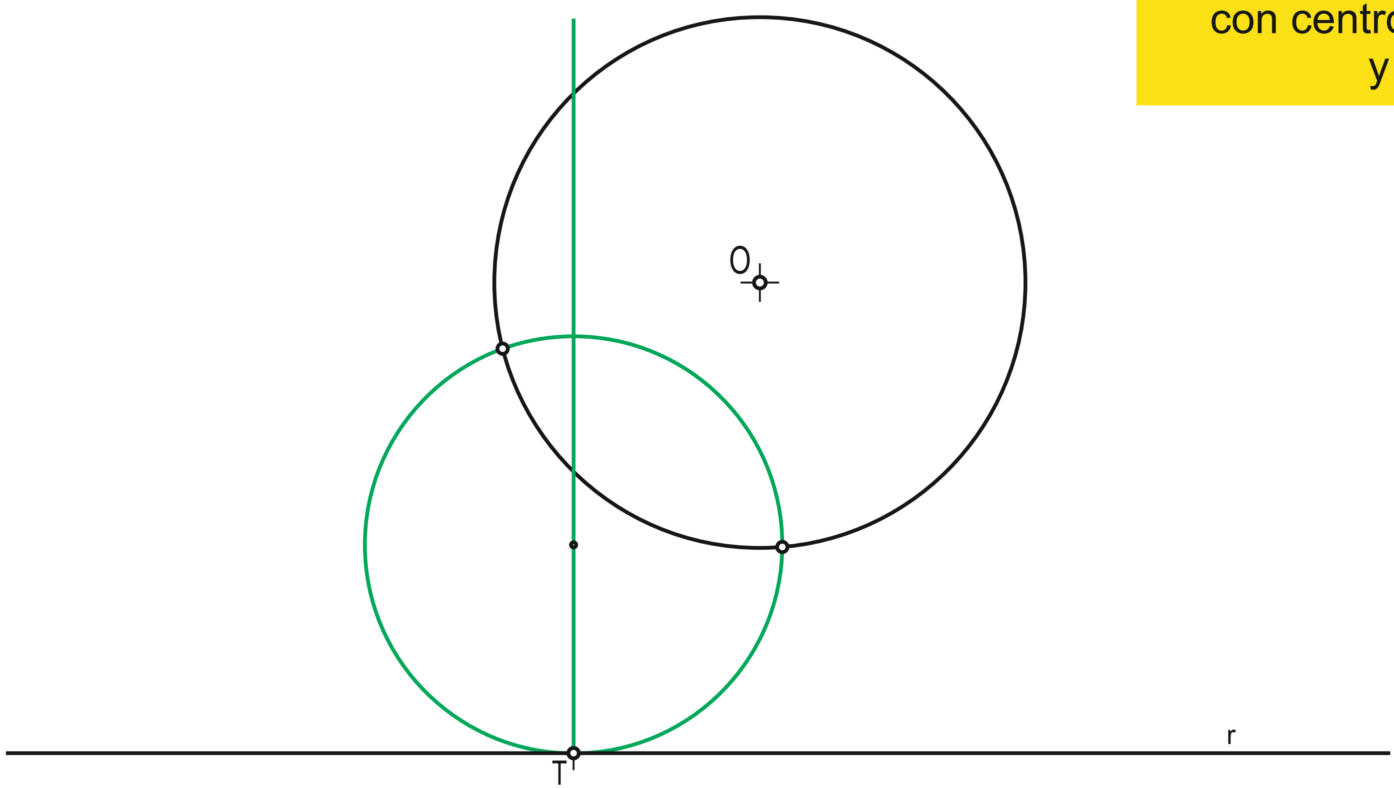
PROBLEMAS DE APOLONIO

CPR

Circunferencias tangentes a una circunferencia y a una recta, ***conociendo el punto de tangencia en dicha recta*** ***POR POTENCIA***

POR POTENCIA

2. Trazamos una circunferencia auxiliar con centro en la perpendicular a r y que pase por T



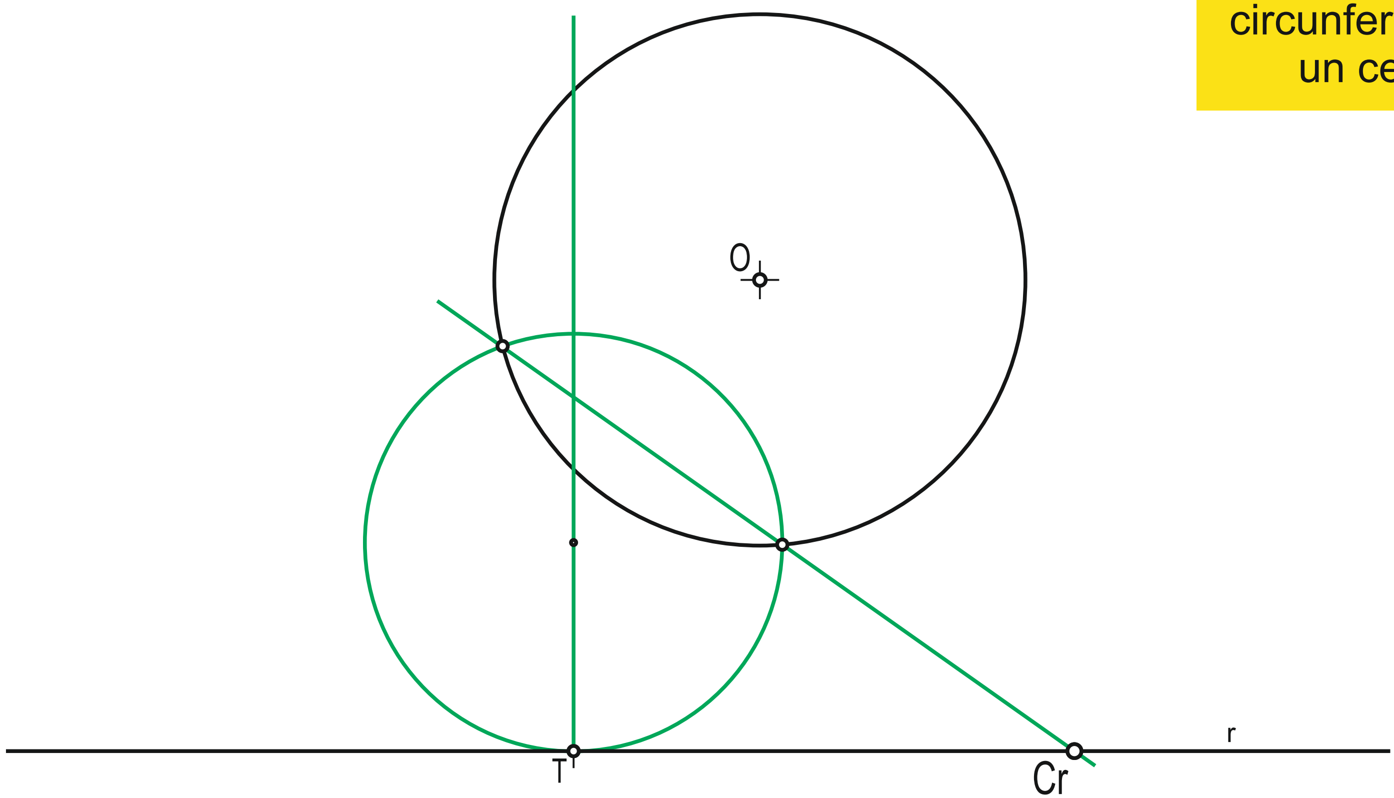
PROBLEMAS DE APOLONIO

CPR

Circunferencias tangentes a una circunferencia y a una recta, ***conociendo el punto de tangencia en dicha recta*** ***POR POTENCIA***

POR POTENCIA

3. Trazamos el eje radical de ambas circunferencias, obteniendo sobre r un centro radical auxiliar Cr.



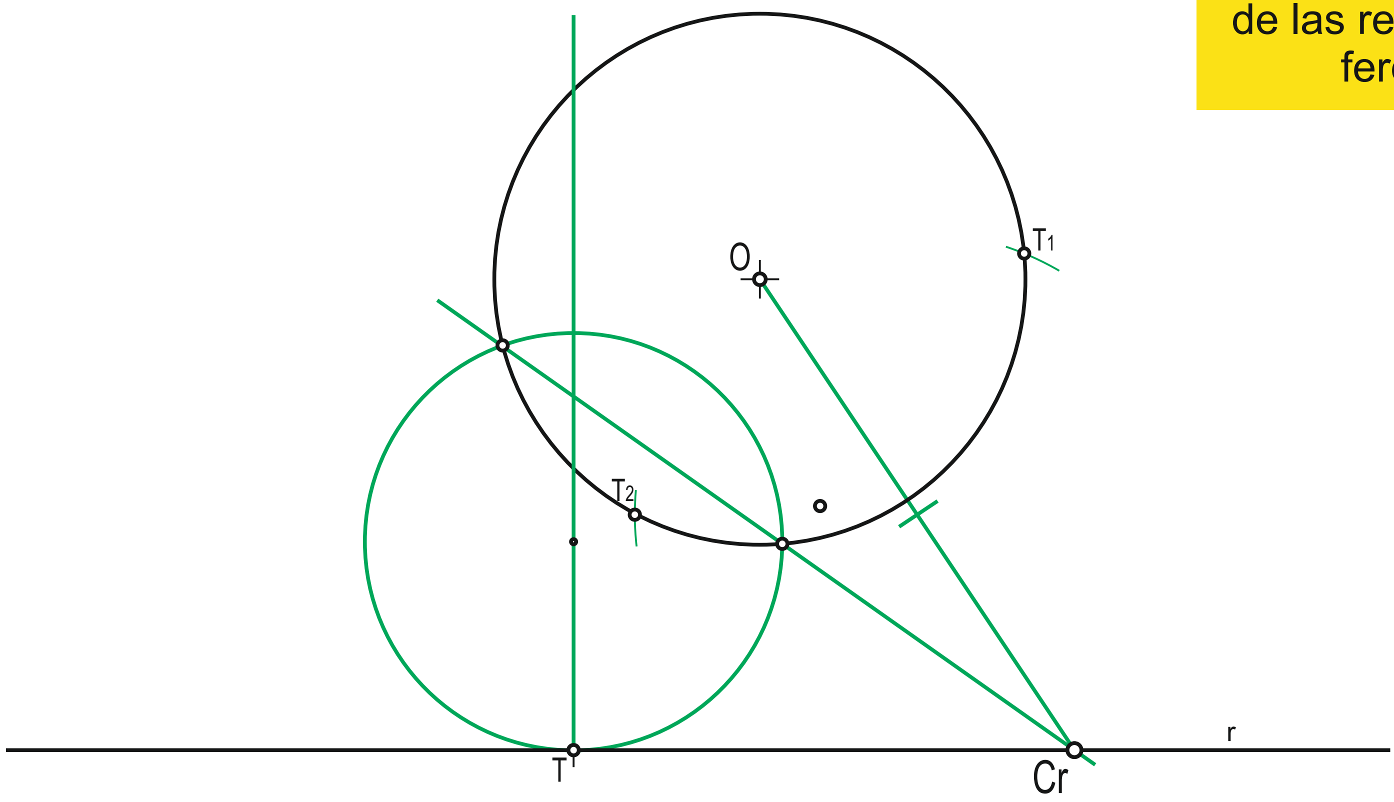
PROBLEMAS DE APOLONIO

CPR

Circunferencias tangentes a una circunferencia y a una recta, ***conociendo el punto de tangencia en dicha recta*** ***POR POTENCIA***

POR POTENCIA

4. hallamos los puntos de tangencia de las rectas tangentes a la circunferencia dada desde Cr



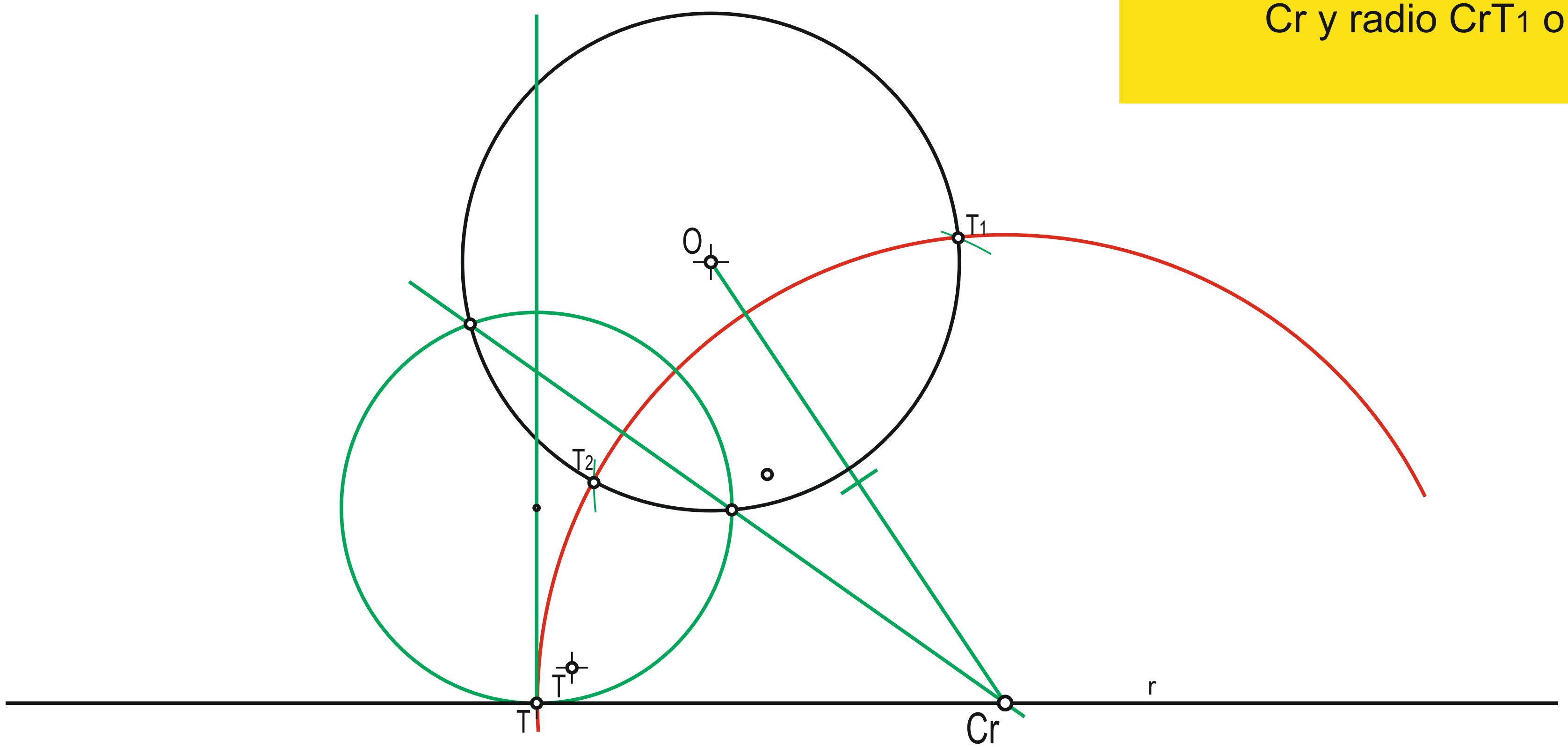
PROBLEMAS DE APOLONIO

CPR

Circunferencias tangentes a una circunferencia y a una recta, ***conociendo el punto de tangencia en dicha recta*** ***POR POTENCIA***

POR POTENCIA

5. Trazamos el arco con centro en Cr y radio CrT1 o CrT2



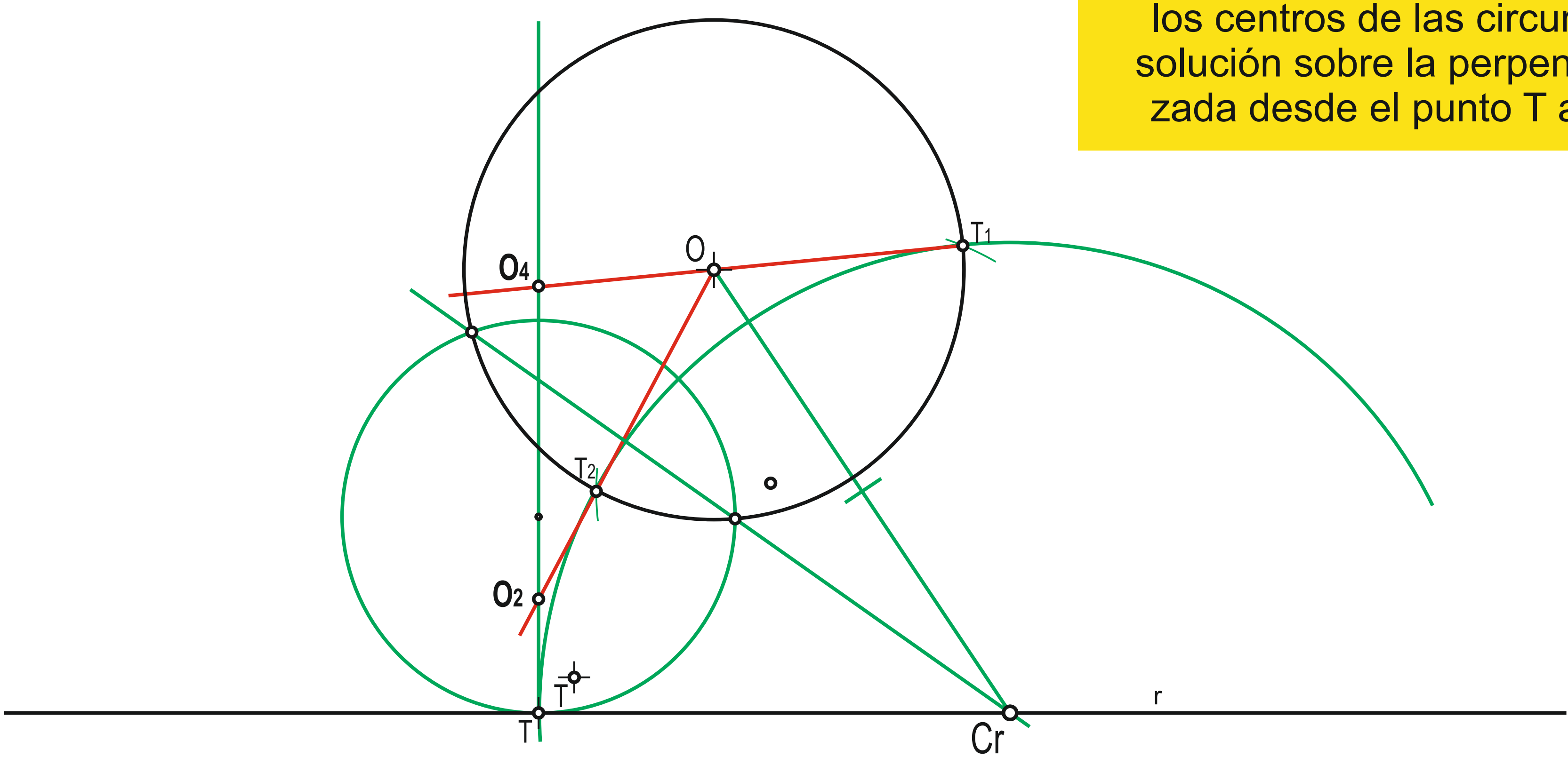
PROBLEMAS DE APOLONIO

CPR

Circunferencias tangentes a una circunferencia y a una recta, ***conociendo el punto de tangencia en dicha recta*** ***POR POTENCIA***

POR POTENCIA

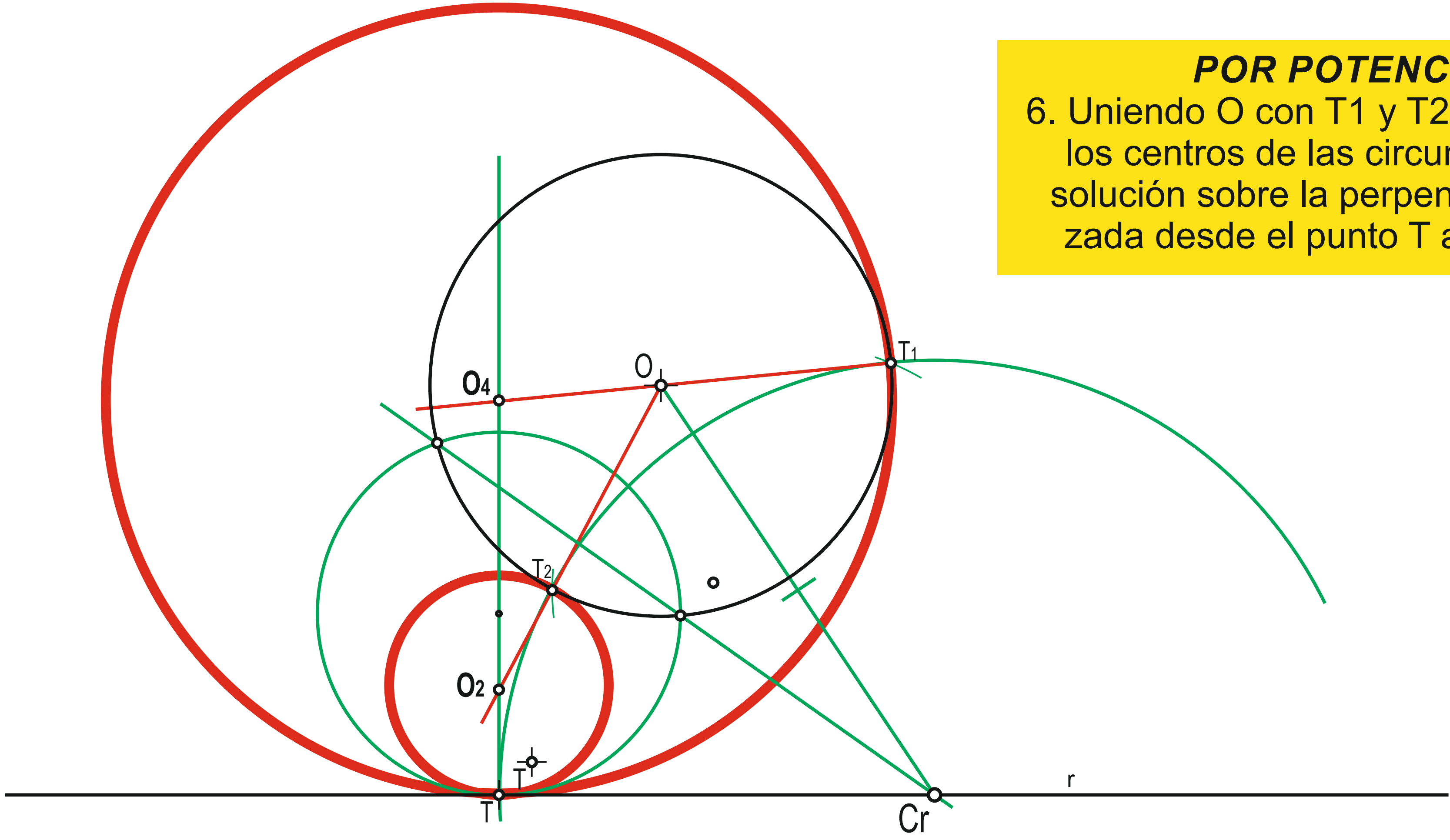
6. Uniendo O con T1 y T2, obtenemos los centros de las circunferencias solución sobre la perpendicular trazada desde el punto T a la recta r



PROBLEMAS DE APOLONIO

CPR

Circunferencias tangentes a una circunferencia y a una recta, ***conociendo el punto de tangencia en dicha recta*** ***POR POTENCIA***



POR POTENCIA

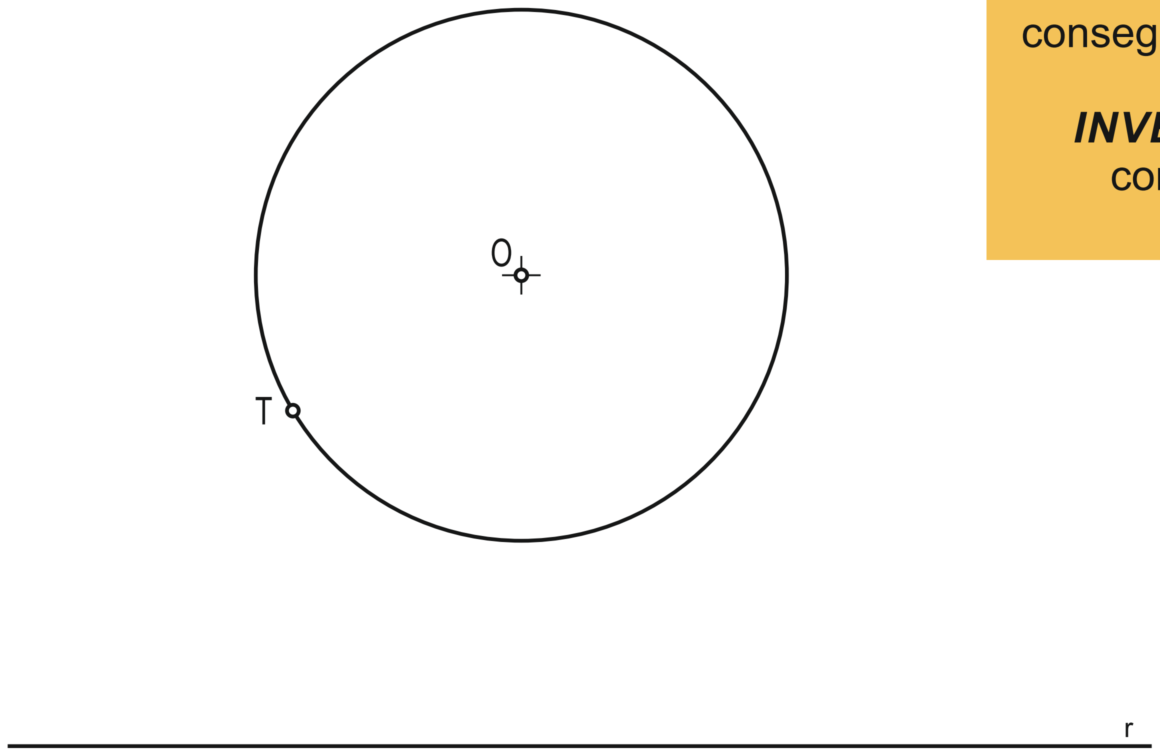
6. Uniendo O con T1 y T2, obtenemos los centros de las circunferencias solución sobre la perpendicular trazada desde el punto T a la recta r

PROBLEMAS DE APOLONIO

CPR

Circunferencias tangentes a una circunferencia y a una rdicha recta, ***conociendo el punto de tangencia en la circunferencia***

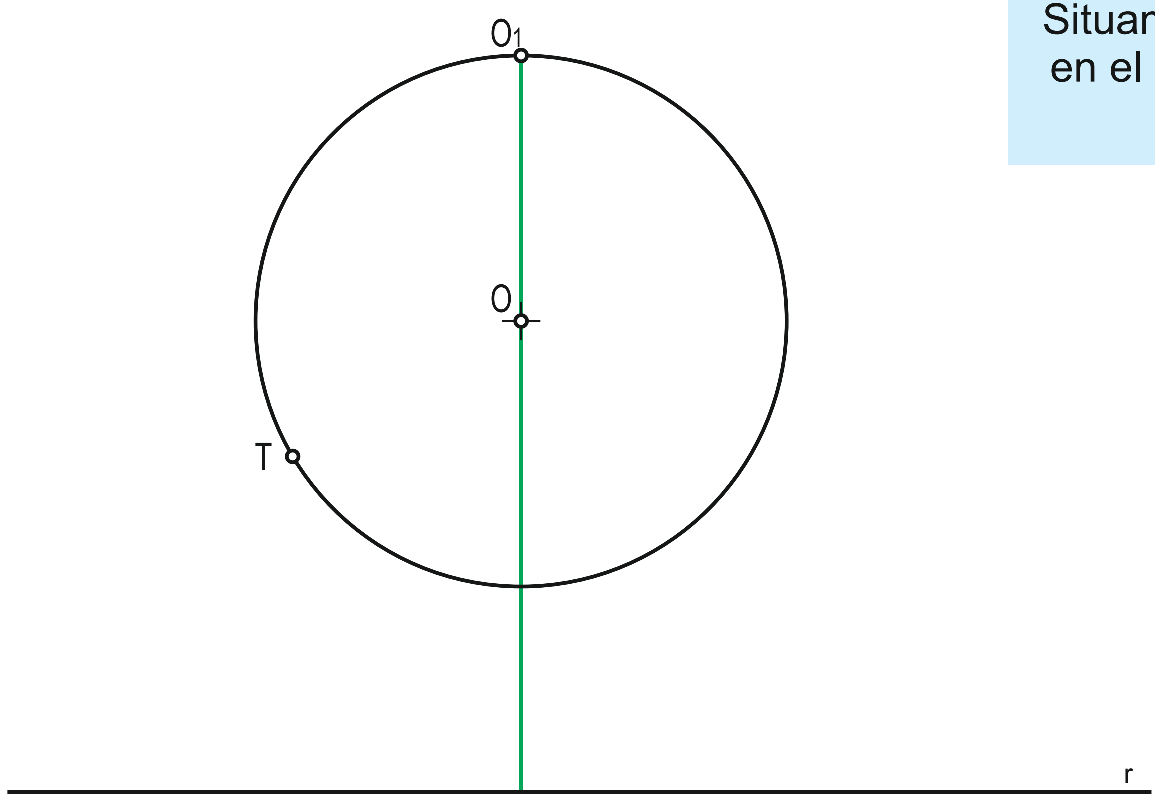
Igual que en el caso anterior, aplicaremos dos inversiones:
Una ***INVERSIÓN POSITIVA*** para conseguir la circunferencia tangente exterior, y una
INVERSIÓN NEGATIVA para conseguir la circunferencia tangente interior.



PROBLEMAS DE APOLONIO

CPR

Circunferencias tangentes a una circunferencia y a una rdicha recta, ***conociendo el punto de tangencia en la circunferencia***



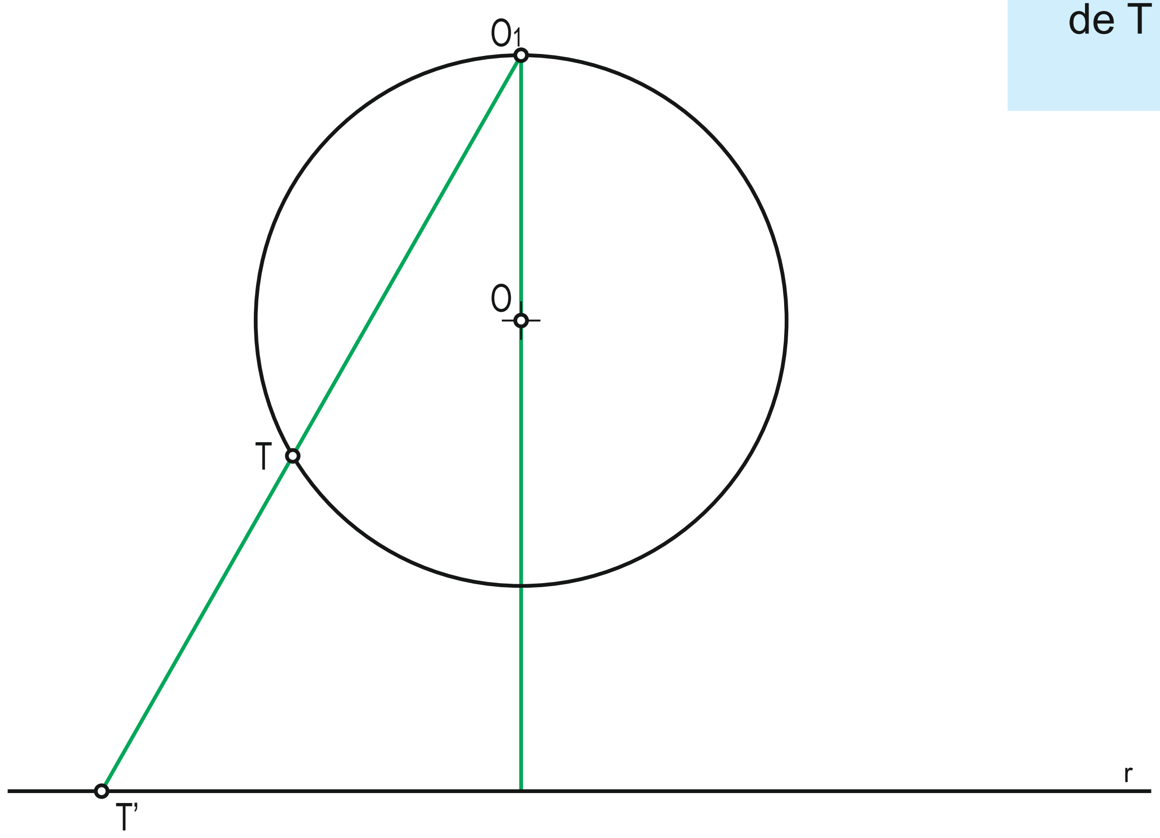
1. Comenzamos por la ***INVERSIÓN POSITIVA***:
Situamos el centro de inversión (O_1) en el extremo superior del diámetro perpendicular a la recta

PROBLEMAS DE APOLONIO

CPR

Circunferencias tangentes a una circunferencia y a una rdicha recta, ***conociendo el punto de tangencia en la circunferencia***

2. Trazamos la recta O1T hasta cortar la recta r en el punto T', inverso de T y punto de tangencia de una solución

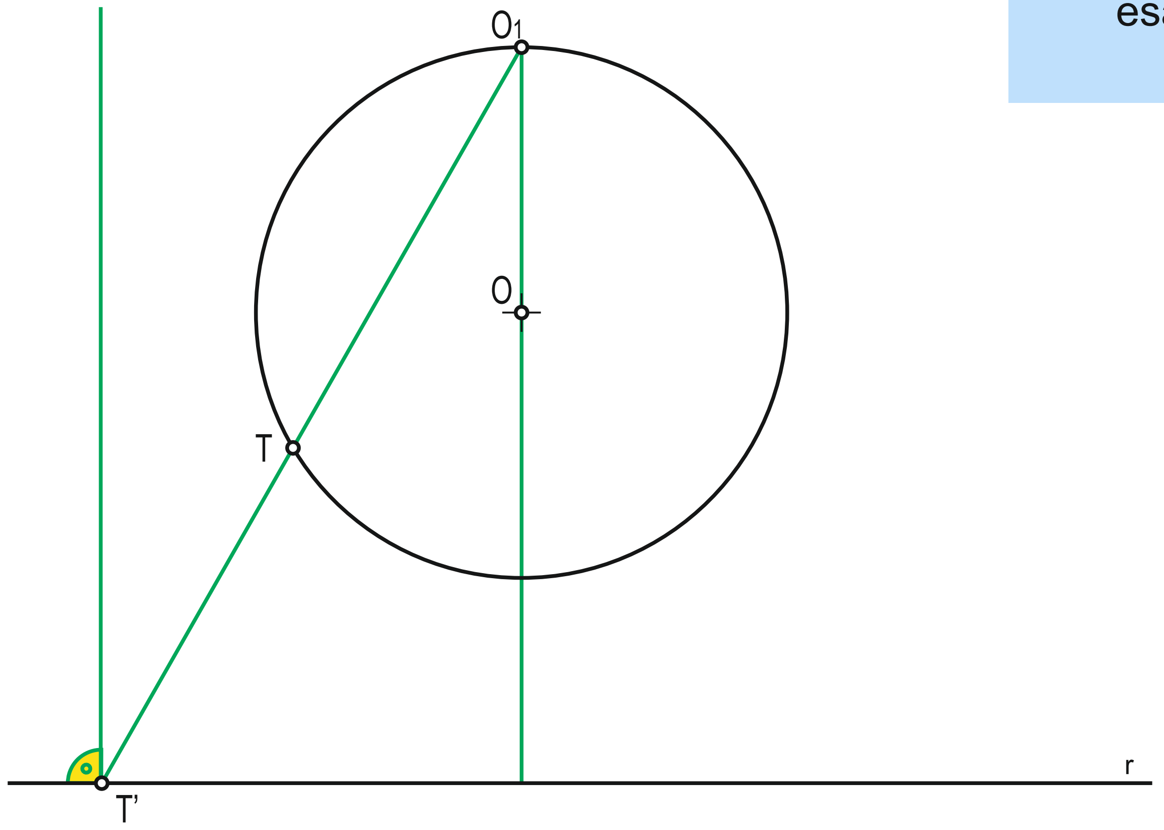


PROBLEMAS DE APOLONIO

CPR

Circunferencias tangentes a una circunferencia y a una rdicha recta, ***conociendo el punto de tangencia en la circunferencia***

3. Levantamos la perpendicular a r desde T', porque sabemos que en esa recta estará el centro de una de las soluciones

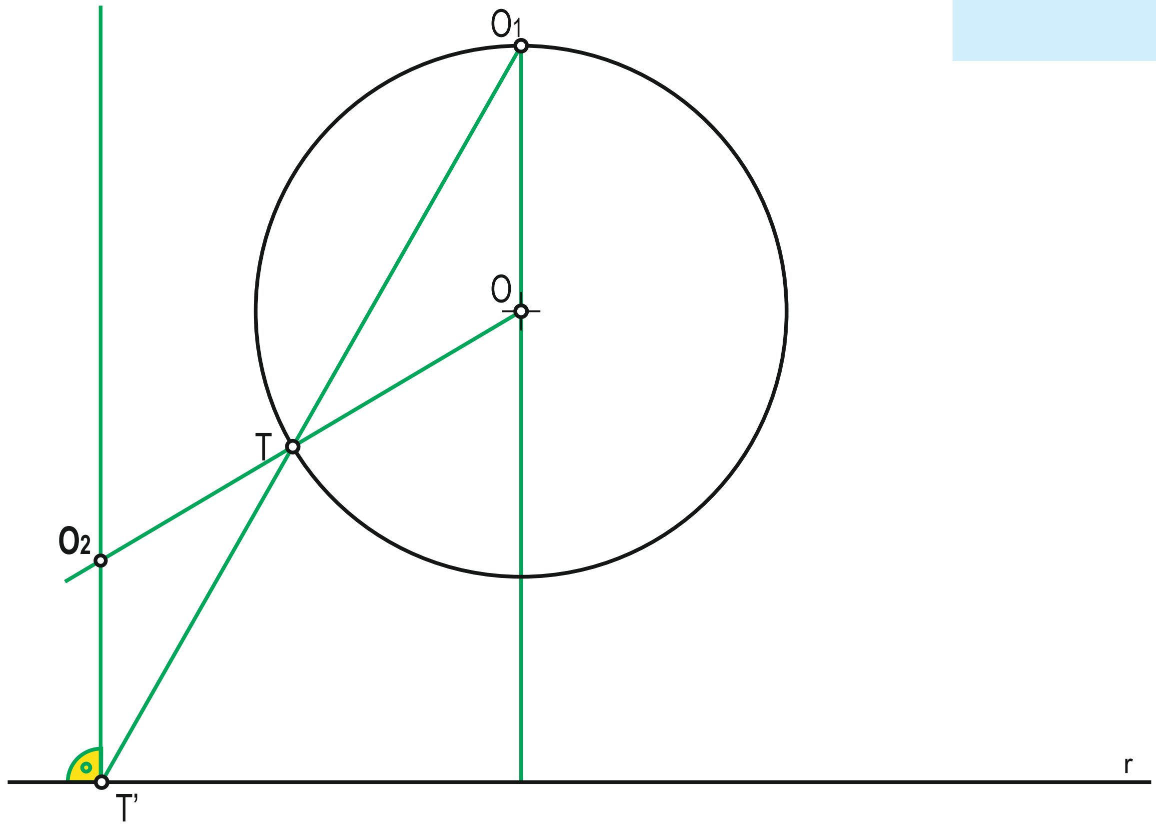


PROBLEMAS DE APOLONIO

CPR

Circunferencias tangentes a una circunferencia y a una rdicha recta, ***conociendo el punto de tangencia en la circunferencia***

