GEOMETRÍA PLANA

CURVAS CÓNICAS

Francisco M Jurado Molina

IES SAN JUAN DE LA CRUZ (Úbeda)

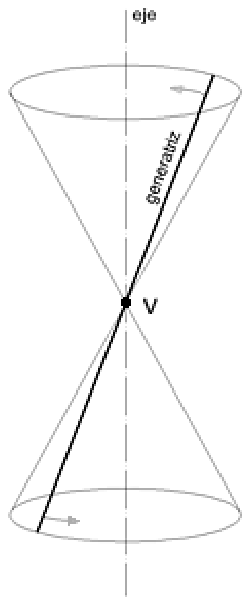
CURVAS CÓNICAS

Consideraciones generales sobre las curvas cónicas

Definición

Se denomina superficie cónica de revolución, a la superficie generada por una recta denominada generatriz, al girar entorno a otra recta denominada eje.

El punto donde la generatriz corta al eje se denomina vértice V de la superficie cónica.



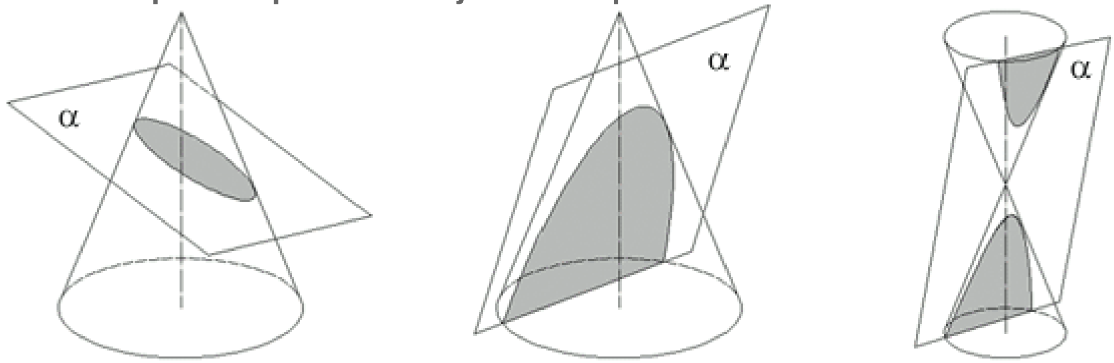
Si un plano α, intercepta a una superficie cónica de revolución, la sección producida se denomina superficie cónica, y su contorno es una curva plana de segundo grado.

Las curvas cónicas propiamente dichas son
tres Elipse, Parábola e Hipérbola.

La Elipse se genera cuando el plano α es oblicuo respecto al eje, y corta a todas las generatrices.

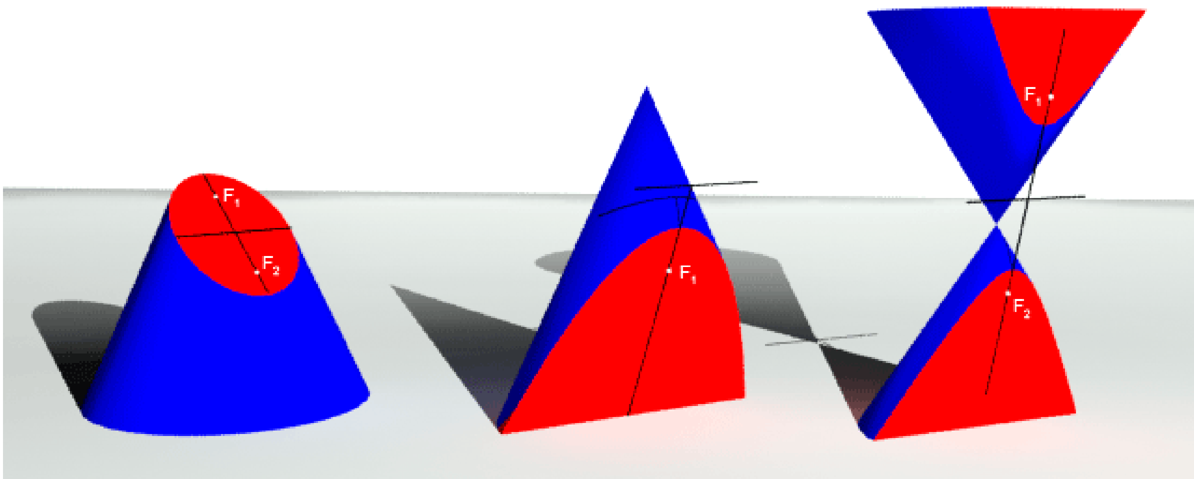
La Parábola se genera cuando el plano a es paralelo a una generatriz.

La Hipérbola se genera cuando el plano a es paralelo a dos generatrices. Por cuestiones didácticas y de mejor comprensión, se suele representar utilizando un plano a paralelo al eje de la superficie cónica de revolución.



ELIPSE PARÁBOLA HIPÉRBOLA

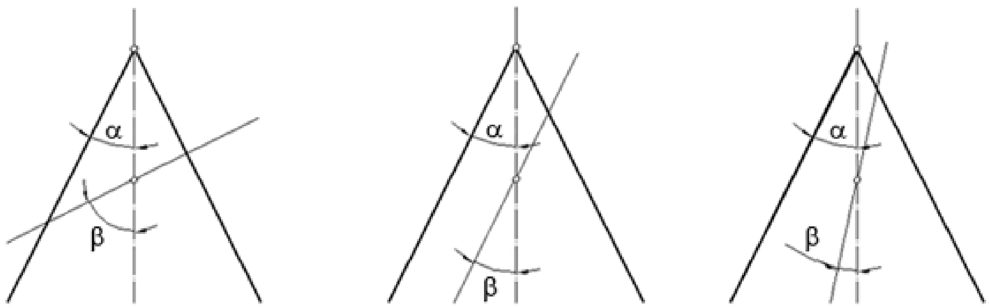
En las siguientes figuras puedes apreciar mejor en rojo, las curvas cónicas obtenidas.



ELIPSE PARÁBOLA HIPÉRBOLA

Al interceptar una superficie cónica de revolución con un plano, podemos contemplar dos ángulos, el a formado por el eje y la generatriz, y el β formado por el eje y el plano de corte.

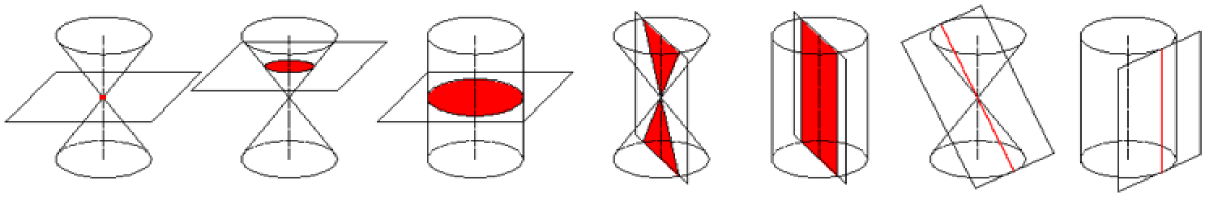
La relación entre estos ángulos determina el tipo cónica generada, como se puede apreciar en las figuras siguientes.



ELIPSE PARÁBOLA HIPÉRBOLA

Cónicas singulares o degeneradas

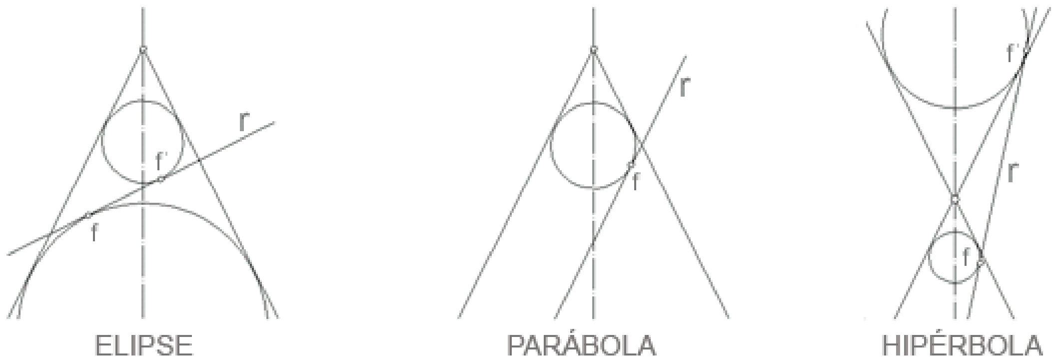
En función de la posición del plano de corte y las propiedades del cono, se pueden obtener otras curvas cónicas que se denominan singulares o degeneradas.



Teorema de Dandelín

Según el teorema de Dandelín, si trazamos las esferas tangentes interiores a la superficie cónica de revolución y al plano el a que la corta, los puntos de intersección f y f’ de dicha esfera con la recta r, eje de las curvas cónicas, son los denominados focos de las curvas.

Mientras en la elipse y en la hipérbola hay dos focos, en la parábola solo tendremos uno.



La Elipse

Definición

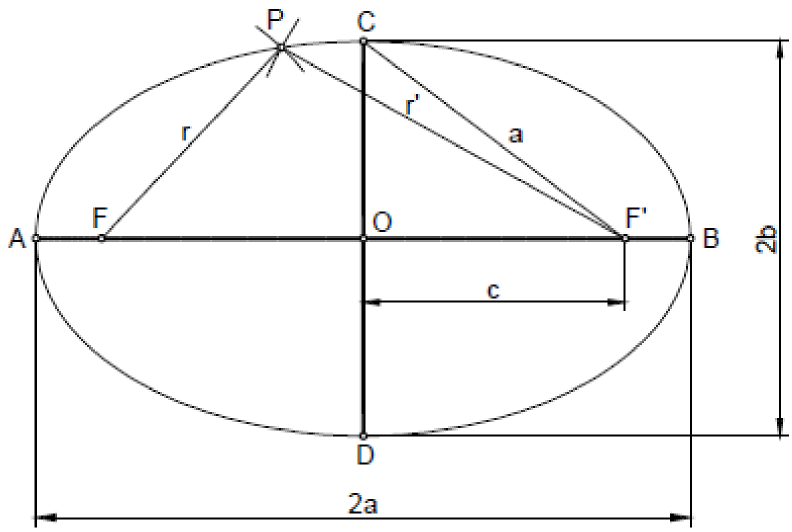
La elipse es una curva cerrada y plana, que se define como el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias r+r’, a dos puntos fijos F y F’, denominados focos, es constante e igual a 2a, siendo 2a la longitud del eje mayor A-B de la elipse.

La elipse tiene dos eje, el eje mayor A-B, también llamado real, y el eje menor C-D, ambos se cruzan perpendicularmente en el centro O de la elipse.

La longitud del eje mayor es 2a, la del eje menor 2b y la distancia focal 2c, y se cumple que $a^2 = b^2 + c^2$.

La elipse es simétrica respecto a los dos ejes.

Las rectas que unen un punto cualquiera de la elipse P, con los focos, se denominan radios vectores r y r’, y por definición se cumple que r + r’ = 2a.

