1 Trazados en el plano

2 Rectificaciones

2.1. Rectificación de un arco

Rectificar un arco de circunferencia es hallar el segmento recto, cuya longitud sea igual a la del arco dado.

Cómo rectificar un arco menor de 90°

Sea el arco *AB* de centro *O* (fig. 13):

1. Por el punto *A*, uno de los extremos del arco, se traza el diámetro *AC* y la recta *r* tangente al arco.
2. Se divide el radio *OC* en cuatro partes iguales y, haciendo centro en el punto *C* y tomando como radio tres de esas cuatro partes, se describe un arco hasta cortar a la prolongación del diámetro en el punto *D*.
3. Se une el punto *D* con el extremo *B* del arco hasta cortar a la recta *r* en *E*. El segmento *AE* es la rectificación del arco *AB*.

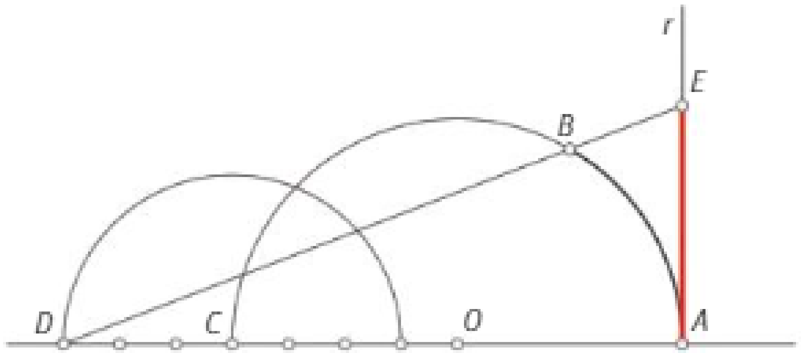


Figura 13

Cómo rectificar una semicircunferencia

Sea la circunferencia de centro *O* **(fig. 14)**:

1. Se trazan dos diámetros *AB* y *CD*, perpendiculares entre sí, y con centro en *B* y radio *BO* se dibuja un arco que corta a la circunferencia en el punto *E*.
2. Con centro en *A* y radio *AC* (lado del cuadrado inscrito), y con centro en *A* y radio *AE* (lado del triángulo inscrito) se trazan dos arcos que cortan a la recta tangente a la circunferencia en el punto *A*, en *F* y *G*. El segmento *FG* es la rectificación buscada.

Cómo rectificar una circunferencia

La longitud de una circunferencia es aproximadamente igual a tres veces el diámetro más una séptima parte del mismo.

1. Dada la circunferencia de centro *O* **(fig. 15)**: se traza un diámetro cualquiera *AB* y se divide en siete partes iguales.
2. Sobre una recta *r* y a partir de un punto *C* se lleva tres veces el diámetro más una de las siete partes en que se ha dividido. El segmento *CD* total es la rectificación de la circunferencia.