4. Uniendo O con T cortamos la perpendicular en O2, centro de la primera solución

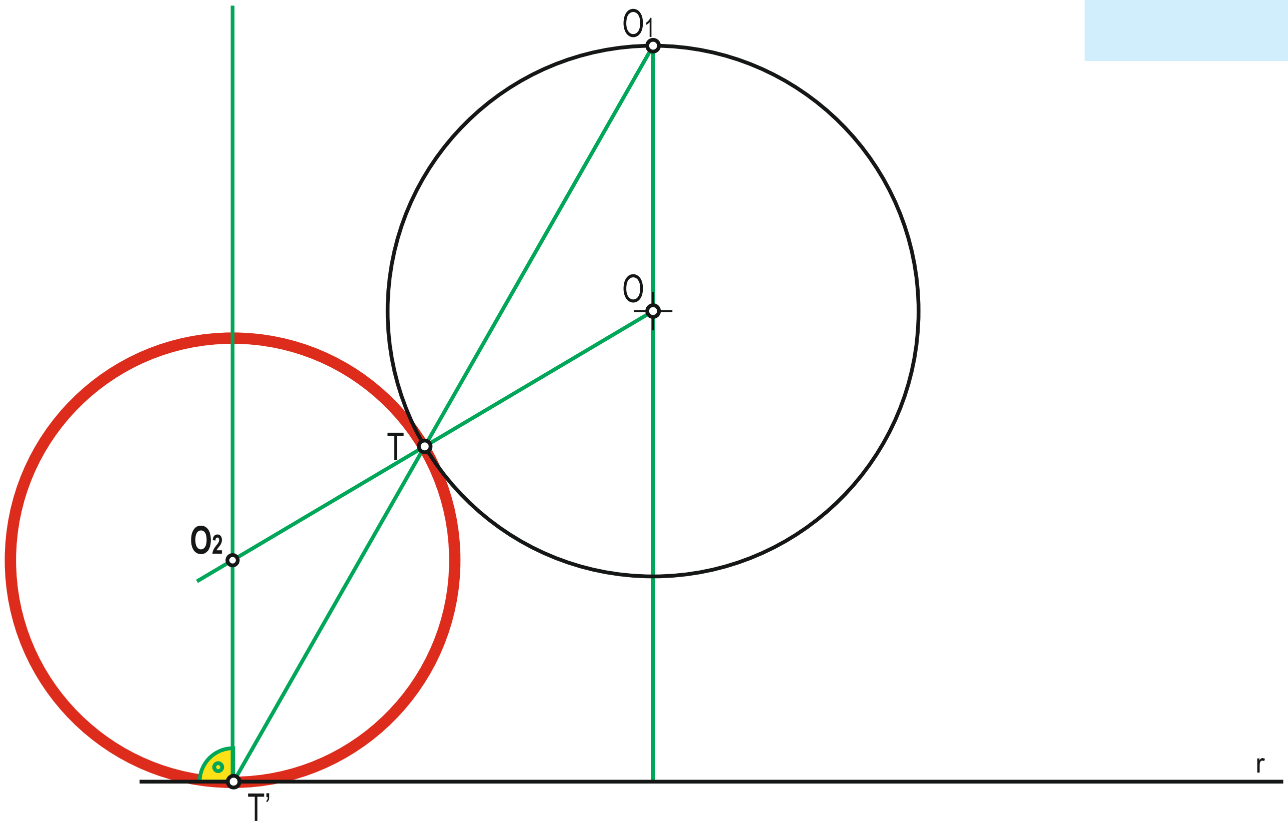


PROBLEMAS DE APOLONIO

CPR

Circunferencias tangentes a una circunferencia y a una rdicha recta, ***conociendo el punto de tangencia en la circunferencia***

5. Trazamos la circunferencia

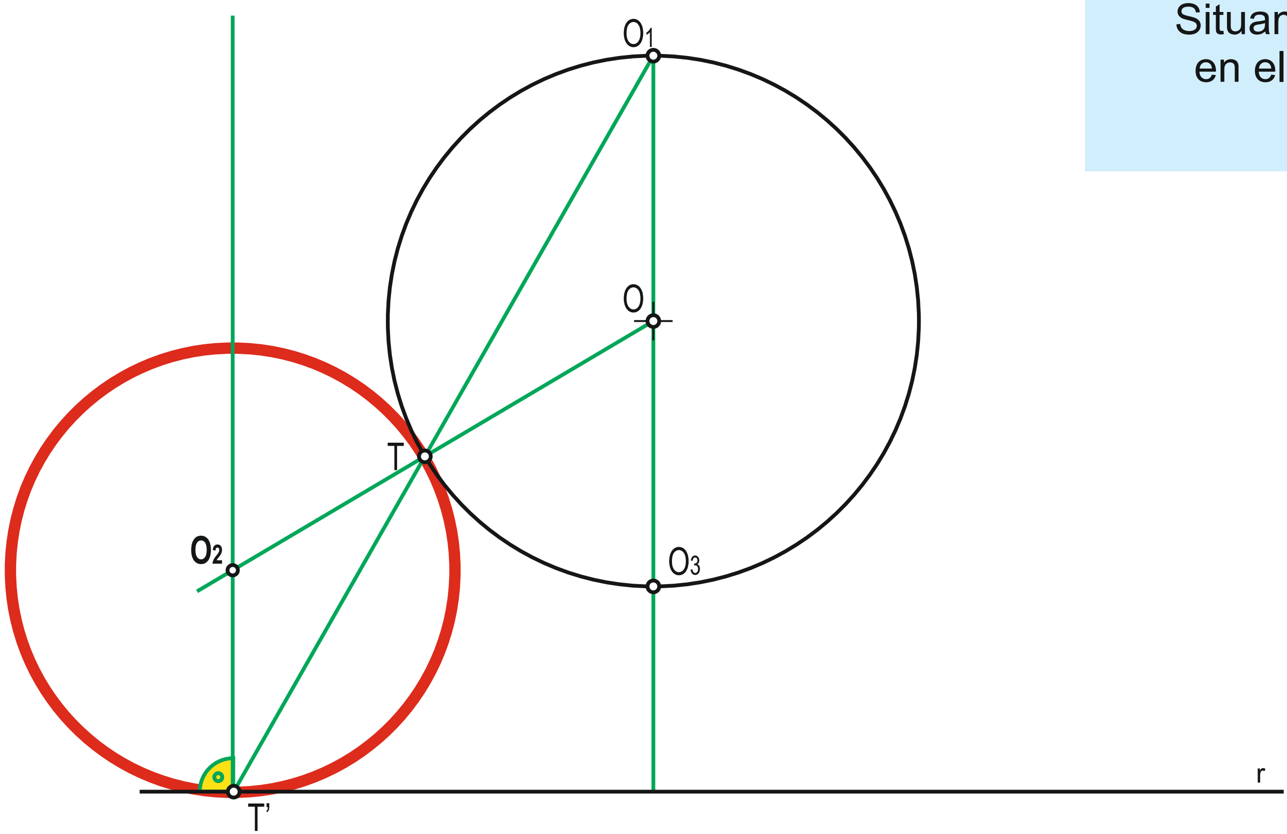


PROBLEMAS DE APOLONIO

CPR

Circunferencias tangentes a una circunferencia y a una rdicha recta, ***conociendo el punto de tangencia en la circunferencia***

6. Para la Segunda solución, hacemos una ***INVERSIÓN NEGATIVA***. Situamos el centro de inversión (O_3) en el extremo inferior del diámetro perpendicular a la recta.

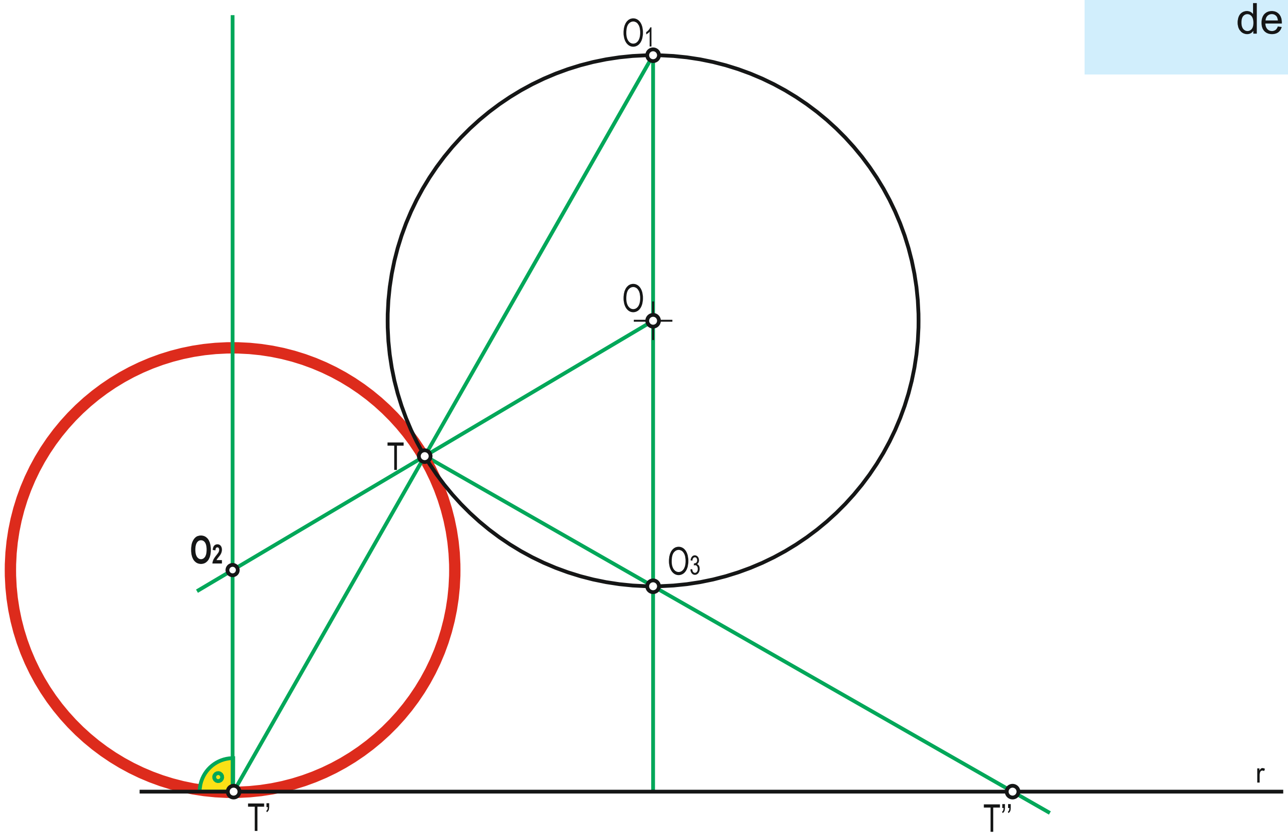


PROBLEMAS DE APOLONIO

CPR

Circunferencias tangentes a una circunferencia y a una rdicha recta, ***conociendo el punto de tangencia en la circunferencia***

7. Uniendo T con O_3 obtenemos T'', inverso de T en la recta r, y punto de tangencia de la solución que buscamos.

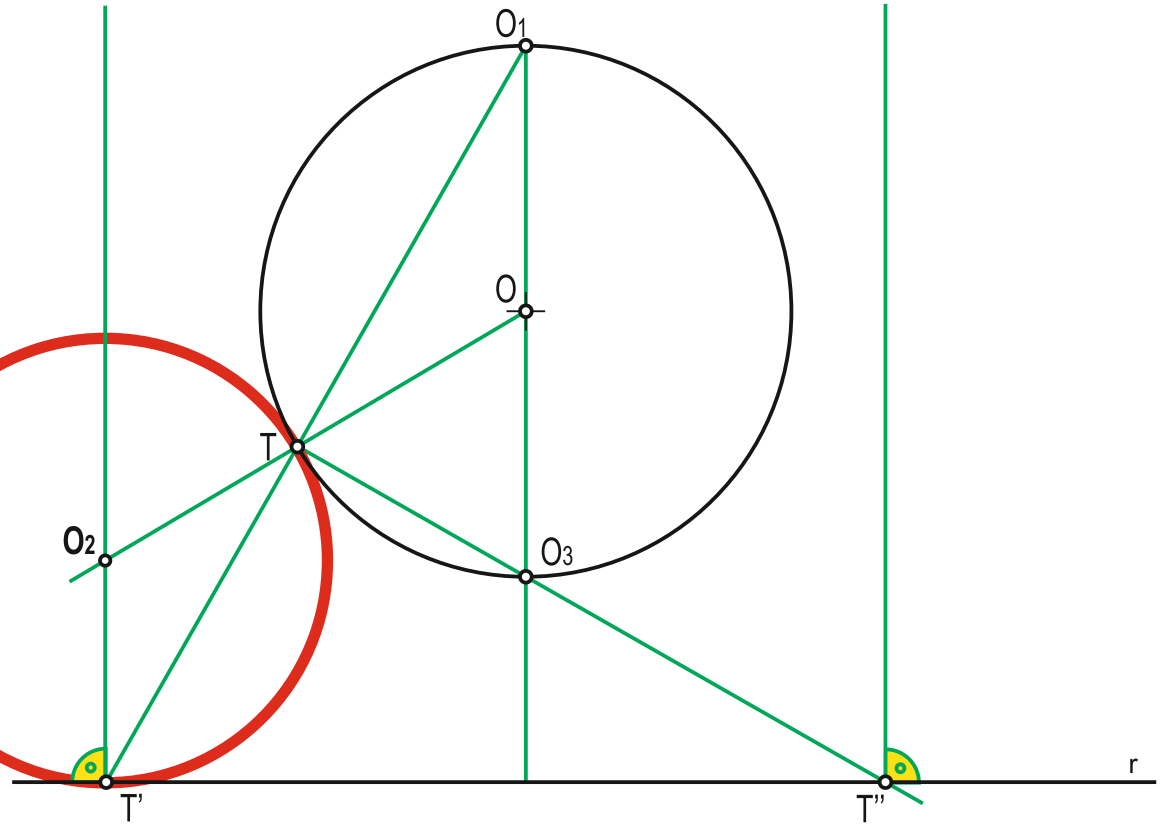


PROBLEMAS DE APOLONIO

CPR

Circunferencias tangentes a una circunferencia y a una rdicha recta, ***conociendo el punto de tangencia en la circunferencia***

8. trazamos la perpendicular en T''

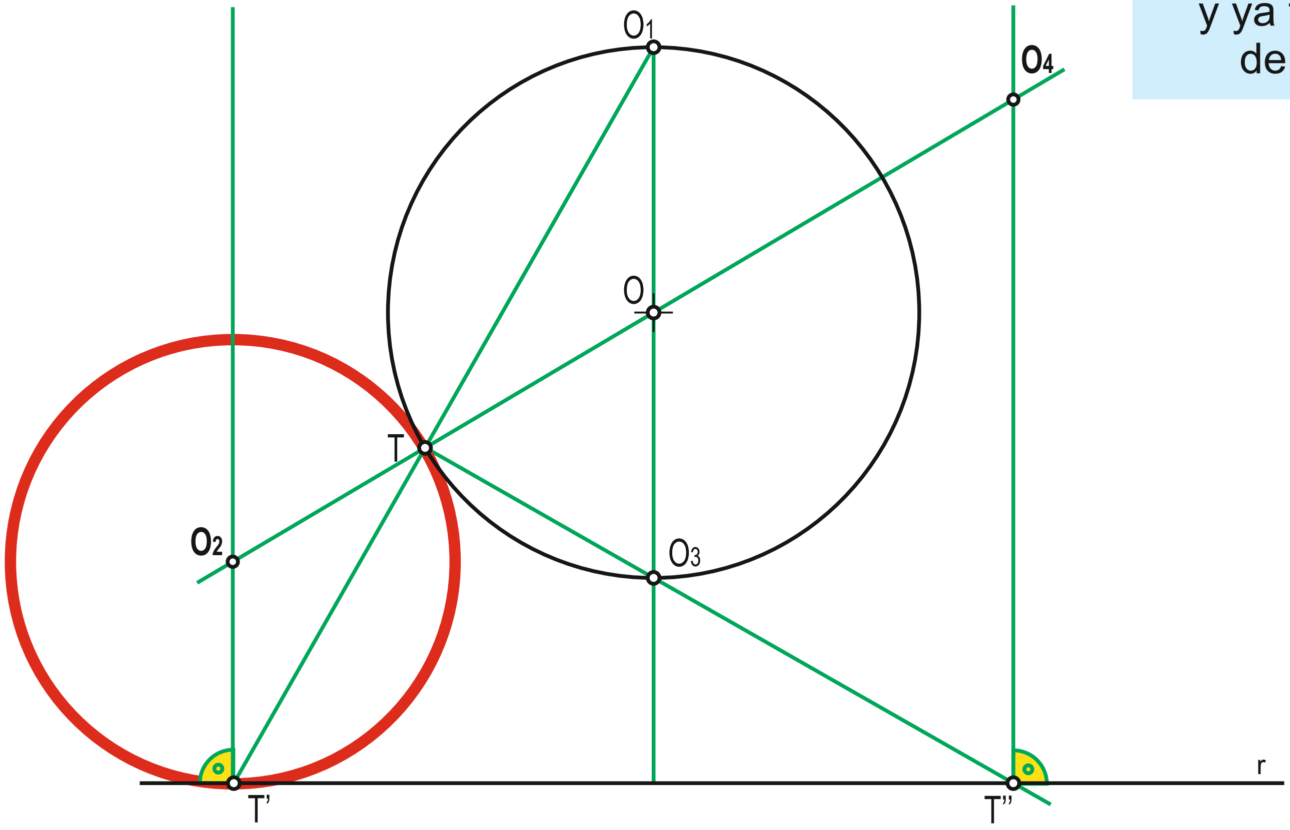


PROBLEMAS DE APOLONIO

CPR

Circunferencias tangentes a una circunferencia y a una rdicha recta, ***conociendo el punto de tangencia en la circunferencia***

9. Prolongamos la recta TO hasta cortar en la perpendicular anterior, y ya tenemos el centro O4, centro de la solución que queremos

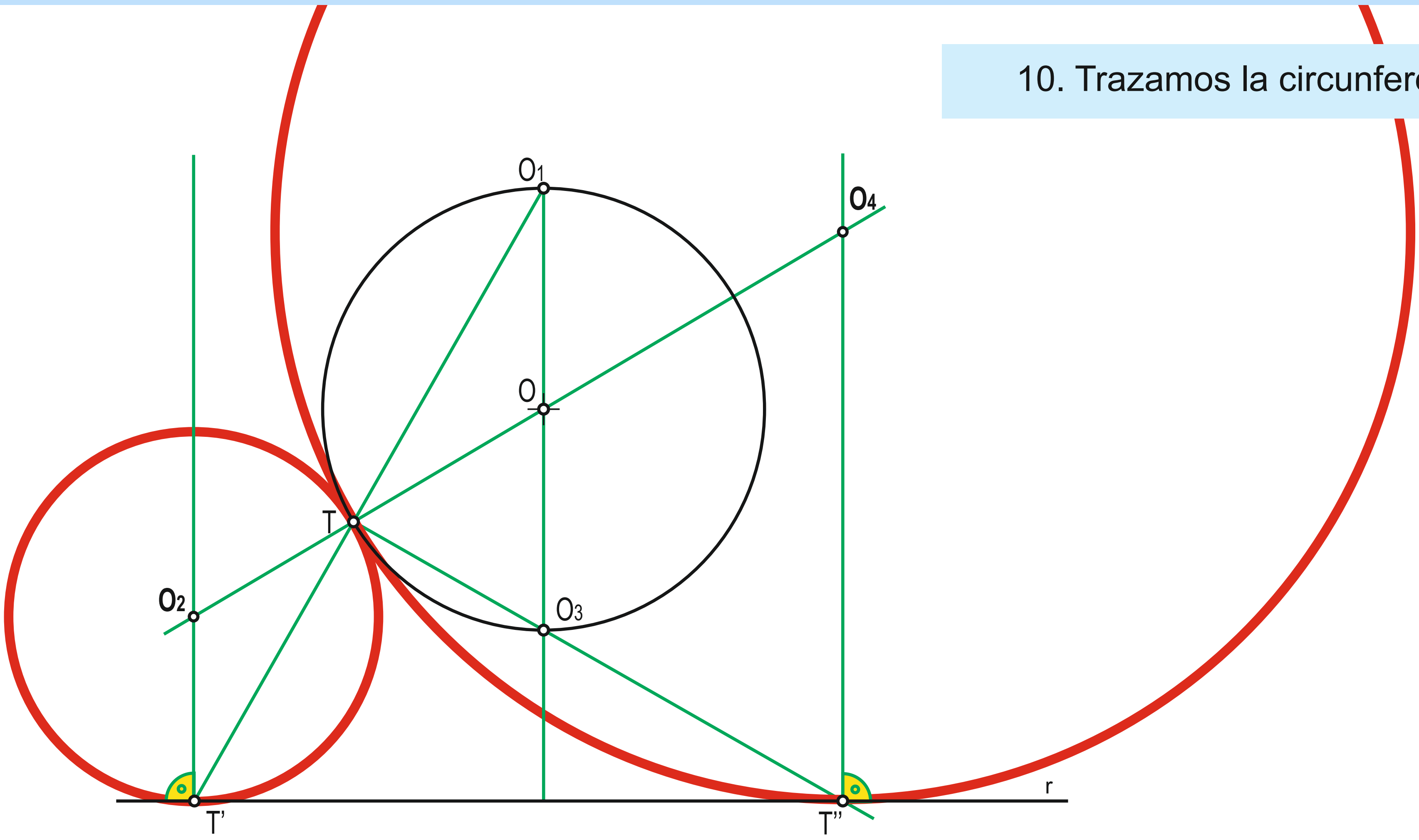


PROBLEMAS DE APOLONIO

CPR

Circunferencias tangentes a una circunferencia y a una rdicha recta, ***conociendo el punto de tangencia en la circunferencia***

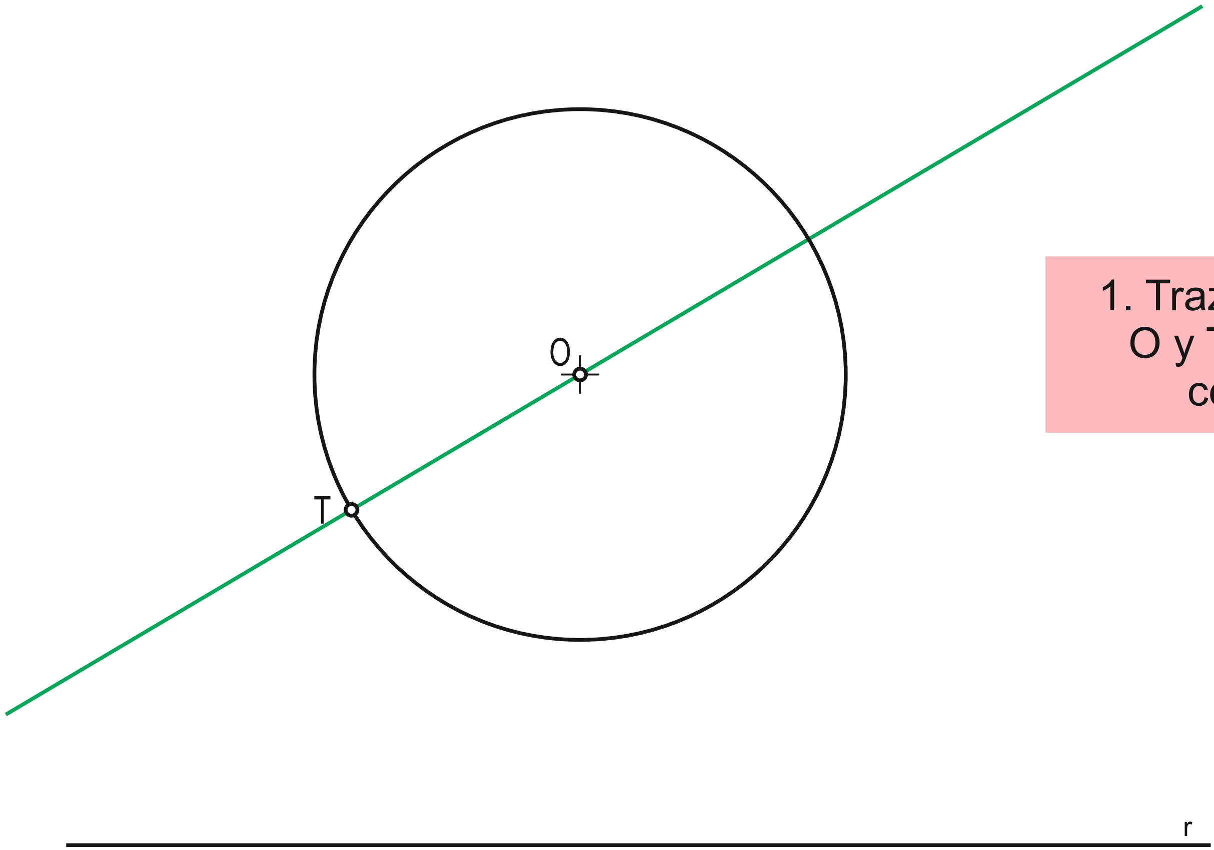
10. Trazamos la circunferencia.



PROBLEMAS DE APOLONIO

CPR

Circunferencias tangentes a una circunferencia y a una rdicha recta, ***conociendo el punto de tangencia en la circunferencia*** ***POR POTENCIA***

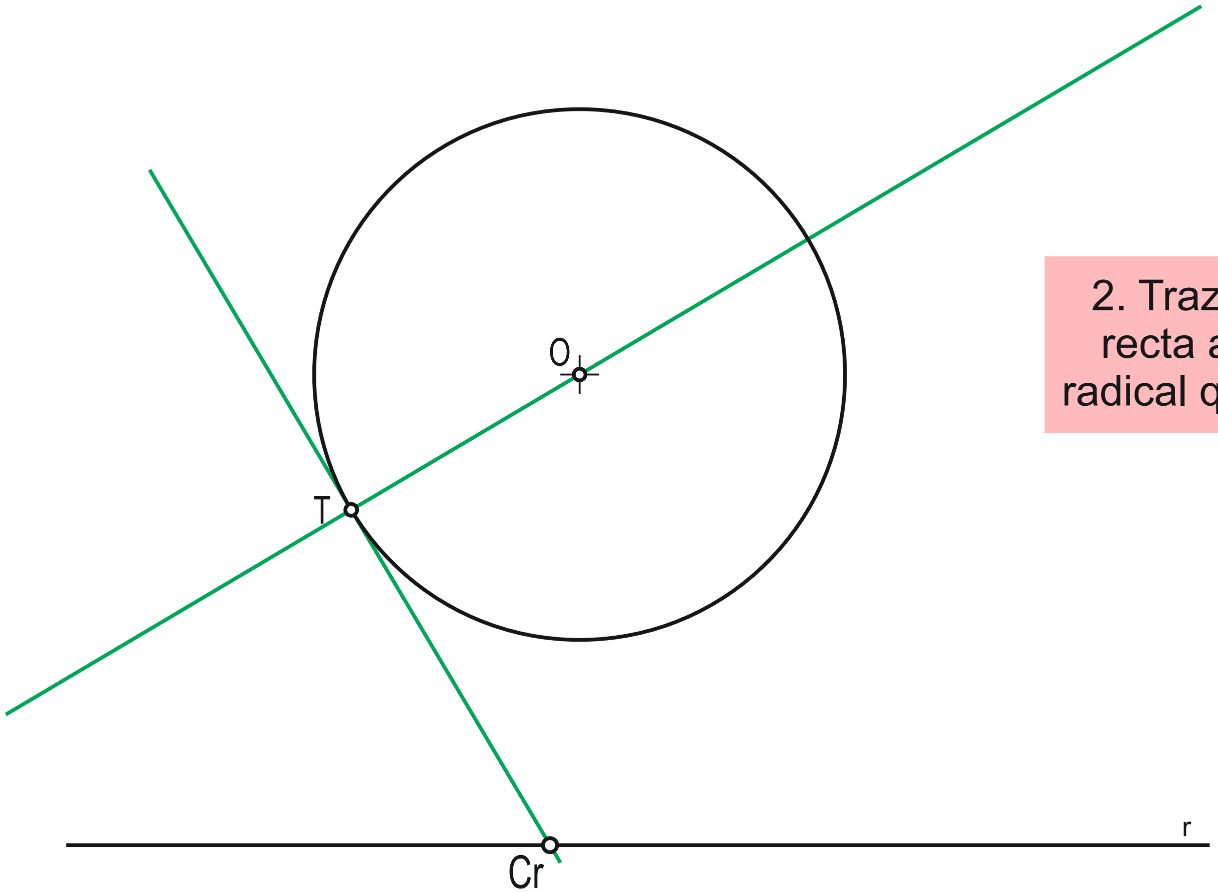


1. Trazamos la recta que pasa por, O y T, ya que en ella estarán los centros de las soluciones

PROBLEMAS DE APOLONIO

CPR

Circunferencias tangentes a una circunferencia y a una rdicha recta, ***conociendo el punto de tangencia en la circunferencia*** **POR POTENCIA**

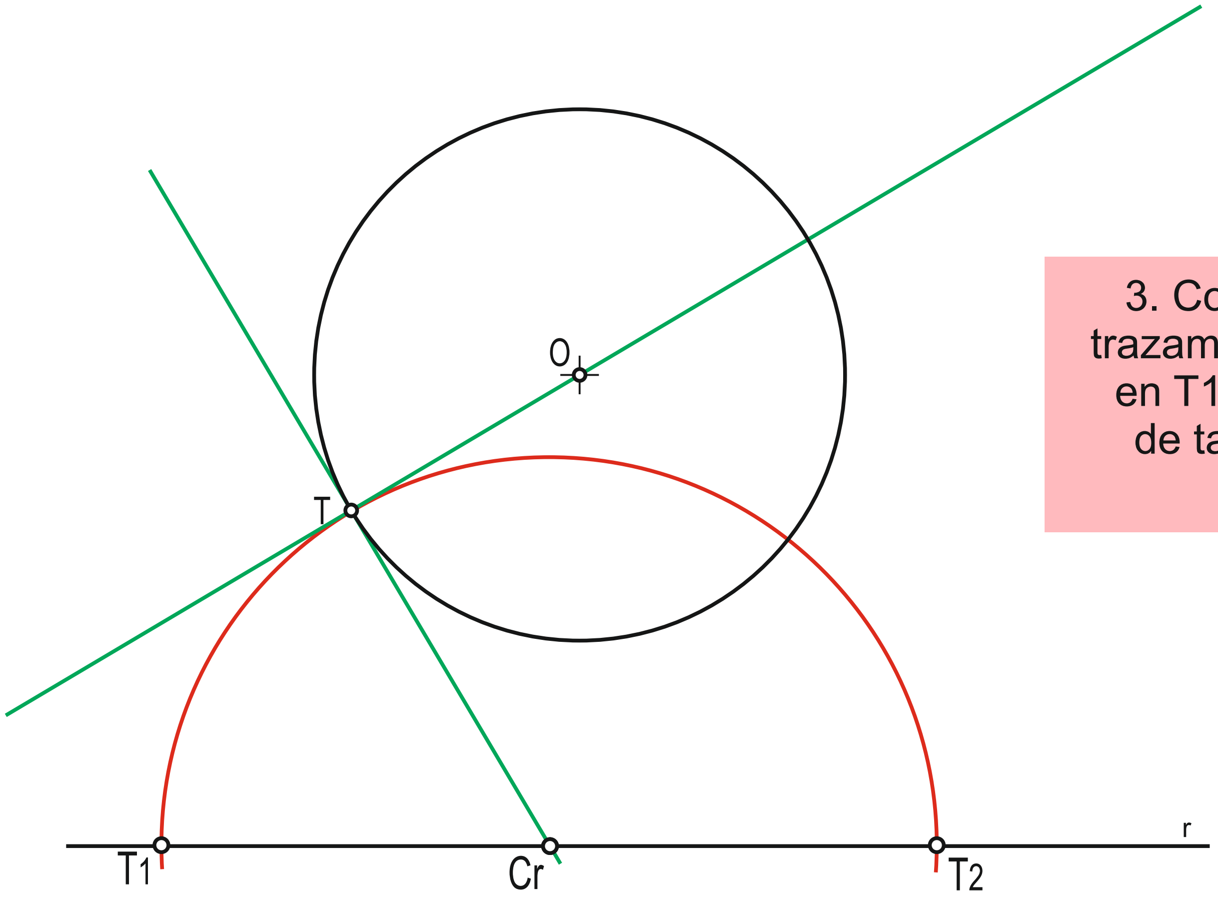


2. Trazamos una perpendicular a la recta anterior. Esta recta es un eje radical que corta a la recta dada en ***Cr***

PROBLEMAS DE APOLONIO

CPR

Circunferencias tangentes a una circunferencia y a una rdicha recta, ***conociendo el punto de tangencia en la circunferencia*** ***POR POTENCIA***

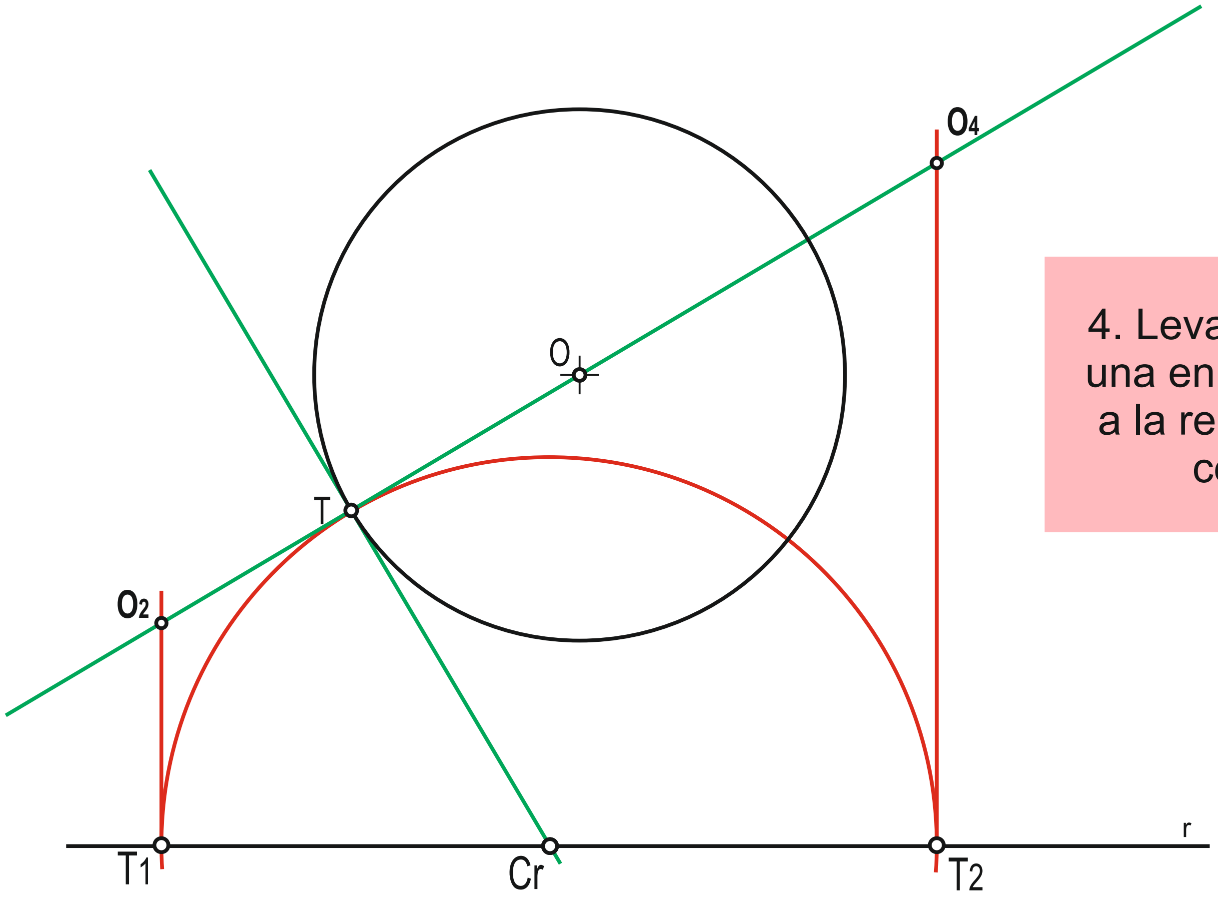


3. Con centro en Cr y radio CrT, trazamos un arco que corta la recta en T1 y T2, que serán los puntos de tangencia de las soluciones sobre la recta

PROBLEMAS DE APOLONIO

CPR

Circunferencias tangentes a una circunferencia y a una rdicha recta, ***conociendo el punto de tangencia en la circunferencia*** ***POR POTENCIA***

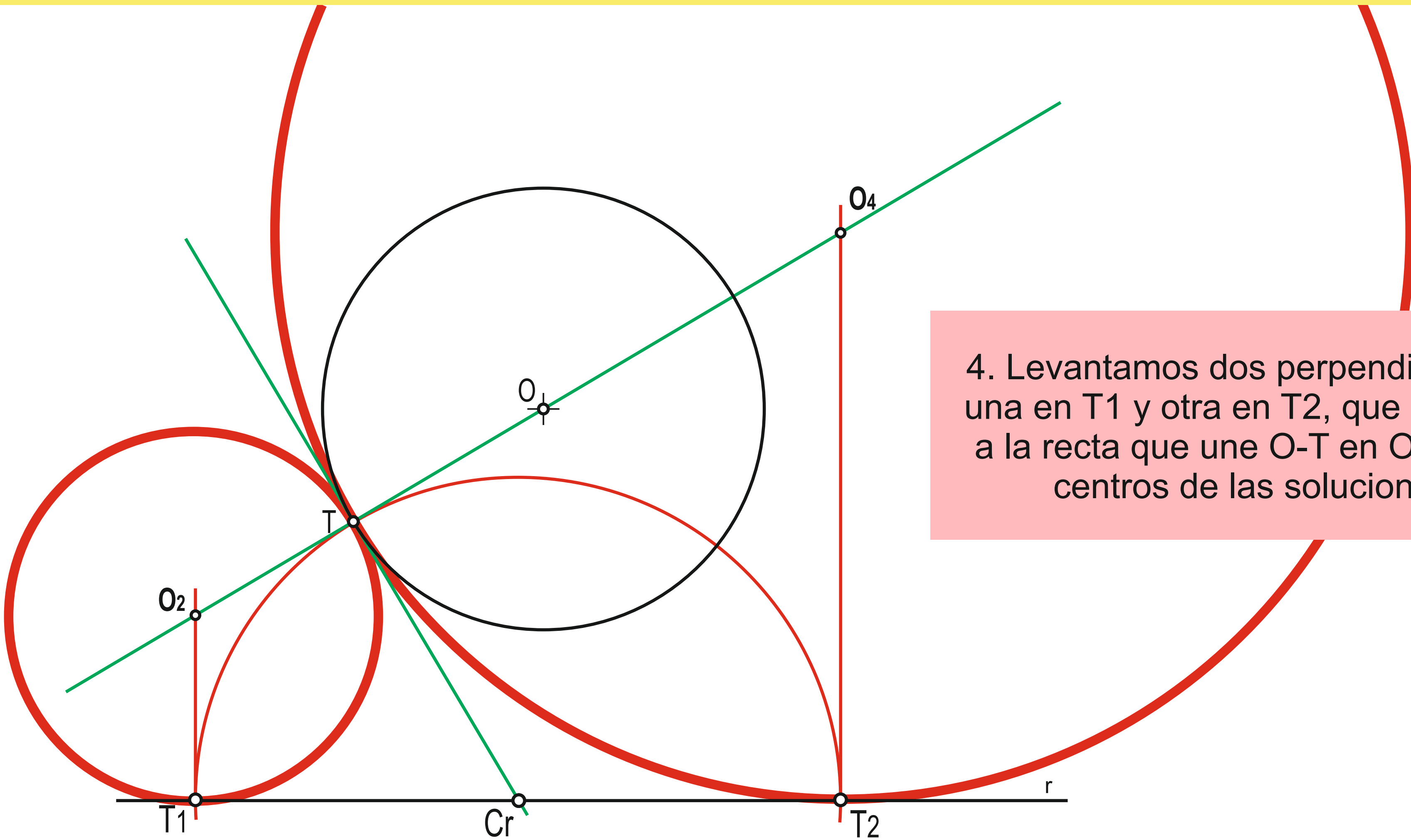


4. Levantamos dos perpendiculares, una en T1 y otra en T2, que cortarán a la recta que une O-T en O1 y O2, centros de las soluciones