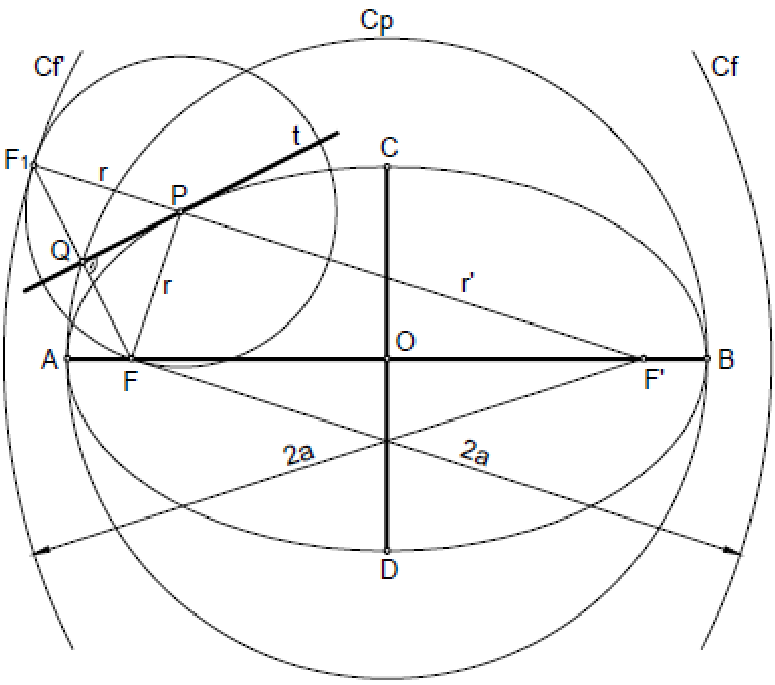


Propiedades y elementos

Se denomina circunferencia principal Cp, a la circunferencia de centro O, y diámetro 2a. La circunferencia principal, se define como el lugar geométrico de los pies de las perpendiculares(Q), trazadas desde los focos a las tangentes (t) de la elipse. También se puede definir como el punto medio de los segmentos que unen un foco, con la circunferencia focal del otro foco, y las mediatrices de dichos segmentos, son tangentes a la elipse

Se denomina circunferencia focal Cf, a la circunferencia de centro en uno de los focos de la elipse, y radio 2a. En una elipse se podrán trazar dos circunferencias focales. La circunferencia focal, se define como el lugar geométrico de los puntos simétricos del otro foco (F1), respecto a las tangentes (t) de la elipse.

Observando la figura, también podemos definir la elipse, como el lugar geométrico de los centros de circunferencia que pasan por un foco, y son tangentes a la circunferencia focal del otro foco.

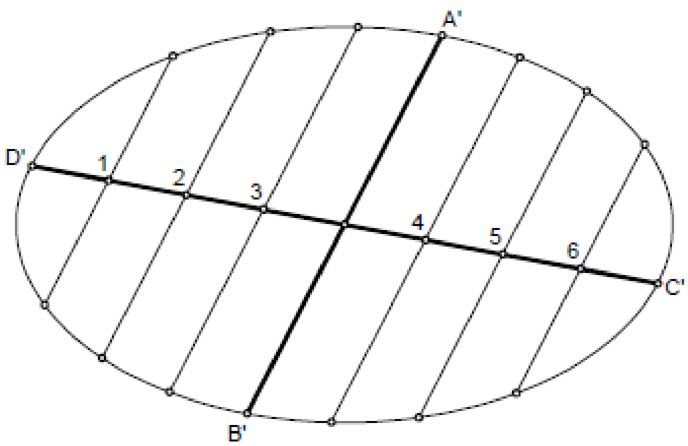


Concepto de diámetros conjugados

Si tenemos un diámetro de la elipse A’B’, el diámetro conjugado con él, es el lugar geométrico de los centros de las cuerdas paralelas a dicho diámetro (1, 2, 3, 4, etc.), estos centros determinan el diámetro conjugado D’C’ del dado.

Los ejes reales de la elipse, son los únicos diámetros conjugados perpendiculares entre si.

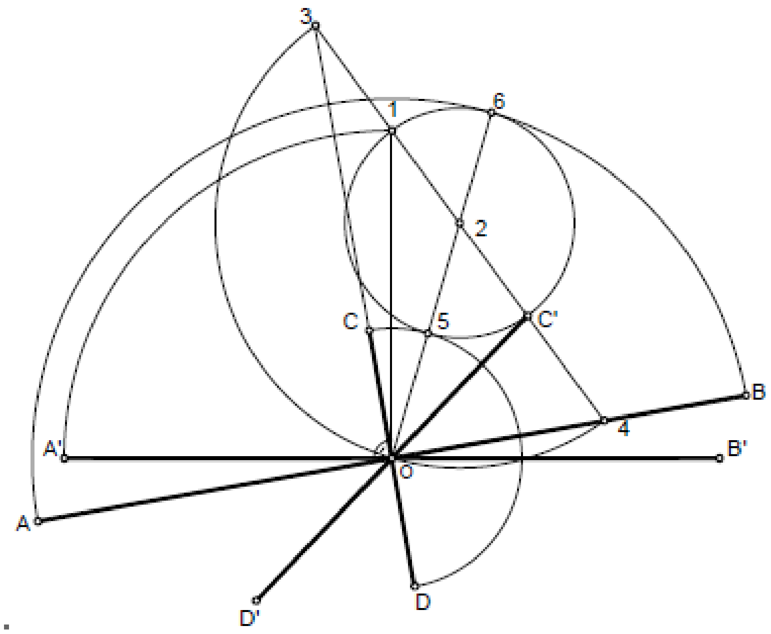
Mediante dos diámetros conjugados, podremos construir la elipse directamente, o bien obtener los ejes reales de la misma.



Obtención de los ejes reales, a partir de dos ejes conjugados

Dados los ejes conjugados de una elipse A'B' y C'D', podremos obtener a partir de ellos los ejes reales de la elipse, para ello seguiremos los siguientes pasos:

1.- Por O, centro de la elipse, trazaremos la perpendicular al eje conjugado A'B', y sobre el llevaremos la distancia O-A', determinando el punto 1.
2.- Uniremos el punto 1 con C', y determinaremos el punto medio 2, de dicho segmento.
3.- Con centro en 2, trazaremos un arco de radio 2-O, que determinará sobre la prolongación del segmento 1-C', los puntos 3 y 4. Las rectas O-3 y O-4 determinan las direcciones perpendiculares de los ejes reales de la elipse.
4.- Con centro en 2 trazaremos la circunferencia de diámetro 1-C'. Uniendo el centro O con 2, determinaremos sobre dicha circunferencia, los puntos 5 y 6, siendo las distancias O-5 y O-6, las dimensiones de los semiejes reales de la elipse.
5.- Solo resta llevar, mediante los correspondientes arcos de circunferencias, las dimensiones anteriores sobre las direcciones de los ejes, obteniendo así los ejes reales de la elipse AB y CD

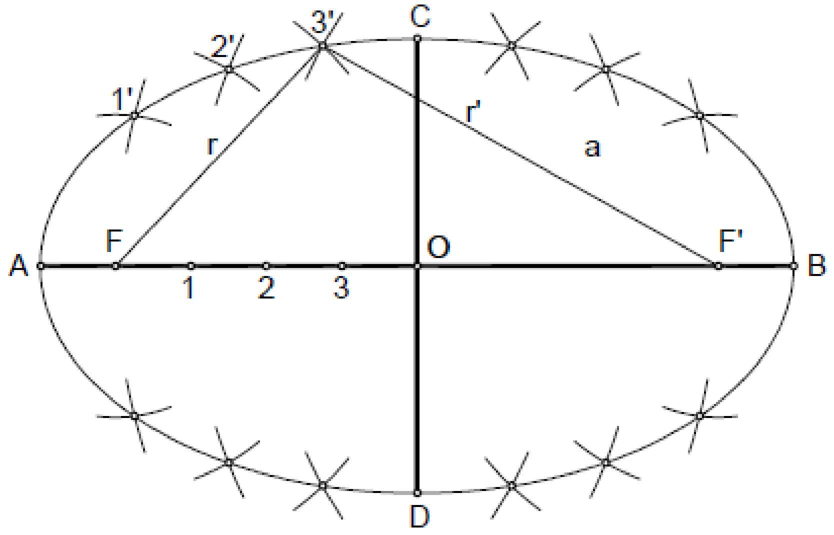


Trazado de la elipse mediante radios vectores

Teniendo en cuenta la definición de la elipse, como el lugar geométrico de los puntos del plano, cuya suma de distancias a los focos es igual a 2a, longitud del eje mayor de la elipse, solo necesitaremos coger pares de radios vectores, cuya suma sea 2a, para ello determinaremos una serie de puntos sobre el eje mayor 1, 2, 3 etc., y cogeremos como parejas de radios vectores, los segmentos A1-B1, A2-B2, A3-B3, y así sucesivamente, determinando los puntos 1′, 2′, 3′, etc. de la elipse.

Con cada pareja de radios vectores, se determinarán cuatro puntos de la elipse, uno en cada cuadrante de la misma.

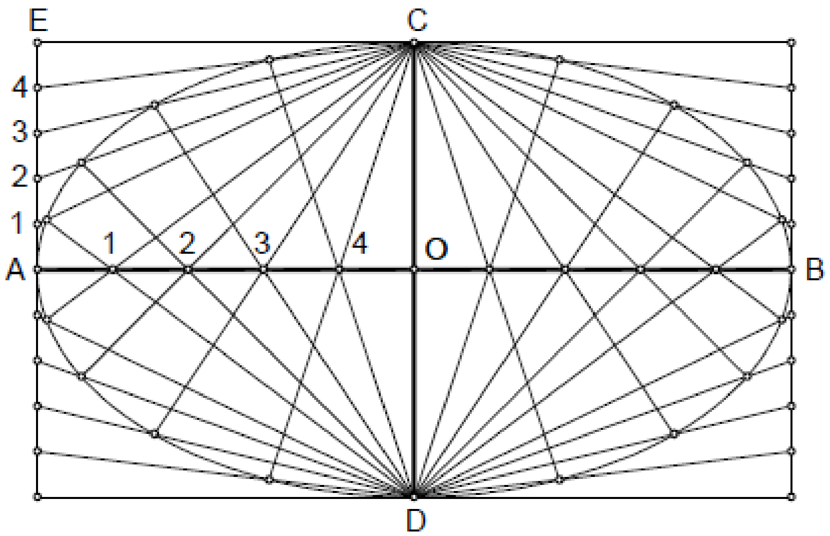
Cuanto mayor sea el número de puntos, mayor será la precisión del trazado de la elipse, que deberá realizarse, o bien a mano alzada o mediante reglas flexibles, o plantillas de curvas especiales.



Trazado de la elipse por haces proyectivos

Trazaremos el rectángulo AOCE, y dividiremos los lados AO y AE en un mismo número de partes iguales.

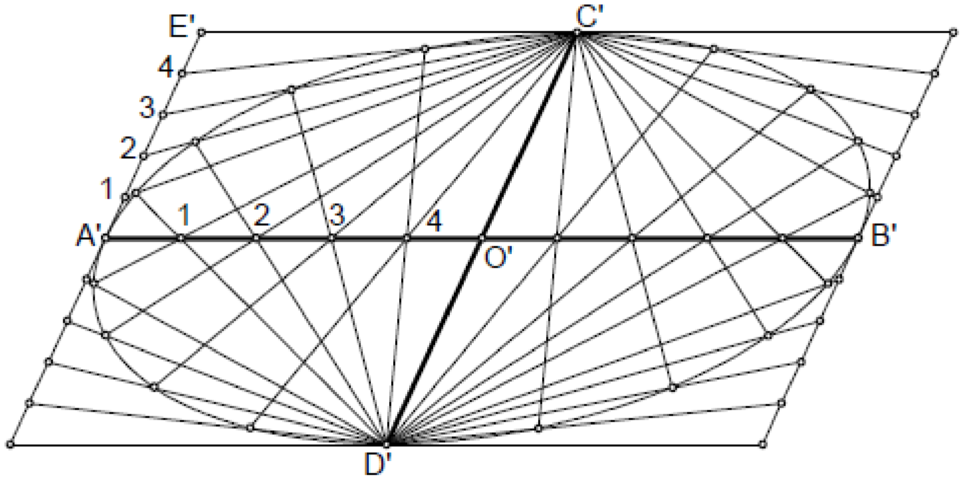
Seguidamente iremos trazando las rectas C1-D1, C2-D2, etc. y en sus intersecciones iremos obteniendo puntos de la elipse. Esto se repetirá para los cuatro cuadrantes de la elipse.



Trazado de la elipse por haces proyectivos, dados dos ejes conjugados

Trazaremos el romboide A'O'C'E', y dividiremos los lados A'O' y A'E' en un mismo número de partes iguales.