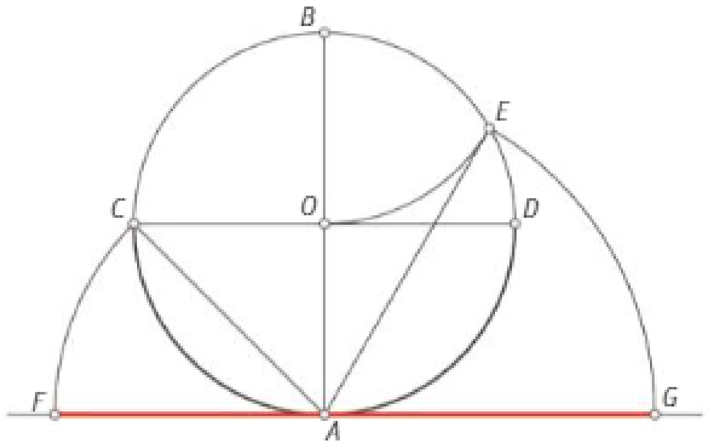


Figura 14

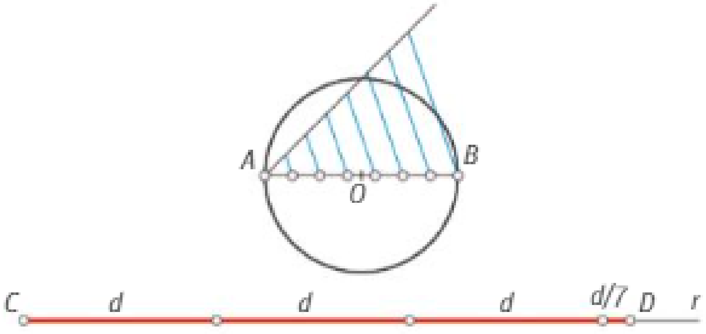


Figura 15

Act

4 Equivalencias

Dos polígonos son equivalentes cuando, teniendo distinto número de lados, tienen la misma superficie.

Cómo se halla un triángulo equivalente a otro

El área de un triángulo es igual a la base por la altura; por tanto, sea el triángulo *ABC* (fig. 25):

1. Por el punto *C* se traza la paralela a la base *AB*.
2. Cualquier punto *D* de la paralela, unido con *A* y *B*, determina un triángulo equivalente al dado.

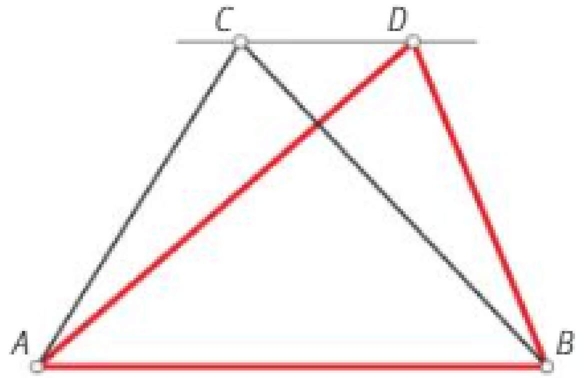


Figura 25

Cómo dividir un triángulo en varias partes equivalentes

Dado el triángulo *ABC* (fig. 26):

1. Se divide uno de los lados del triángulo, el lado *BC* por ejemplo, en tantas partes como se quiera dividir, por ejemplo en tres, obteniendo los puntos *D* y *E*.
2. Por estos puntos *D* y *E* se trazan las perpendiculares al lado *BC* al que pertenecen hasta cortar a la semicircunferencia de diámetro *BC* en los puntos *F* y *G*, respectivamente.
3. Con centro en el punto *C* y radios *CF* y *CG* se trazan arcos hasta cortar al lado *BC* en *H* y *J*.
4. Por los puntos *H* y *J* se trazan las paralelas al lado *AB* del triángulo, obteniendo así las superficies *CKH*, *KLJH* y *LABJ*, equivalentes entre sí.