PROBLEMAS DE APOLONIO

CPR

Circunferencias tangentes a una circunferencia y a una rdicha recta, ***conociendo el punto de tangencia en la circunferencia*** ***POR POTENCIA***



4. Levantamos dos perpendiculares, una en T1 y otra en T2, que cortarán a la recta que une O-T en O1 y O2, centros de las soluciones

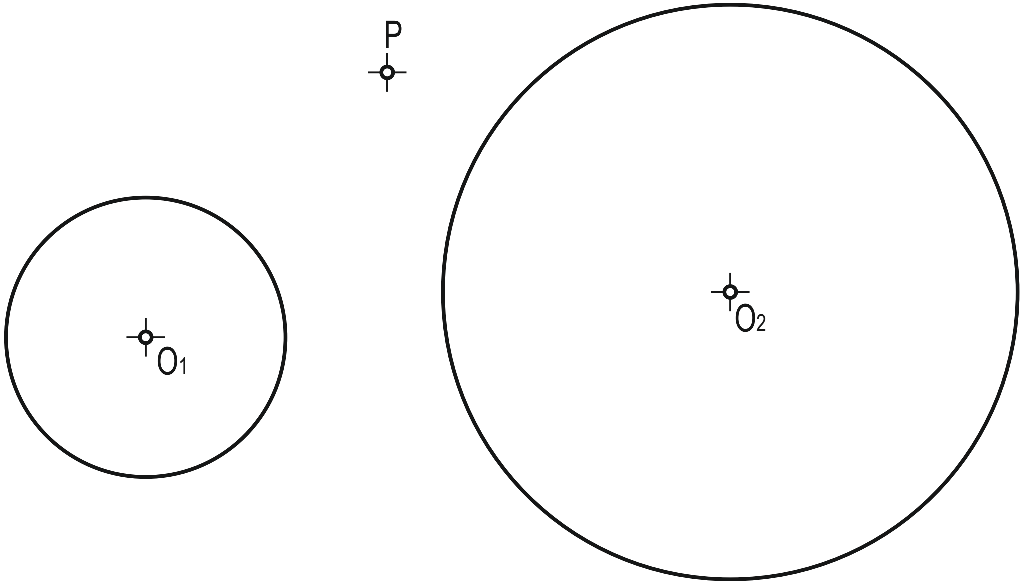
PROBLEMAS DE APOLONIO

CCP

Circunferencias tangentes a dos circunferencias y que pasan por un punto exterior a ellas

Este problemas se soluciona por ***INVERSIÓN.***

Las soluciones serán dos circunferencias tangentes, una exterior y otra interior



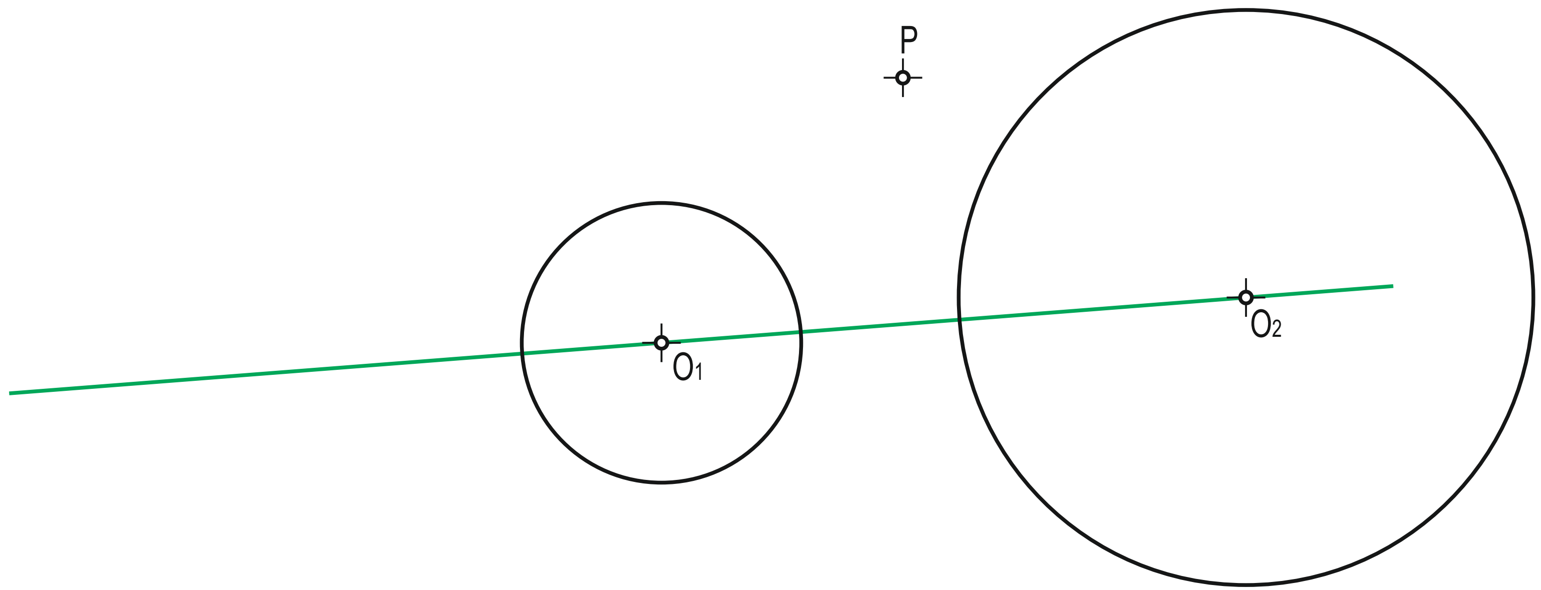
JUAN DÍAZ ALMAGRO

PROBLEMAS DE APOLONIO

CCP

Circunferencias tangentes a dos circunferencias y que pasan por un punto exterior a ellas

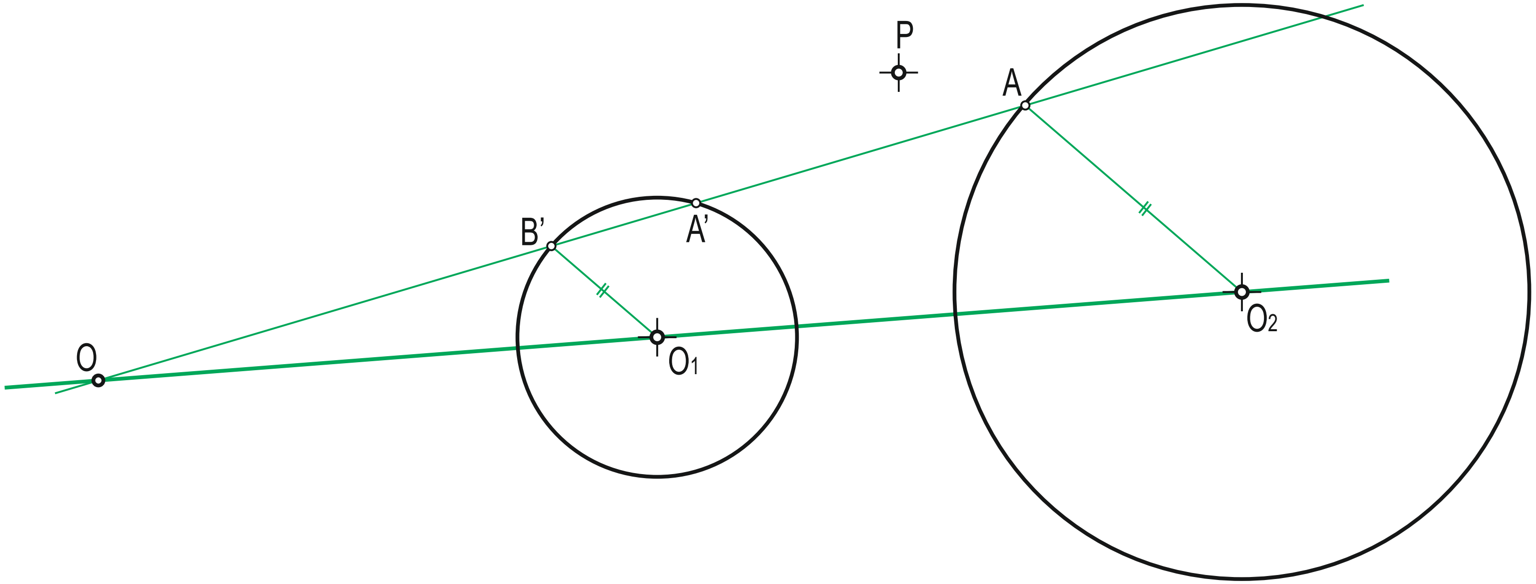
1. Unimos los centros de ambas circunferencias



PROBLEMAS DE APOLONIO

CCP

Circunferencias tangentes a dos circunferencias y que pasan por un punto exterior a ellas

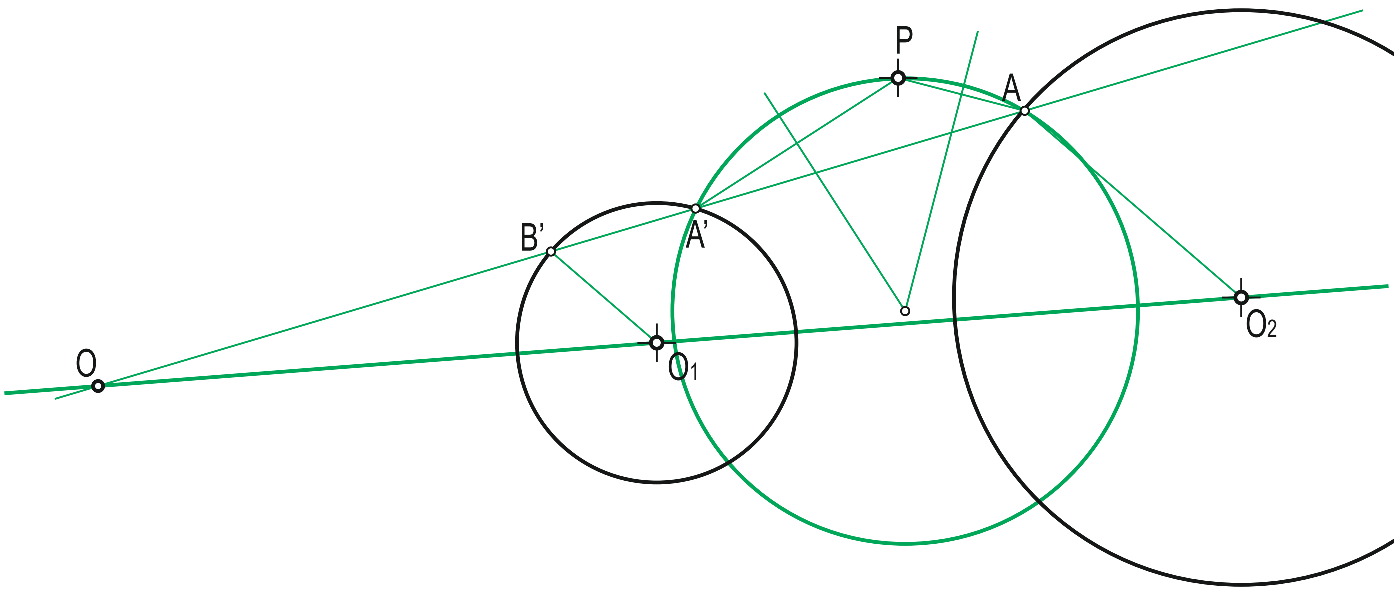


2. Buscamos en dicha recta el ***centro de inversión positiva O,que coincide con el centro de homotecia directa*** (que se obtiene trazando dos radios homotéticos que son paralelos y trazando la recta que une los puntos homotéticos de ambas circunferencias

PROBLEMAS DE APOLONIO

CCP

Circunferencias tangentes a dos circunferencias y que pasan por un punto exterior a ellas

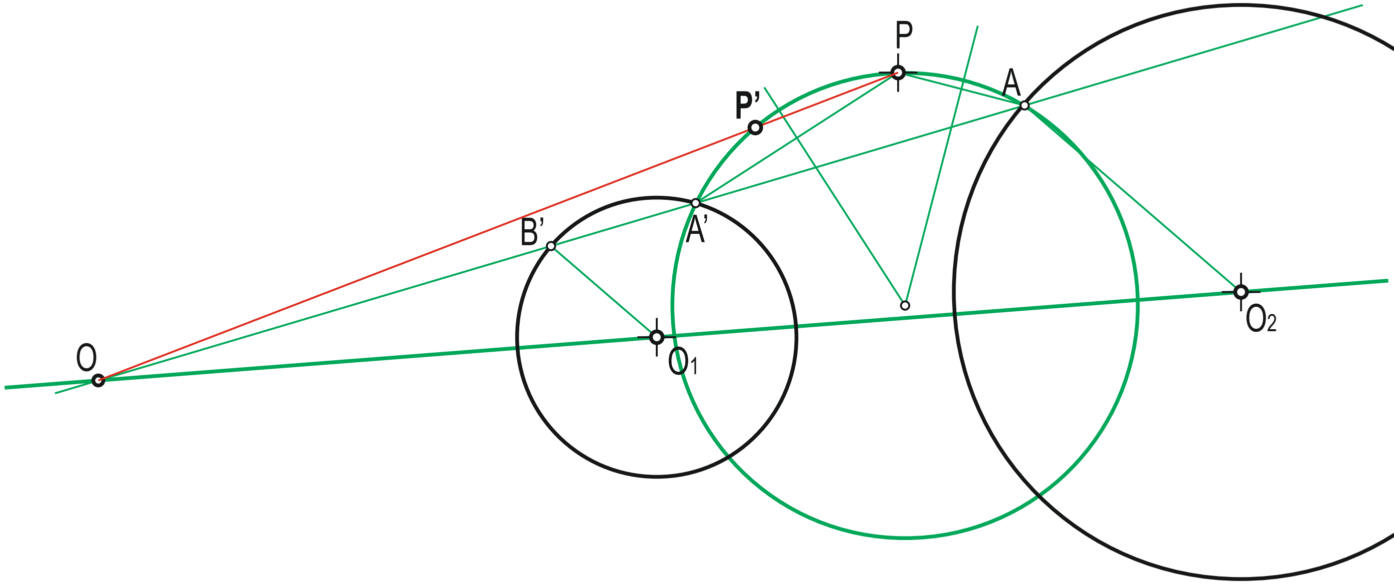


3. ***Hallamos el inverso de P.*** Para ello, trazamos una circunferencia auxiliar que pase por A,A',P (el centro lo calculamos con las mediatrices de A'A y AP)

PROBLEMAS DE APOLONIO

CCP

Circunferencias tangentes a dos circunferencias y que pasan por un punto exterior a ellas

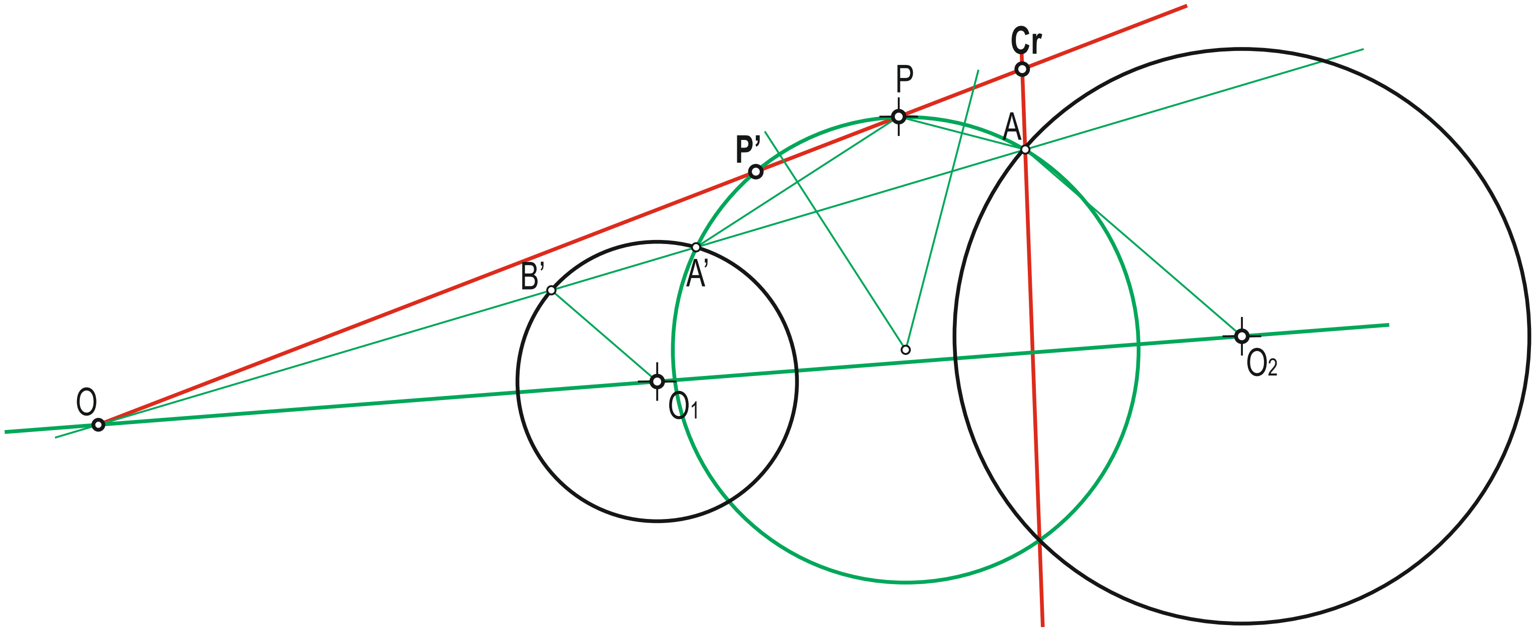


3. ***Hallamos el inverso de P.*** Una vez hemos trazado la circunferencia auxiliar, unimos P con el centro de inversión O y obtenemos P', inverso de P

PROBLEMAS DE APOLONIO

CCP

Circunferencias tangentes a dos circunferencias y que pasan por un punto exterior a ellas

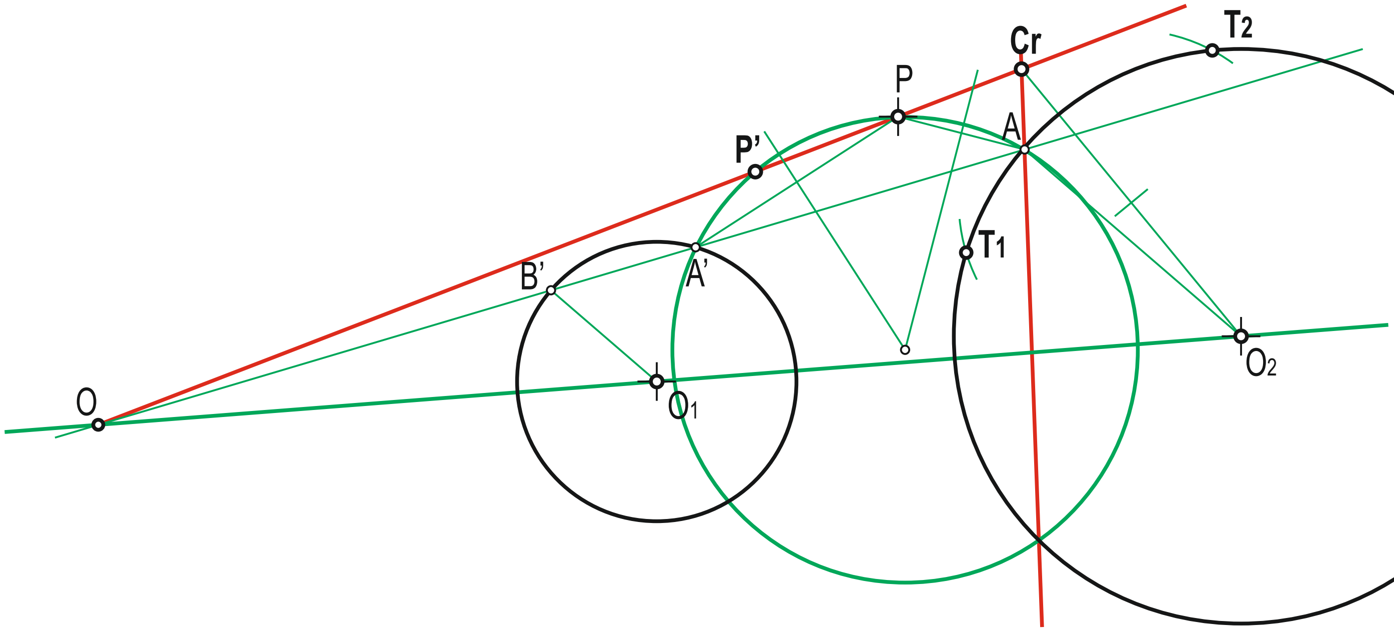


4. Ahora el problema se puede resolver como si fuera CPP'. OPP' será el eje radical de las soluciones. Trazando una circunferencia que pase por P y P' y sea secante a la circunferencia dada (por ejemplo, la que hemos trazado anterior-mente valdría) obtenemos otro eje radical auxiliar que en su intersección con el eje radical anterior nos da el centro radical de las soluciones.

PROBLEMAS DE APOLONIO

CCP

Circunferencias tangentes a dos circunferencias y que pasan por un punto exterior a ellas

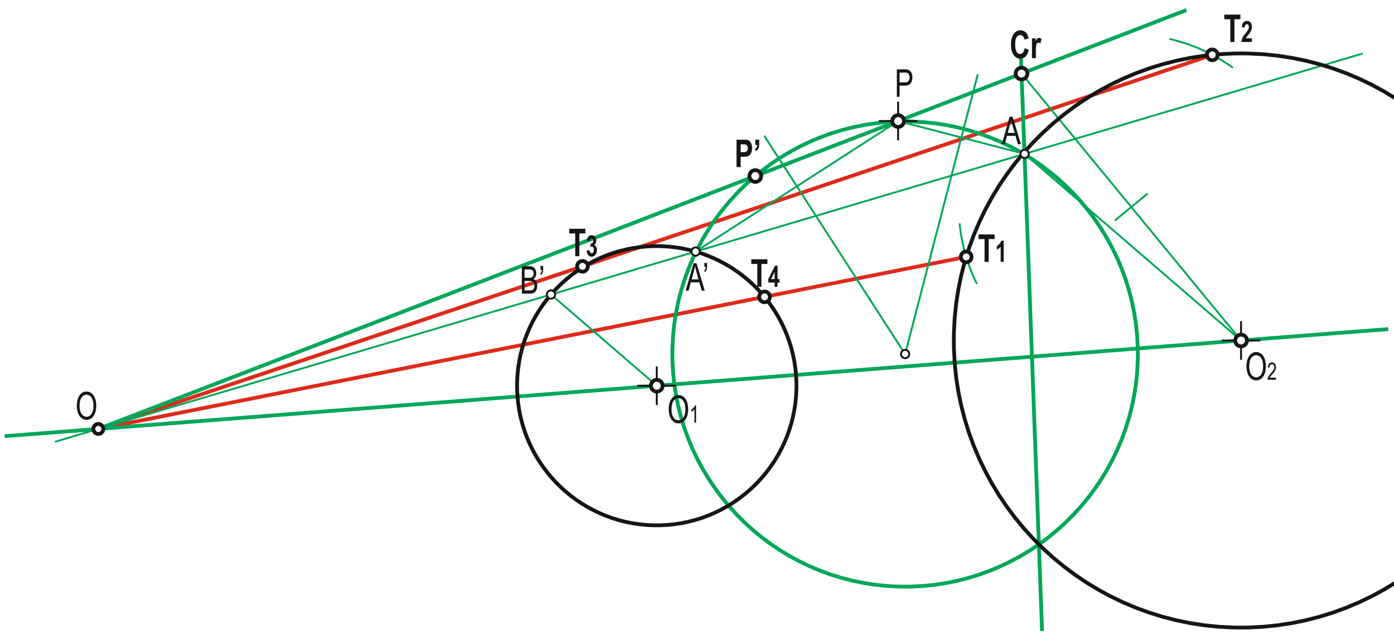


5. A partir de Cr hallamos los puntos de tangencia T_1 y T_2de las rectas tangentes a una de las dos circunferencias dadas. T1 y T2 serán puntos de tangencia de las soluciones que buscamos

PROBLEMAS DE APOLONIO

CCP

Circunferencias tangentes a dos circunferencias y que pasan por un punto exterior a ellas



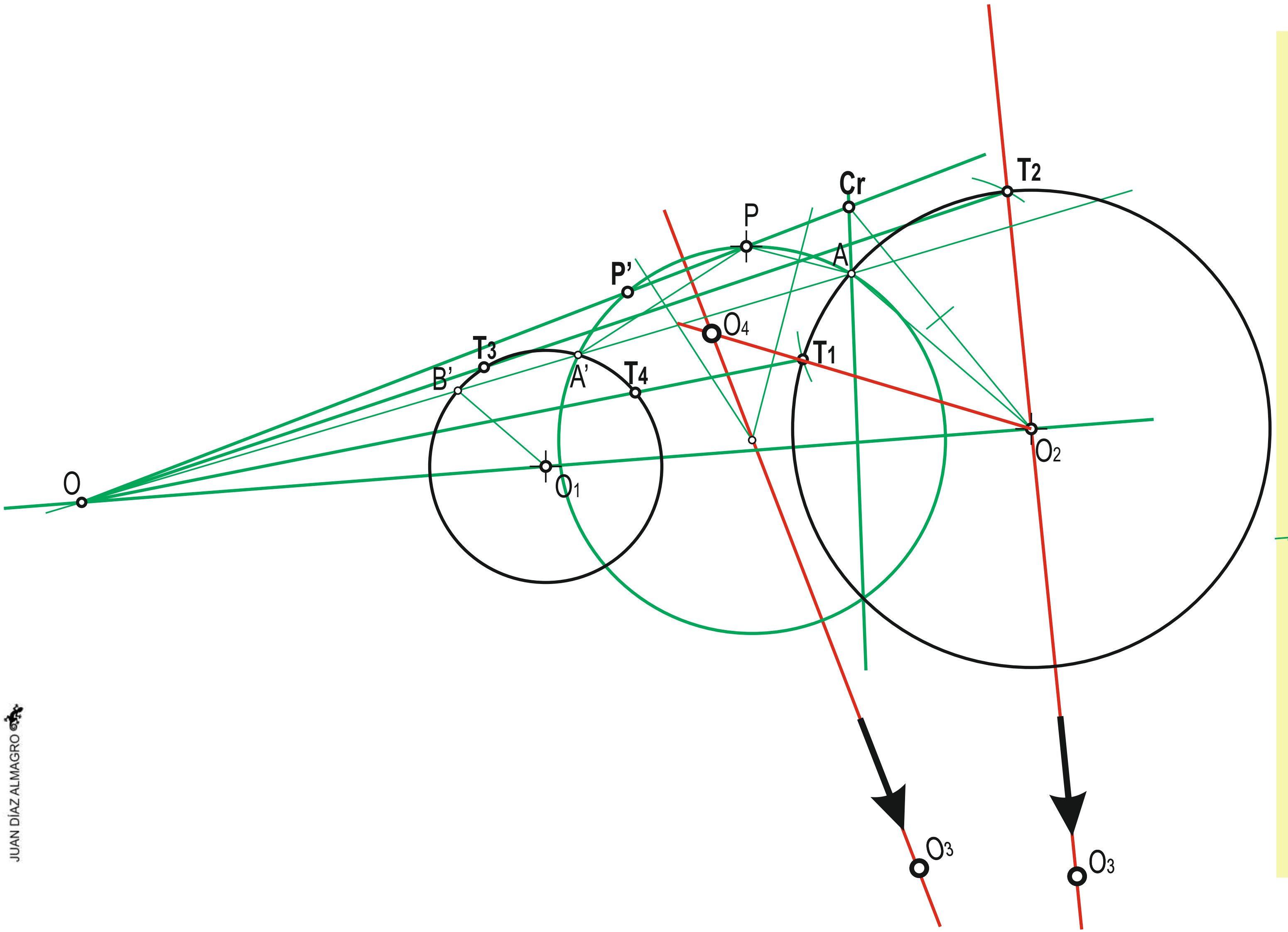
6. Ahora volvemos al problema inicial para obtener, por inversión, los restantes puntos de tangencia (con la otra circunferencia).
Primero alineamos T_1 y T_2 con el centro de inversión O, y obtenemos los puntos de tangencia T_3 y T_4 al cortar a la otra circunferencia

JUAN DÍAZ ALMAGRO

PROBLEMAS DE APOLONIO

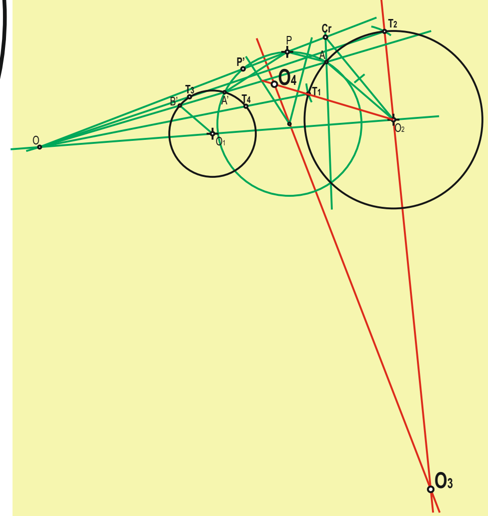
CCP

Circunferencias tangentes a dos circunferencias y que pasan por un punto exterior a ellas



7. Alineando T1 y T2 con O2 (o T3 y T4 con O1) obtene mos los centros que buscamos O_3 y O_4 en la intersección que ambas rectas hacen con la mediatriz de P y P' .

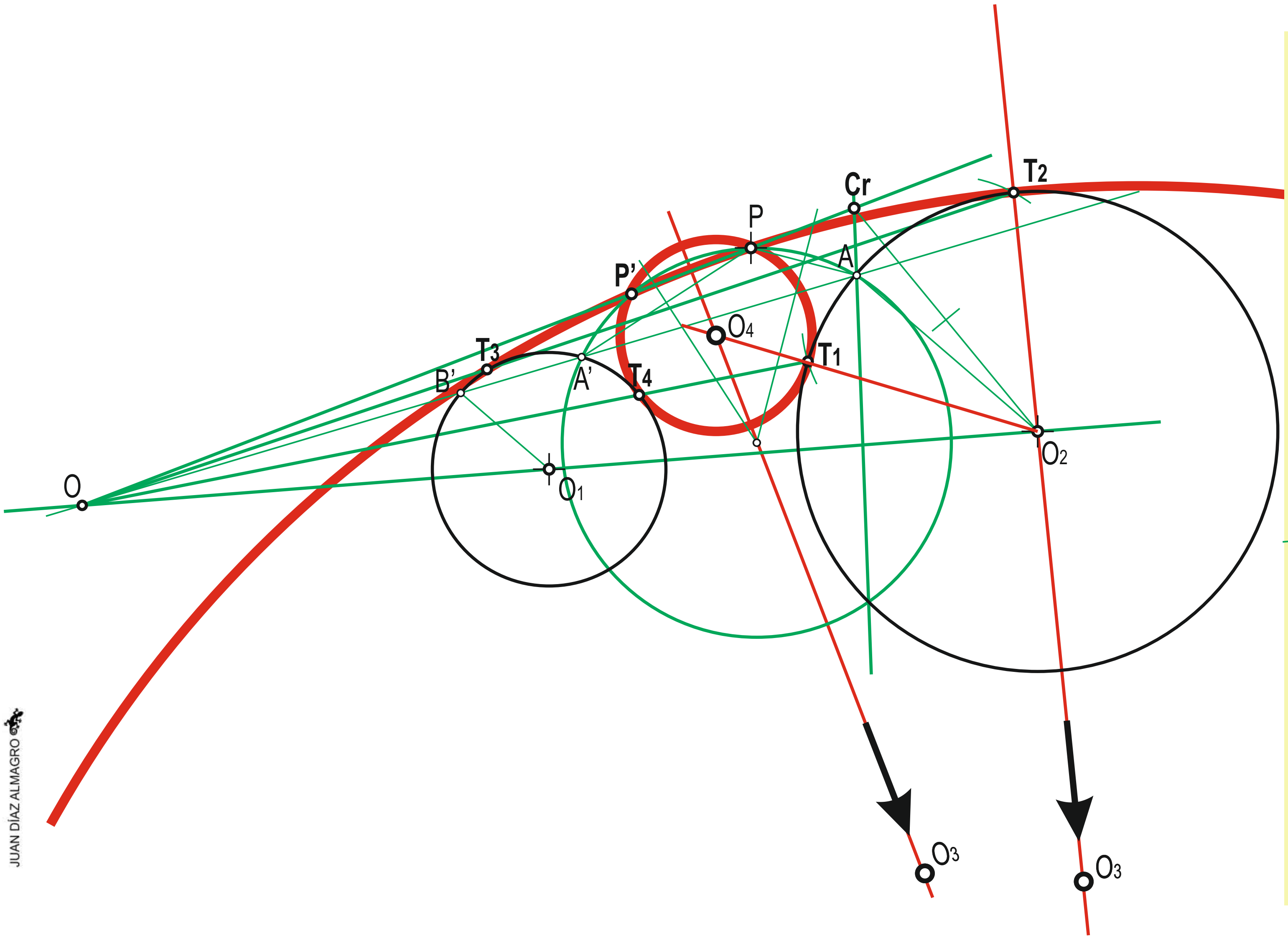
En este caso el centro O3 se saldría del formato utilizado. Quedaría así:



PROBLEMAS DE APOLONIO

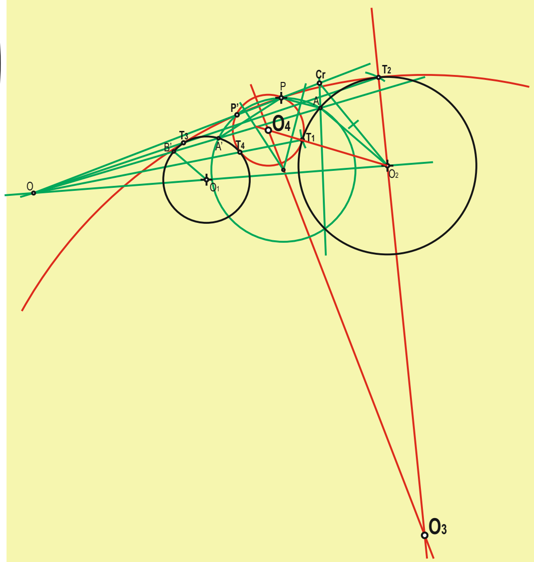
CCP

Circunferencias tangentes a dos circunferencias y que pasan por un punto exterior a ellas



8. Teniendo los centros, trazamos las circunferencias tangentes.

En este caso el centro O3 se saldría del formato utilizado. Quedaría así:



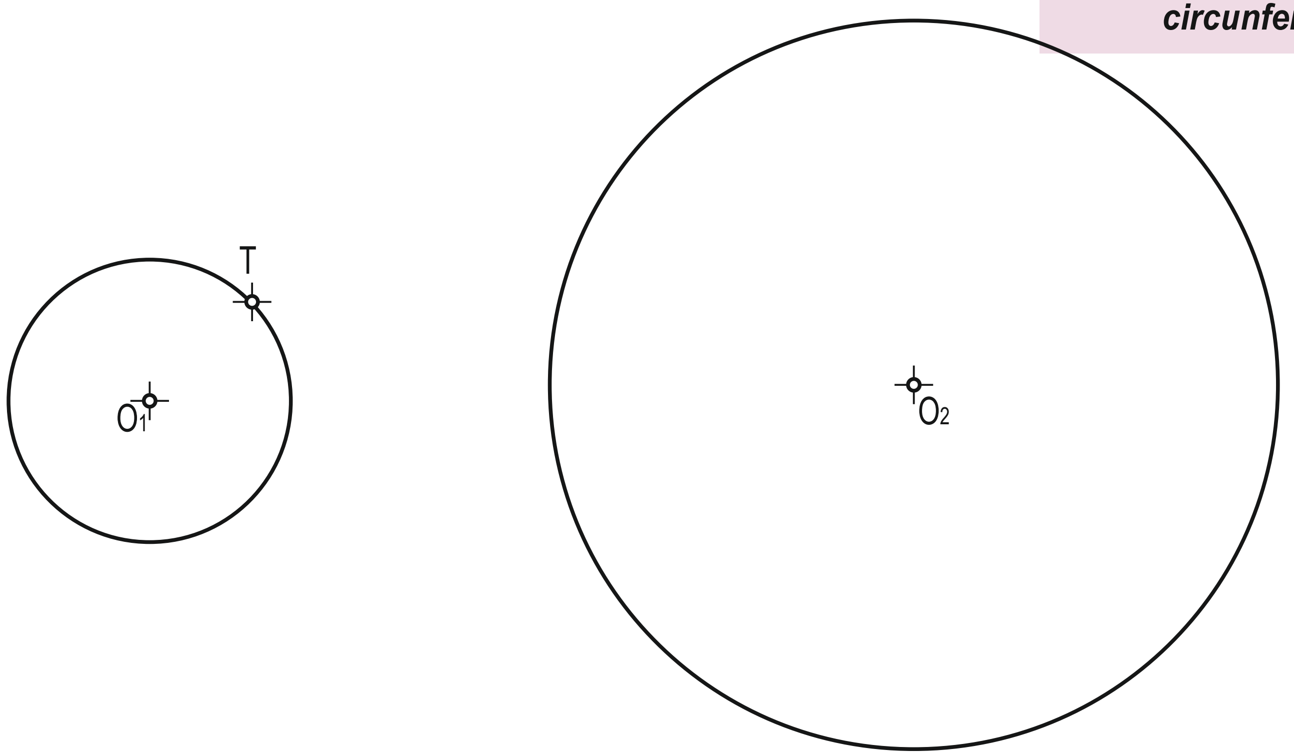
PROBLEMAS DE APOLONIO

CCP

Circunferencias tangentes a dos circunferencias conocido el punto de tangencia en una de ellas

POR INVERSIÓN

Aplicaremos INVERSIÓN POSITIVA para la circunferencia externa e INVERSIÓN NEGATIVA para la circunferencia iunterna