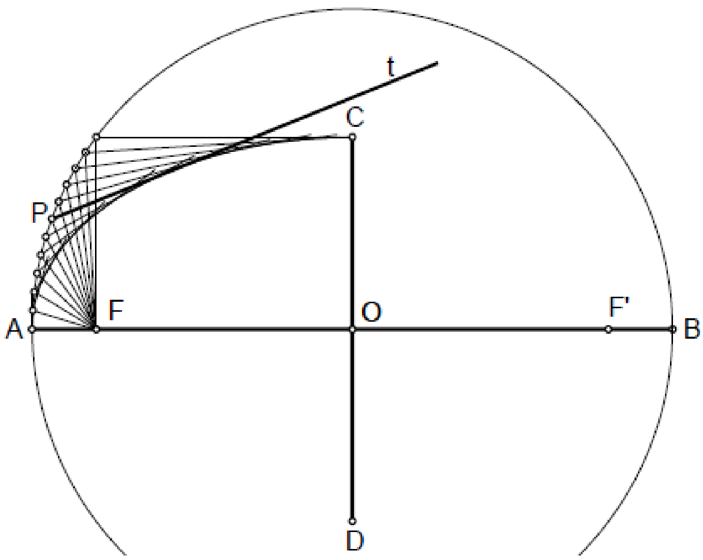
Seguidamente iremos trazando las rectas C'1-D'1, C'2-D'2, etc. y en sus intersecciones iremos obteniendo puntos de la elipse. Esto se repetirá para los cuatro cuadrantes de la elipse.



Trazado de la elipse por envolventes

Esta construcción se basa en el hecho de que la circunferencia principal de una elipse, es el lugar geométrico de los pies de las perpendiculares trazadas desde los focos a las tangentes a la elipse.

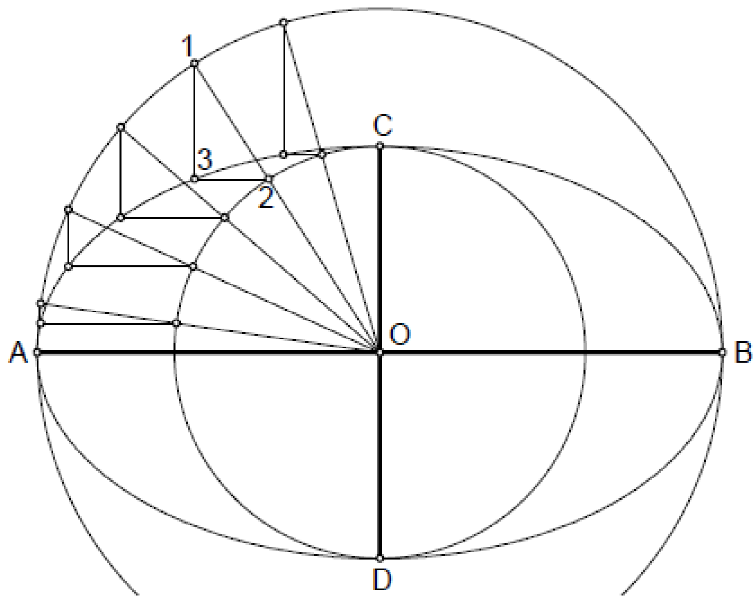
Para este trazado partiremos de puntos de la circunferencia principal, como el P, indicado en la figura. Uniremos dicho punto con el foco F, y trazaremos por P la perpendicular al segmento PF, obteniendo la recta t, tangente a la elipse. Repitiendo esta operación, obtendremos una serie de tangentes que irán envolviendo a la elipse.



Trazado de la elipse a partir de circunferencias afines

Comenzaremos trazando las circunferencias de centro O, y diámetros AB y CD.

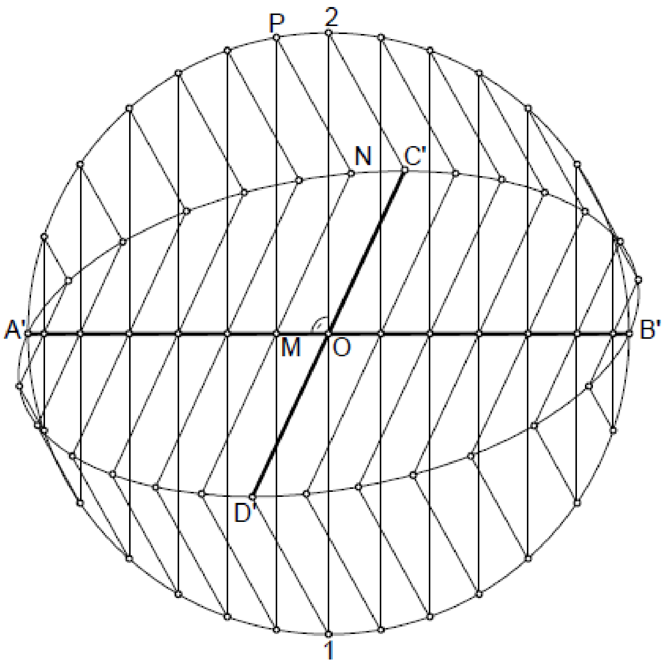
Seguidamente trazaremos radios como el O1, que corta a las circunferencias anteriores en los puntos 1 y 2. Por dichos puntos trazaremos las paralelas a CD y AB respectivamente. Dichas paralelas se cortan en el punto 3, que es de la elipse. El número de radios trazados, serán los necesarios para definir suficientemente la elipse.



Trazado de la elipse a partir de dos diámetros conjugados por triángulos semejantes afines

Partiendo de los ejes conjugados A’B’ y C’D’, comenzaremos trazando la circunferencia de centro O y diámetro A’B’.

Sobre la circunferencia anterior, trazaremos cuerdas perpendiculares a A’B’, como la 1-2. Uniendo 2 con C’, y 1 con D’, obtendremos los triángulos O2C‘ y O1D’. Solo restará construir en el resto de cuerdas triángulos semejantes a estos como el MPN, de lados paralelos al triángulo O2C’, obteniendo así puntosde la elipse

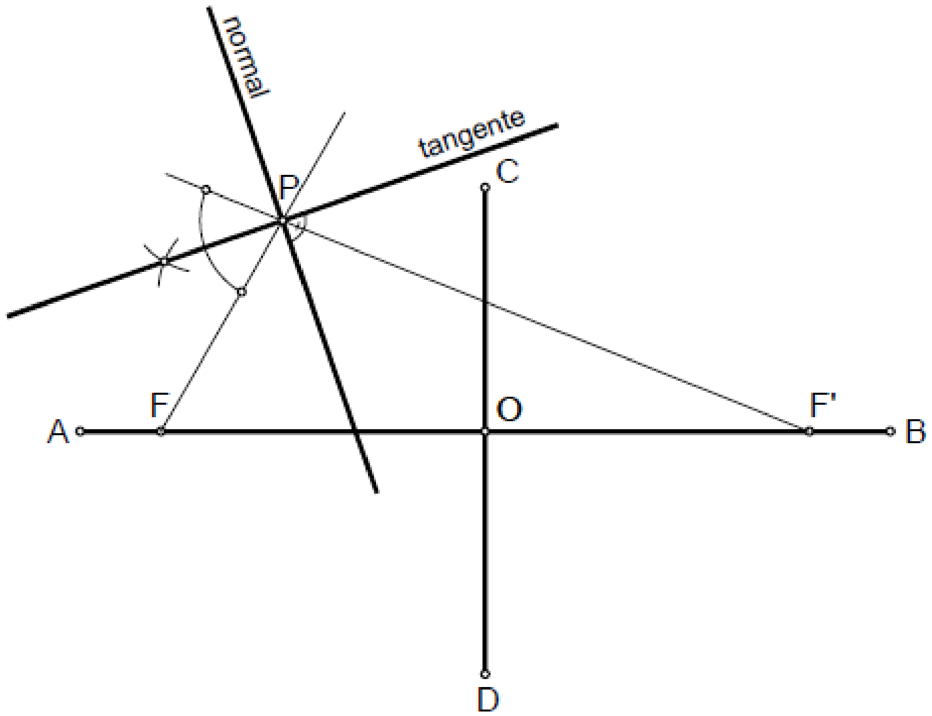


.

Recta tangente y normal en un punto de la elipse

La tangente a la elipse en un punto de ella P, es la bisectriz del ángulo exterior que forman los radios vectores en dicho punto.

La normal en P, es la perpendicular a la tangente en dicho punto.



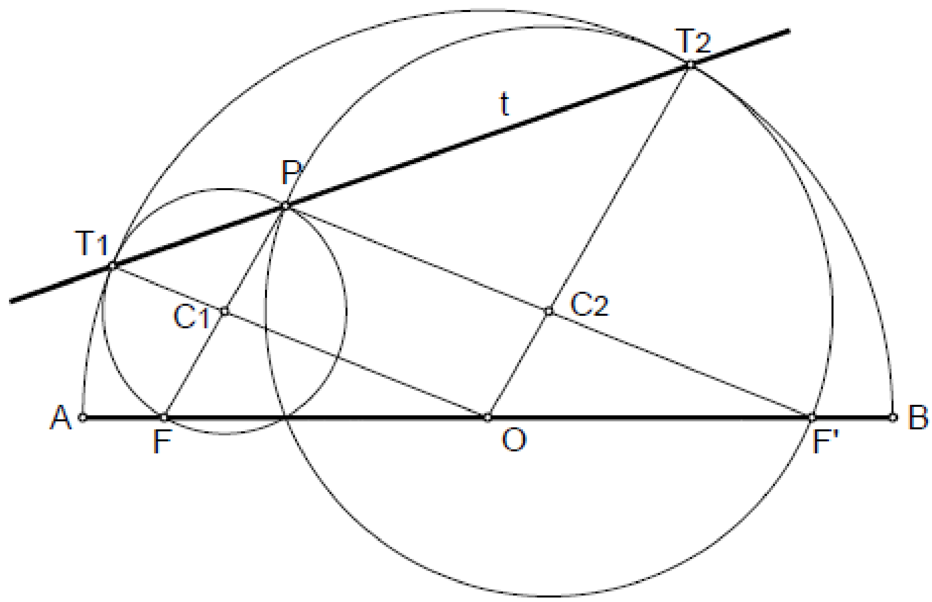
Recta tangente a la elipse en un punto, por circunferencia principal

Siendo P el punto de la elipse, comenzaremos trazando las circunferencias de centro C1 y C2, puntos medios de los radios vectores del punto P, y diámetro dichos radios vectores.

Las circunferencias anteriores resultan ser tangentes interiores a la circunferencia principal, en los puntos T1 y T2, determinados al unir el centro O de la elipse con los centros C1 y C2.

Se cumple que los puntos T1, P y T2, están alineados, y determinan la recta t tangente a la elipse buscada.

También se verifica que las rectas F-P y O-T2, y F'-P y O-T1 son respectivamente paralelas.



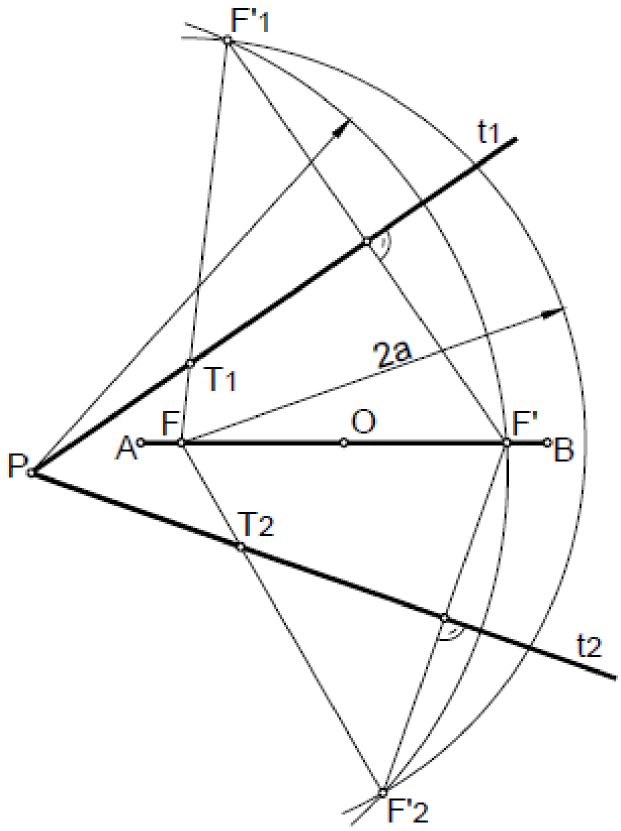
Rectas tangentes a la elipse desde un punto exterior, por circunferencia focal

Esta construcción se basa en la definición de circunferencia focal, como el lugar geométrico de los puntos simétricos del otro foco, respecto a las tangentes a la elipse.