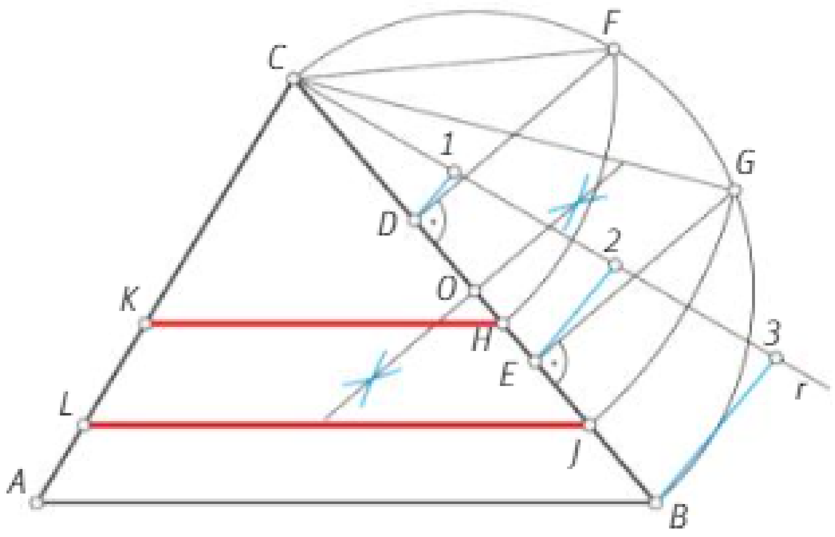


Figura 26

Cómo dibujar un polígono equivalente a otro y que tenga un lado menos

Sea el polígono *ABCDE* (fig. 27):

1. Por el punto *C* se traza la paralela a la diagonal *BD* hasta cortar a la prolongación del lado *AB* en el punto *F*.

El polígono *AFDE* es equivalente al anterior, pero con un lado menos.

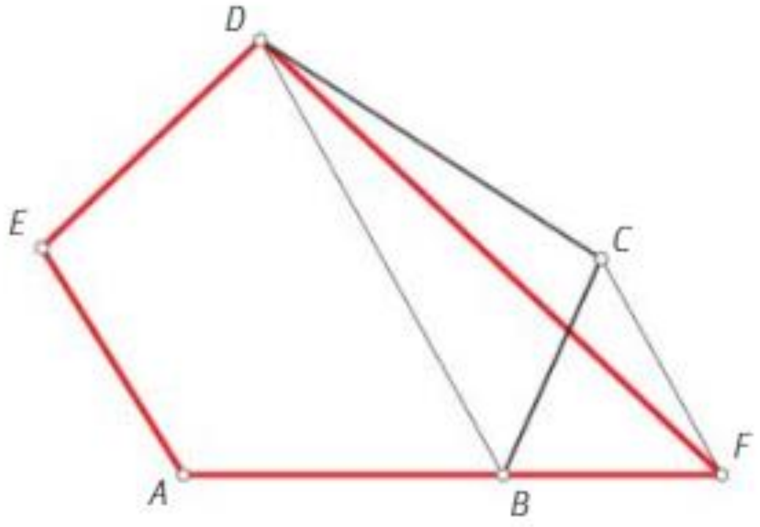


Figura 27

Cómo dibujar un triángulo equivalente a un cuadrado

Sea el cuadrado *ABCD* (fig. 28):

1. Con centro en *E*, punto medio del lado *AB*, se traza la semicircunferencia que pasa por los vértices *C* y *D* del cuadrado y que corta a las prolongaciones del lado *AB* en los puntos *F* y *G*.
2. Con centro en *B* y radio *BG* se traza un arco de circunferencia que corta al lado *BC* en el punto *H*, y con centro en *H* e igual radio se traza otro arco que corta a la prolongación del lado *BC* en el punto *I*.
3. Por el punto *I* se traza la recta *r*, paralela al lado *AB*. Cualquier punto *J* de la recta *r*, unido con los puntos *B* y *F*, determina el triángulo que se busca.