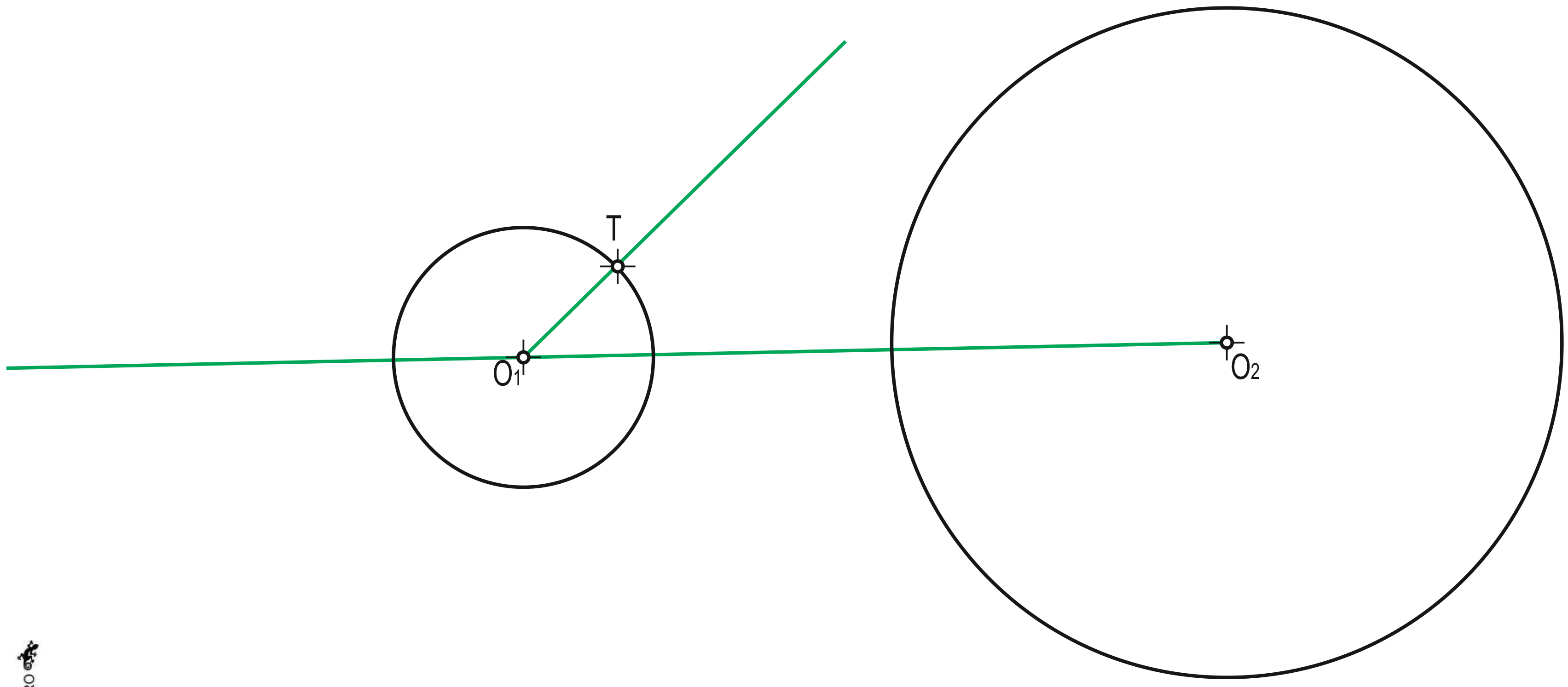
PROBLEMAS DE APOLONIO

CCP

Circunferencias tangentes a dos circunferencias conocido el punto de tangencia en una de ellas

POR INVERSIÓN

1. En primer lugar, trazamos las rectas que unen O1T y O1O2



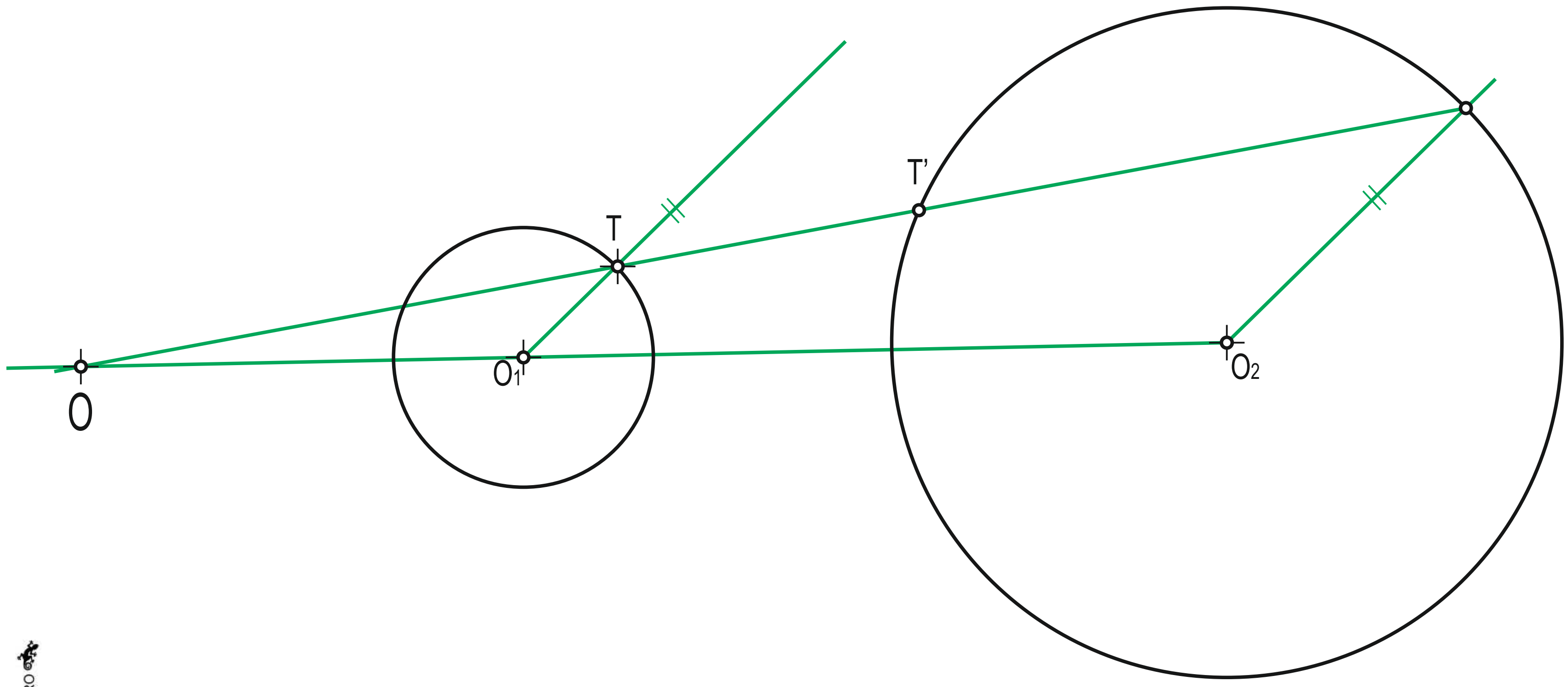
PROBLEMAS DE APOLONIO

CCP

Circunferencias tangentes a dos circunferencias conocido el punto de tangencia en una de ellas

POR INVERSIÓN

2. Hallamos T' mediante una inversión positiva de centro O (centro de homotecia directa)



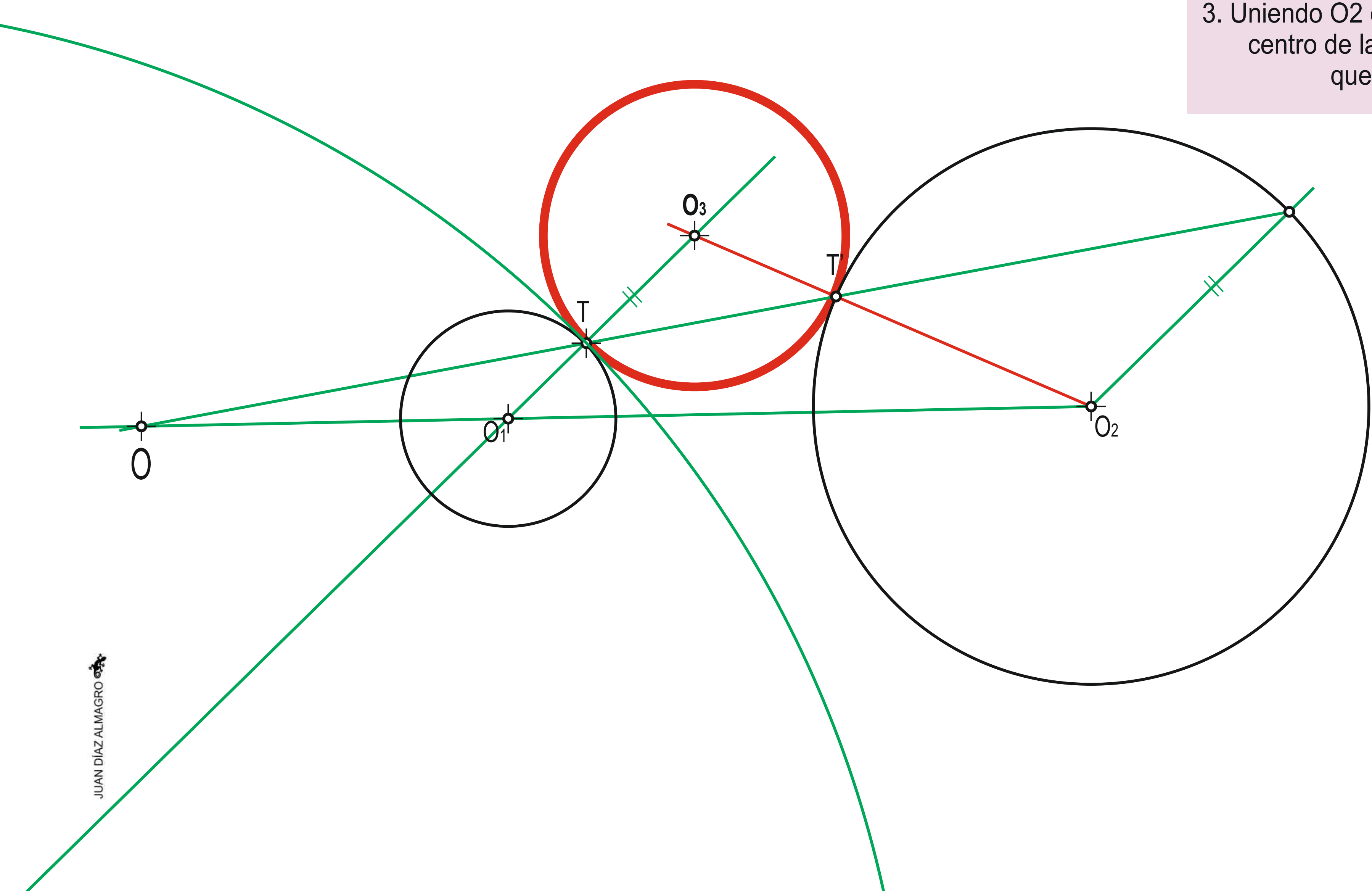
PROBLEMAS DE APOLONIO

CCP

Circunferencia tangente a dos circunferencias conocido el punto de tangencia en una de ellas

POR INVERSIÓN

3. Uniendo O2 con T’ obtenemos O3, centro de la primera solución que buscamos

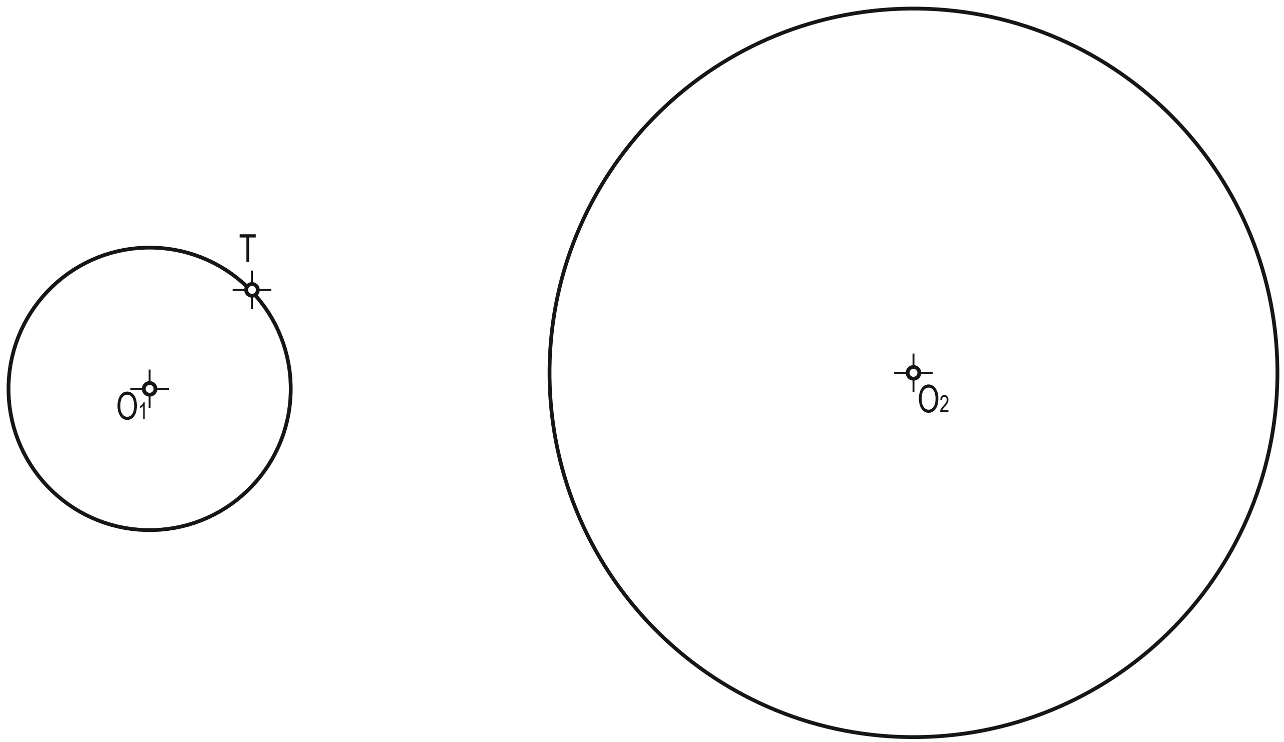


PROBLEMAS DE APOLONIO

CCP

Circunferencias tangentes a dos circunferencias conocido el punto de tangencia en una de ellas

POR POTENCIA



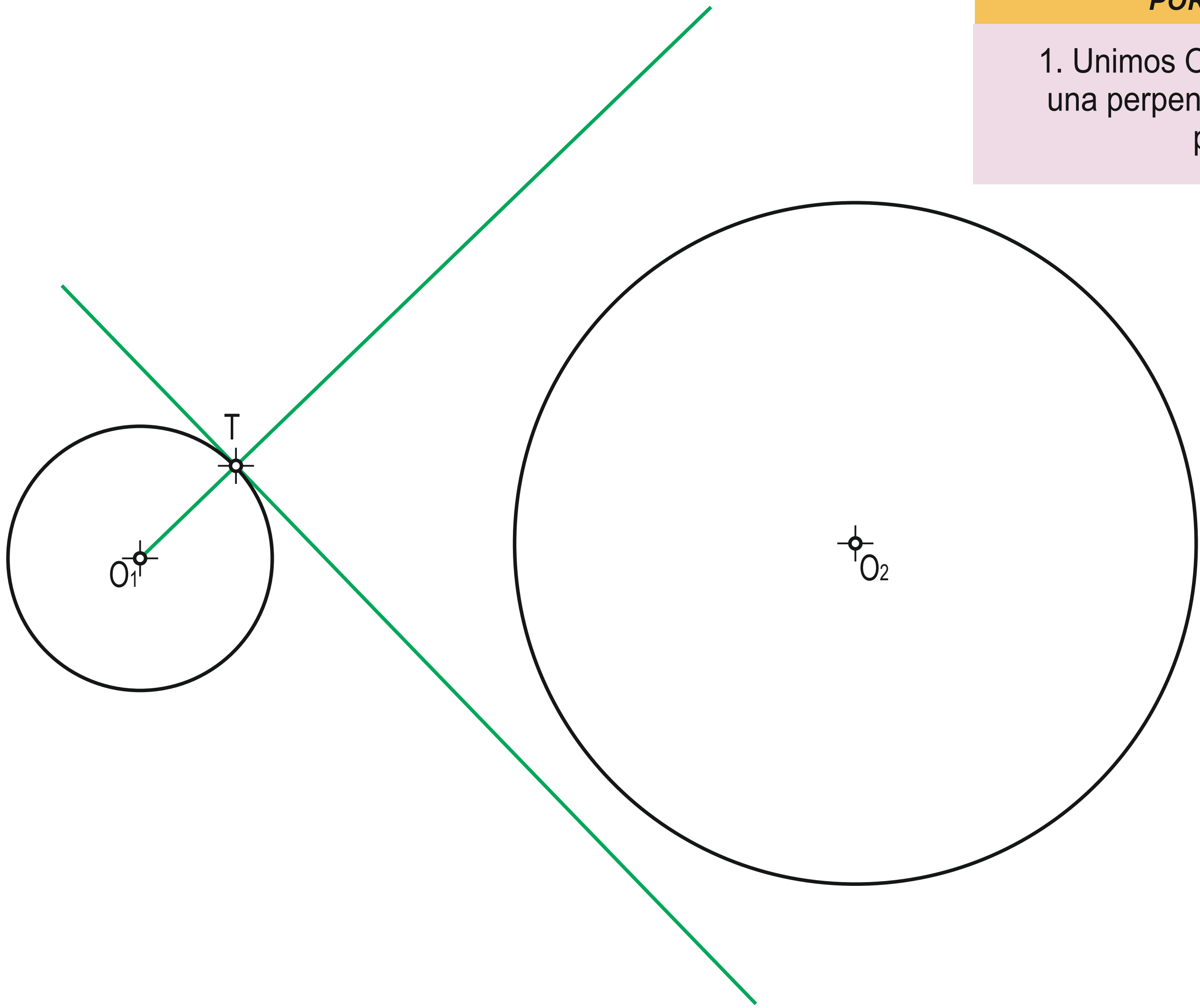
PROBLEMAS DE APOLONIO

CCP

Circunferencias tangentes a dos circunferencias conocido el punto de tangencia en una de ellas

POR POTENCIA

1. Unimos O con T y trazamos una perpendicular a O1 en el punto T



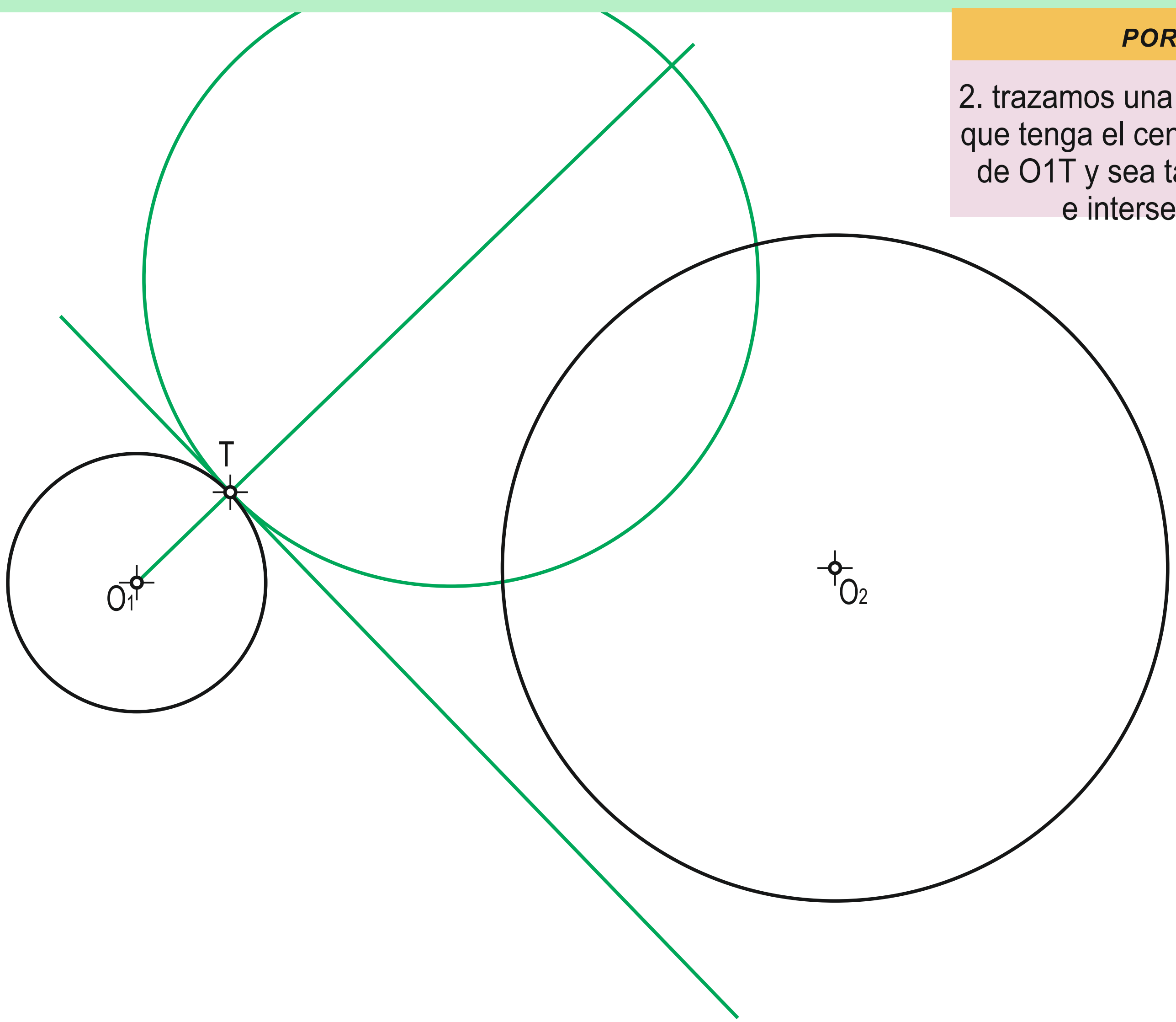
PROBLEMAS DE APOLONIO

CCP

Circunferencias tangentes a dos circunferencias conocido el punto de tangencia en una de ellas

POR POTENCIA

2. trazamos una circunferencia auxiliar que tenga el centro en la prolongación de O1T y sea tangente a O O1 en T e interseccione con O2



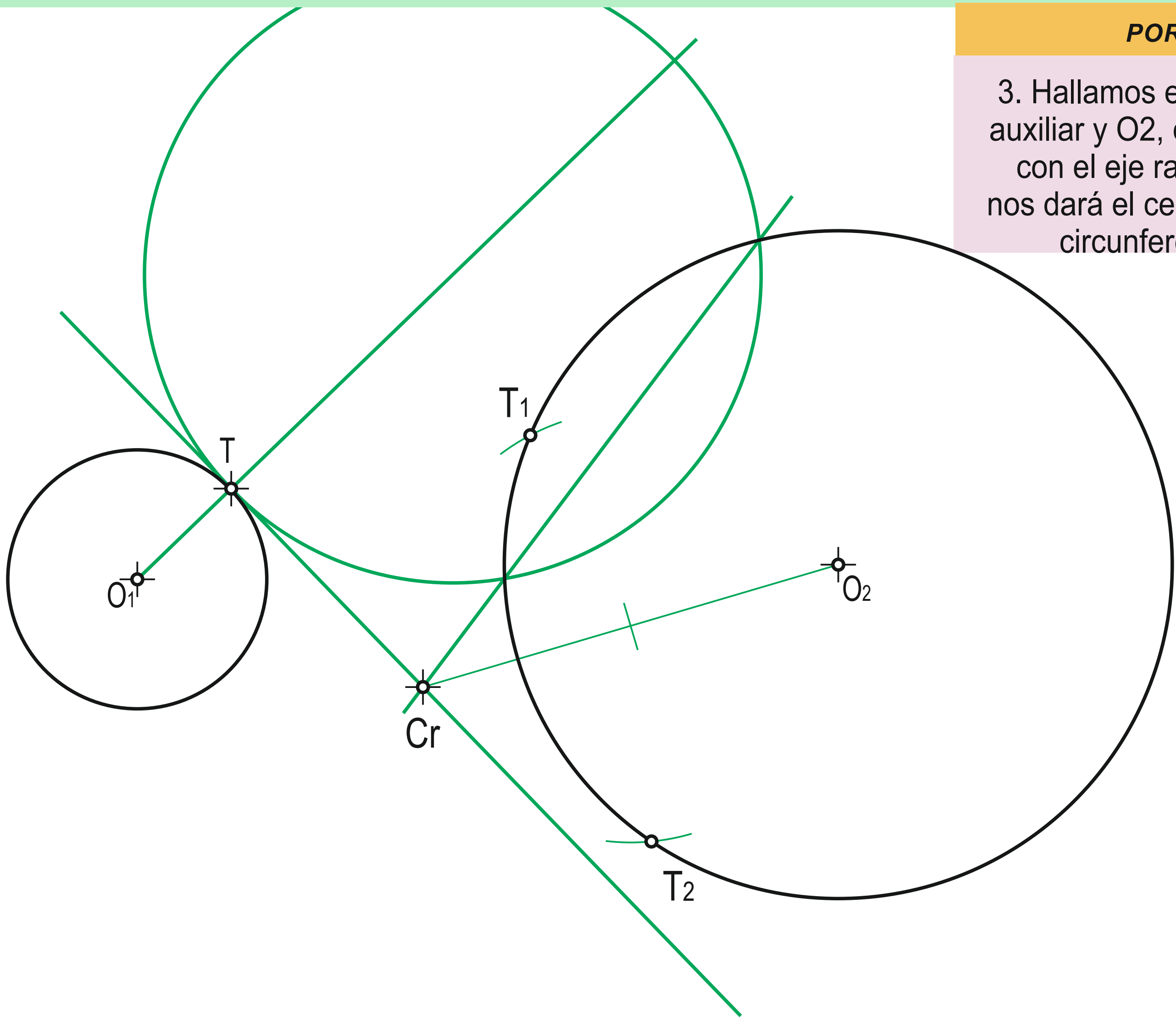
PROBLEMAS DE APOLONIO

CCP

Circunferencias tangentes a dos circunferencias conocido el punto de tangencia en una de ellas

POR POTENCIA

3. Hallamos el eje radical entre la auxiliar y O2, que al interseccionar con el eje radical trazado en T, nos dará el centro radical Cr de las circunferencias solución



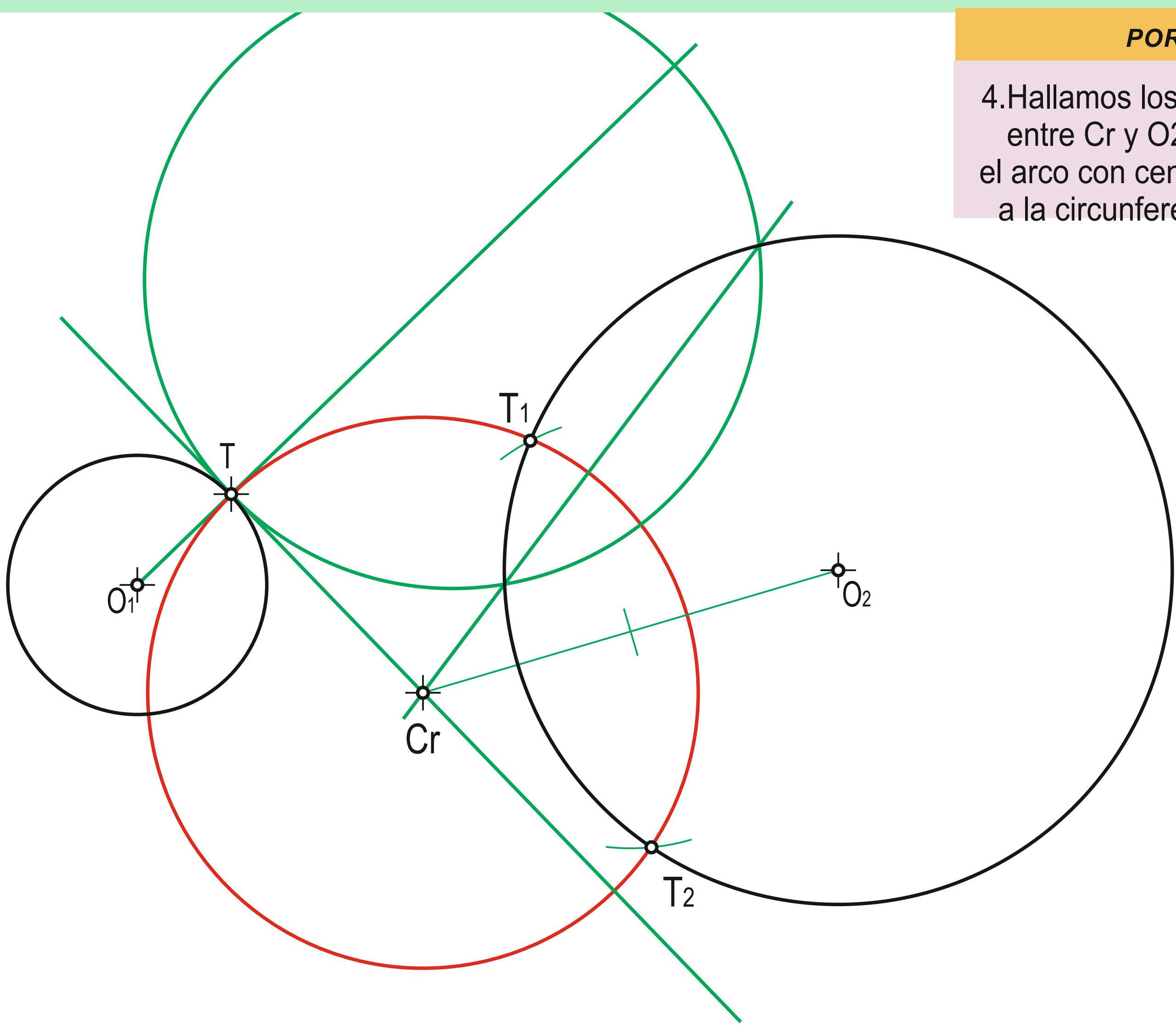
PROBLEMAS DE APOLONIO

CCP

Circunferencias tangentes a dos circunferencias conocido el punto de tangencia en una de ellas

POR POTENCIA

4.Hallamos los puntos de tangencia entre Cr y O2, y luego trazamos el arco con centro en Cr que cortará a la circunferencia O2 en T1 y T2



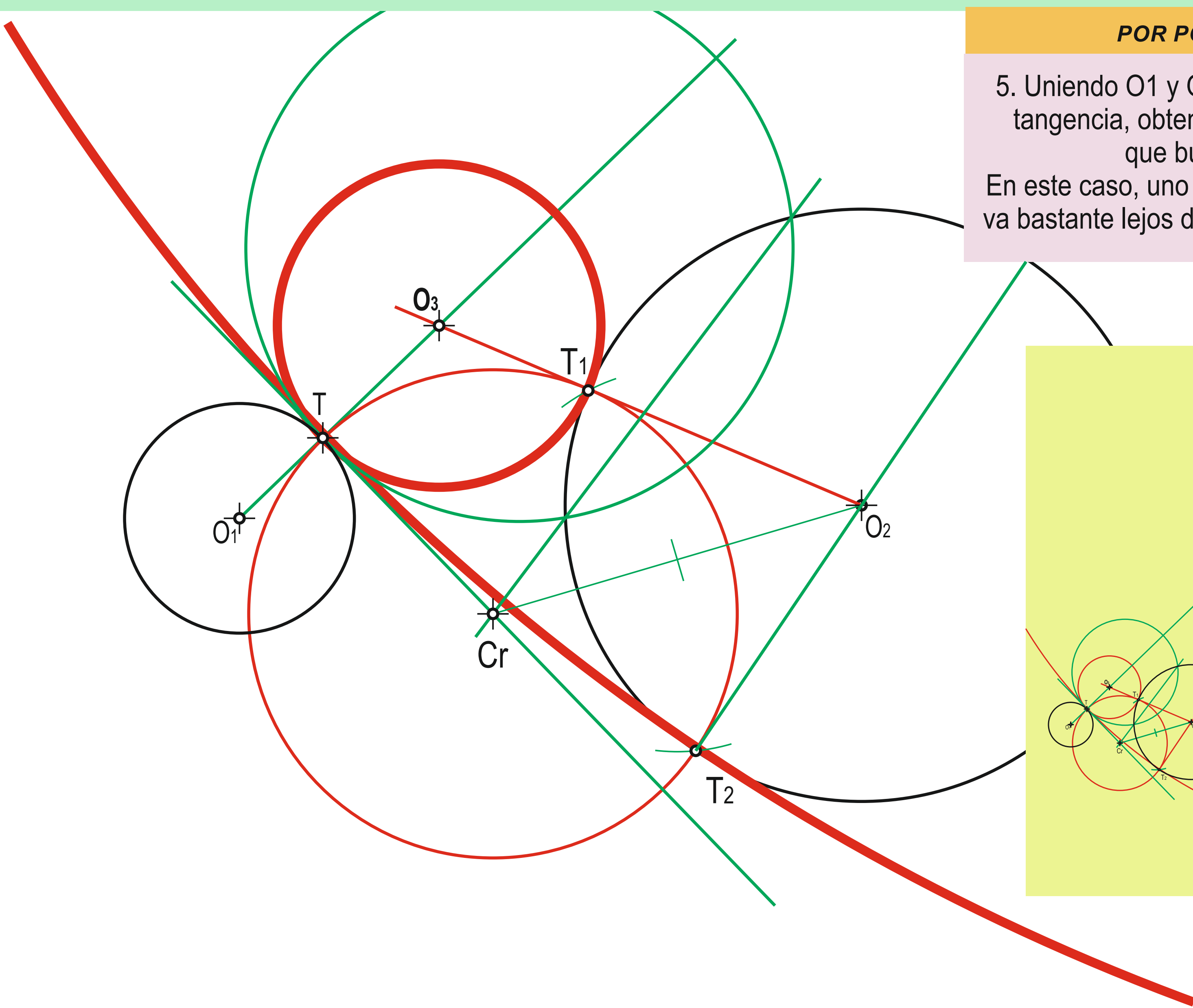
PROBLEMAS DE APOLONIO

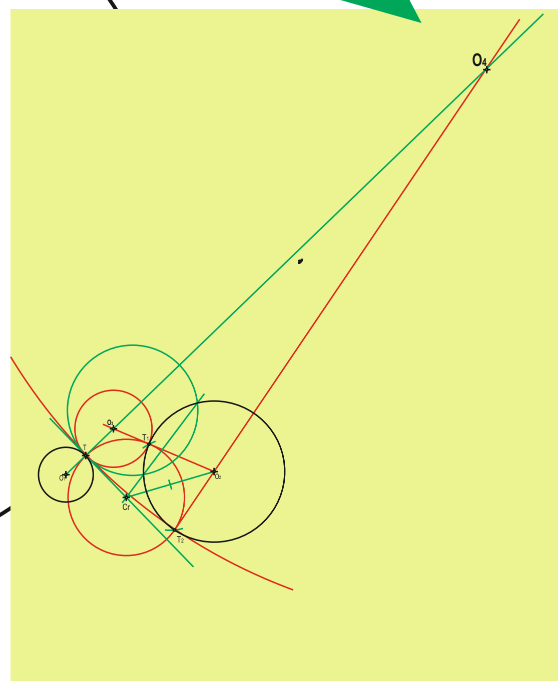
CCP

Circunferencias tangentes a dos circunferencias conocido el punto de tangencia en una de ellas

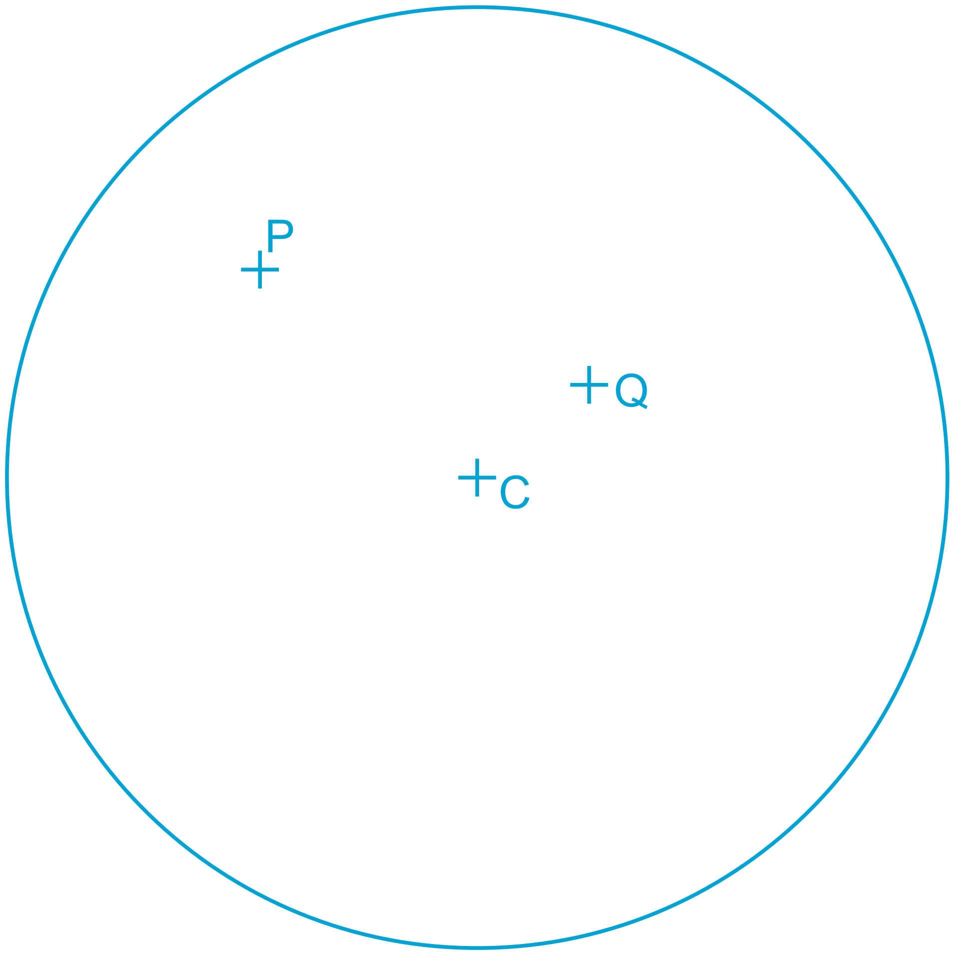
POR POTENCIA

5. Uniendo O1 y O2 con los puntos de tangencia, obtendremos los centros que buscamos.
En este caso, uno de los centros se nos va bastante lejos de los límites del papel



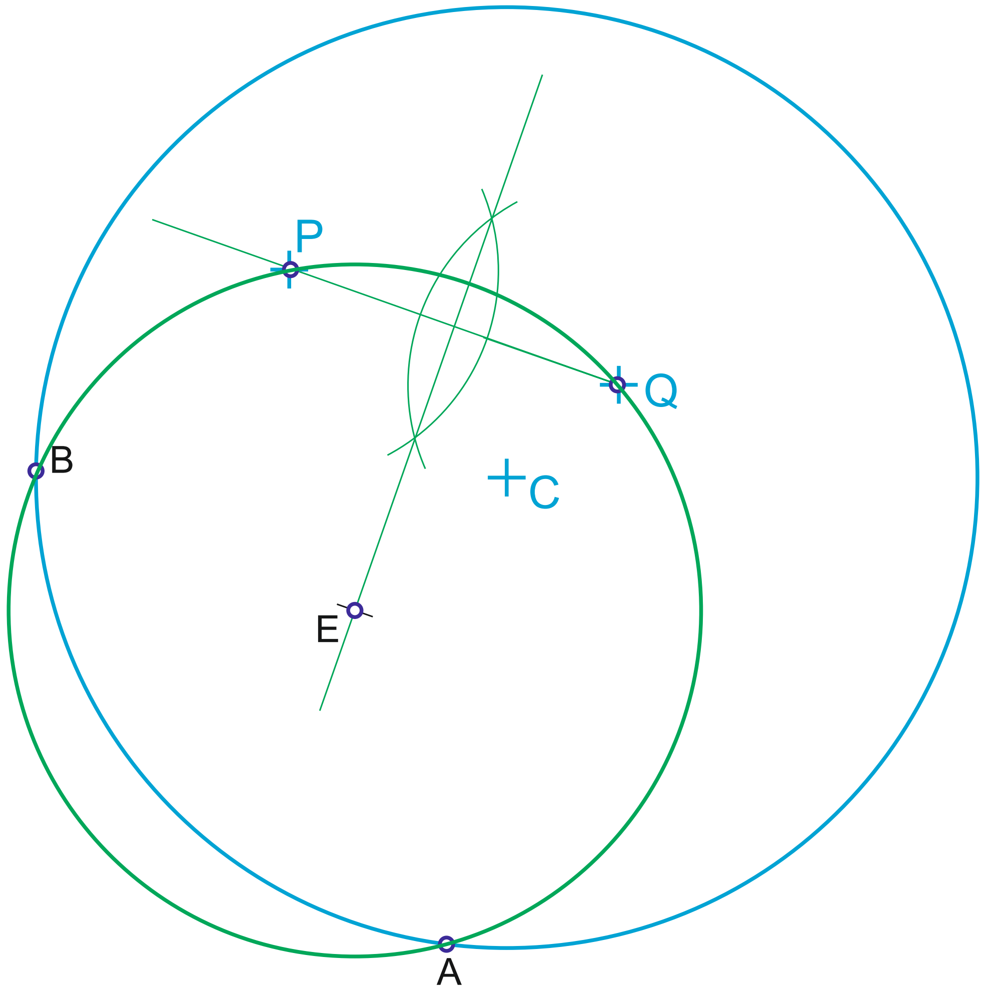


Trazar las circunferencias tangentes a la de ***centro C*** *que pasen por* ***P y Q***