Dado el punto P exterior a la elipse, comenzaremos trazando la circunferencia focal de centro en F, y a continuación la circunferencia de centro en P, y radio P-F', la cual corta a la focal en los puntos F'1 y F'2. Dichos puntos son los simétricos del F' respecto a las tangentes a la elipse desde el punto P.

Solo resta trazar las mediatrices de los segmentos F'-F'1 y F'-F'2, obteniendo así las rectas t1 y t2 que serán las tangentes a la elipse buscadas.

Para determinar los puntos de tangencia, trazaremos las rectas F-F’1 y F-F’2, que determinarán sobre las tangentes t1 y t2, los puntos T1 y T2, puntos de tangencia buscados.

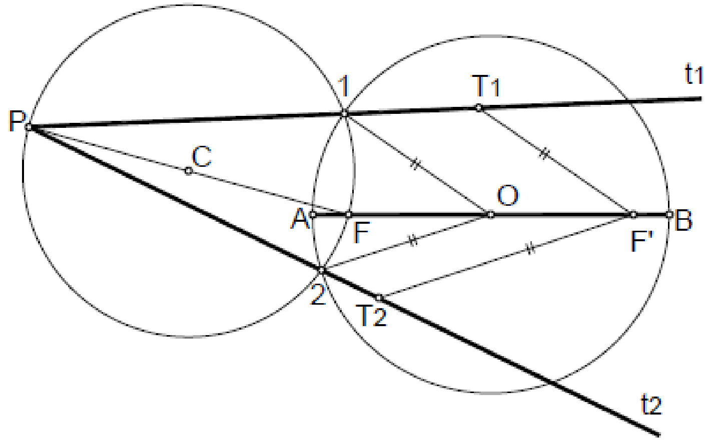


Rectas tangentes a la elipse desde un punto exterior, por circunferencia principal

Dado el punto P exterior a la elipse, comenzaremos trazando la circunferencia principal, y a continuación la circunferencia de centro en C, y diámetro P-F. Ambas circunferencias se interceptan en los puntos 1 y 2.

Las rectas P-1 y P-2, serán las tangentes t1 y t2 buscadas. Para determinar los puntos de tangencia, trazaremos las rectas O1 y O2, y por F’ las correspondientes paralelas, que determinarán sobre las

tangentes, los puntos T1 y T2, puntos de tangencia buscados.

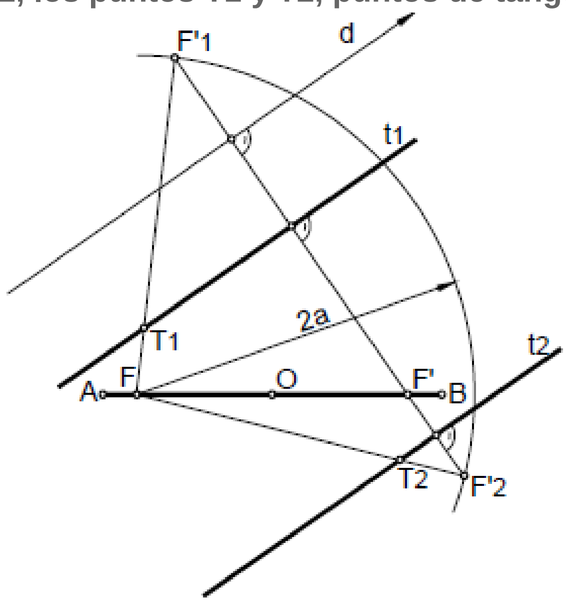


Rectas tangentes a la elipse, paralelas a una dirección dada, por circunferencia focal

Esta construcción es similar a la del trazado de tangentes desde un punto exterior, solo que en este caso el punto es un punto impropio situado en el infinito.

Dada la dirección d, comenzaremos trazando la circunferencia focal de centro en F, y a continuación la recta perpendicular a la dirección d, y que pase por el foco F'. Dicha recta determina sobre la circunferencia focal, los puntos F'1 y F'2.

Las mediatrices de los segmentos F'-F'1 y F'-F'2, serán las tangentes a la elipse t1 y t2 buscadas. Para determinar los puntos de tangencia, trazaremos las rectas F-F'1 y F-F'2, que determinarán sobre las tangentes t1 y t2, los puntos T1 y T2, puntos de tangencia buscados.

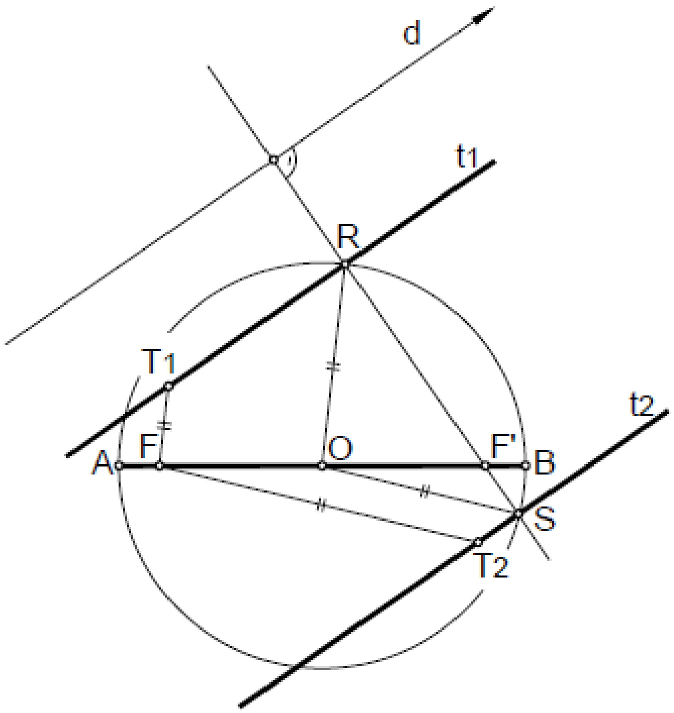


Rectas tangentes a la elipse, paralelas a una dirección dada, por circunferencia principal

Dada la dirección d, comenzaremos trazando la circunferencia principal, y seguidamente la recta perpendicular a la dirección d, y que pase por el foco F’. Dicha recta intercepta a la circunferencia principal en los puntos R y S, pertenecientes a las tangentes buscadas.

Solo restará trazar por R y S las rectas t1 y t2, paralelas a la dirección dada, siendo estas las tangentes buscadas.

Para determinar los puntos de tangencia, trazaremos las rectas OR y OS, y por el foco F, las correspondientes paralelas. Dichas paralelas determinarán sobre las tangentes los puntos T1 y T2 de tangencia buscados.



Puntos de intersección de una recta con una elipse

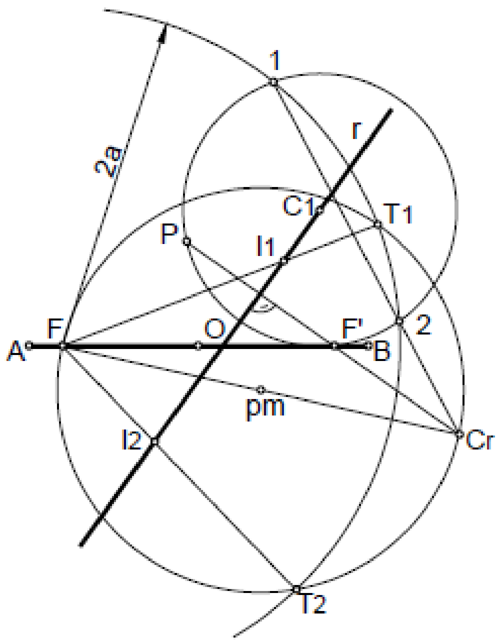
Esta construcción se basa en la definición de la elipse, como el lugar geométrico de los centros de circunferencias que pasan por un foco, y son tangentes a la circunferencia focal del otro foco.

Comenzaremos trazando la circunferencia focal de centro en F y radio 2a. seguidamente trazaremos una circunferencia cualquiera con centro en la recta r, y que pase por el foco F’. En nuestro caso hemos trazado la circunferencia de centro C1. sobre dicha circunferencia determinaremos el punto P, simétrico del foco F’, respecto a la recta r.

Los puntos de intersección buscados, serán los centros de las circunferencias situados en la recta r, que pasando por P y F', sean tangentes a la circunferencia focal. Por lo tanto el problema se reduce al trazado de circunferencias que pasando por dos puntos sean tangentes a otra dada, Lo que resolveremos por potencia.

En la intersección de las rectas 1-2 y P-F', obtendremos el punto Cr, centro radical de todas las circunferencias de centro en r y que pasen por P y F'.

Tranzando la circunferencia de diámetro F-Cr y centro en pm, determinaremos en la circunferencia focal, los puntos T1 y T2, puntos de tangencia de las circunferencias buscadas. Determinaremos el centro de dichas circunferencias, uniendo los puntos T1 y T2 con el foco F, rectas que determinarán sobre la recta r dada, los puntos I1 y I2, centro de las circunferencias solución, y por tanto, puntos de intersección de la recta r con la elipse.



Construcción de la elipse por arcos de circunferencias. Radios de curvatura

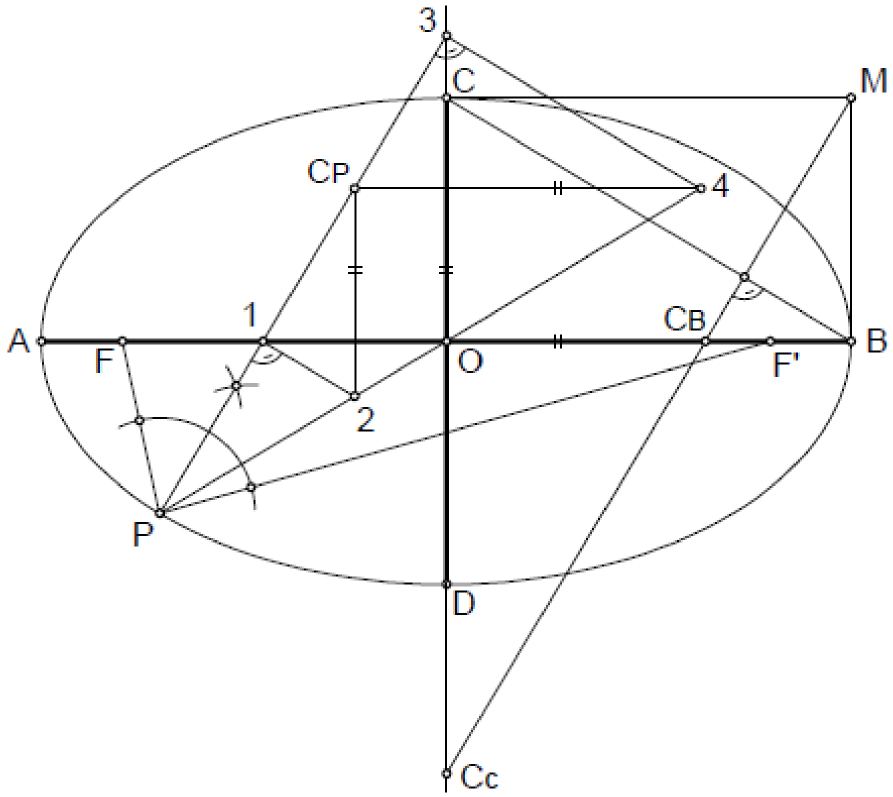
Para determinar el centro de curvatura en un punto P de la elipse, trazaremos la normal en dicho punto, bisectriz de los dos radios vectores de dicho punto.