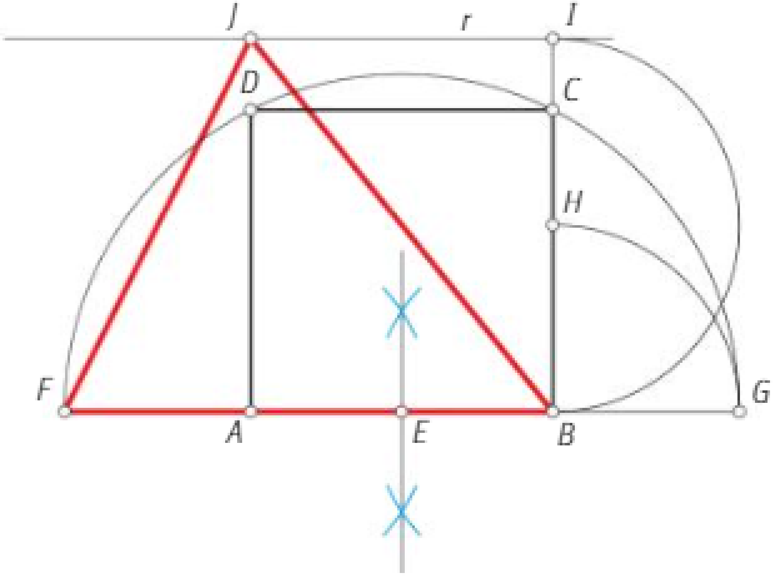


Figura 28

Cómo dibujar un triángulo equivalente a un pentágono

Sea el pentágono *ABCDE* (fig. 29):

1. Por el vértice *C* se traza la paralela a la diagonal *AD* hasta cortar a la prolongación del lado *AB* en el punto *F*.
2. Por el vértice *C* se traza la paralela a la diagonal *BD* hasta cortar a la prolongación del lado *AB* en el punto *G*. El triángulo *FGD* es el que se busca.

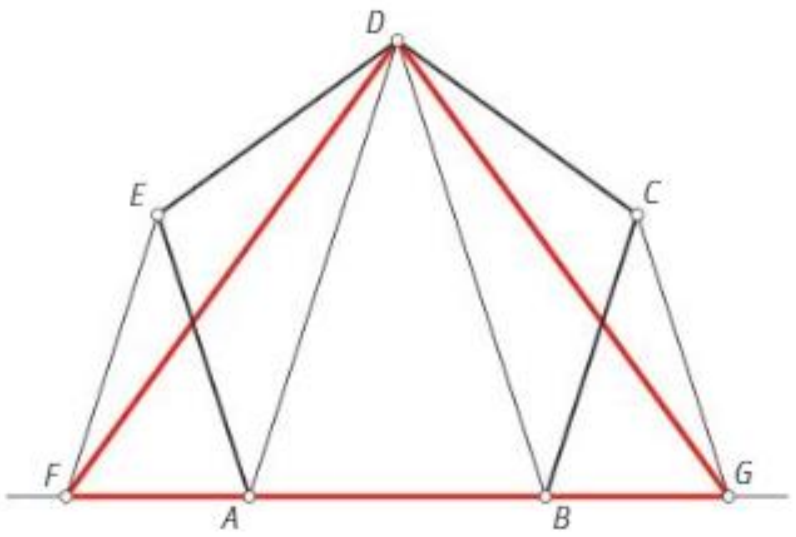


Figura 29

Cómo dibujar un triángulo equivalente a un hexágono regular

Sea el hexágono *ABCDEF* (fig. 30):

1. Por el vértice *F* se traza la perpendicular al lado *AB* hasta cortar a su prolongación en el punto *G*.
2. Con centro en *B* y radio *BG* se traza la semicircunferencia que corta a la prolongación del lado *AB* en el punto *H*. Los puntos *G* y *H*, unidos con cualquier punto *I* del lado *ED*, determinan un triángulo equivalente al hexágono.

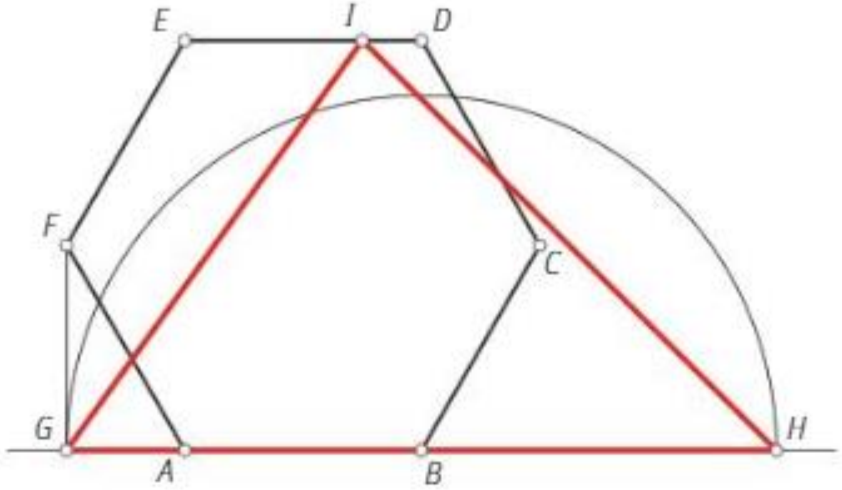


Figura 30

Cómo dibujar un rectángulo equivalente a un triángulo

Sea el triángulo *ABC* (fig. 33):