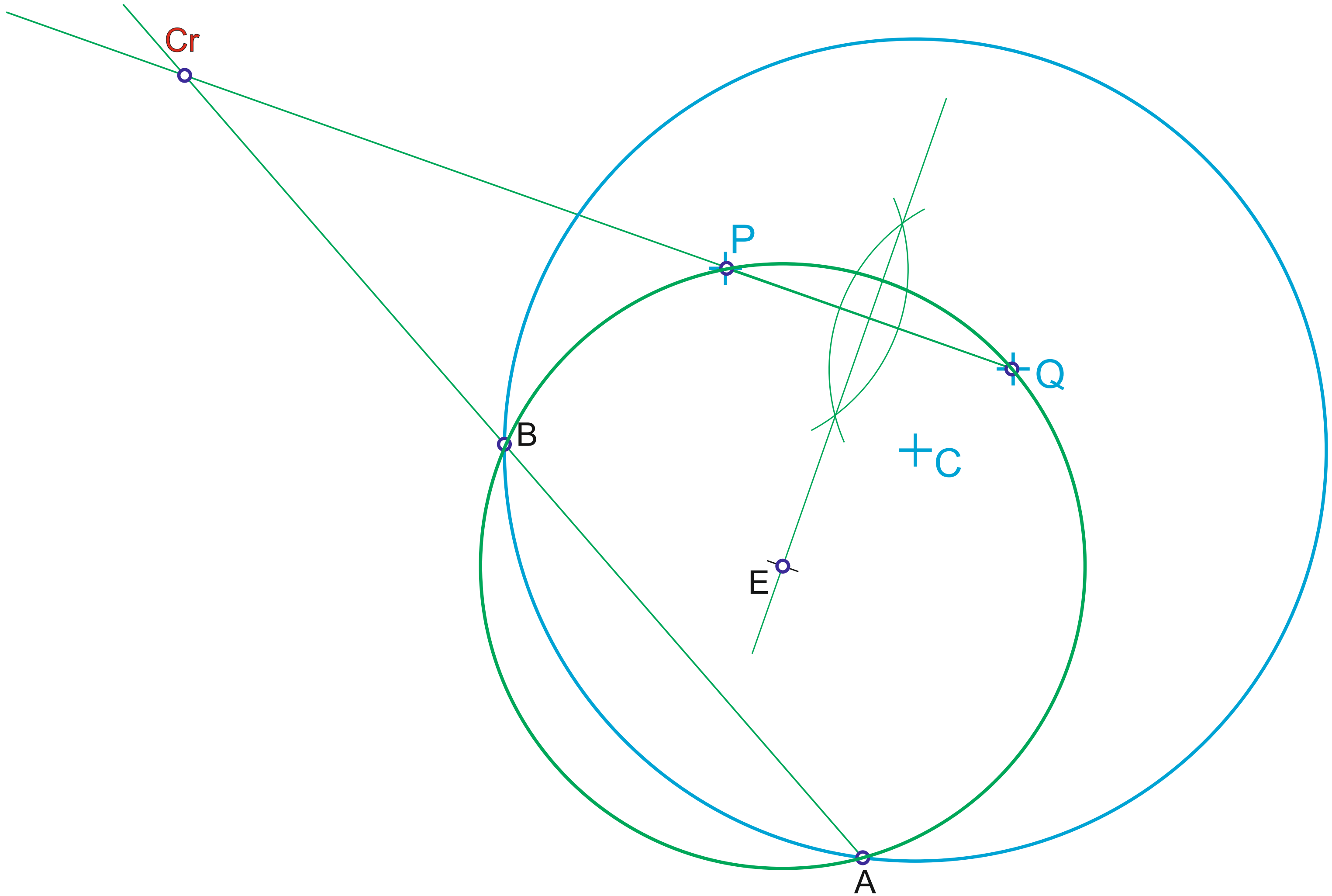
JUAN DÍAZ ALMAGRO

Trazar las circunferencias tangentes a la de ***centro C*** *que pasen por* ***P y Q***



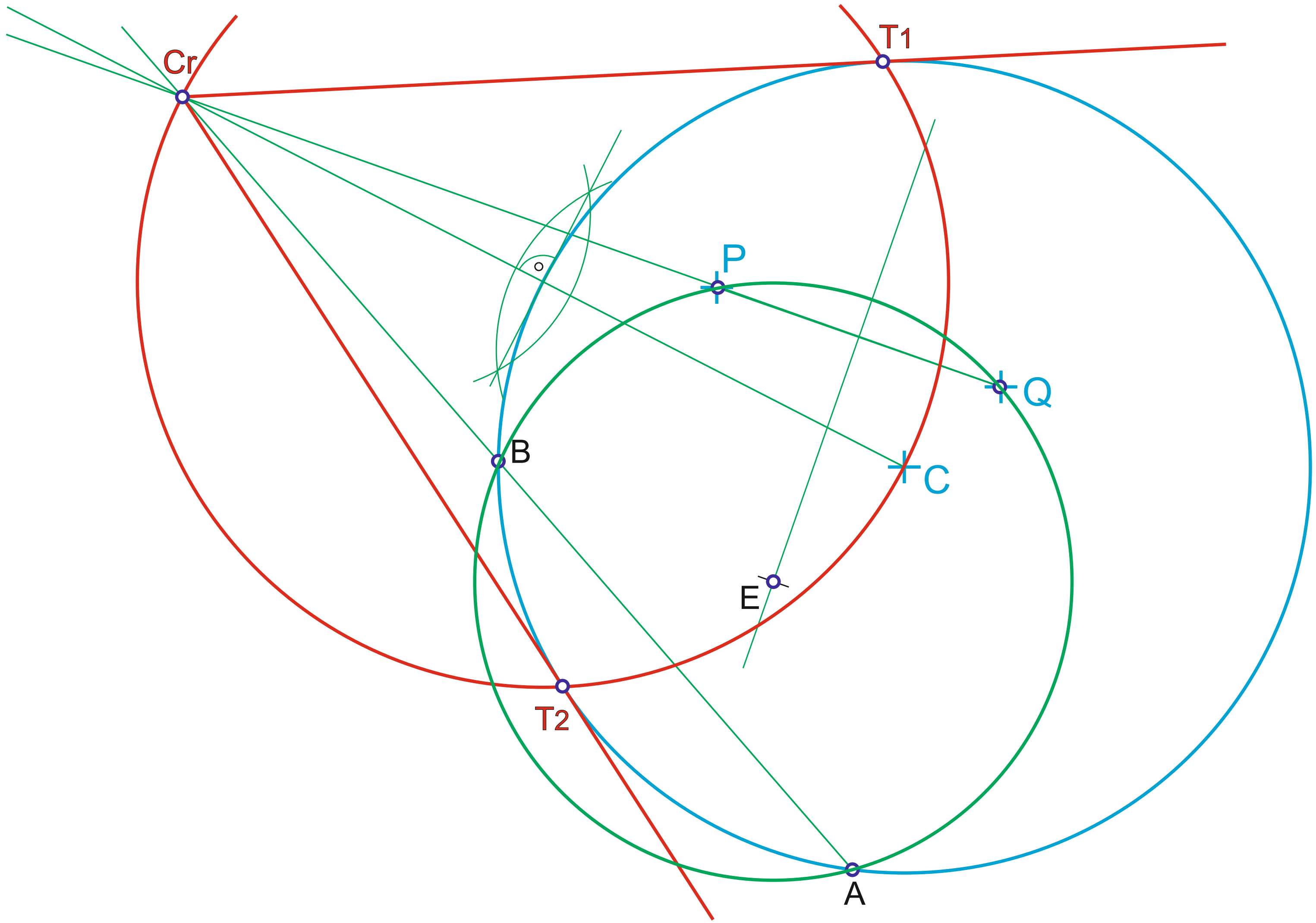
1. Dibujamos una circunferencia de centro **E**, secante a la circunferencia C
y que pase por P y Q. Dicha circunferencia corta a la dada en los puntos A y B

Trazar las circunferencias tangentes a la de ***centro C*** *que pasen por* ***P y Q***



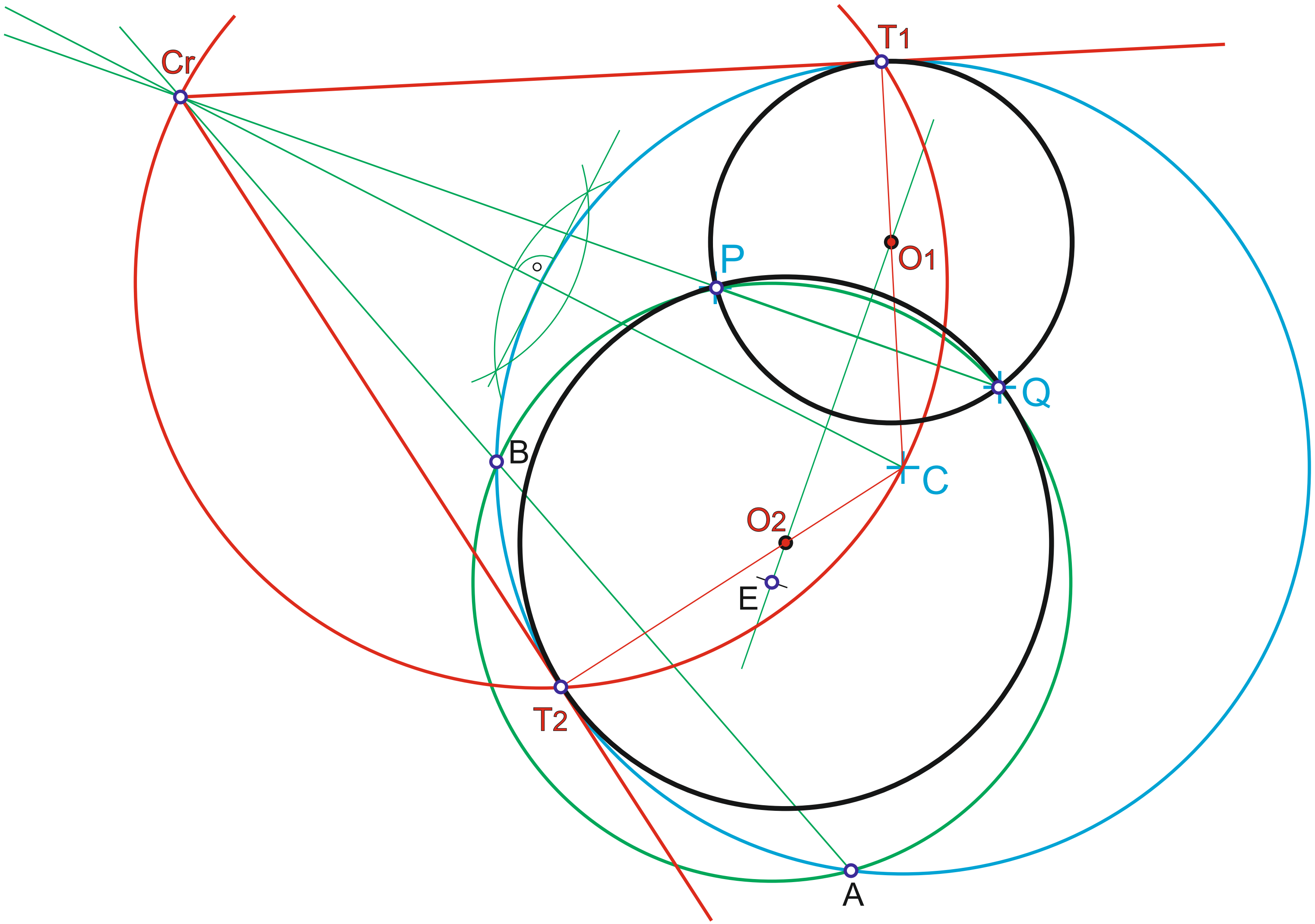
2. Calculamos Cr, centro radical de todas las circunferencias que pasan por P y por Q, entre las que estarán las soluciones, y la dada de centro C

*Trazar las circunferencias tangentes a la de **centro C** que pasen por **P y Q***



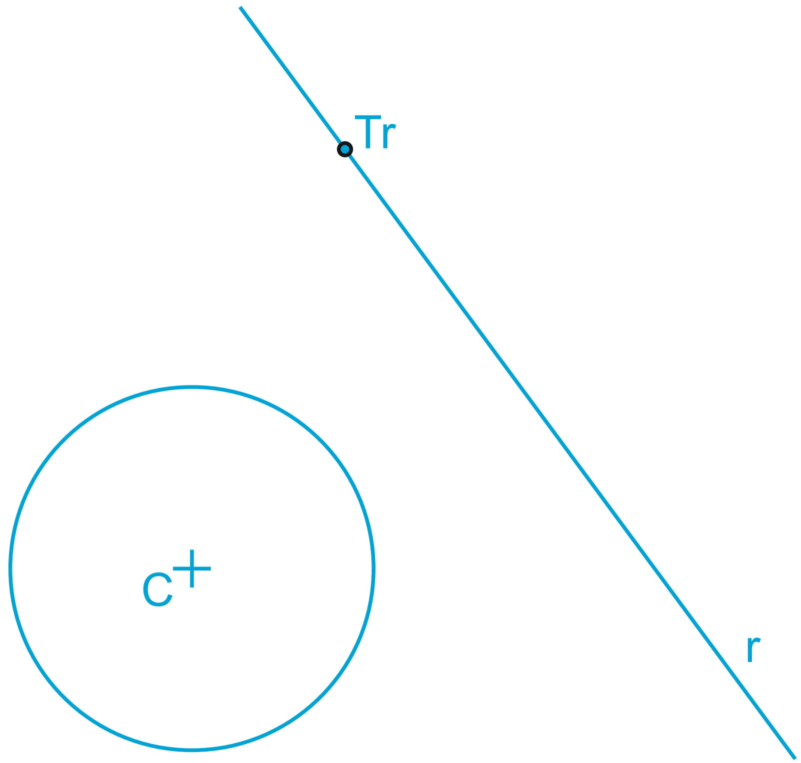
3. Desde Cr se trazan las rectas tangentes a la circunferencia de centro C, y los puntos de tangencia T1 y T2 son, también, los puntos de tangencia de las circunferencias solución con la dada

Trazar las circunferencias tangentes a la de ***centro C*** *que pasen por* ***P y Q***

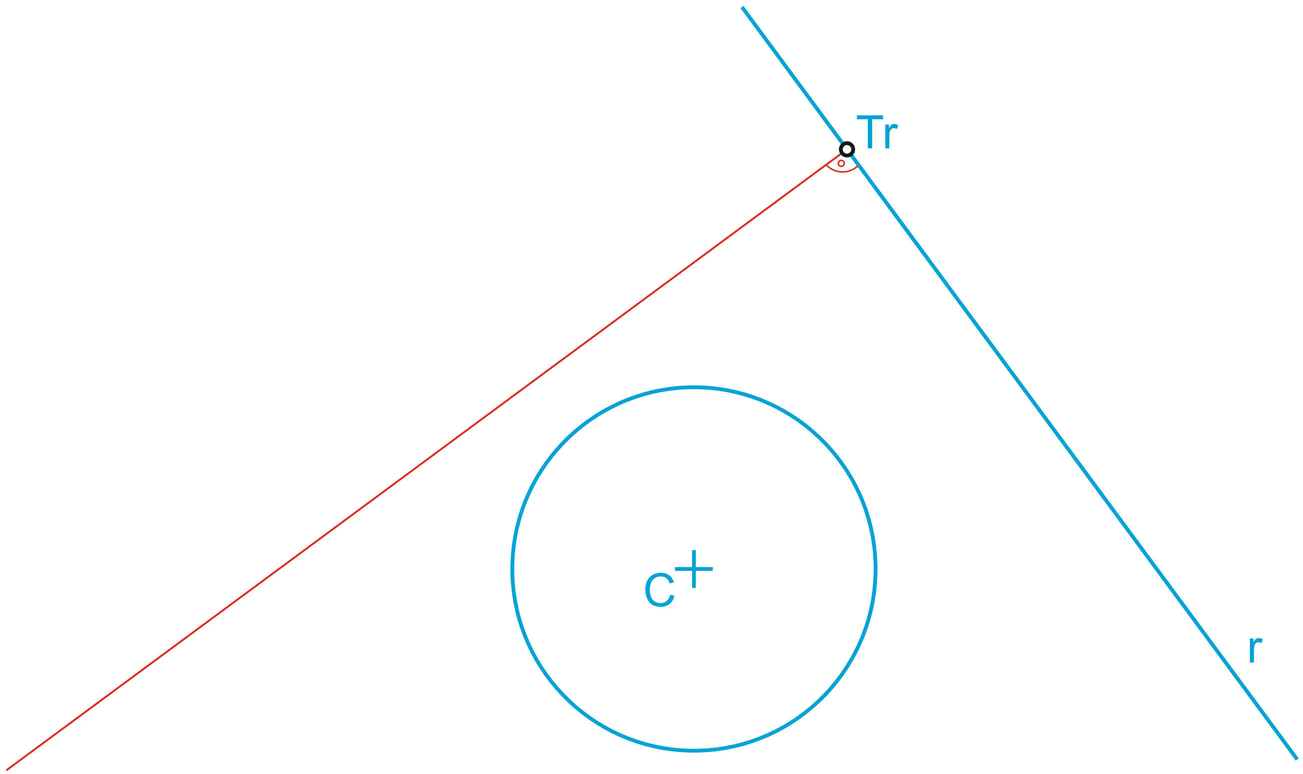


4. Los centros de las soluciones **O_1 y O_2** se encuentran donde las rectas **T_1C y T_2C** cortan a la **mediatriz del segmento PQ**

*Aplicando potencia, trazar las circunferencias tangentes a la de **centro C y a la recta r,***
*siendo **Tr** el punto de tangencia de esta*

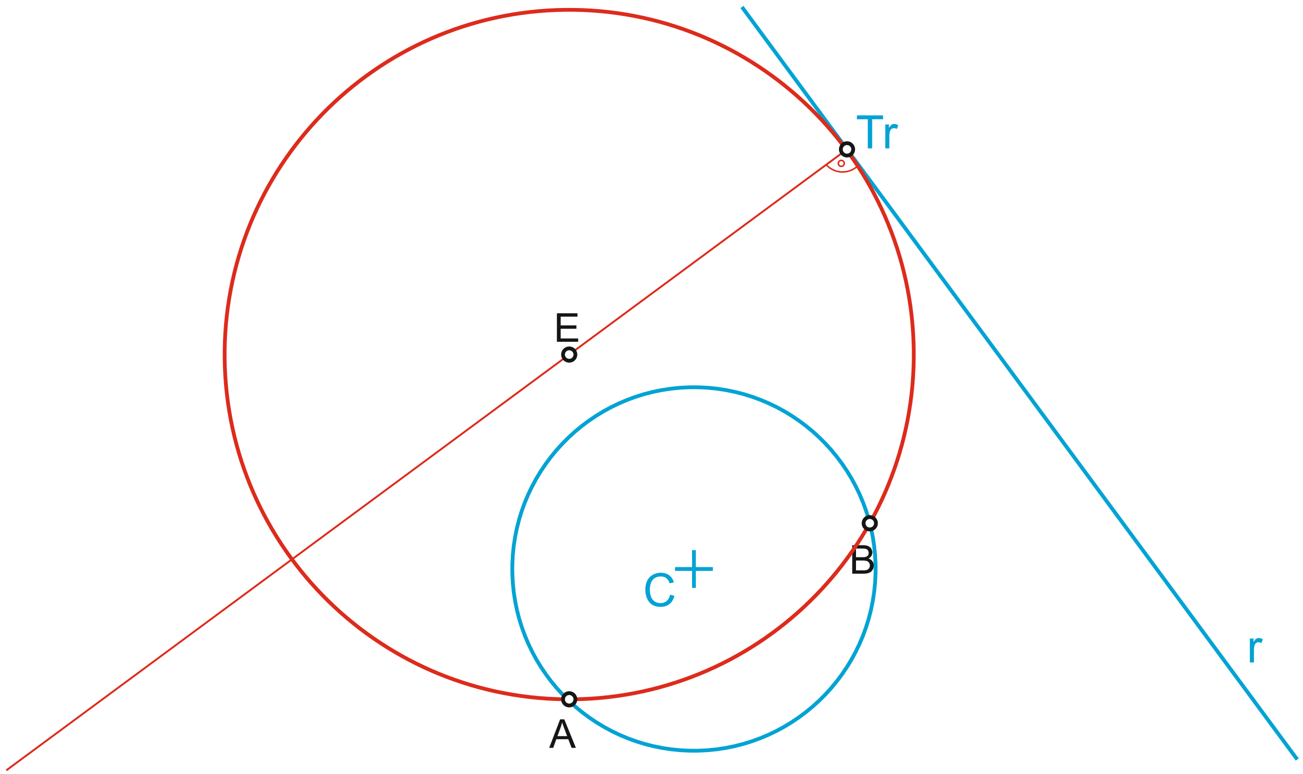


Aplicando potencia, trazar las circunferencias tangentes a la de ***centro C y a la recta r,***
siendo ***Tr*** *el punto de tangencia de esta*



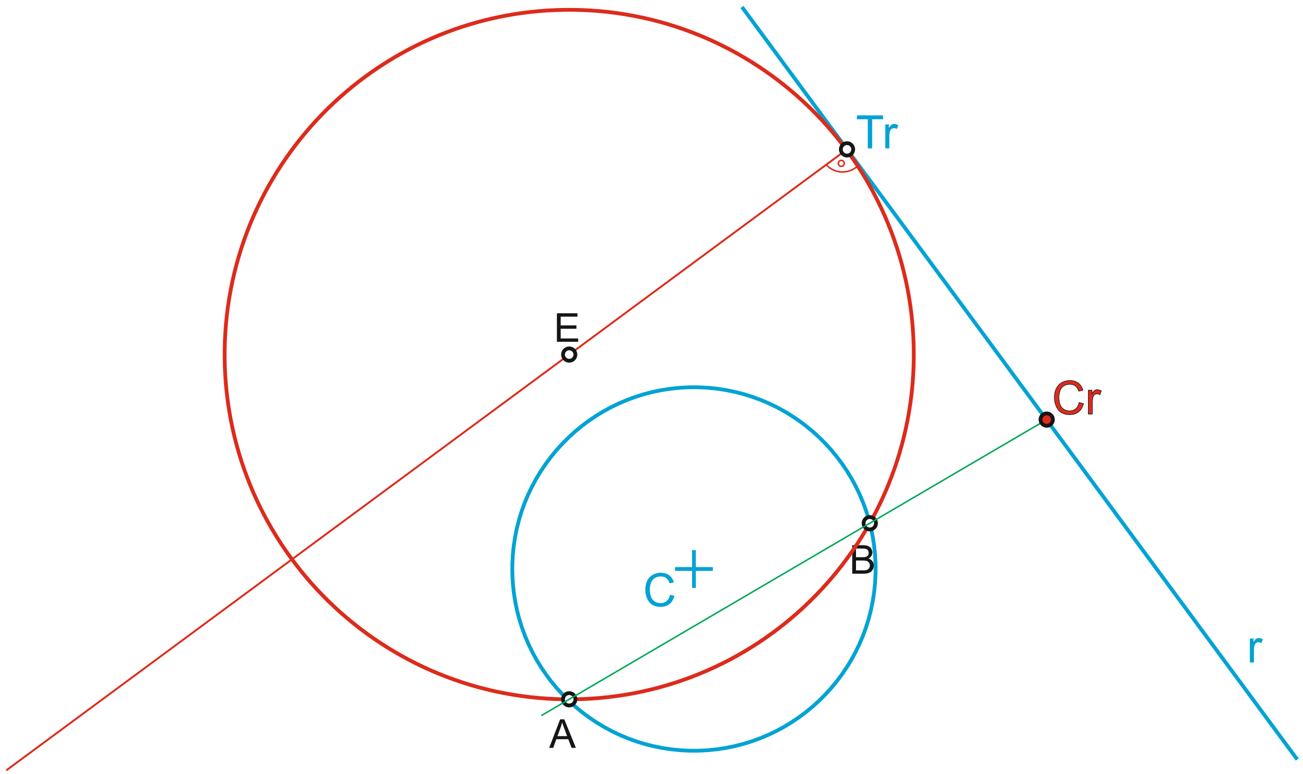
1. Los centros de las circunferencias solución pertenecen a la **perpendicular por Tr a la recta r**

Aplicando potencia, trazar las circunferencias tangentes a la de ***centro C y a la recta r,***
siendo ***Tr*** *el punto de tangencia de esta*



2. Se traza una circunferencia auxiliar de centro **E, tangente a r en Tr.**
Dicha circunferencia cortará a la dada en **dos puntos A y B**

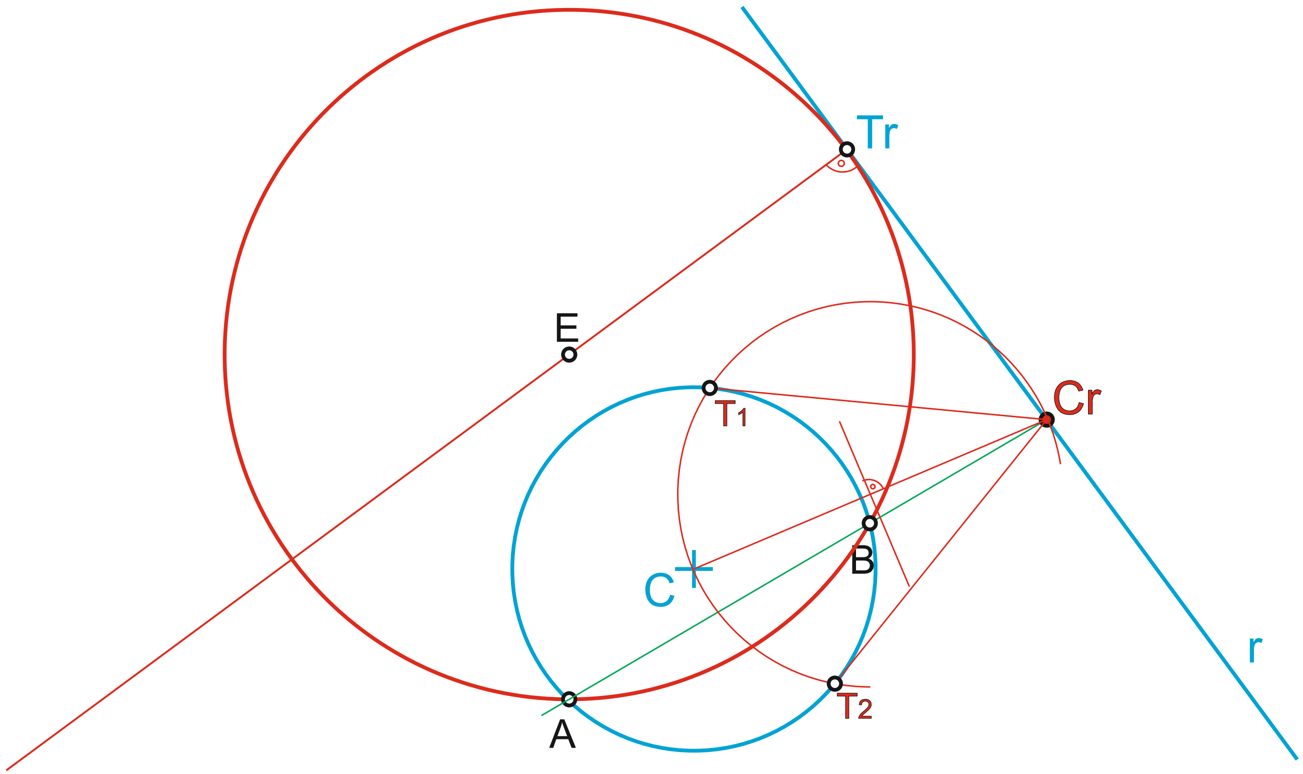
Aplicando potencia, trazar las circunferencias tangentes a la de ***centro C y a la recta r,***
siendo ***Tr*** *el punto de tangencia de esta*



JUAN DÍAZ ALMAGRO

3. Con ayuda de E, calculamos el centro radical Cr del haz de circunferencias tangentes a r en T1, y de la de centro C dada. Cr debe pertenecer a r

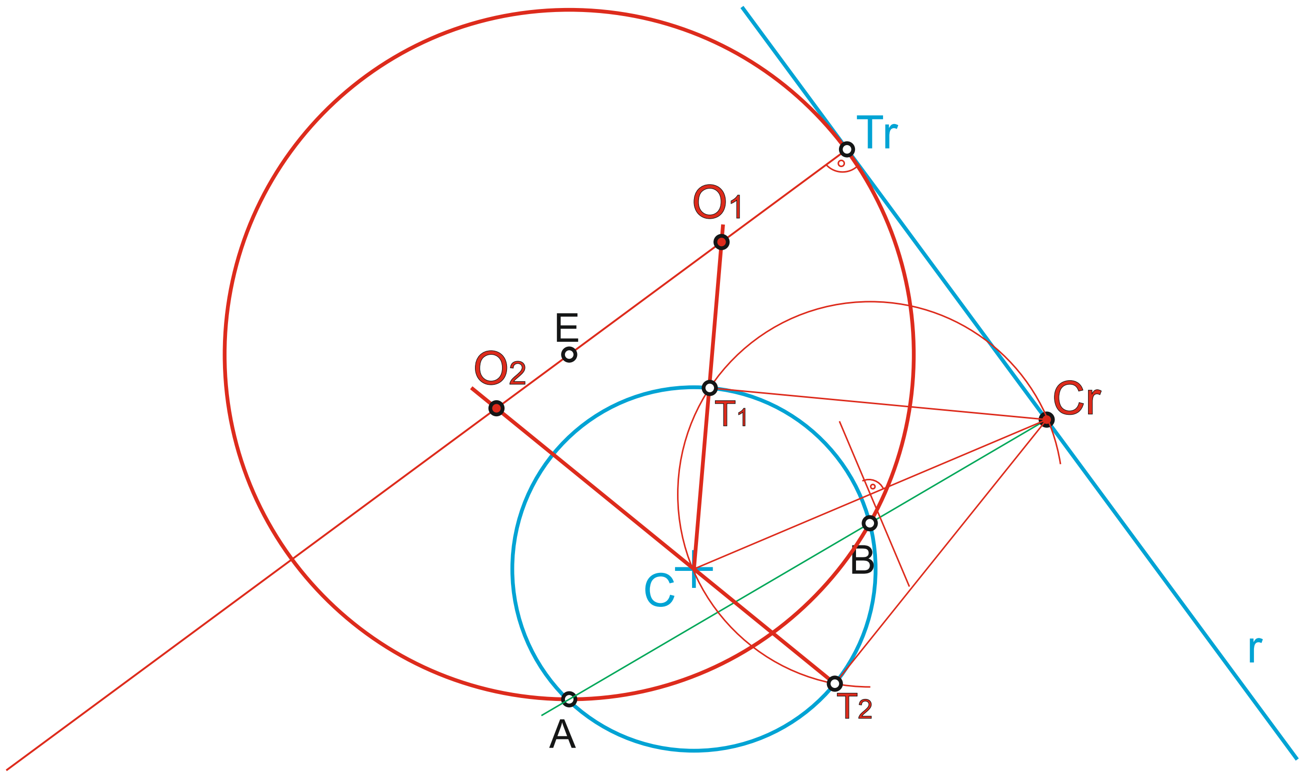
*Aplicando potencia, trazar las circunferencias tangentes a la de **centro C y a la recta r,***
*siendo **Tr** el punto de tangencia de esta*



4. Una vez tenemos **Cr**, trazamos las **tangentes a la circunferencia C** y obtenemos los puntos de tangencia **T1 y T2**

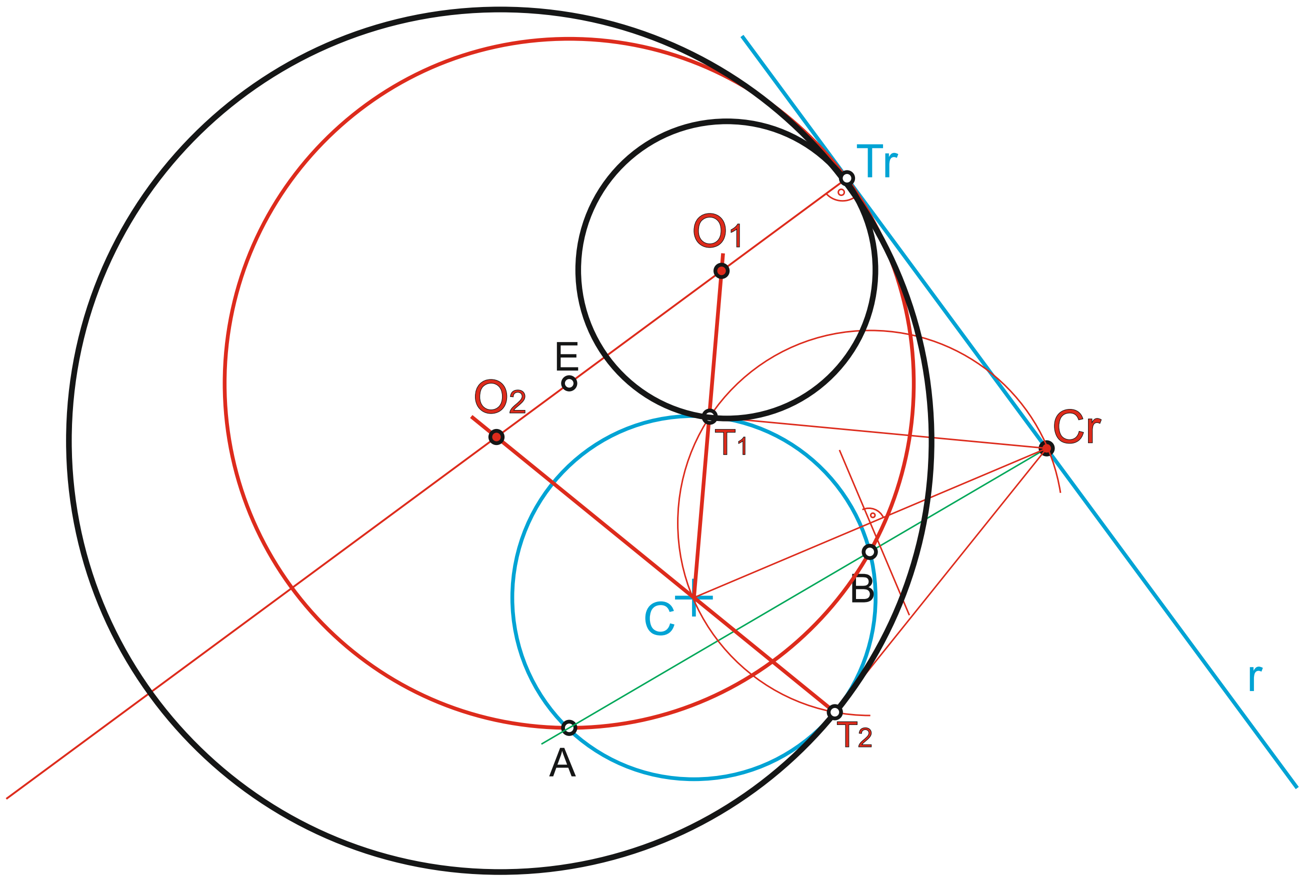
JUAN DÍAZ ALMAGRO

*Aplicando potencia, trazar las circunferencias tangentes a la de **centro C y a la recta r,***
*siendo **Tr** el punto de tangencia de esta*



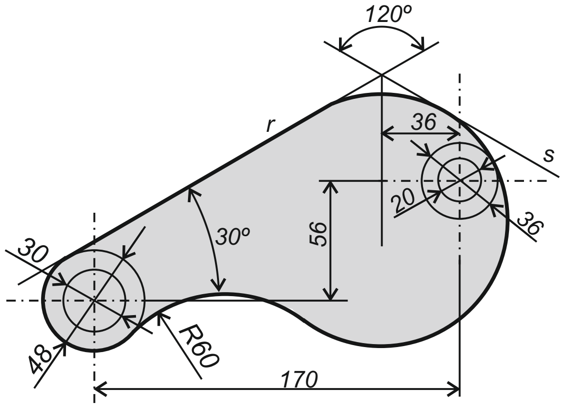
5. Uniendo T1 y T2 con C, obtenemos dos líneas que cortan a la perpendicular
que trazamos por **Tr** en **O1 y O2**, soluciones del problema

Aplicando potencia, trazar las circunferencias tangentes a la de ***centro C y a la recta r,*** *siendo* ***Tr*** *el punto de tangencia de esta*

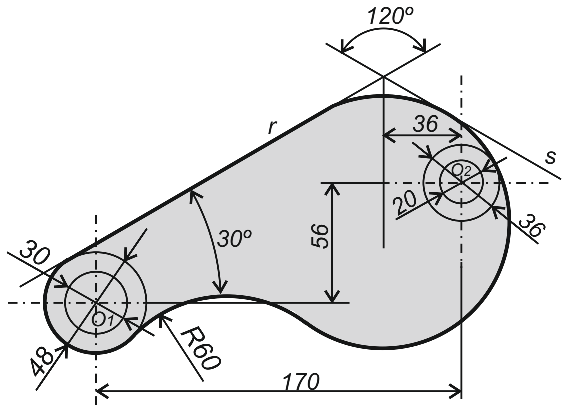


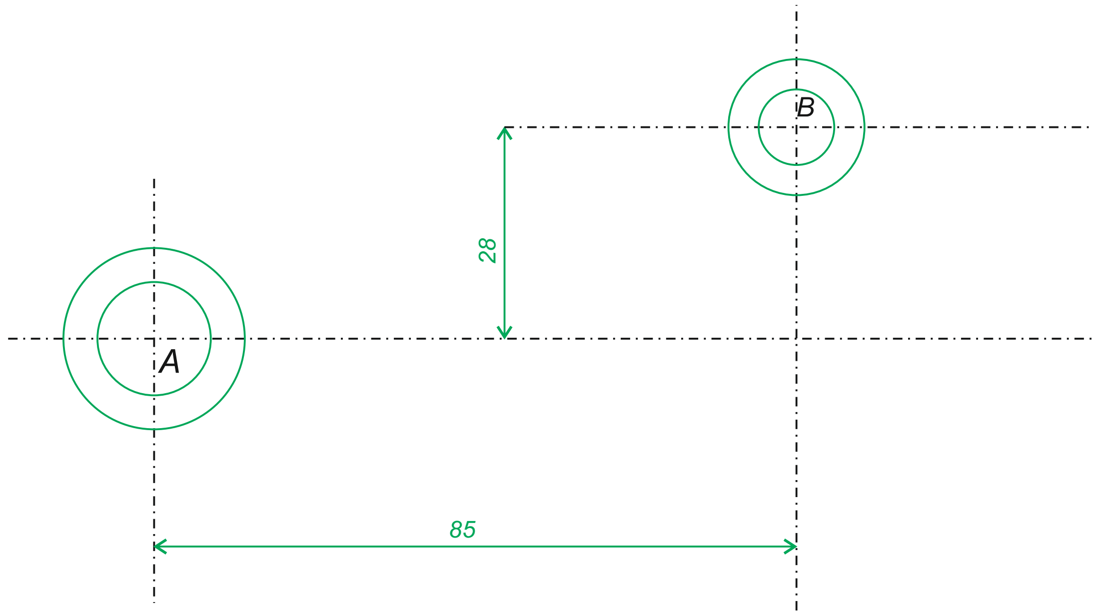
5. Uniendo T_1 y T_2 con C, obtenemos dos líneas que cortan a la perpendicular que trazamos por **Tr** en **O_1 y O_2**, soluciones del problema

Delinear a escala 1:2 la pieza industrial adjunta. ***la determinación de la circunferencia tangente a las rectas r y s y a la circunferencia de diámetro 36 debe hacerse aplicando potencia.***



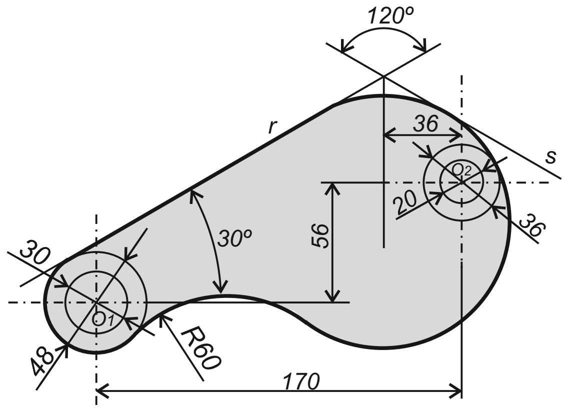
Delinear a ***escala 1:2*** *la pieza industrial adjunta.* ***la determinación de la circunferencia tangente a las rectas r y s y a la circunferencia de diámetro 36 debe hacerse aplicando potencia.***

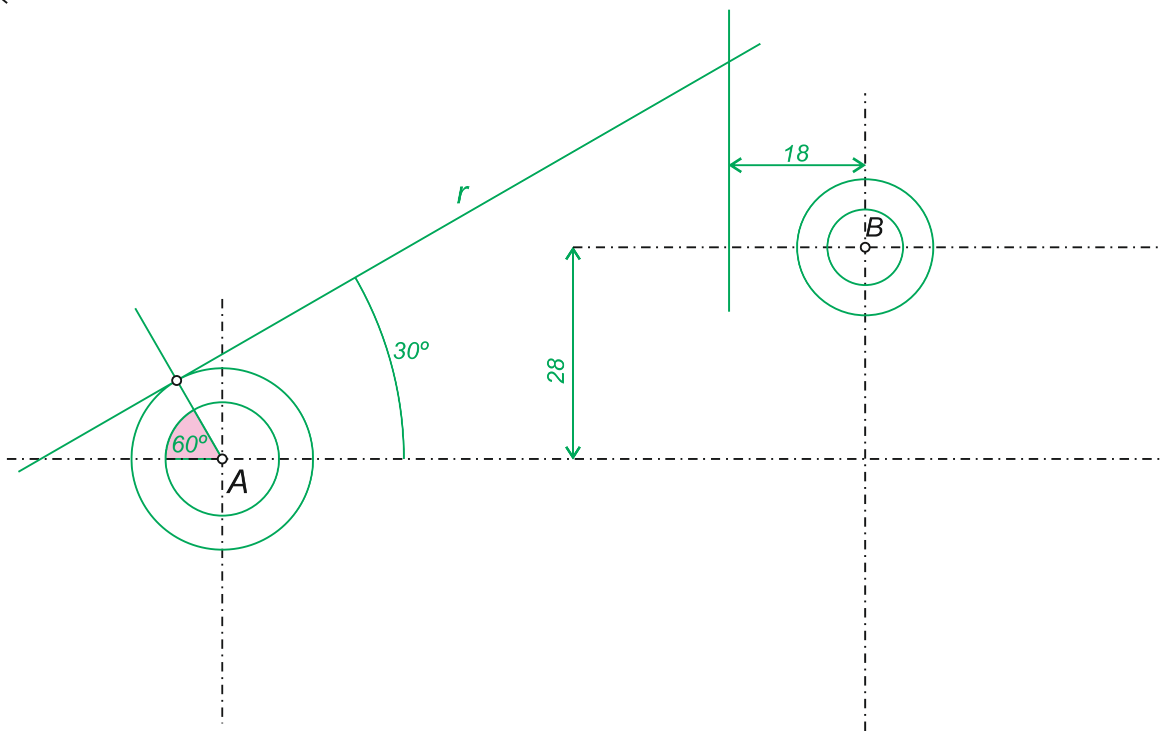




1. Posicionamos los centros A y B de las dos circunferencias iniciales.
ten en cuenta que las medidas que te dan en el croquis hay que delinearlas a escala 1:2, por tanto el diámetro 30 se queda en 15, el de 48 en 24,...