La normal trazada, cortará al eje mayor en el punto 1. Por dicho punto trazaremos la perpendicular a la normal, que determinará sobre la recta P-

O, el punto 2. Por dicho punto trazaremos la paralela al eje menor de la elipse, que interceptará a la normal en el punto Cp, centro de curvatura buscado.

Partiendo de la normal, podríamos haber llegado a la misma solución, determinando el punto 3 sobre el eje menor. Por dicho punto trazaremos la perpendicular a la normal, que determinará sobre la recta P-O, el punto 4. Por dicho punto trazaremos la paralela al eje mayor de la elipse, que interceptará a la normal en el punto Cp, centro de curvatura buscado.

Para determinar los centros de curvatura en los extremos de los ejes de la elipse, trazaremos el rectángulo OBMC. Seguidamente trazaremos por M, la perpendicular a la recta C-B, que determinará los puntos CB y Cc, respectivamente sobre el eje mayor y menor de la elipse, y que serán los centros de curvatura buscados.

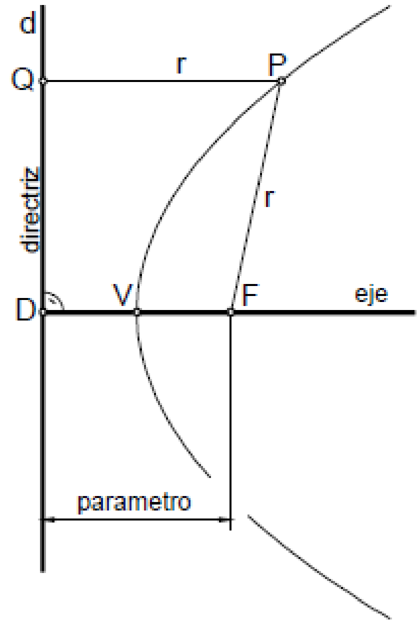


La Parábola

Definición

La parábola es una curva abierta y plana, que se define como el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto denominado foco, y una recta denominada directriz, observando la figura, FP = PQ = r.

El eje de la parábola es la recta perpendicular a la directriz, que pasa por el foco F. La distancia FD, del foco a la directriz, se denomina parámetro de la parábola, el punto medio del segmento FD, es el punto V, que se denomina vértice de la parábola.



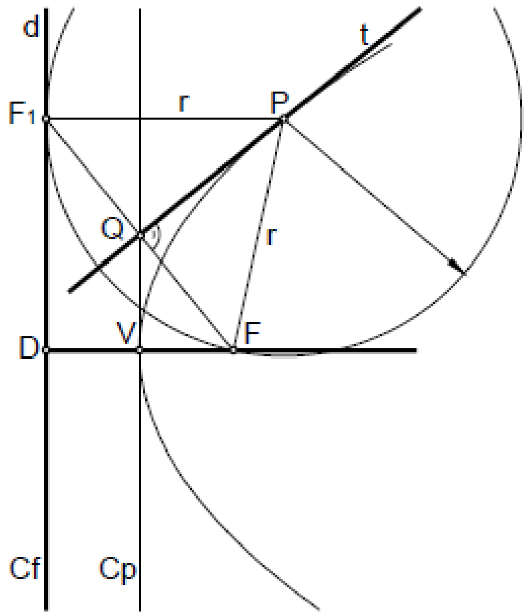
Propiedades y elementos

La parábola se puede considerar como una elipse, uno de cuyos vértices se encuentra en el infinito, así como el centro de la curva. Partiendo de esta consideración, comprobaremos que las propiedades enunciadas para la elipse, se cumplen igualmente en la parábola.

La circunferencia principal Cp, pasará por el vértice V de la curva, y dado que el centro de la curva se encuentra en el infinito, la circunferencia principal resulta ser la recta perpendicular al eje en el vértice V. La circunferencia principal, se define como el lugar geométrico de los pies de las perpendiculares(Q), trazadas desde los focos a las tangentes (t) de la parábola. También se puede definir como el punto medio de los segmentos que unen el foco, con la circunferencia focal del otro foco, y las mediatrices de dichos segmentos, son tangentes a la parábola.

La única circunferencia focal Cf de la parábola, tendrá su centro en el infinito, y deberá pasar por el punto D, simétrico del foco respecto a la tangente el en vértice de la curva, resultando por tanto, una recta coincidente con la directriz de la parábola. La circunferencia focal, se define como el lugar geométrico de los puntos simétricos del foco F, respecto a las tangentes (t) de la parábola.

Observando la figura, también podemos definir la parábola, como el lugar geométrico de los centros de circunferencia que pasan por el foco F, y son tangentes a la circunferencia focal.

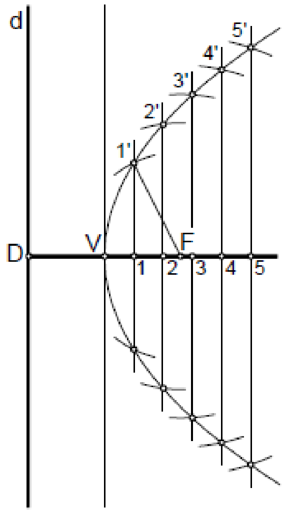


Trazado de la parábola mediante radios vectores

Teniendo en cuanta la definición de la parábola, buscaremos puntos equidistantes del foco F, y la directriz d. Para ello determinaremos una serie de puntos sobre el eje, 1, 2, 3, etc., por los que trazaremos paralelas a la directriz. Trazando arcos de circunferencia de centro en F, y radio las distancias D1, D2, D3, etc., determinaremos sobre las correspondientes paralelas anteriores, los puntos 1′, 2′, 3′, etc., puntos de la parábola buscada.

Con cada pareja de radios vectores, se determinarán dos puntos de la parábola, uno en cada rama de la misma.

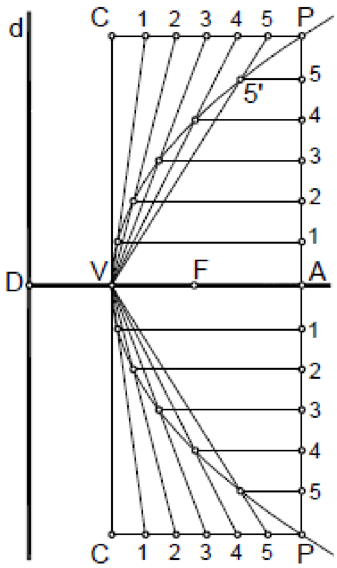
Cuanto mayor sea el número de puntos, mayor será la precisión del trazado de la parábola, que deberá realizarse, o bien a mano alzada o mediante reglas flexibles, o plantillas de curvas especiales.



Trazado de la parábola, por haces proyectivos

Comenzaremos obteniendo un punto P de la curva por radios vectores, y trazaremos el rectángulo APCV, y dividiremos los lados AP y PC en un mismo número de partes iguales.

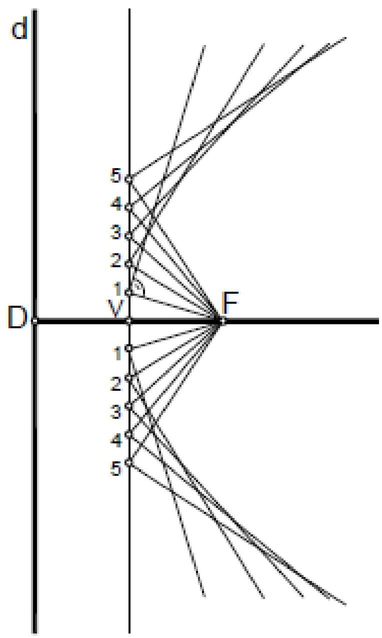
Por las divisiones de AP, trazaremos paralelas al eje de la curva, y uniremos las divisiones de CP, con el vértice V de la curva. La intersección de estas rectas con las paralelas anteriores, determinarán puntos, como el P, pertenecientes a la parábola buscada. Esto se repetirá para la otra rama de la parábola.



Trazado de la parábola, por envolventes

Esta construcción se basa en el hecho de que la circunferencia principal, en este caso, la tangente a la curva en el vértice, es el lugar geométrico de los pies de las perpendiculares trazadas desde el foco a las tangentes a la parábola.

Para este trazado partiremos de puntos 1, 2, 3, etc, de la circunferencia principal. Uniremos dichos puntos con el foco F, y trazaremos por los puntos anteriores perpendiculares a los segmentosl F1, F2, F3, etc., obteniendo las rectas tangentes a la parábola. La curva se determinará mediante tangentes a dichas rectas.



Trazado de la parábola, en base a la definición de la curva

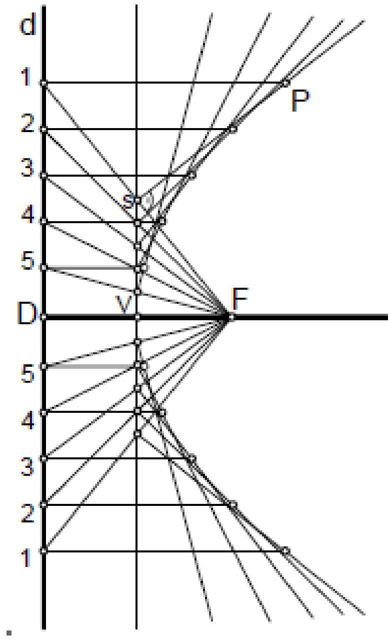
Esta construcción se basa en la definición de la parábola, como el lugar geométrico de los centros de circunferencia que pasan por el foco F, y son tangentes a la circunferencia focal.

Comenzaremos trazando las rectas F1, F2, F3, etc., que unen el foco de la curva F, con puntos de la directriz d.

Seguidamente trazaremos las perpendiculares a los segmentos anteriores, en su punto de intersección con la circunferencia principal, en el caso del segmento F1, en el punto s. Esta perpendicular resulta ser la mediatriz del segmento F1, y tangente a la la curva.

Trazando por el punto 1, una paralela al eje de la curva, dicha paralela interceptará a la tangente anteriormente trazada en el punto T1, punto de la parábola.

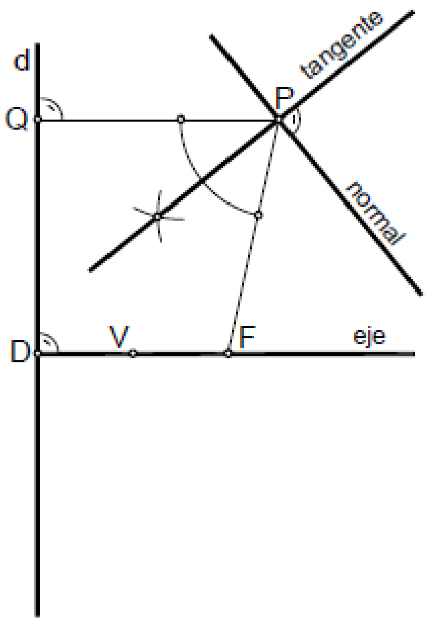
Repitiendo con el resto de puntos, obtendremos los suficientes puntos de la curva para poder ser trazada



Recta tangente y normal en un punto de la parábola

La tangente a la parábola en un punto de ella P, es la bisectriz del ángulo que forman los radios vectores en dicho punto.

La normal en P, es la perpendicular a la tangente en dicho punto.