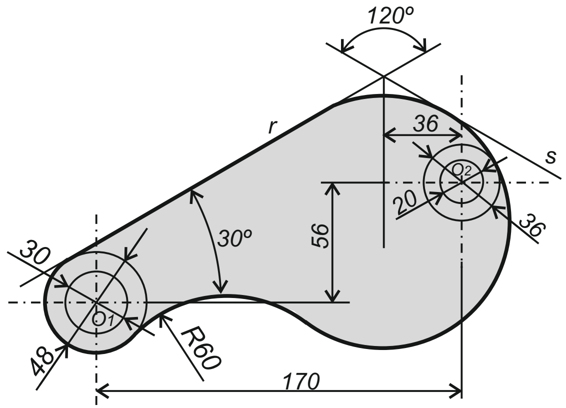
Delinear a ***escala 1:2*** *la pieza industrial adjunta.* ***la determinación de la circunferencia tangente a las rectas r y s y a la circunferencia de diámetro 36 debe hacerse aplicando potencia.***

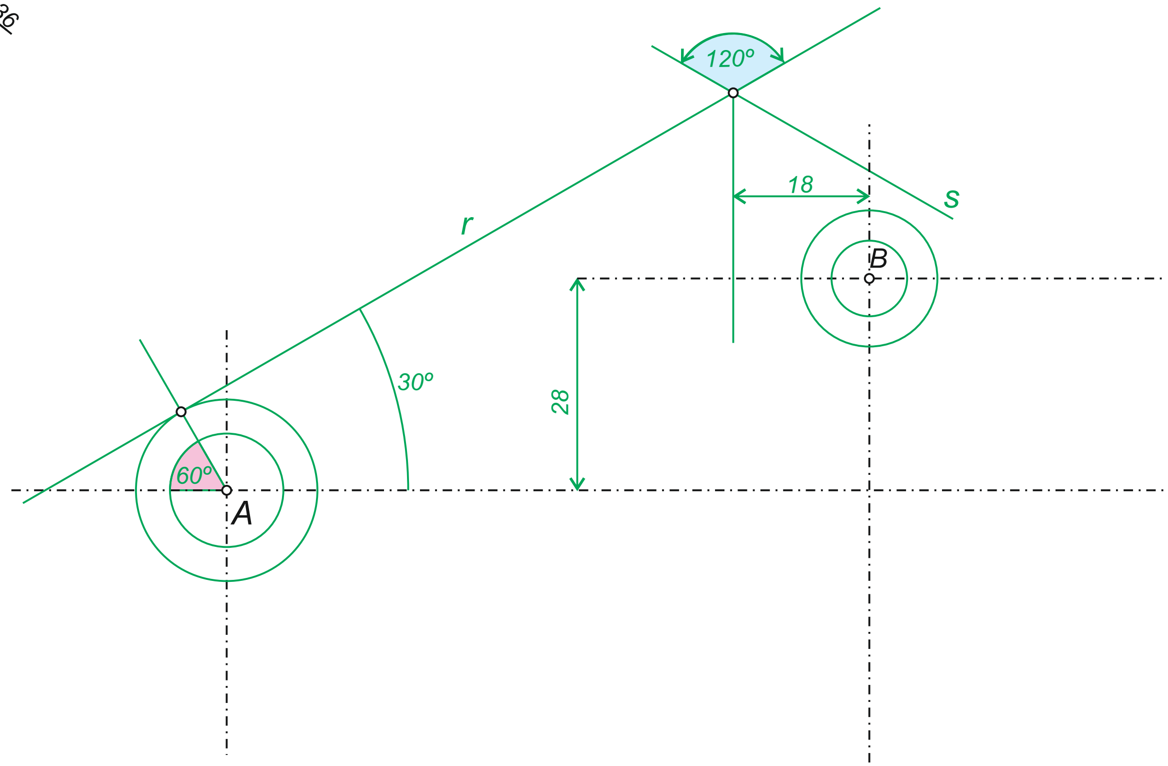




2. Trazamos la primera tangente indicada que forma 30º con la horizontal, recta r

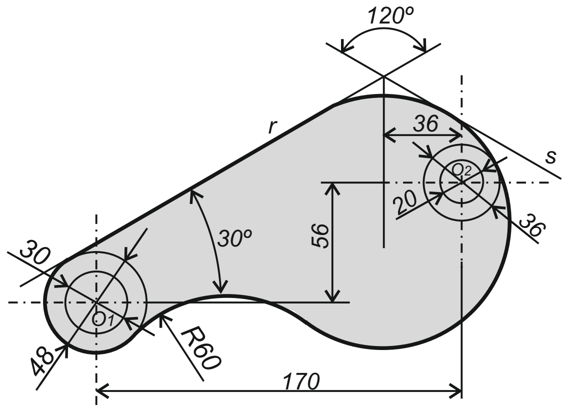
Delinear a ***escala 1:2*** *la pieza industrial adjunta.* ***la determinación de la circunferencia tangente a las rectas r y s y a la circunferencia de diámetro 36 debe hacerse aplicando potencia.***

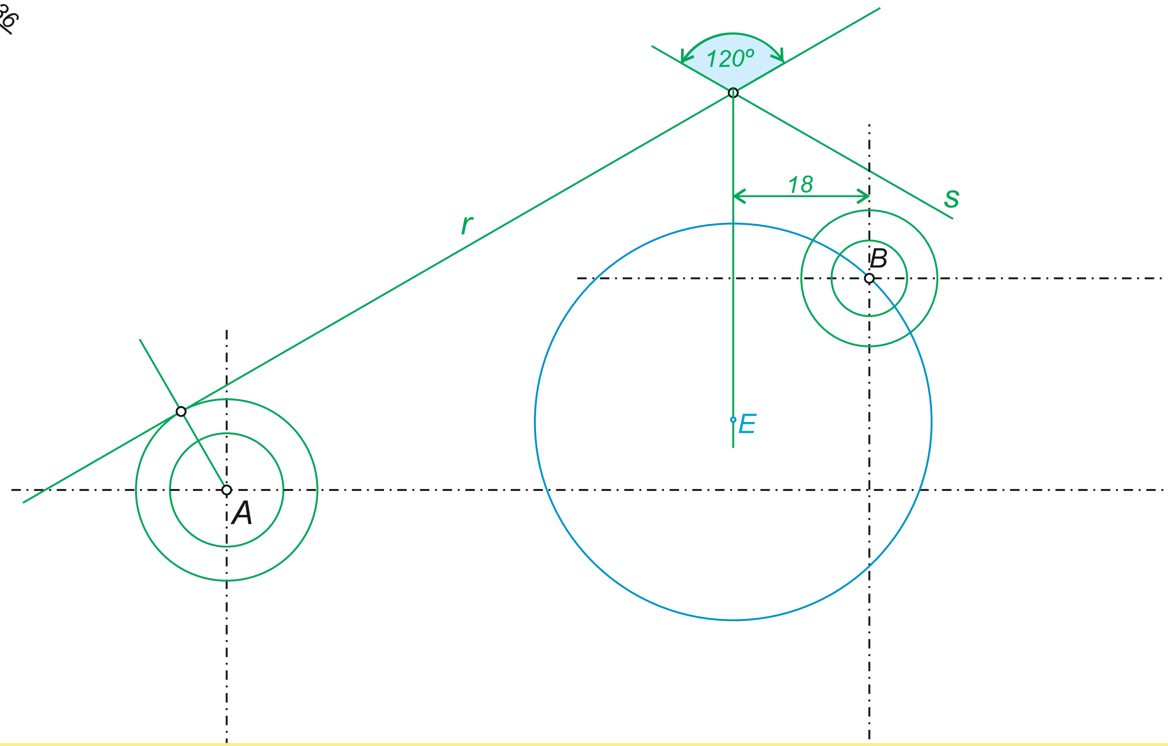




3. A continuación, con los datos dados, podemos trazar la recta s

Delinear a ***escala 1:2*** *la pieza industrial adjunta.* ***la determinación de la circunferencia tangente a las rectas r y s y a la circunferencia de diámetro 36 debe hacerse aplicando potencia.***

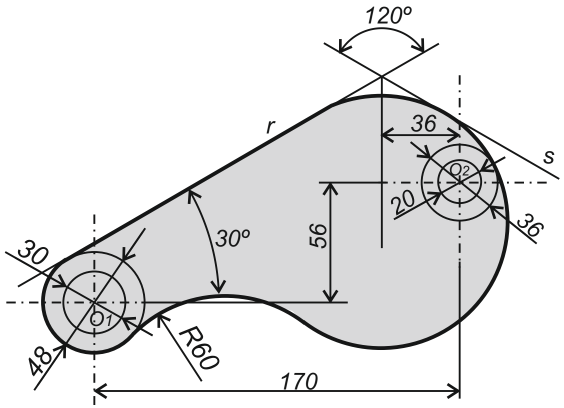


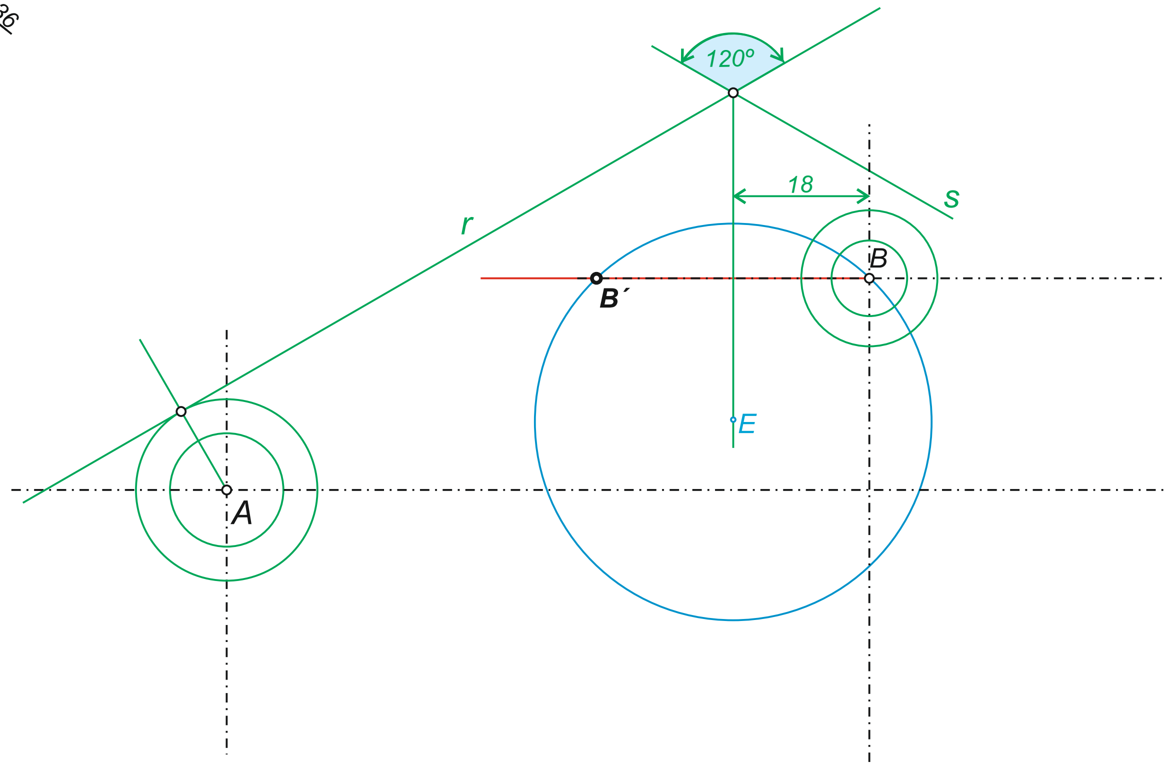


4. Ahora, se trata de resolver, aplicando potencia, el caso de circunferencias tangentes a dos rectas r y s, que se cortan, y a la circunferencia de centro B y 36 mm de diámetro.
Se trata de aplicar el procedimiento explicado en la páginas 46 de este documento (problema de Apolonio RRC).
En primer lugar trazamos una circunferencia auxiliar con su centro E en el mismo eje donde estará el centro O buscado y que pase por el centro B

JUAN DÍAZ ALMAGRO

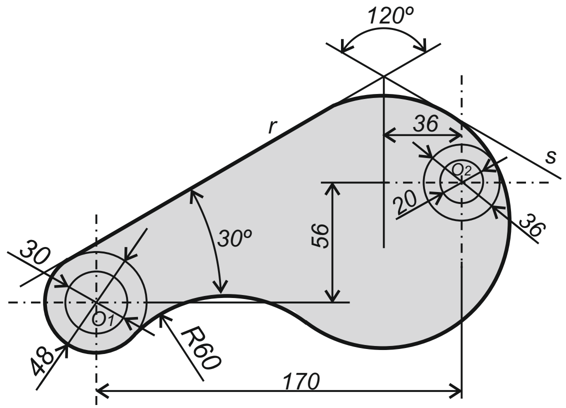
Delinear a ***escala 1:2*** *la pieza industrial adjunta.* ***la determinación de la circunferencia tangente a las rectas r y s y a la circunferencia de diámetro 36 debe hacerse aplicando potencia.***

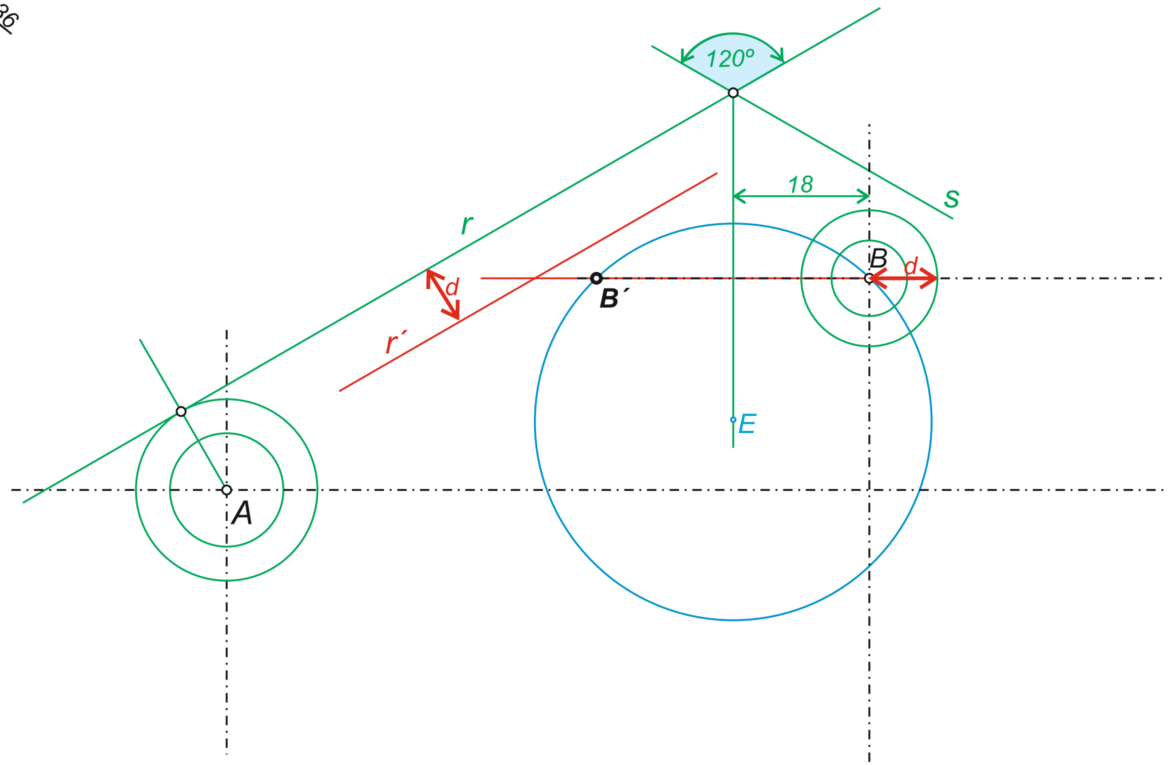




5. Hallamos B´, homólogo de B

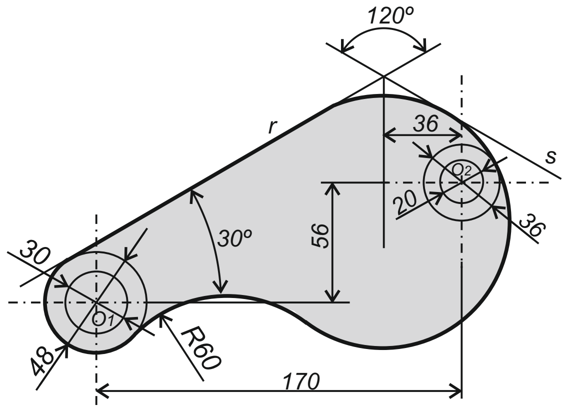
Delinear a ***escala 1:2*** *la pieza industrial adjunta.* ***la determinación de la circunferencia tangente a las rectas r y s y a la circunferencia de diámetro 36 debe hacerse aplicando potencia.***

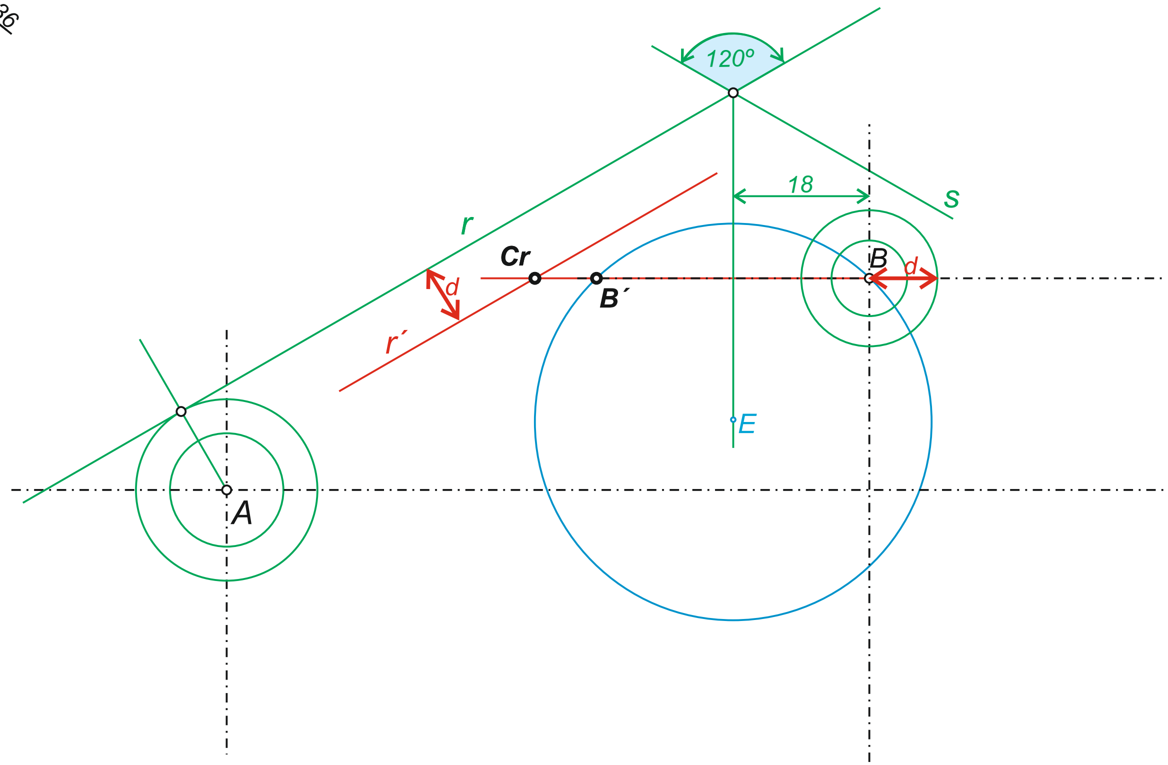




6. Aplicamos la dilatación interior a r con distancia d

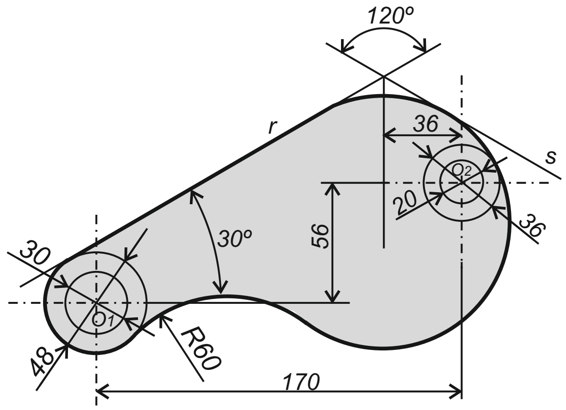
Delinear a ***escala 1:2*** *la pieza industrial adjunta.* ***la determinación de la circunferencia tangente a las rectas r y s y a la circunferencia de diámetro 36 debe hacerse aplicando potencia.***

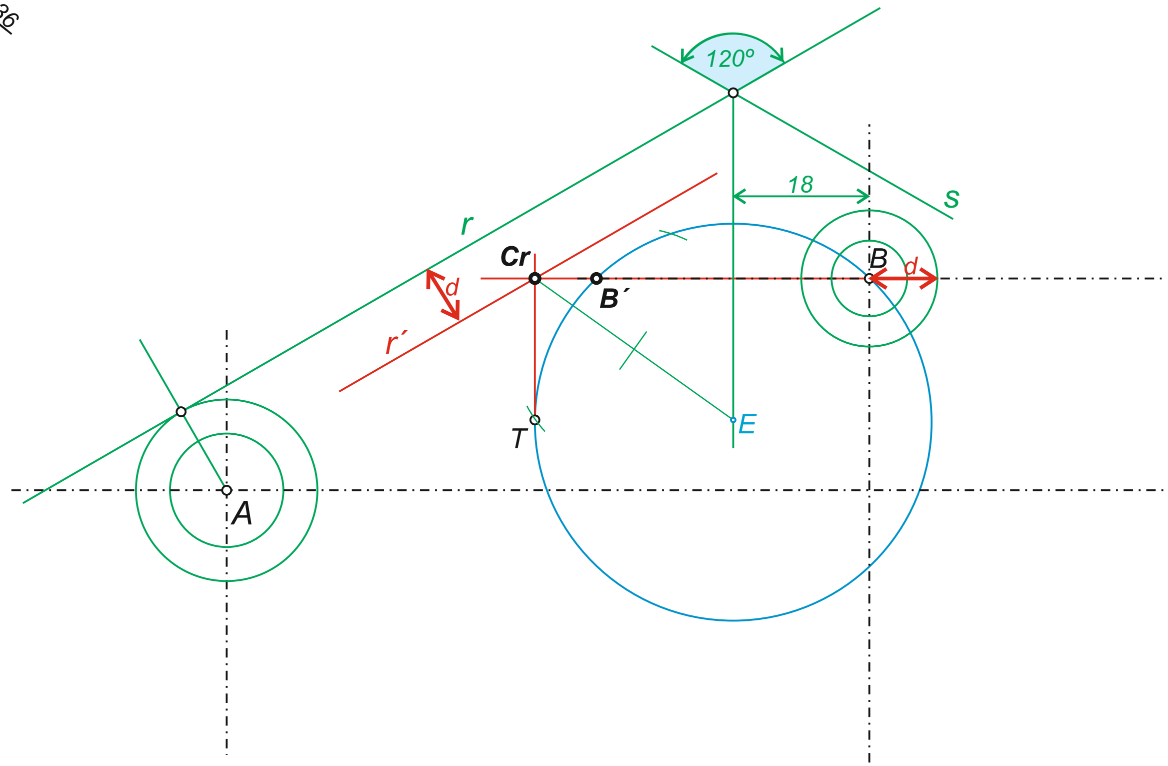




7. En la unión de BB´y r´ tenemos Cr, centro radical entre r´, la circunferencia auxiliar y la circunferencia solución.

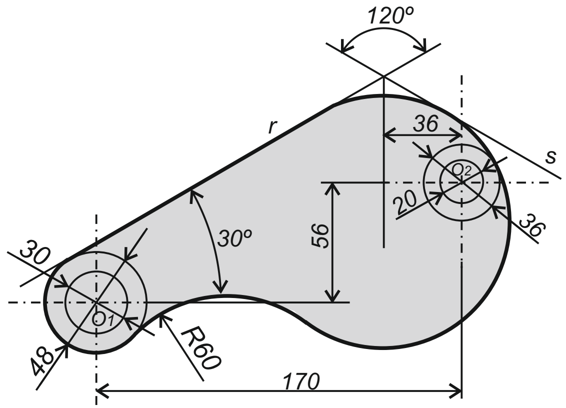
Delinear a ***escala 1:2*** *la pieza industrial adjunta.* ***la determinación de la circunferencia tangente a las rectas r y s y a la circunferencia de diámetro 36 debe hacerse aplicando potencia.***

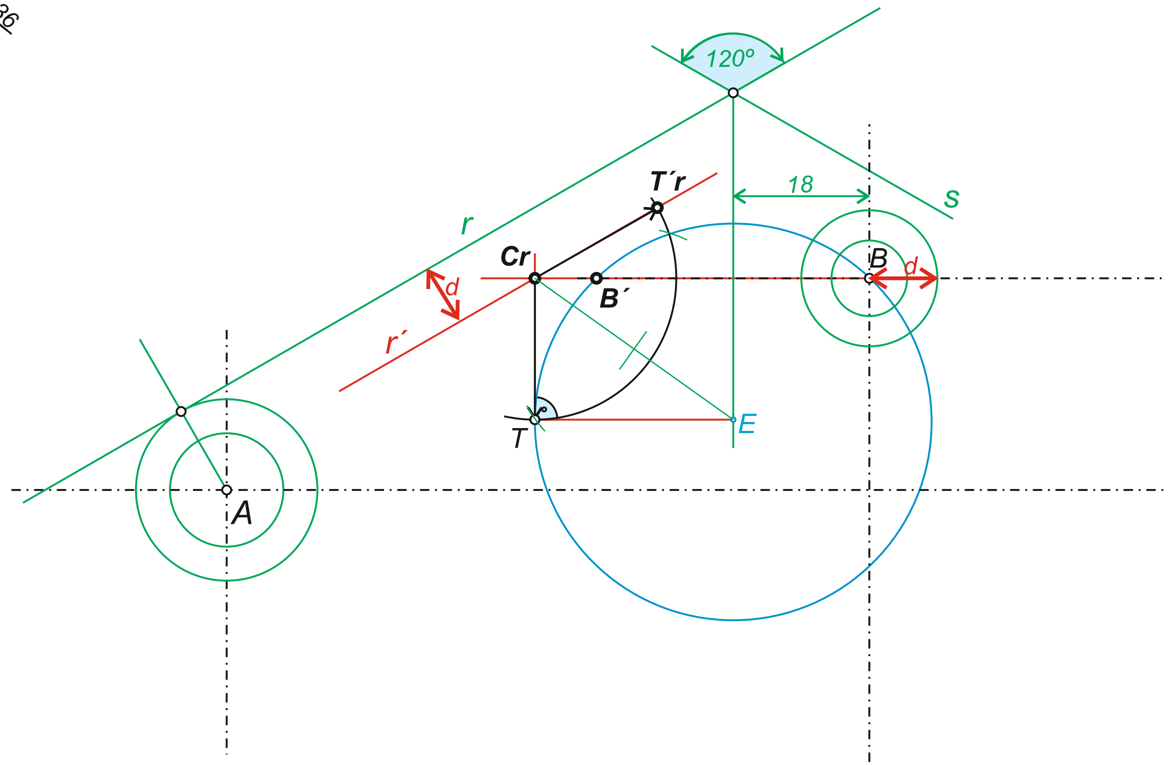




8. Trazamos una tangente de Cr a la crcunferencia E, obteniendo así el punto de tangencia T

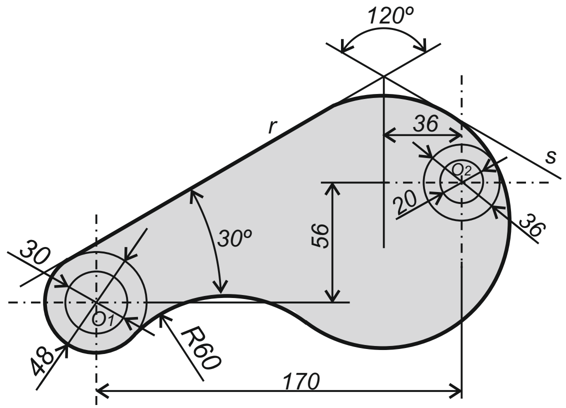
Delinear a ***escala 1:2*** *la pieza industrial adjunta.* ***la determinación de la circunferencia tangente a las rectas r y s y a la circunferencia de diámetro 36 debe hacerse aplicando potencia.***

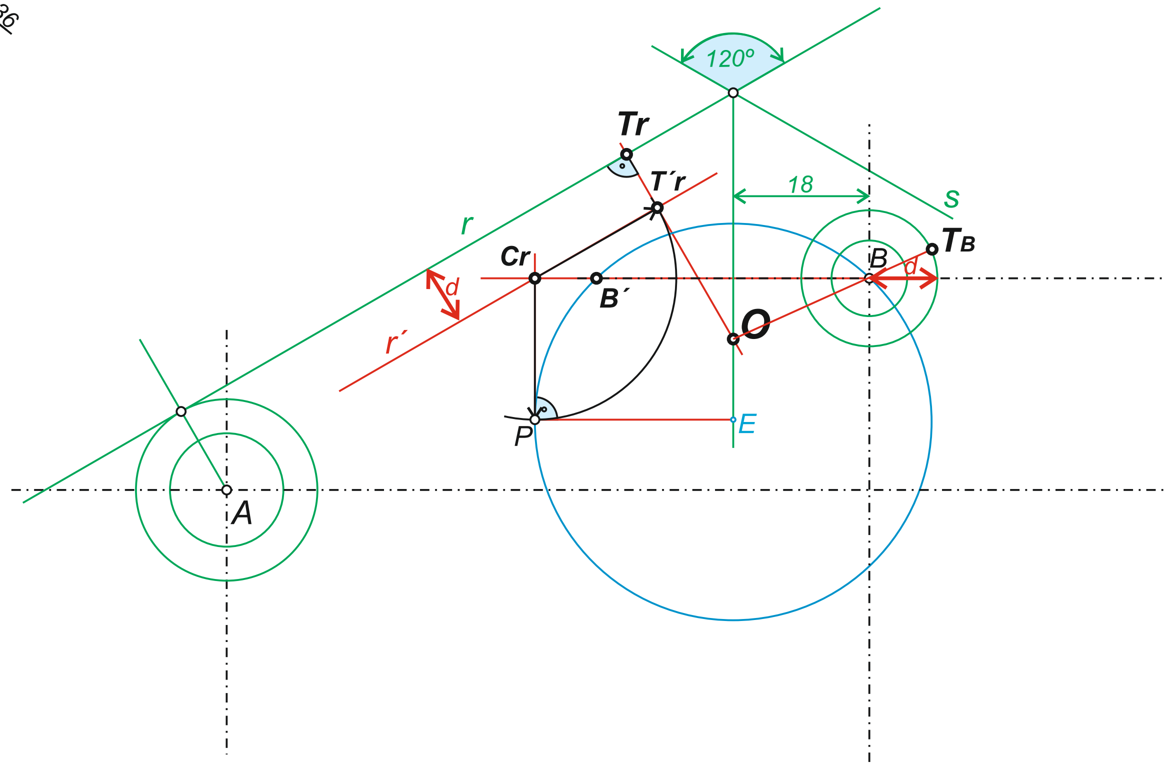




9. Trazamos el arco CrT, que corta a r´ en T´r

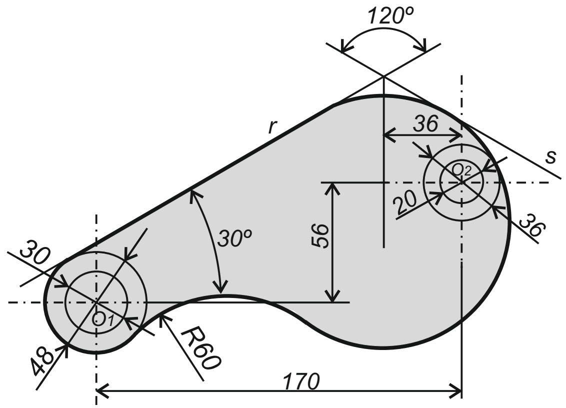
Delinear a ***escala 1:2*** *la pieza industrial adjunta.* ***la determinación de la circunferencia tangente a las rectas r y s y a la circunferencia de diámetro 36 debe hacerse aplicando potencia.***

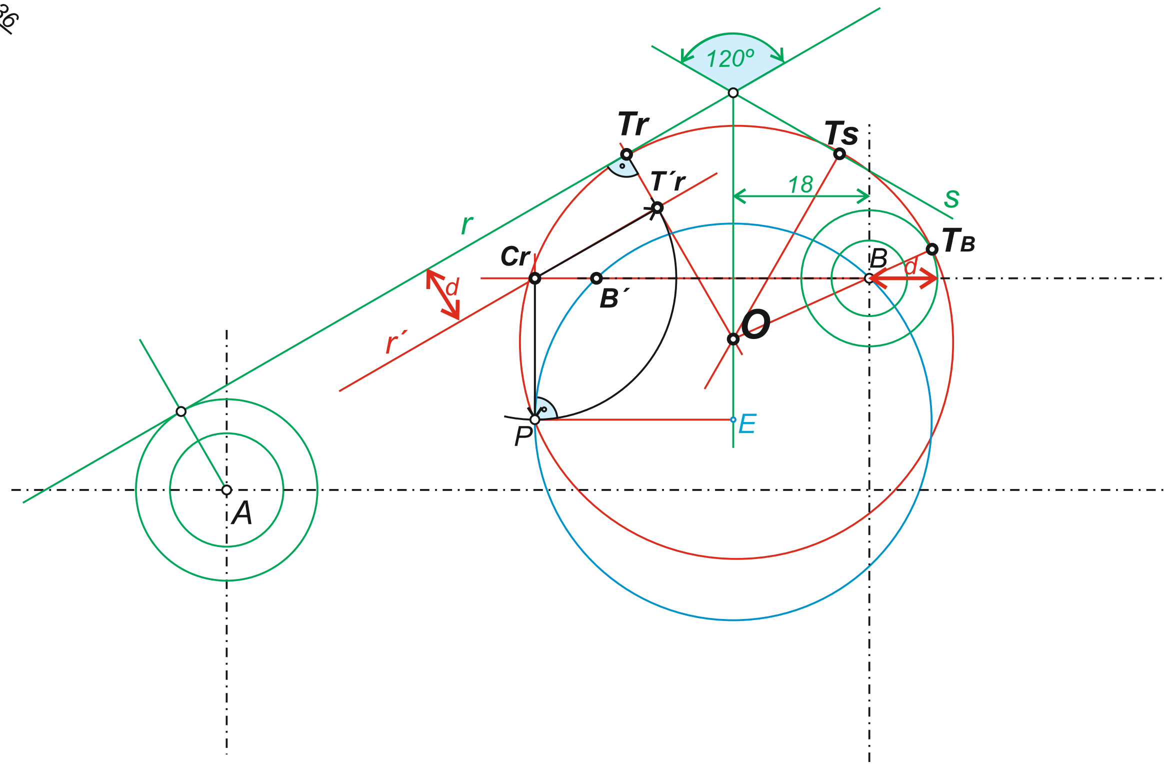




10. El punto obtenido, T´r, es el punto Tr dilatado. Tr es el punto de tangencia de r con la circunferencia O buscada, que tendrá su centro en el eje vertical en que situamos la circunferencia auxiliar E