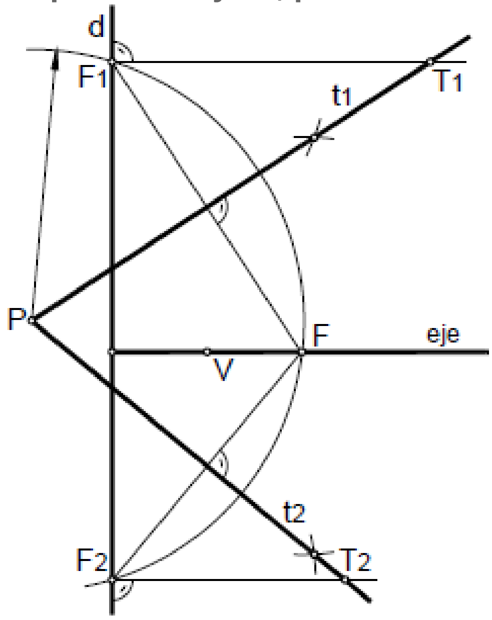
Rectas tangentes a la parábola desde un punto exterior, por circunferencia focal

Esta construcción se basa en la definición de circunferencia focal (directriz), como el lugar geométrico de los puntos simétricos del otro foco, respecto a las tangentes a la parábola.

Dado el punto P exterior a la parábola, comenzaremos trazando la circunferencia de centro en P, y radio P–F, la cual corta a la focal (directriz), en los puntos F1 y F2. Dichos puntos son los simétricos del F respecto a las tangentes a la parábola desde el punto P.

Solo resta trazar las mediatrices de los segmentos F–F1 y F–F2, obteniendo así las rectas t1 y t2 que serán las tangentes a la parábola buscadas.

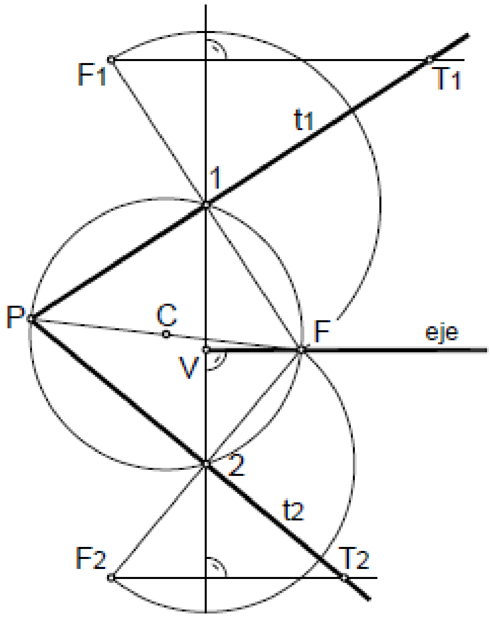
Para determinar los puntos de tangencia, trazaremos las rectas por F1 y F2, rectas paralelas al eje de la curva, que determinarán sobre las tangentes t1 y t2, los puntos T1 y T2, puntos de tangencia buscados.



Rectas tangentes a la parábola desde un punto exterior, por circunferencia principal

Dado el punto P exterior a la parábola, comenzaremos trazando la circunferencia principal (tangente en el vértice), y a continuación la circunferencia de centro en C, y diámetro P–F. Ambas circunferencias se interceptan en los puntos 1 y 2.

Las rectas P–1 y P–2, serán las tangentes t1 y t2 buscadas. Para determinar los puntos de tangencia, haremos 1–F1=1–F y 2–F2=2–F, y por F1 y F2, trazaremos rectas paralelas al eje de la curva, que determinarán sobre las tangentes t1 y t2, los puntos T1 y T2, puntos de tangencia buscados.



Rectas tangentes a la parábola, paralelas a una dirección dada, por circunferencia focal

Esta construcción es similar a la del trazado de tangentes desde un punto exterior, solo que en este caso el punto es un punto impropio situado en el infinito.

Dada la dirección d, comenzaremos trazando la recta perpendicular a la dirección d, y que pase por el foco F. Dicha recta determina sobre la circunferencia focal (directriz), el punto F1.

La mediatriz del segmento F–F1, será la tangente a la parábola t buscada.

Para determinar el punto de tangencia, trazaremos pro F1, la recta paralela al eje de la curva, que determinarán sobre la tangente t, el punto T1, punto de tangencia buscado.

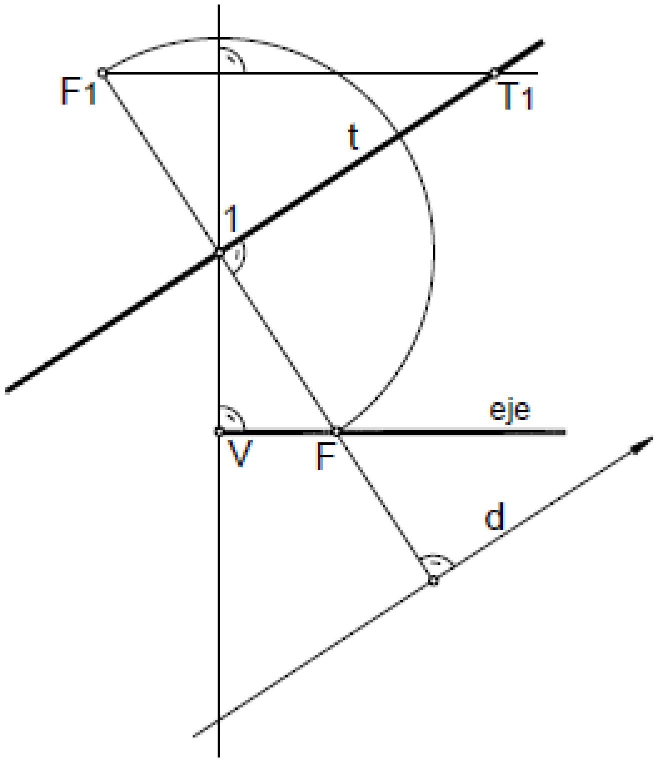
Rectas tangentes a la parábola, paralelas a una dirección dada por circunferencia principal

Dada la dirección d, comenzaremos trazando la circunferencia principal (tangente en el vértice), y seguidamente la recta perpendicular a la

dirección d, y que pase por el foco F. Dicha recta intercepta a la circunferencia principal en el punto 1, perteneciente a la tangente buscada.

Solo restará trazar por 1 la recta t, paralela a la dirección dada, siendo esta la tangente buscada.

Para determinar los puntos de tangencia, haremos 1–F1=1–F, y por F1 trazaremos una recta paralela al eje de la curva, que terminará sobre la tangente t el punto T1, punto de tangencia buscado.



Puntos de intersección de una recta con una parábola

Esta construcción se basa en la definición de la parábola, como el lugar geométrico de los centros de circunferencias que pasan por el foco, y son tangentes a la circunferencia focal del otro foco (directriz).

Comenzaremos trazando una circunferencia cualquiera con centro en la recta r, y que pase por el foco F. En nuestro caso hemos trazado la circunferencia de centro O. Sobre dicha circunferencia determinaremos el punto F1, simétrico del foco F, respecto a la recta r.

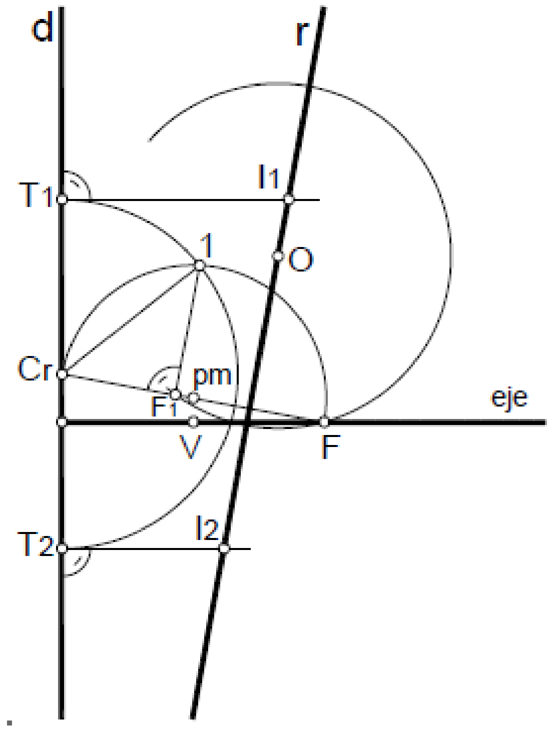
Los puntos de intersección buscados, serán los centros de las circunferencias situados en la recta r, que pasando por F1 y F, sean

tangentes a la circunferencia focal (directriz). Por lo tanto el problema se reduce al trazado de circunferencias que pasando por dos puntos sean tangentes a una recta dada (directriz), Lo que resolveremos por potencia.

Prolongando la recta F–F1, determinaremos sobre la directriz el punto Cr, centro radical de todas las circunferencias de centro en r y que pasen por F y F1.

Con centro en pm, punto medio del segmento F–Cr, trazaremos la circunferencia de diámetro F–Cr, y por F1 la perpendicular a dicho diámetro, determinando sobre la circunferencia anterior el punto 1.

Con centro en Cr trazaremos el arco de circunferencia de radio Cr–1, que nos determinará sobre la directriz, los puntos T1 y T2. Las perpendiculares a la directriz en dichos puntos, determinarán sobre la recta r los puntos I1 e I2 de intersección de la recta con la parábola.

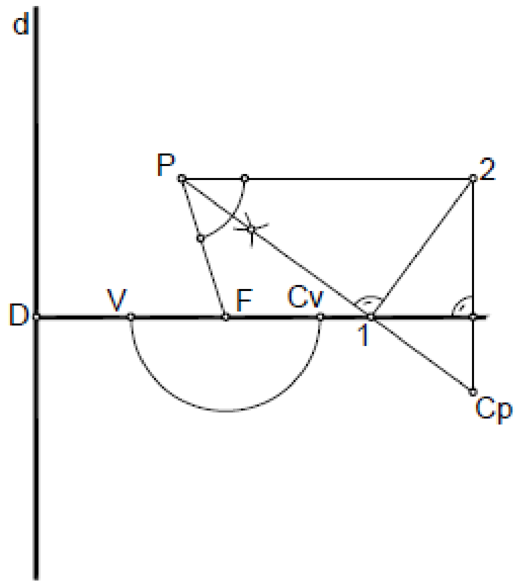


Construcción de la parábola por arcos de circunferencia. Radios de curvatura.

Para determinar el centro de curvatura en un punto P de la parábola, trazaremos la normal en dicho punto, bisectriz de los dos radios vectores de dicho punto.

La normal trazada, cortará al eje en el punto 1. Por dicho punto trazaremos la perpendicular a la normal, que determinará sobre la recta trazada por P y paralela al eje, el punto 2. Por dicho punto trazaremos la perpendicular al eje, que interceptará a la normal en el punto Cp, centro de curvatura buscado.

El centro de curva en el vértice de la curva Cv, lo determinaremos haciendo F–C



La Hipérbola

Definición

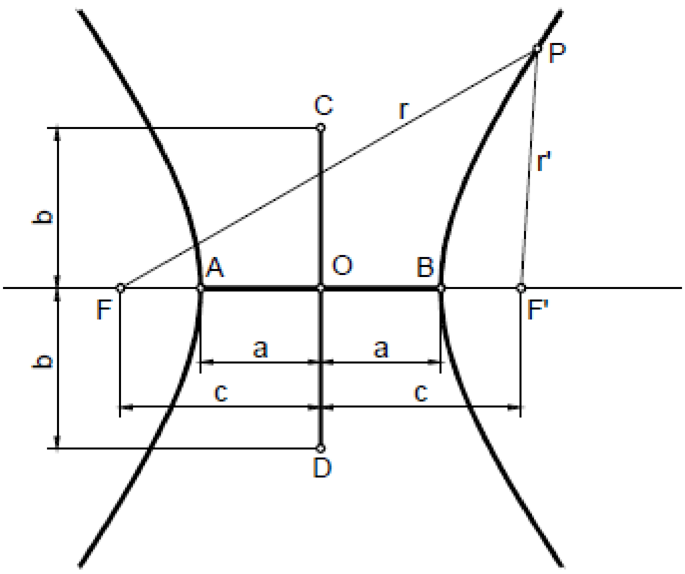
La hipérbola es una curva abierta y plana, con dos ramas, que se definen como el lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias **r’–r**, a dos puntos fijos **F** y **F’**, denominados focos, es constante e igual a **2a**, siendo **2a** la longitud del **eje real A–B** de la hipérbola. Al eje **CD**, se le denomina **eje imaginario**, siendo su longitud **2b**. Ambos ejes se cruzan perpendicularmente en el centro **O**, punto medio de los dos ejes. Por lo tanto, la hipérbola es simétrica, respecto a los dos ejes.