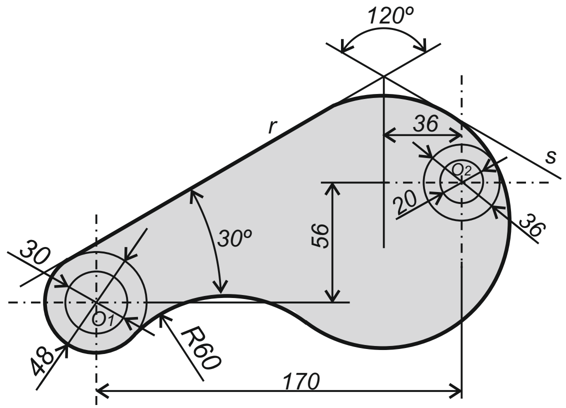
Delinear a ***escala 1:2*** *la pieza industrial adjunta.* ***la determinación de la circunferencia tangente a las rectas r y s y a la circunferencia de diámetro 36 debe hacerse aplicando potencia.***

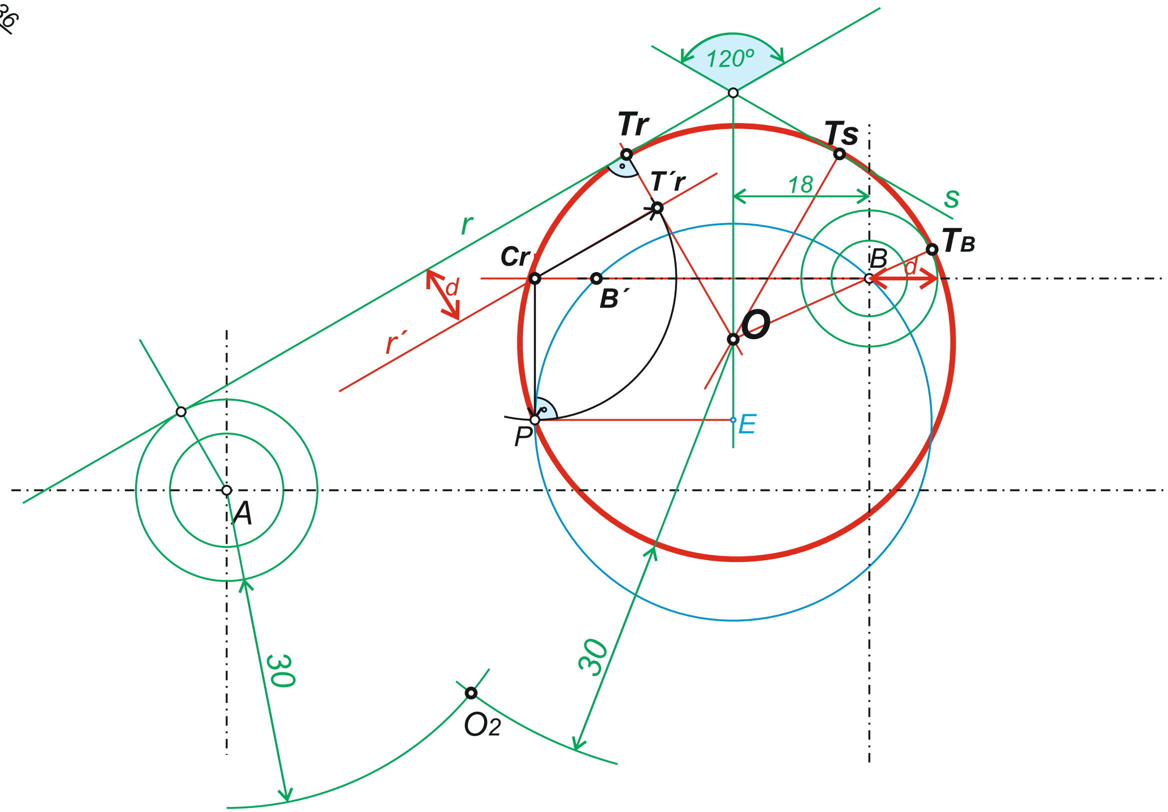




11. calculamos el punto de tangencia TB uniendo
O con B y trazamos la circunferencia solución

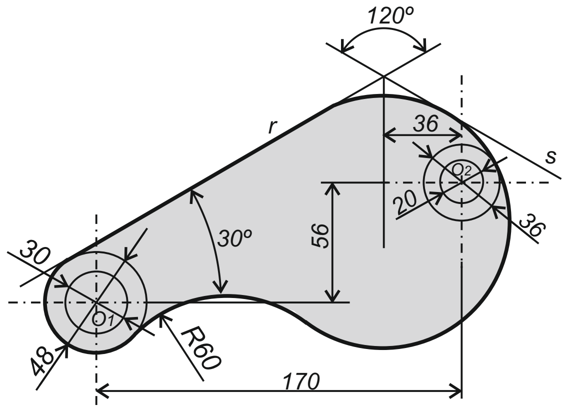
Delinear a **escala 1:2** la pieza industrial adjunta. **la determinación de la circunferencia tangente a las rectas r y s y a la circunferencia de diámetro 36 debe hacerse aplicando potencia.**

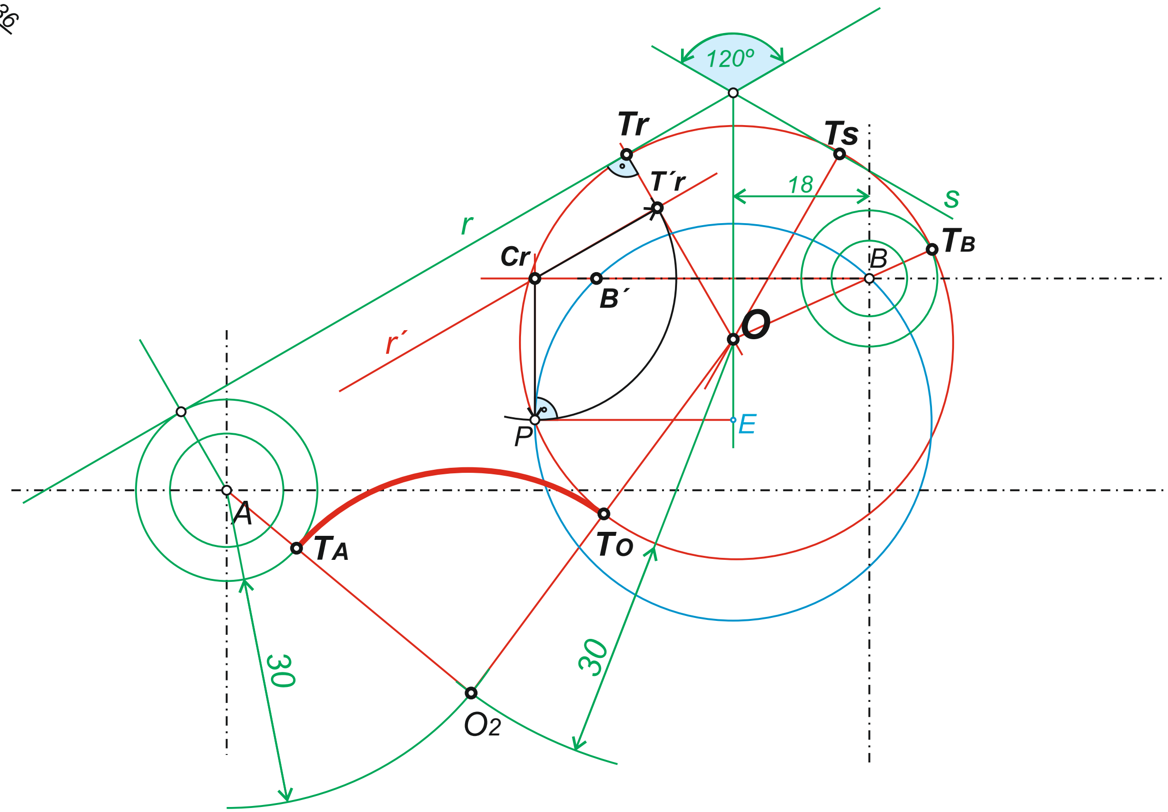




12. Para completar el dibujo, trazamos el arco de radio 60 (serán 30 a escala 1:2) tangente inferior a la circunferencia O anteriormente calculada y a la de centro A y radio 48

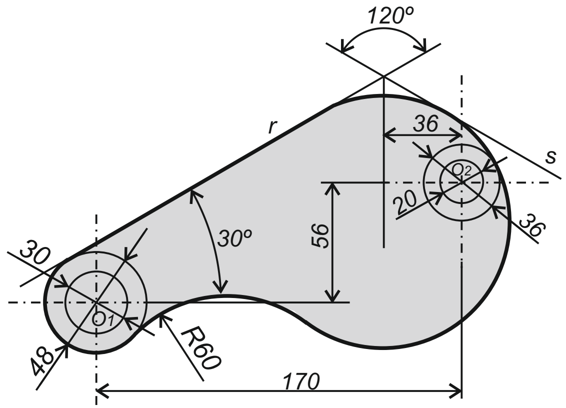
Delinear a **escala 1:2** la pieza industrial adjunta. **la determinación de la circunferencia tangente a las rectas r y s y a la circunferencia de diámetro 36 debe hacerse aplicando potencia.**

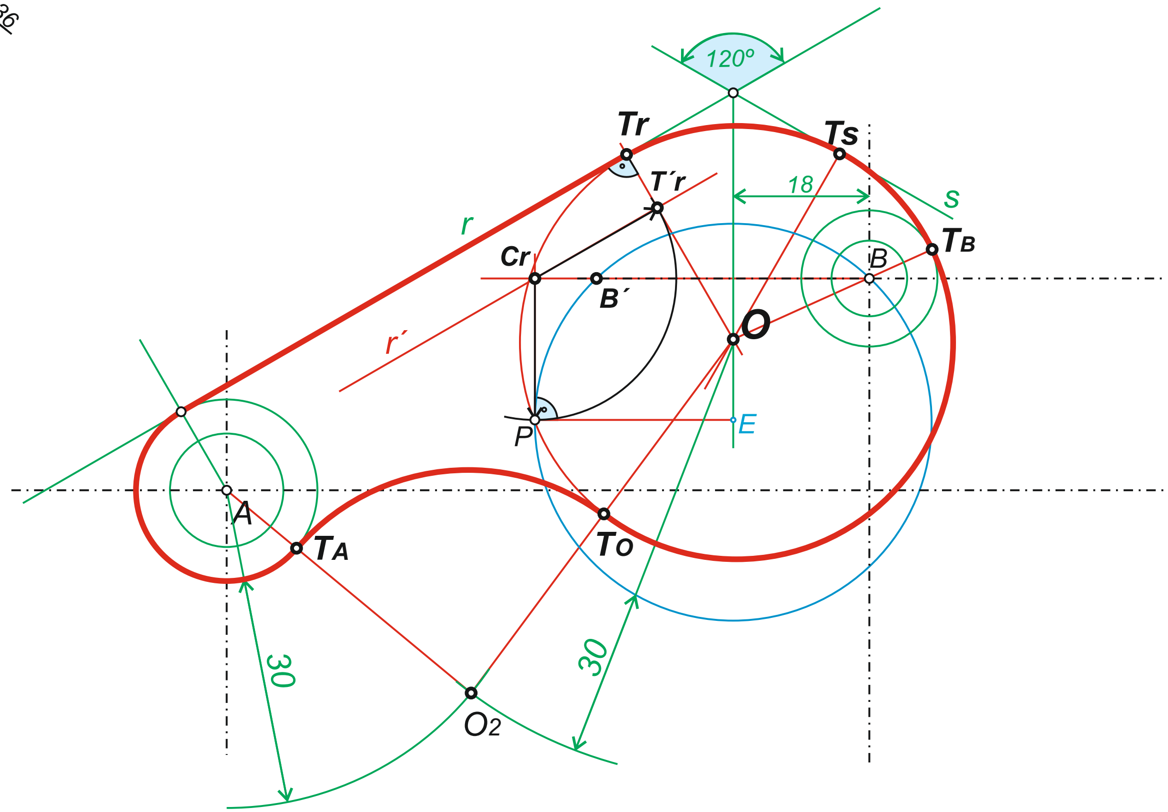




13. Para completar el dibujo, trazamos el arco de radio 60 (serán 30 a escala 1:2) tangente inferior a la circunferencia O anteriormente calculada y a la de centro A y radio 48

Delinear a ***escala 1:2*** *la pieza industrial adjunta.* ***la determinación de la circunferencia tangente a las rectas r y s y a la circunferencia de diámetro 36 debe hacerse aplicando potencia.***

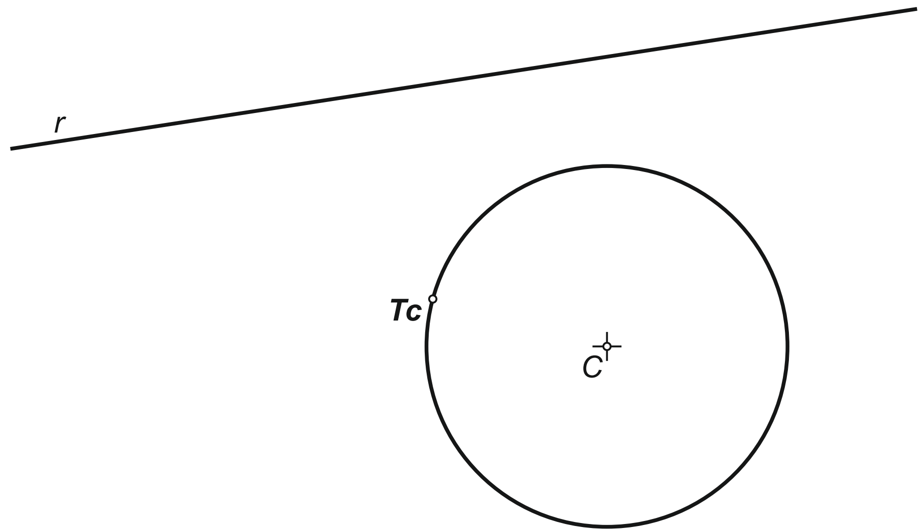




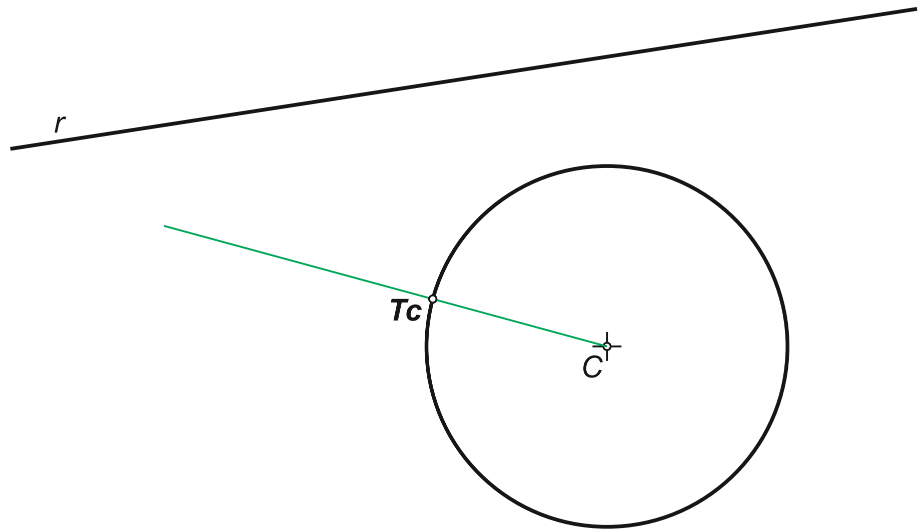
14. Para completar el dibujo, trazamos el arco de radio 60 (serán 30 a escala 1:2) tangente inferior a la circunferencia O anteriormente calculada y a la de centro A y radio 48

JUAN DÍAZ ALMAGRO

Aplicando inversión, trazar las circunferencias tangentes a la recta r y a la circunferencia de centro C siendo Tc el punto de tangencia de ésta

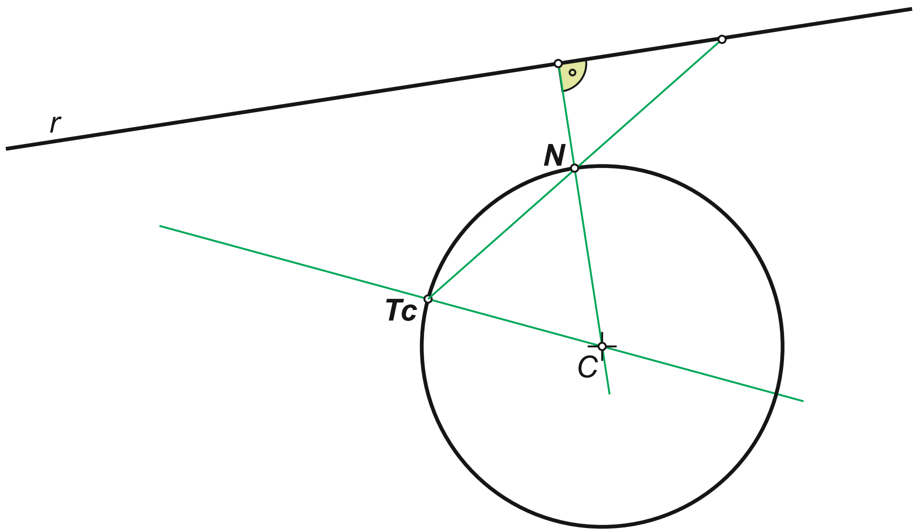


Aplicando inversión, trazar las circunferencias tangentes a la recta r y a la circunferencia de centro C siendo Tc el punto de tangencia de ésta



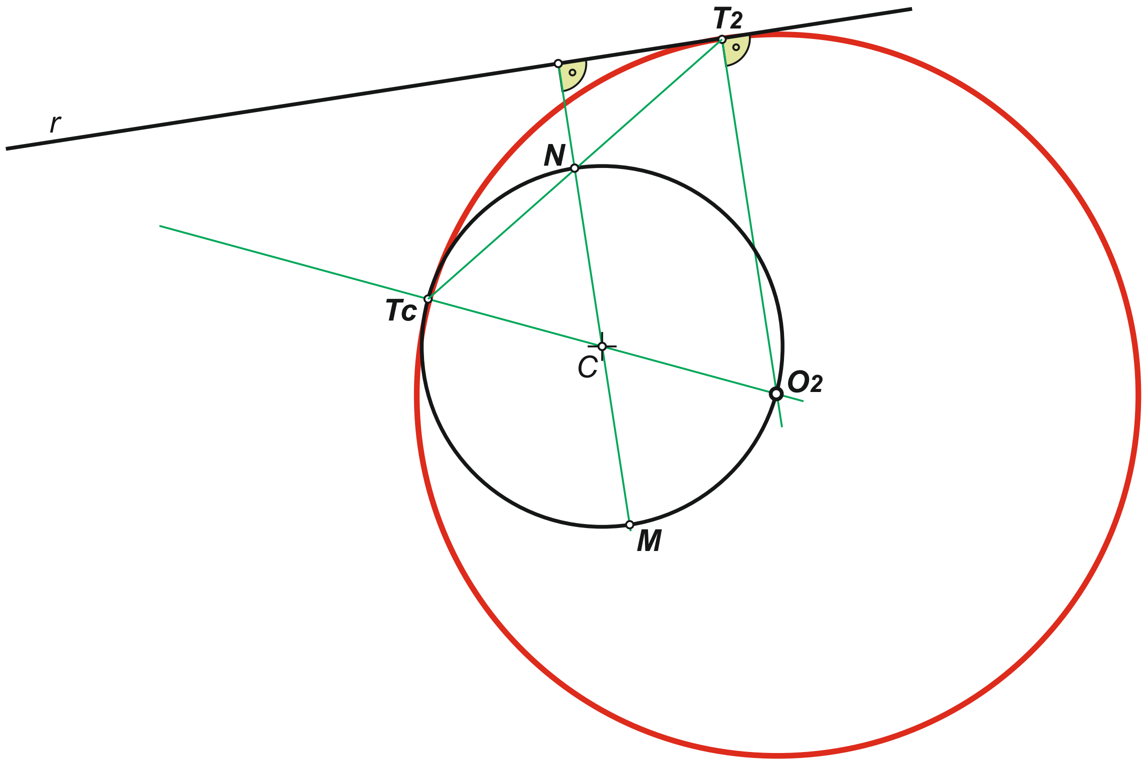
1. Los centros de las circunferencias que buscamos han de pertenecer a la recta CTc

Aplicando inversión, trazar las circunferencias tangentes a la recta r y a la circunferencia de centro C siendo Tc el punto de tangencia de ésta



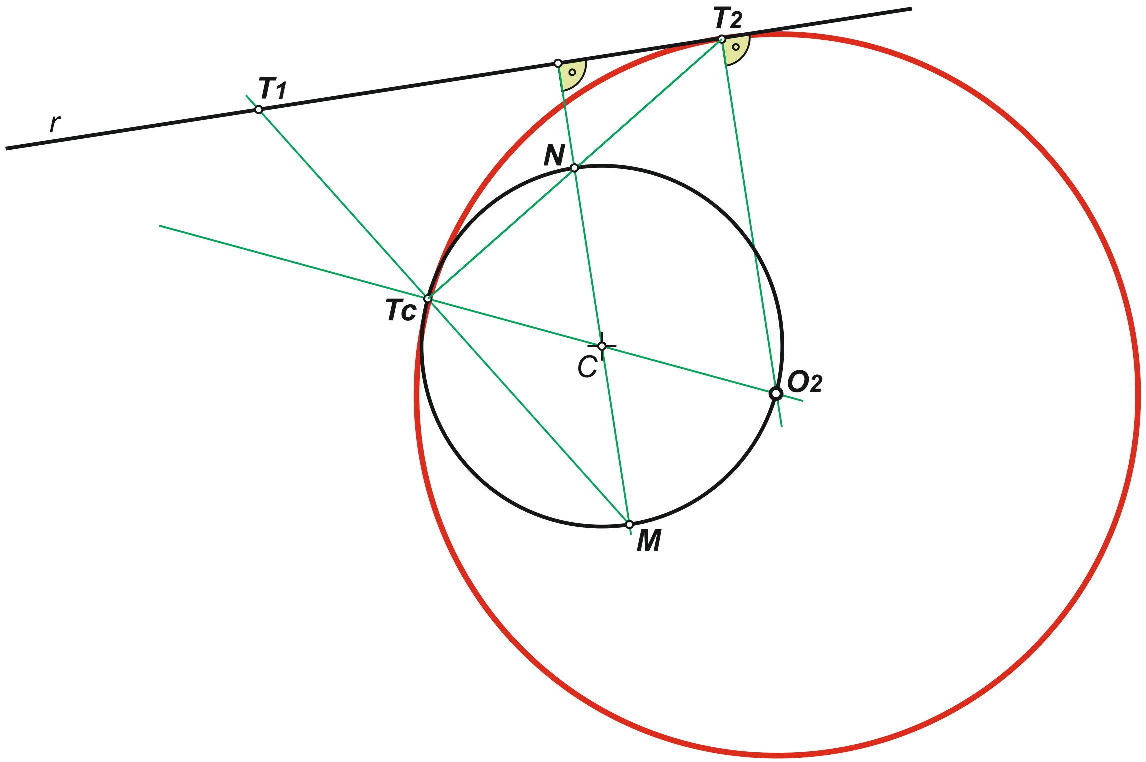
2. Se establecen dos relaciones de inversión entre la recta r y la circunferencia de centro C, una positiva, de centro M, y otra negativa, de centro N

Aplicando inversión, trazar las circunferencias tangentes a la recta r y a la circunferencia de centro C siendo Tc el punto de tangencia de ésta



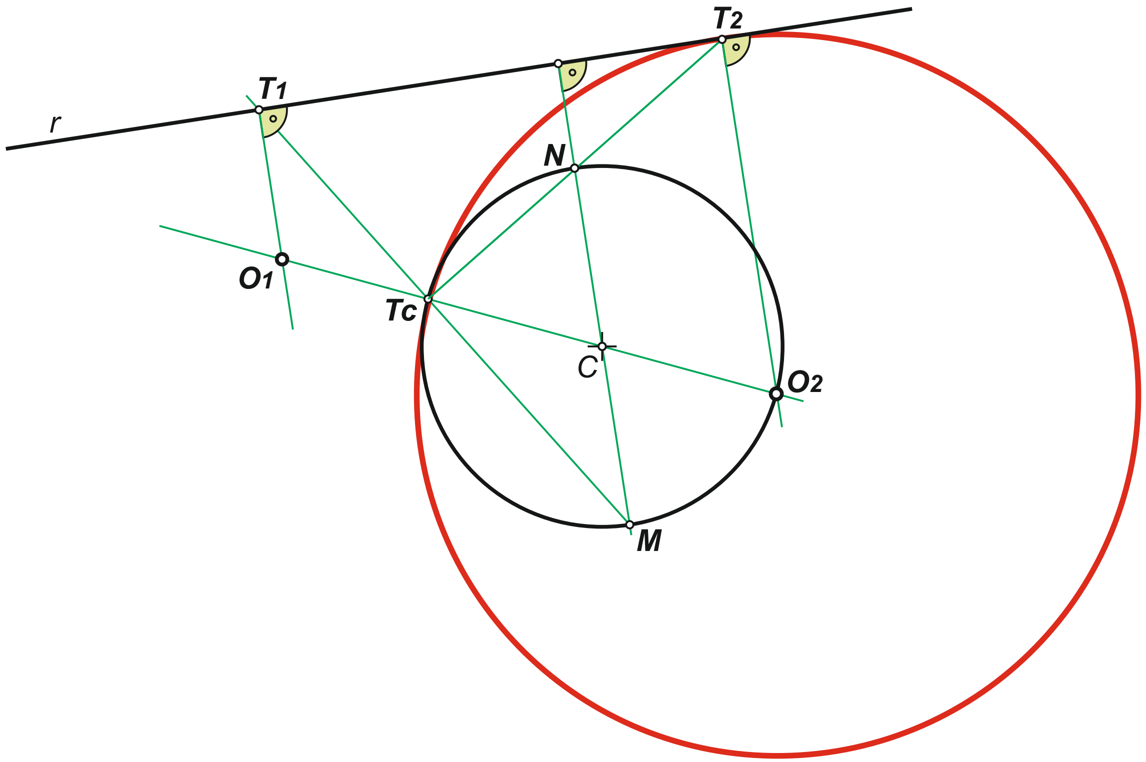
2. Se establecen dos relaciones de inversión entre la recta r y la circunferencia de centro C, una positiva, de centro M, y otra negativa, de centro N

Aplicando inversión, trazar las circunferencias tangentes a la recta r y a la circunferencia de centro C siendo Tc el punto de tangencia de ésta



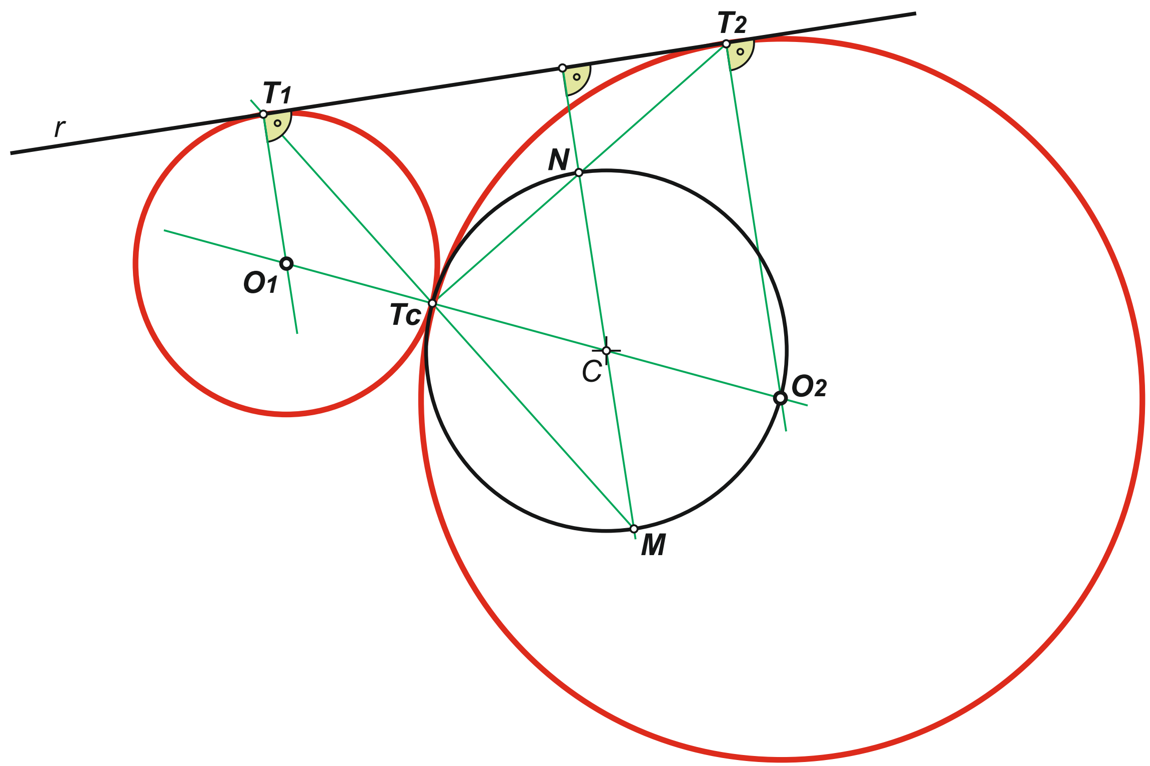
3. Los puntos inversos de Tc en ambas inversiones, T1 y T2, son los puntos de tangencia con r de las dos soluciones

Aplicando inversión, trazar las circunferencias tangentes a la recta r y a la circunferencia de centro C siendo Tc el punto de tangencia de ésta



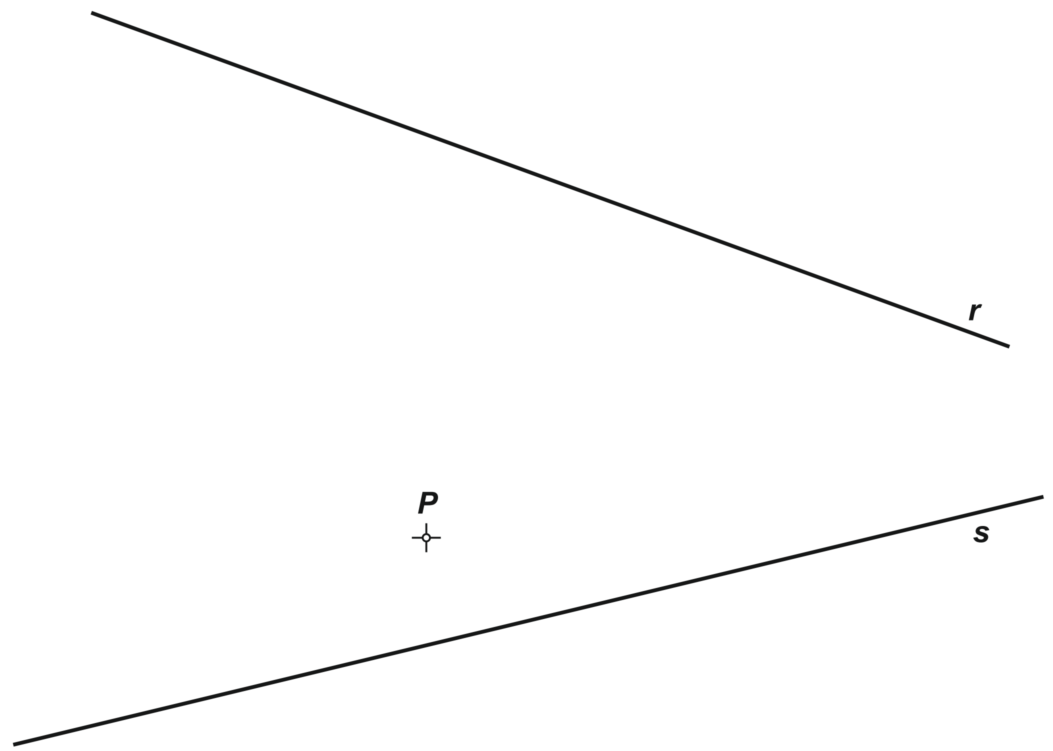
3. Los puntos inversos de Tc en ambas inversiones, T1 y T2, son los puntos de tangencia con r de las dos soluciones

Aplicando inversión, trazar las circunferencias tangentes a la recta r y a la circunferencia de centro C siendo Tc el punto de tangencia de ésta

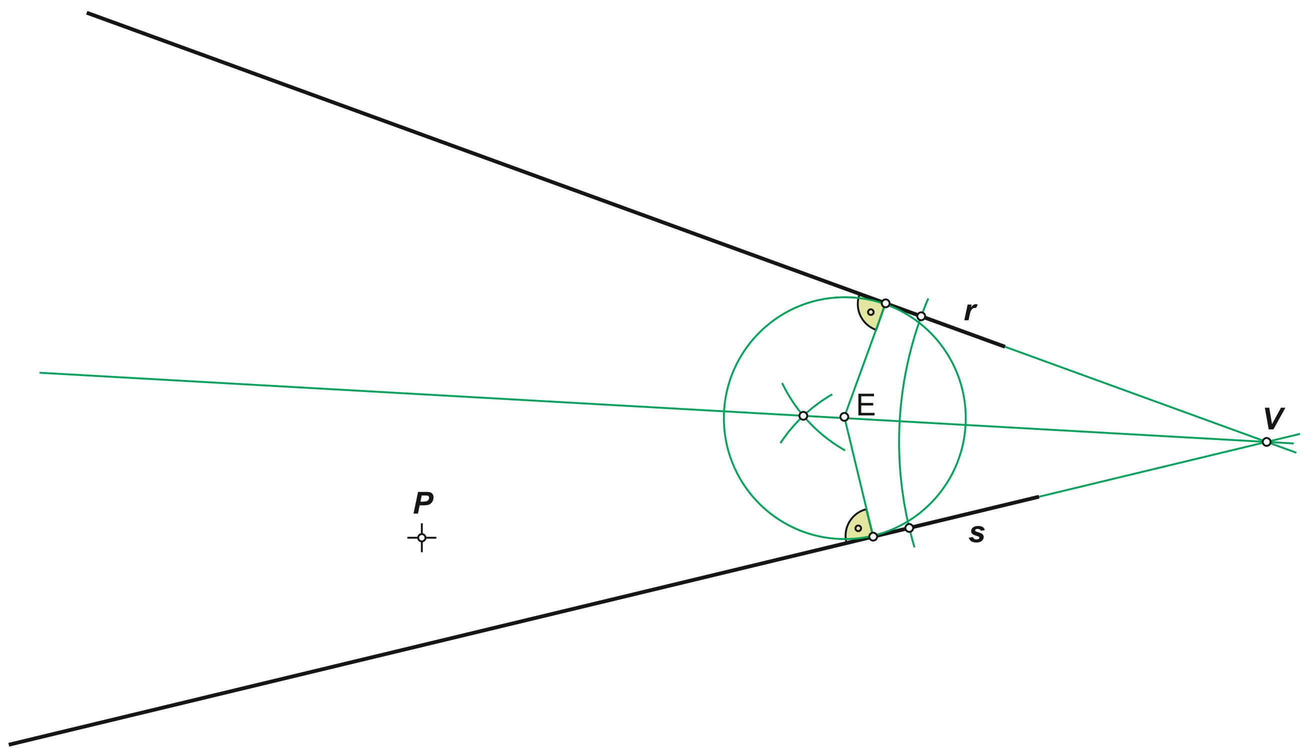


3. Los puntos inversos de Tc en ambas inversiones, T1 y T2, son los puntos de tangencia con r de las dos soluciones

Aplicando inversión, trazar las circunferencias tangentes a las rectas r y s
y que pasen por el punto P

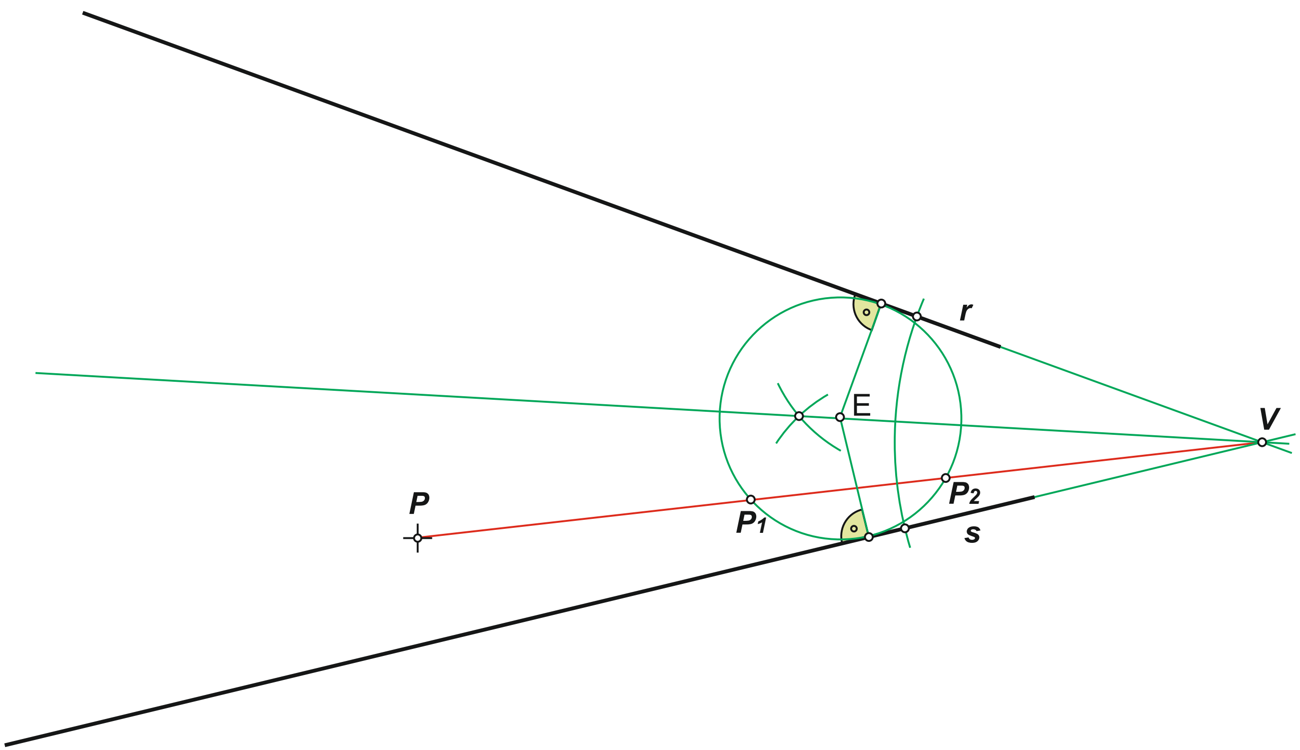


Aplicando inversión, trazar las circunferencias tangentes a las rectas r y s y que pasen por el punto P



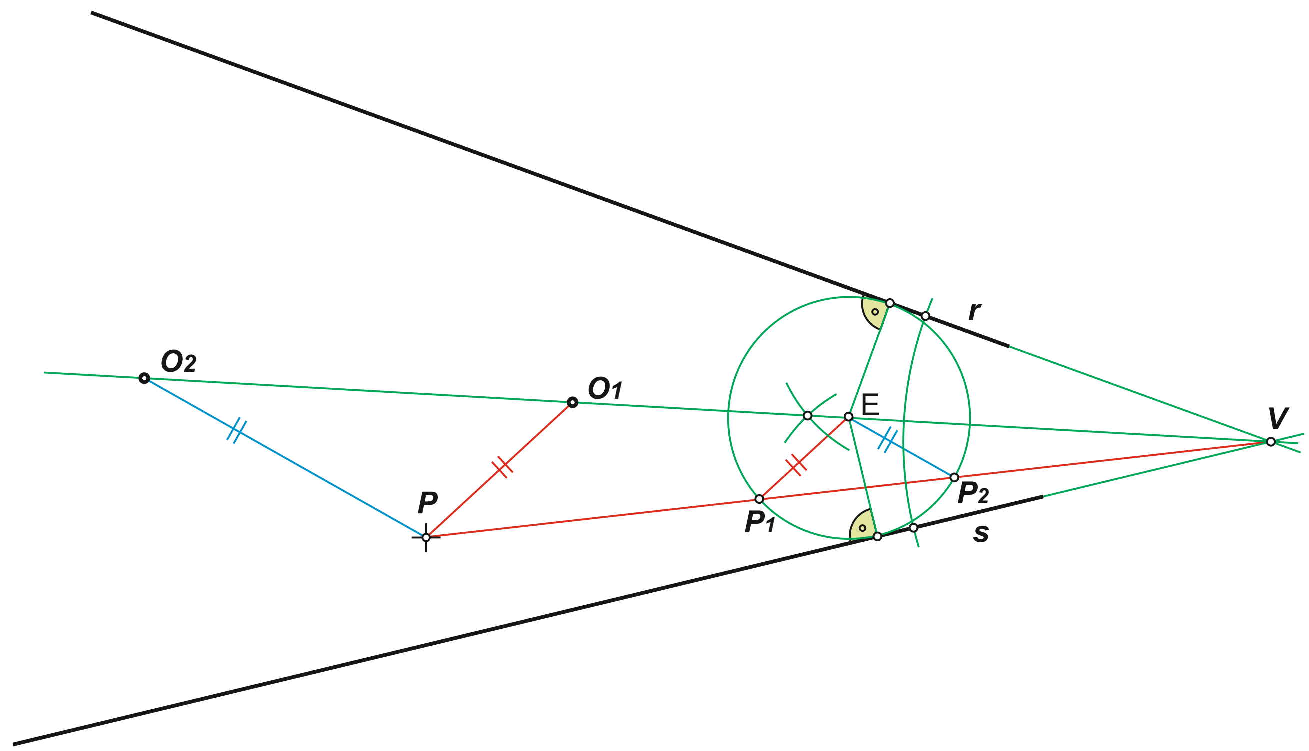
1.Se traza una circunferencia cualquiera tangente a las rectas r y s. Dicha circunferencia tendrá su centro E en la bisectriz del ángulo que forman r y s

Aplicando inversión, trazar las circunferencias tangentes a las rectas r y s y que pasen por el punto P



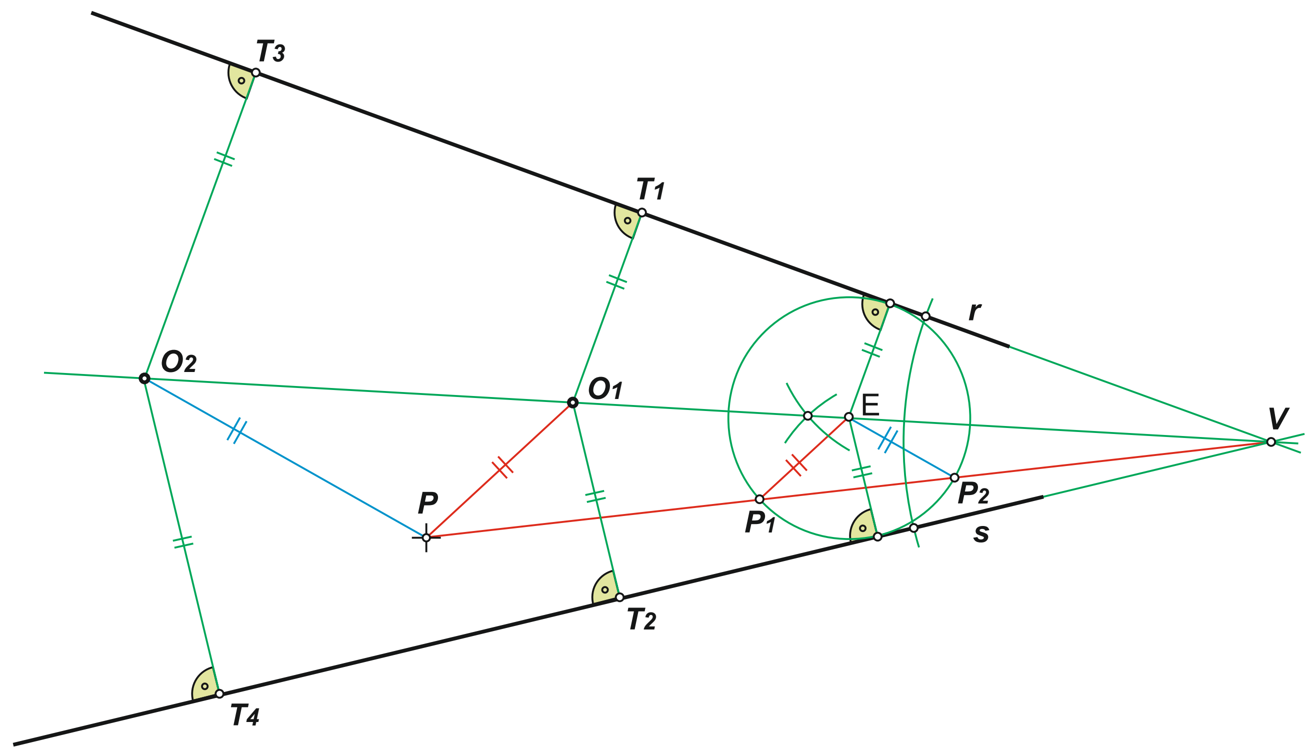
2. Se establecen dos inversiones positivas de diferente potencia y centro V, punto de intersección de r y s, de modo que la circunferencia inversa de la de centro E en cada una de estas inversiones sea una de las soluciones. los inversos del punto P dado en las dos inversiones descritas, pertenecen a E y han de estar alineados con P y con M. son los puntos P_1 y P_2

Aplicando inversión, trazar las circunferencias tangentes a las rectas r y s y que pasen por el punto P



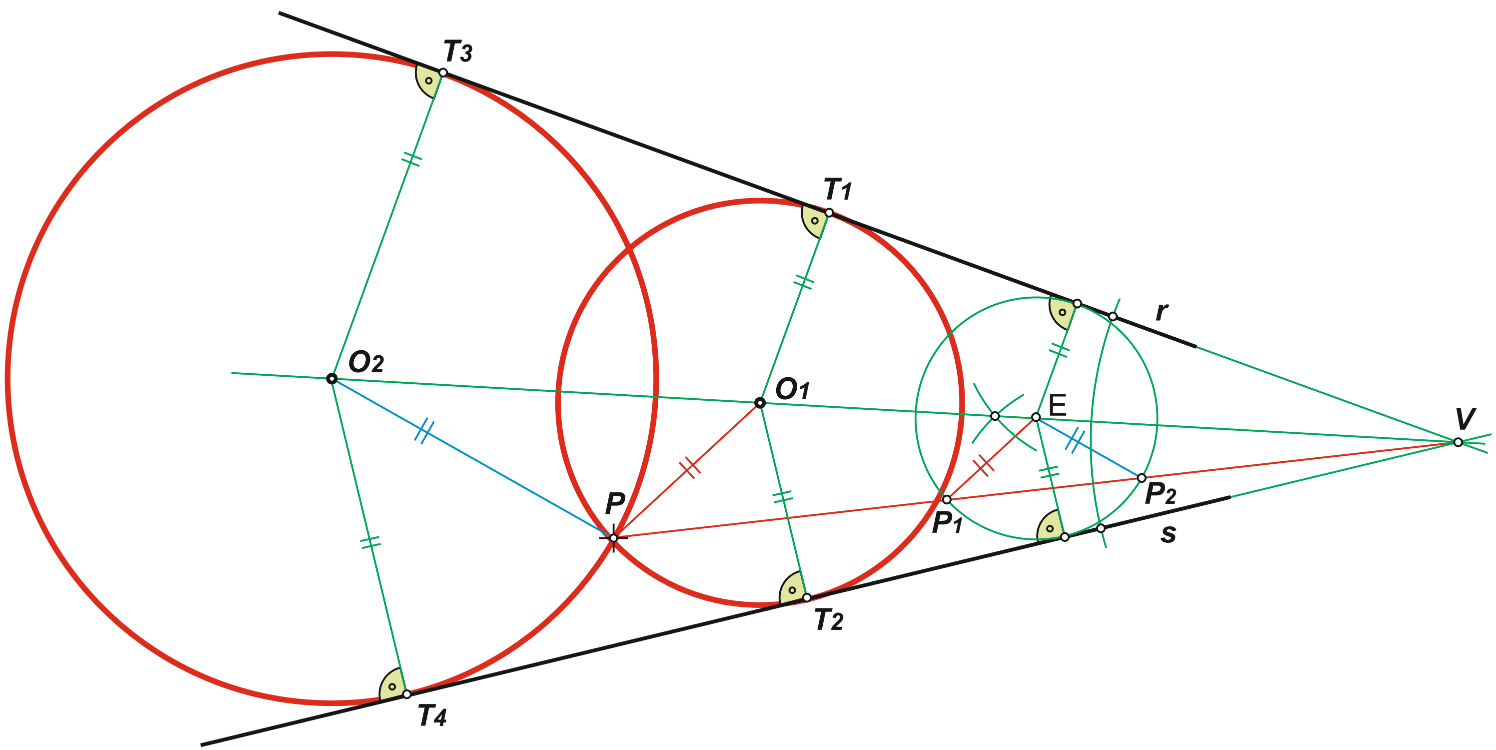
3. Sabiendo que las circunferencias solución, además de inversas de la de centro E, son homotéticas de ésta, se determinan sus centros O1 y O2 trazando paralelas por P a las rectas P_1E y P_2E

Aplicando inversión, trazar las circunferencias tangentes a las rectas r y s y que pasen por el punto P



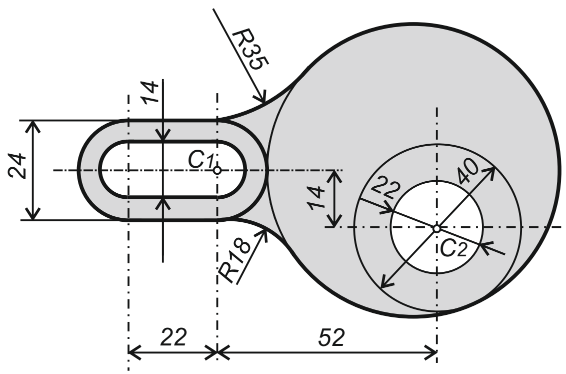
3. Sabiendo que las circunferencias solución, además de inversas de la de centro E, son homotéticas de ésta, se determinan sus centros O1 y O2 trazando paralelas por P a las rectas P_1E y P_2E

Aplicando inversión, trazar las circunferencias tangentes a las rectas r y s y que pasen por el punto P

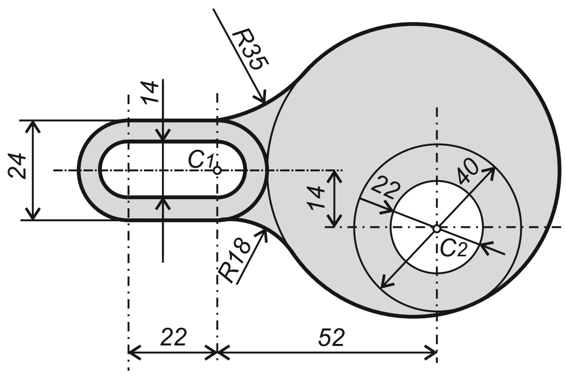


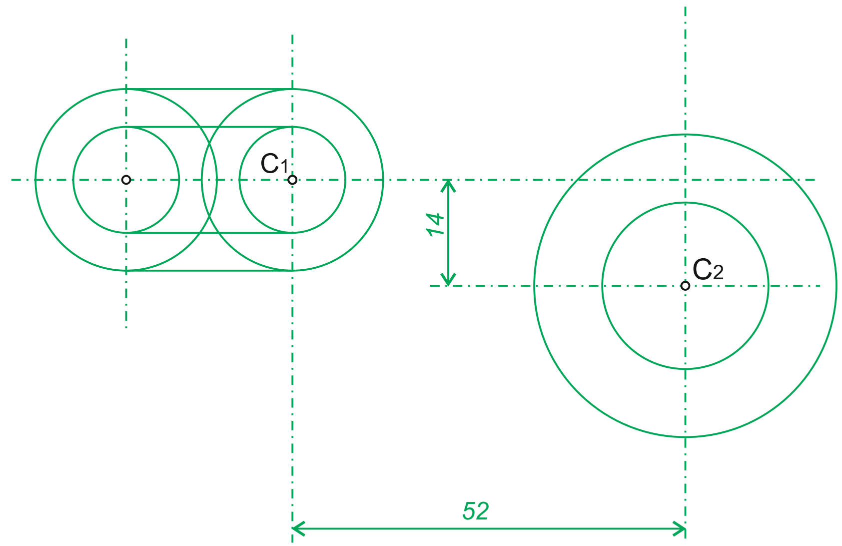
3. Sabiendo que las circunferencias solución, además de inversas de la de centro E, son homotéticas de ésta, se determinan sus centros O1 y O2 trazando paralelas por P a las rectas P_1E y P_2E

Delinear a escala 1:1 la pieza industrial adjunta. La determinación de la circunferencia de mayor diámetro, tangente a las de centros C1 y C2 debe hacerse aplicando inversión.



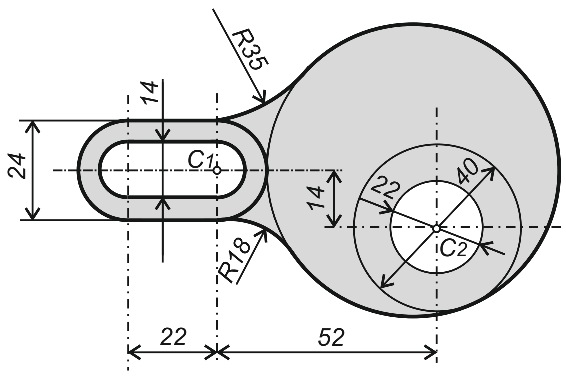
Delinear a escala 1:1 la pieza industrial adjunta. La determinación de la circunferencia de mayor diámetro, tangente a las de centros C1 y C2 debe hacerse aplicando inversión.

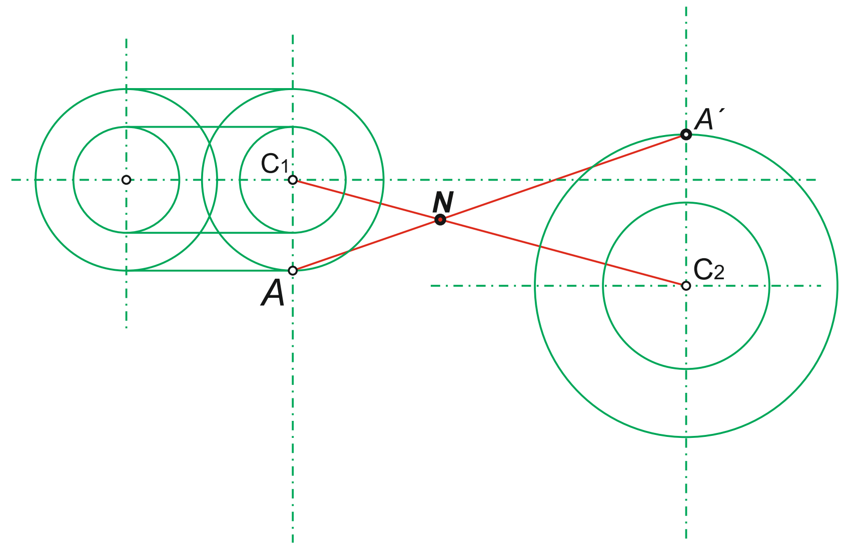




1. Con los datos que disponemos podemos dibujar la parte izquierda de la corredera, y las circunferencias de diámetro 40 y 22 de centro C_2

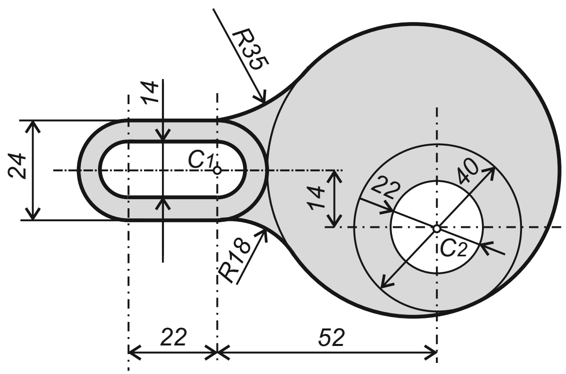
Delinear a escala 1:1 la pieza industrial adjunta. La determinación de la circunferencia de mayor diámetro, tangente a las de centros C1 y C2 debe hacerse aplicando inversión.

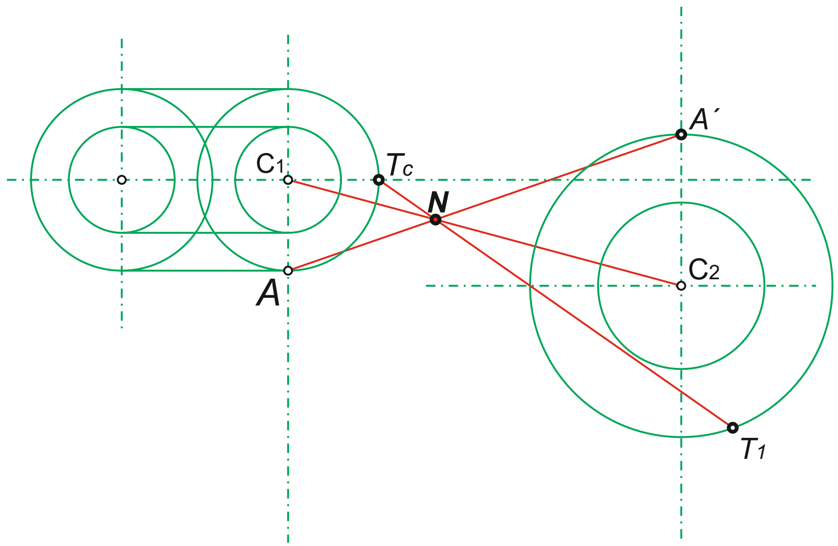




2. Se establece una relación de inversión negativa de centro N entre la circunferencia de centro C_1 y diámetro 24 y la de centro C_2 y diámetro 40. Hay que tener en cuenta que este par de circunferencias, además de inversas son homotéticas en una homotecia negativa de centro N, intersección de las rectas C_1C_2 y AA´.

Delinear a escala 1:1 la pieza industrial adjunta. La determinación de la circunferencia de mayor diámetro, tangente a las de centros C1 y C2 debe hacerse aplicando inversión.

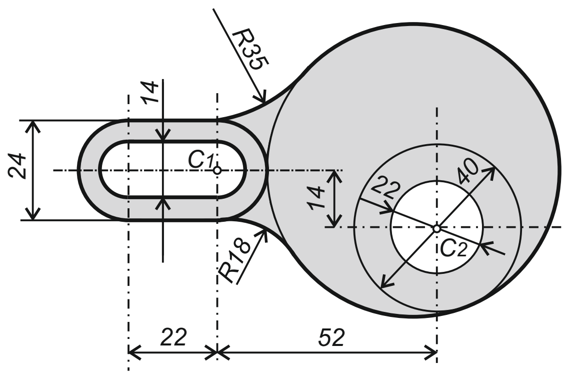


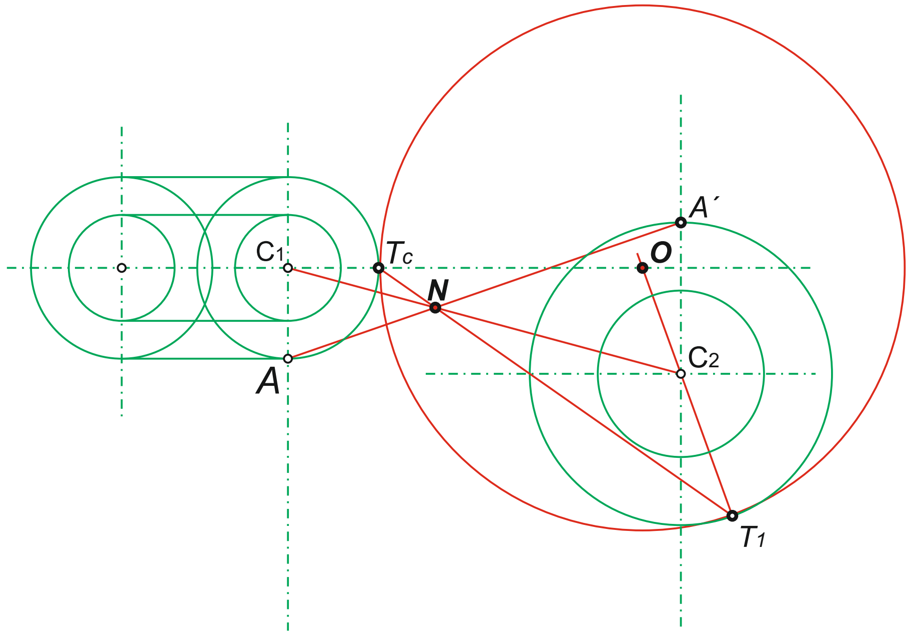


3. Se calcula el punto inverso, o antihomotético, de T_c, punto T_1, que será el de tangencia de la circunferencia que se busca con la de centro C_2

JUAN DÍAZ ALMAGRO

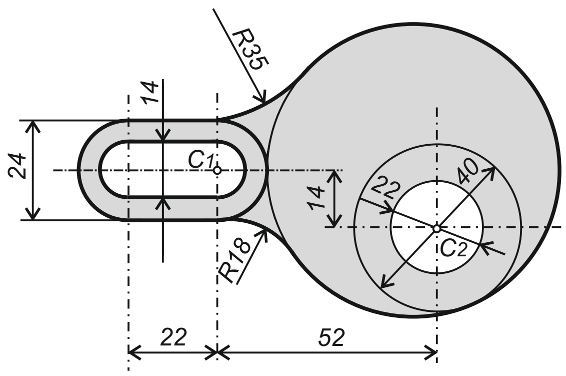
Delinear a escala 1:1 la pieza industrial adjunta. La determinación de la circunferencia de mayor diámetro, tangente a las de centros C1 y C2 debe hacerse aplicando inversión.

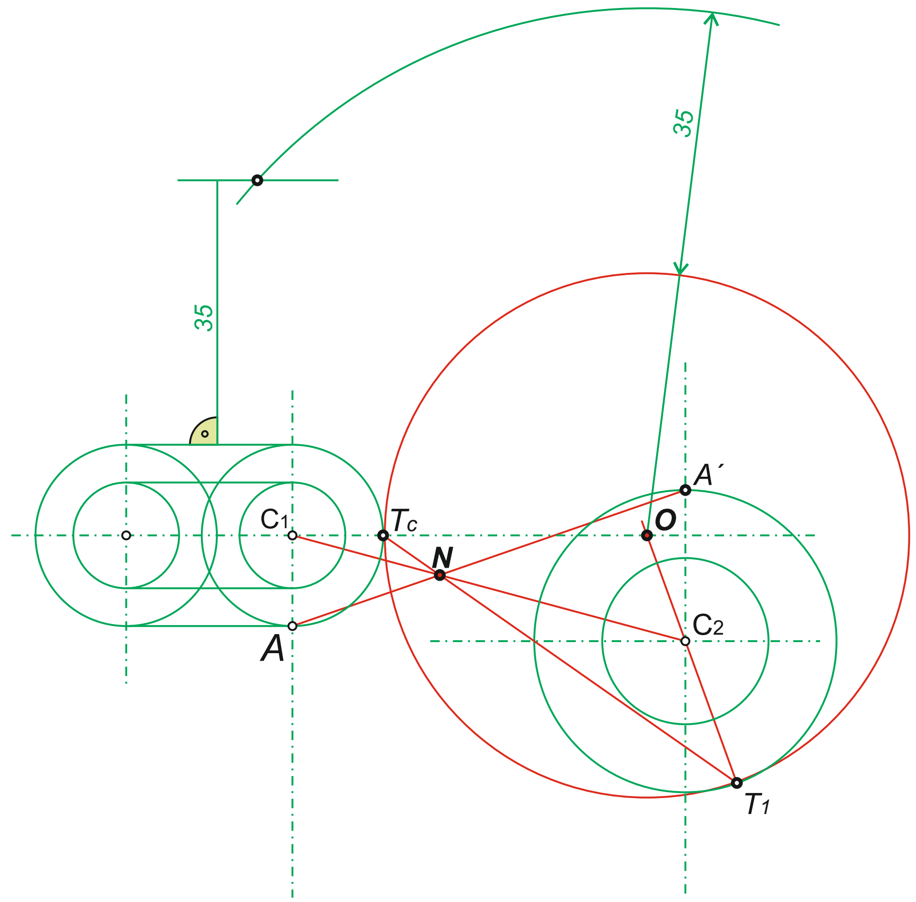




4. Conocidos los puntos de tangencia Tc y T_1, respectivamente, con las circunferencias de centros C_1 y C_2, se calcula el centro O de la circunferencia solución en las rectas C_1Tc y C_2T_1.

Delinear a escala 1:1 la pieza industrial adjunta. La determinación de la circunferencia de mayor diámetro, tangente a las de centros C1 y C2 debe hacerse aplicando inversión.

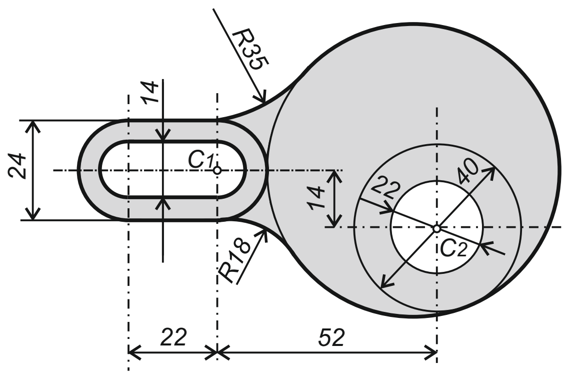


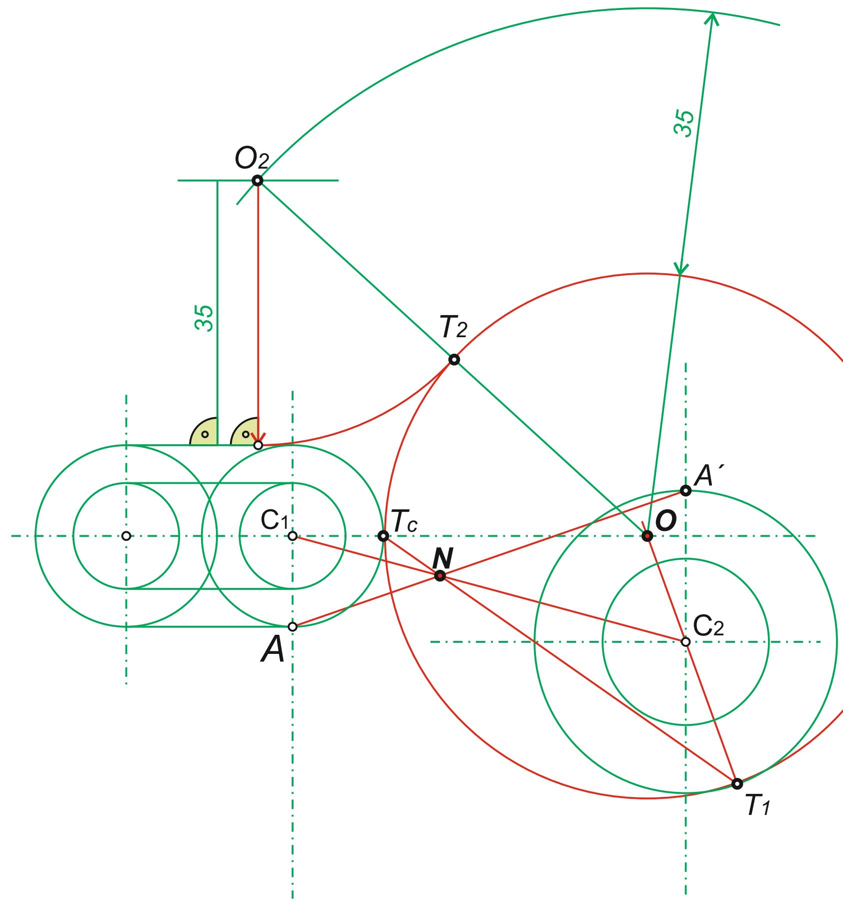


5. Trazamos el arco (*radio 35*) de unión de la recta horizontal superior y de la circunferencia de centro O.

JUAN DÍAZ ALMAGRO

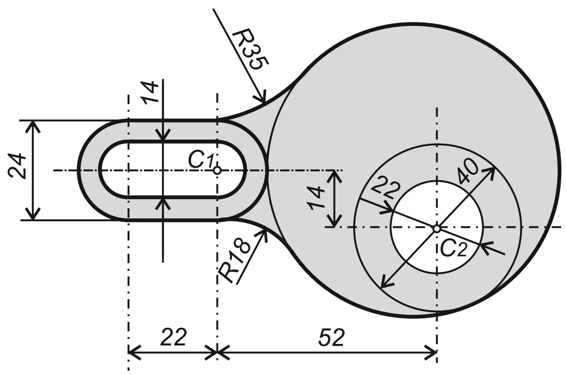
Delinear a escala 1:1 la pieza industrial adjunta. La determinación de la circunferencia de mayor diámetro, tangente a las de centros C1 y C2 debe hacerse aplicando inversión.

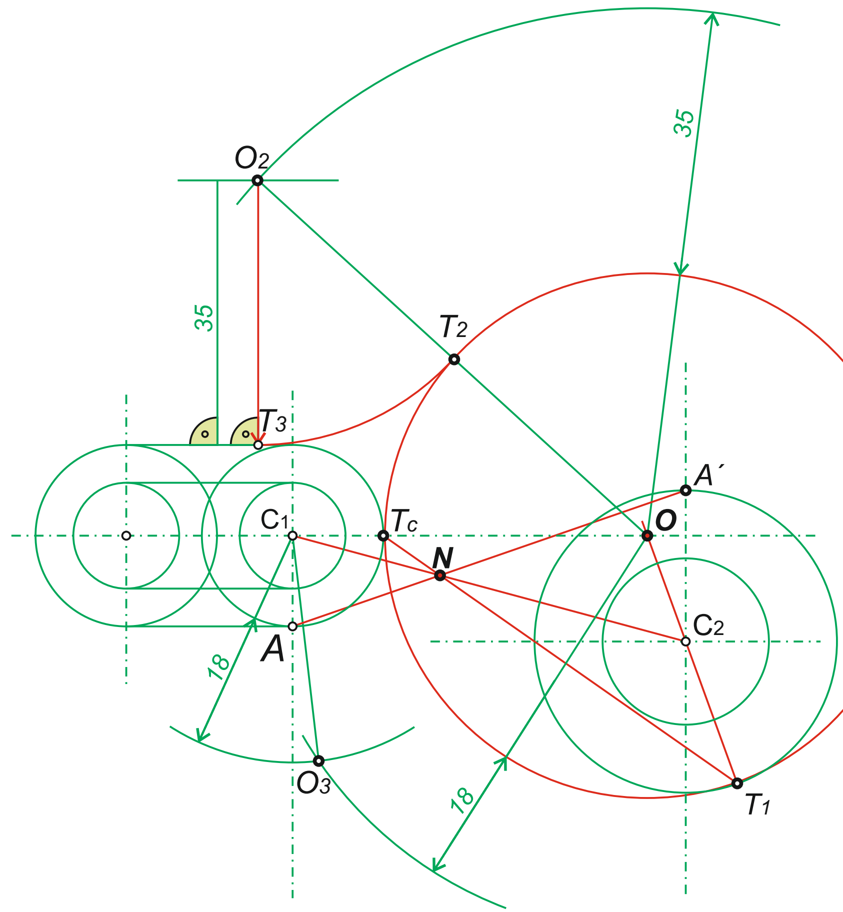




5. Trazamos el arco (*radio 35*) de unión de la recta horizontal superior y de la circunferencia de centro O.

Delinear a escala 1:1 la pieza industrial adjunta. La determinación de la circunferencia de mayor diámetro, tangente a las de centros C1 y C2 debe hacerse aplicando inversión.

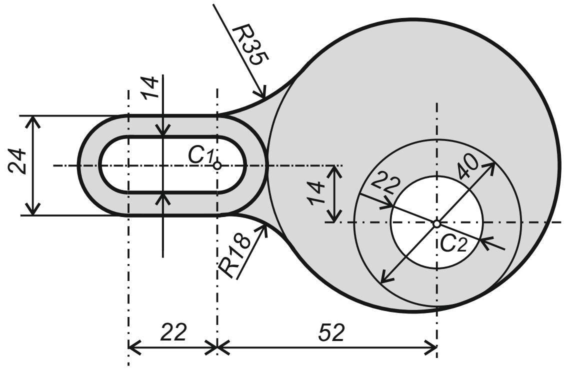


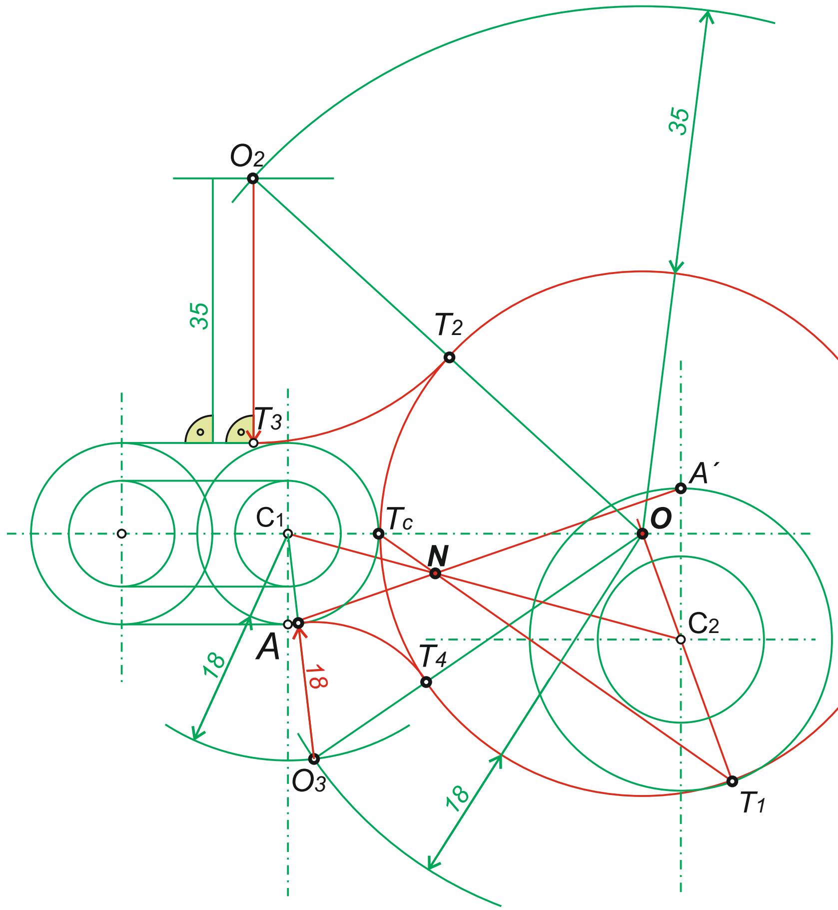


6. Sólo falta trazar el arco (*radio 18*) de unión de la semicircunferencia de centro C1 con la circunferencia de centro O.

JUAN DÍAZ ALMAGRO

Delinear a escala 1:1 la pieza industrial adjunta. La determinación de la circunferencia de mayor diámetro, tangente a las de centros C1 y C2 debe hacerse aplicando inversión.

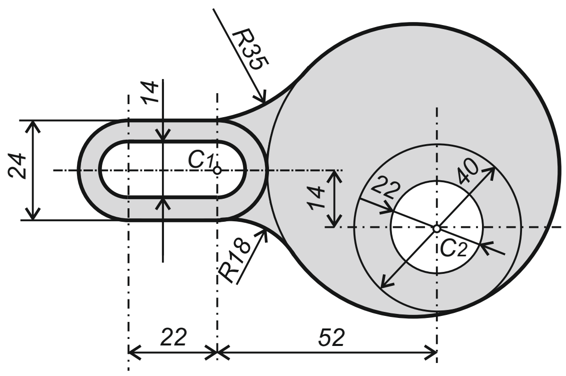


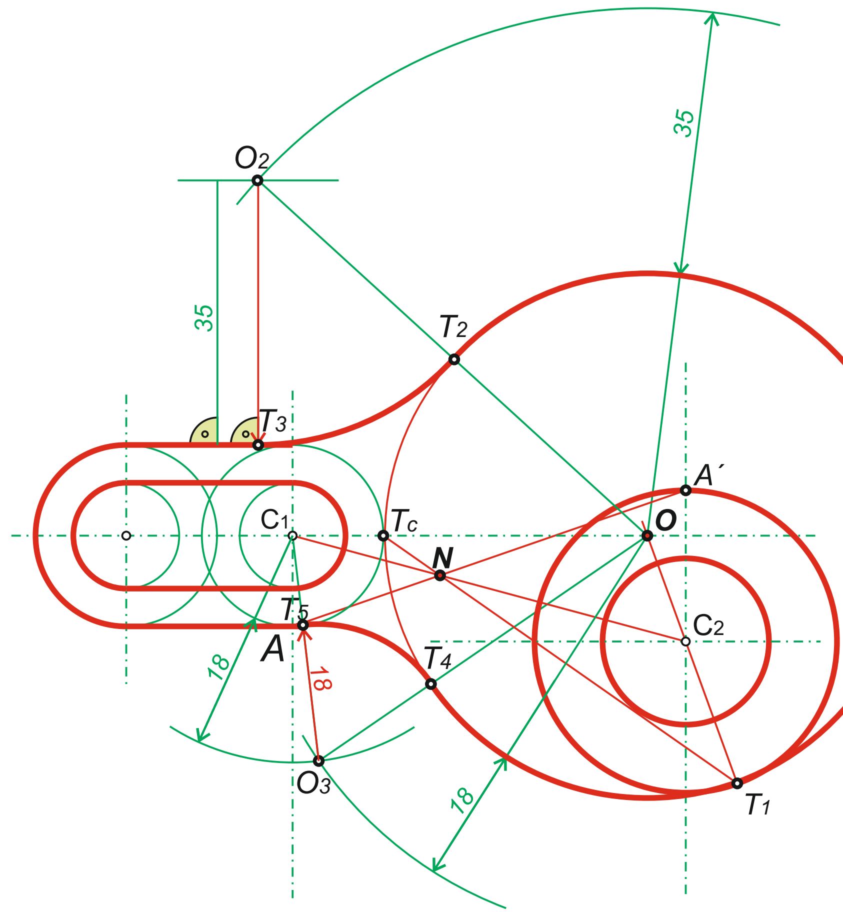


6. Sólo falta trazar el arco (*radio 18*) de unión de la semicircunferencia de centro C1 con la circunferencia de centro O.

JUAN DÍAZ ALMAGRO

Delinear a escala 1:1 la pieza industrial adjunta. La determinación de la circunferencia de mayor diámetro, tangente a las de centros C1 y C2 debe hacerse aplicando inversión.





6. Sólo falta trazar el arco (*radio 18*) de unión de la semicircunferencia de centro C1 con la circunferencia de centro O.