Si, como vemos, la distancia focal **F–F’** es igual a **2c**, se cumplirá que $c^2 = a^2 + b^2$.

Las rectas que unen un punto cualquiera de la elipse **P**, con los focos, se denominan **radios vectores r** y **r’**, y por definición se cumple que **r’–r** = **2a**.

Según las dimensiones de los semiejes, se obtendrán tres tipos de parábolas:

1. Si a > b, se obtendrá una curva de ramas cerradas.
2. Si a = b, se obtendrá una hipérbola equilátera.
3. Si a < b, se obtendrá una curva de ramas abiertas.

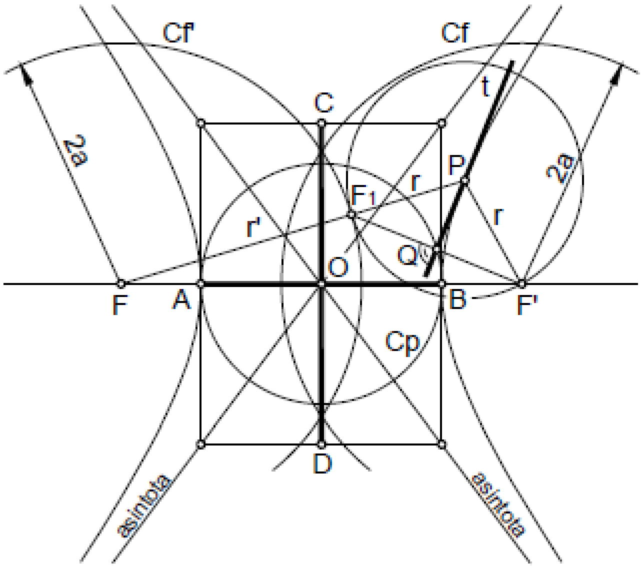


Propiedades y elementos

Se denomina **circunferencia principal Cp**, a la circunferencia de centro **O**, y diámetro **2a**. La circunferencia principal, se define como el lugar geométrico de los pies de las perpendiculares(Q), trazadas desde los focos a las tangentes (t) de la hipérbola. También se puede definir como el punto medio de los segmentos que unen un foco, con la circunferencia focal del otro foco, y las mediatrices de dichos segmentos, son tangentes a la hipérbola.

Se denomina **circunferencia focal Cf**, a la circunferencia de centro en uno de los focos de la hipérbola, y radio **2a**. En una hipérbola se podrán trazar dos circunferencias focales. La circunferencia focal, se define como el lugar geométrico de los puntos simétricos del otro foco (**F1**), respecto a las tangentes (**t**) de la hipérbola.

Observando la figura, también podemos definir la hipérbola, como el lugar geométrico de los centros de circunferencia que pasan por un foco, y son tangentes a la circunferencia focal del otro foco.

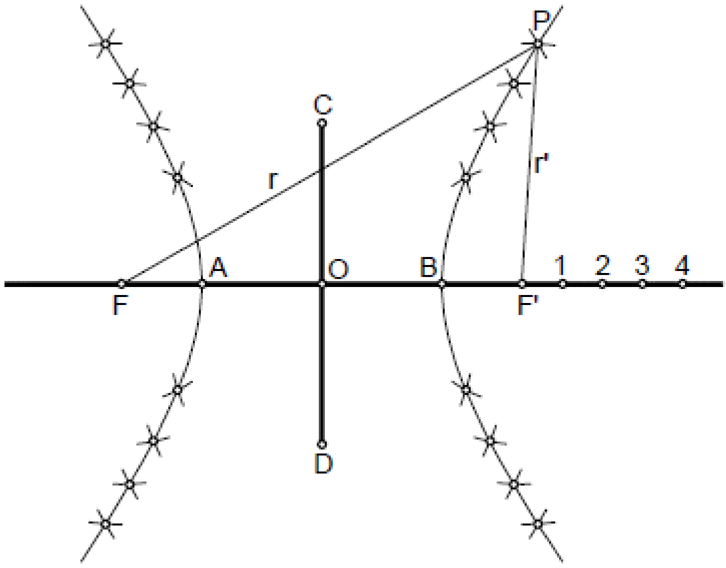


Trazado de la hipérbola mediante radios vectores

Teniendo en cuenta la definición de la hipérbola, solo necesitaremos coger pares de radios vectores, cuya diferencia sea **2a**, para ello determinaremos una serie de puntos sobre el eje real, **1**, **2**, **3** etc., y cogeremos como parejas de radios vectores, los segmentos **A1**–**B1**, **A2**–**B2**, **A3**–**B3**, y así sucesivamente, determinando los suficientes puntos de la parábola, como para ser definida.

Con cada pareja de radios vectores, se determinarán cuatro puntos de la hipérbola, uno en cada cuadrante de la misma.

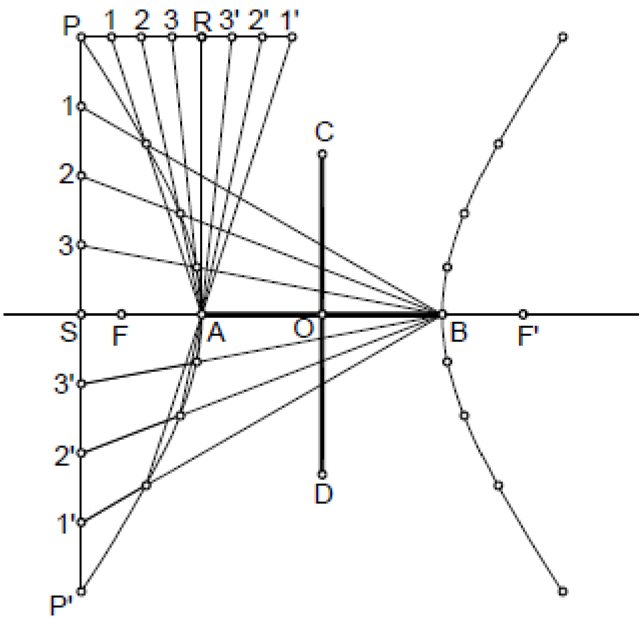
Cuanto mayor sea el número de puntos, mayor será la precisión del trazado de la hipérbola, que deberá realizarse, o bien a mano alzada o mediante reglas flexibles, o plantillas de curvas especiales.



Trazado de la hipérbola por haces proyectivos

Comenzaremos obteniendo un punto **P** de la curva por radios vectores, y trazaremos el rectángulo **ARPS**, y dividiremos los lados **RP** y **PS** en un mismo número de partes iguales. Sobre la prolongación de **PR** y **PS** llevaremos esas misma divisiones.

Seguidamente trazaremos rectas que unan el vértice **A**, con las divisiones de **PR**, y el vértice **Br** con las divisiones de **PS**, obteniendo en sus intersecciones, puntos, pertenecientes a la hipérbola buscada. Esto se repetirá para la otra rama de la hipérbola.

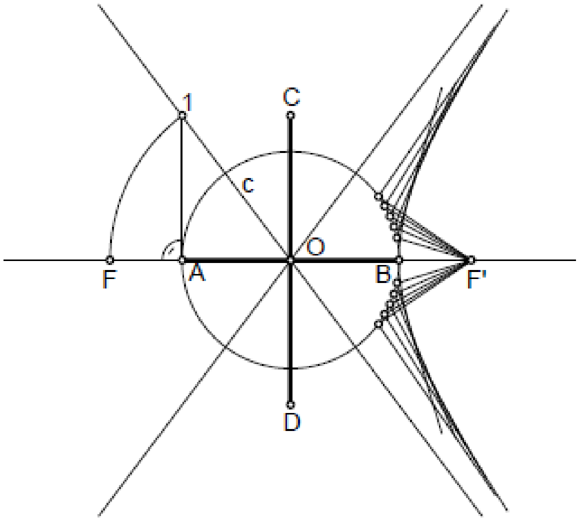


Trazado de la parábola por envolventes

Esta construcción se basa en el hecho de que la circunferencia principal, es el lugar geométrico de los pies de las perpendiculares trazadas desde el foco a las tangentes a la hipérbola.

Para este trazado partiremos de puntos, de la circunferencia principal. Uniremos dichos puntos con el foco **F’**, y trazaremos por ellos, perpendiculares a las rectas trazadas, obteniendo las rectas tangentes a la parábola. La curva se determinará mediante tangentes a dichas rectas.

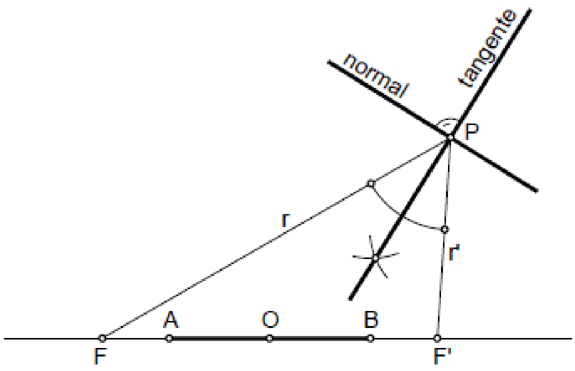
Las asíntotas serán las tangentes a la hipérbola en el infinito, y que determinaremos trazando el arco de centro en **O** y radio **O**–**F**. En la intersección de dicho arco con la perpendicular al eje real, trazada por el vértice **A**, determinaremos el punto **1**, perteneciente a la asíntota, solo restará unir dicho punto con el centro **O** de la hipérbola.



Recta tangente y normal en un punto de la hipérbola

La tangente a la hipérbola en un punto de ella **P**, es la bisectriz del ángulo que forman los radios vectores en dicho punto.

La normal en **P**, es la perpendicular a la tangente en dicho punto.



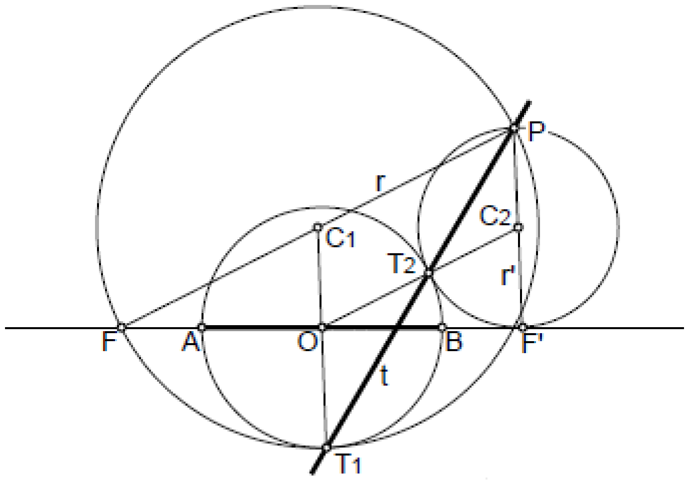
Recta tangente a la hipérbola en un punto, por circunferencia principal

Siendo **P** el punto de la hipérbola, comenzaremos trazando las circunferencias de centro **C1** y **C2**, puntos medios de los radios vectores del punto **P**, y diámetro dichos radios vectores.

Las circunferencias anteriores resultan ser tangentes interiores a la circunferencia principal, en los puntos **T1** y **T2**, determinados al unir el centro **O** de la elipse con los centros **C1** y **C2**.

Se cumple que los puntos **T1**, **T2** y **P**, están alineados, y determinan la recta **t** tangente a la hipérbola buscada.

También se verifica que las rectas **F–P** y **O–T2**, y **F'–P** y **O–T1** son respectivamente paralelas.



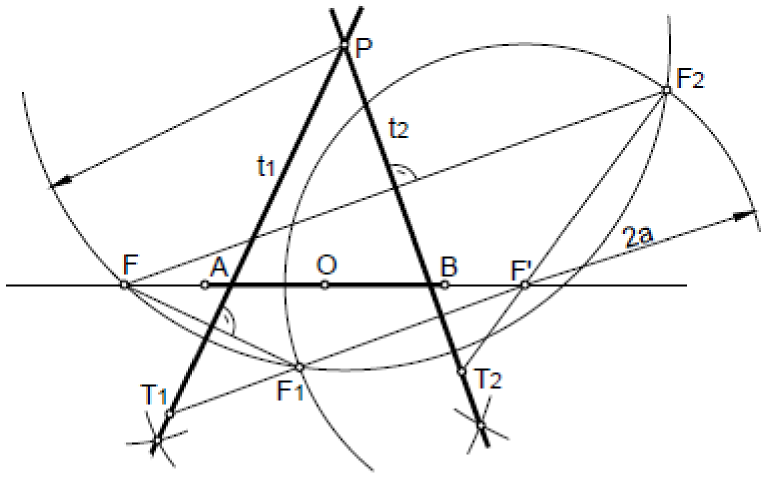
Rectas tangentes a la hipérbola desde un punto exterior, por circunferencia focal

Esta construcción se basa en la definición de circunferencia focal, como el lugar geométrico de los puntos simétricos del otro foco, respecto a las tangentes a la hipérbola.

Dado el punto **P** exterior a la hipérbola, comenzaremos trazando la circunferencia focal de centro en **F'**, y a continuación la circunferencia de centro en **P**, y radio **P–F**, la cual corta a la focal anterior, en los puntos **F1** y **F2**. Dichos puntos son los simétricos del **F** respecto a las tangentes a la hipérbola desde el punto **P**.

Solo resta trazar las mediatrices de los segmentos **F–F1** y **F–F2**, obteniendo así las rectas **t1** y **t2** que serán las tangentes a la hipérbola buscadas.

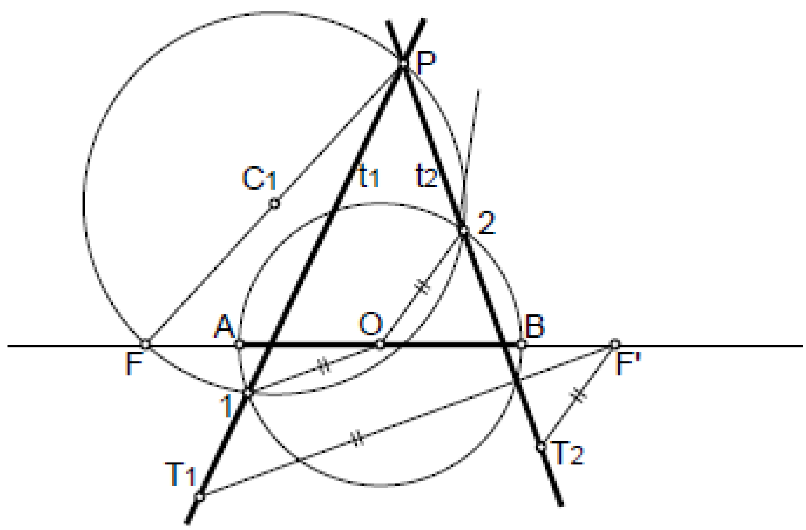
Para determinar los puntos de tangencia, trazaremos las rectas **F'–F1** y **F'–F2**, que determinarán sobre las tangentes **t1** y **t2**, los puntos **T1** y **T2**, puntos de tangencia buscados.



Rectas tangentes a la hipérbola desde un punto exterior, por circunferencia principal

Dado el punto **P** exterior a la hipérbola, comenzaremos trazando la circunferencia principal, y a continuación la circunferencia de centro en **C1**, y diámetro **P–F**. Ambas circunferencias se interceptan en los puntos **1** y **2**.

Las rectas **P–1** y **P–2**, serán las tangentes **t1** y **t2** buscadas. Para determinar los puntos de tangencia, trazaremos las rectas **O1** y **O2**, y por **F'** las correspondientes paralelas, que determinarán sobre las tangentes, los puntos **T1** y **T2**, puntos de tangencia buscados.



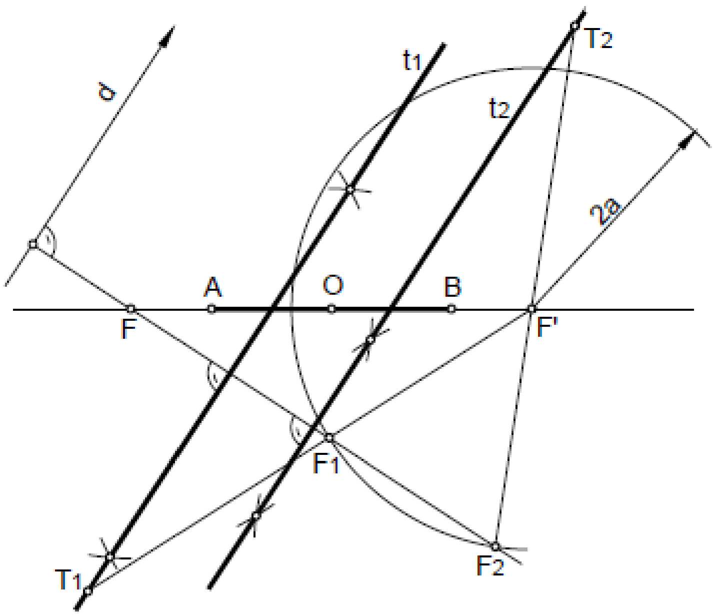
Rectas tangentes a la hipérbola, paralelas a una dirección dada, por circunferencia focal

Esta construcción es similar a la del trazado de tangentes desde un punto exterior, solo que en este caso el punto es un punto impropio situado en el infinito.

Dada la dirección d, comenzaremos trazando la circunferencia focal de centro en **F'**, y a continuación la recta perpendicular a la dirección **d**, y que pase por el foco **F**. Dicha recta determina sobre la circunferencia focal, los puntos **F1** y **F2**.

Las mediatrices de los segmentos **F–F1** y **F–F2**, serán las tangentes a la elipse **t1** y **t2** buscadas.

Para determinar los puntos de tangencia, trazaremos las rectas **F'–F1** y **F'–F2**, que determinarán sobre las tangentes **t1** y **t2**, los puntos **T1** y **T2**, puntos de tangencia buscados.

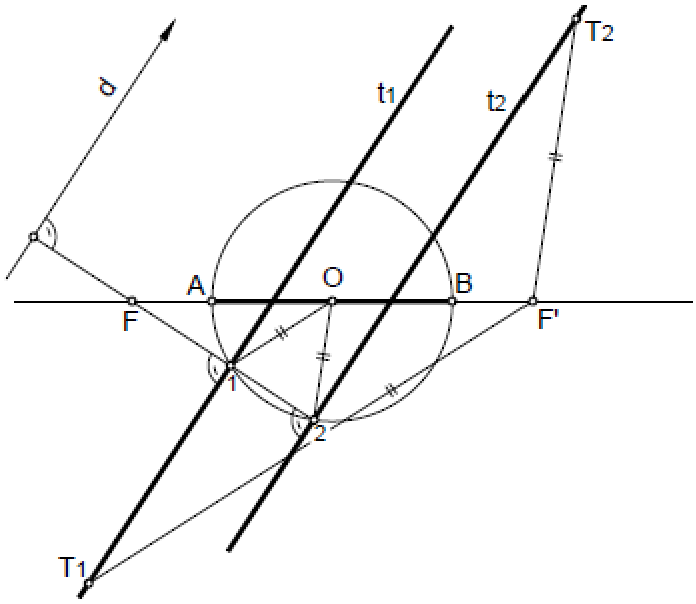


Rectas tangentes a la hipérbola, paralelas a una dirección dada, por circunferencia principal

Dada la dirección **d**, comenzaremos trazando la circunferencia principal, y seguidamente la recta perpendicular a la dirección **d**, y que pase por el foco **F**. Dicha recta intercepta a la circunferencia principal en los puntos **1** y **2**, pertenecientes a las tangentes buscadas.

Solo restará trazar por **1** y **2** las rectas **t1** y **t2**, paralelas a la dirección dada, siendo estas las tangentes buscadas.

Para determinar los puntos de tangencia, trazaremos las rectas **O1** y **O2**, y por el foco **F’**, las correspondientes paralelas. Dichas paralelas determinarán sobre las tangentes los puntos **T1** y **T2** de tangencia buscados.



Puntos de intersección de una recta con una hipérbola

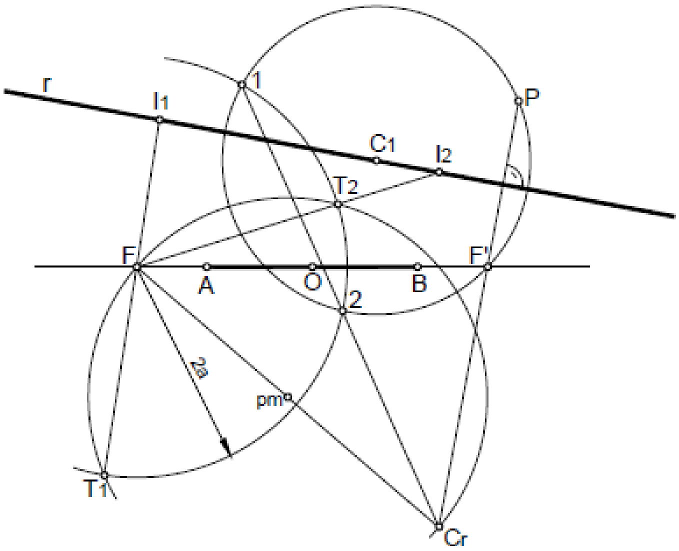
Esta construcción se basa en la definición de la hipérbola, como el lugar geométrico de los centros de circunferencias que pasan por un foco, y son tangentes a la circunferencia focal del otro foco.

Comenzaremos trazando la circunferencia focal de centro en **F** y radio **2a**. seguidamente trazaremos una circunferencia cualquiera con centro en la recta **r**, y que pase por el foco **F’**. En nuestro caso hemos trazado la circunferencia de centro **C1**. sobre dicha circunferencia determinaremos el punto **P**, simétrico del foco **F’**, respecto a la recta **r**.

Los puntos de intersección buscados, serán los centros de las circunferencias situados en la recta **r**, que pasando por **P** y **F’**, sean tangentes a la circunferencia focal. Por lo tanto el problema se reduce al trazado de circunferencias que pasando por dos puntos sean tangentes a otra dada, Lo que resolveremos por potencia.

En la intersección de las rectas **1–2** y **P–F’**, obtendremos el punto **Cr**, centro radical de todas las circunferencias de centro en **r** y que pasen por **P** y **F’**.

Tranzando la circunferencia de diámetro **F–Cr** y centro en **pm**, determinaremos en la circunferencia focal, los puntos **T1** y **T2**, puntos de tangencia de las circunferencias buscadas. Determinaremos el centro de dichas circunferencias, uniendo los puntos **T1** y **T2** con el foco **F**, rectas que determinarán sobre la recta **r** dada, los puntos **I1** y **I2**, centro de las circunferencias solución, y por tanto, puntos de intersección de la recta **r** con la hipérbola.



Construcción de la hipérbola por arcos de circunferencia. Radios de curvatura

Para determinar el centro de curvatura en un punto **P** de la hipérbola, trazaremos la normal en dicho punto, bisectriz del ángulo exterior que forman los dos radios vectores de dicho punto.

La normal trazada, cortará a la prolongación del eje real en el punto **1**. Por dicho punto trazaremos la perpendicular a **la normal**, que determinará sobre la recta **O–P**, el punto **2**. Por dicho punto trazaremos la paralela al eje imaginario de la hipérbola, que interceptará a la normal en el punto **Cp**, centro de curvatura buscado.

Para determinar los centros de curvatura en los extremos del eje real de la hipérbola, trazaremos la perpendicular a la **asíntota** en el punto **R**. Dicha perpendicular interceptará a la prolongación del eje real en el punto **CB**, centro de curvatura buscado.