1. Por los vértices *A* y *B* se trazan dos perpendiculares a *AB*.
2. La mediatriz de la altura *CD* se corta con las perpendiculares anteriores en los puntos *E* y *F*.

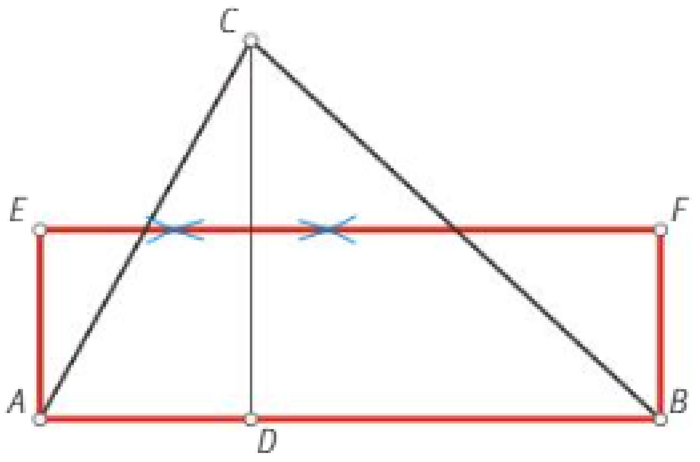


Figura 33

Cómo dibujar el cuadrado equivalente a un rectángulo

Sea el rectángulo *ABCD* (fig. 34):

1. Con centro en *B* y radio *BC* se traza un arco hasta cortar a la prolongación del lado *AB* en el punto *E*.
2. Se dibuja la semicircunferencia de diámetro *AE*, que se corta con la prolongación del lado *BC* en el punto *G*. El segmento *BG* es el lado del cuadrado equivalente.

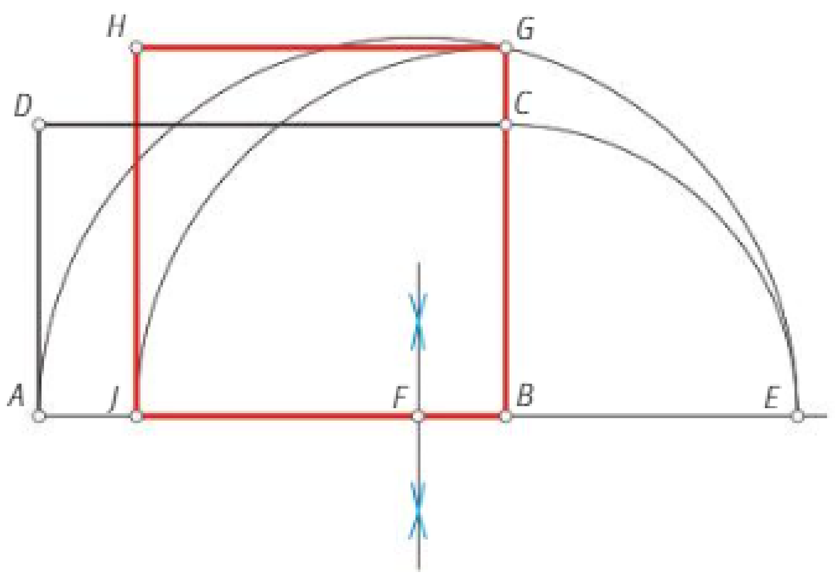


Figura 34

Cómo dibujar el cuadrado equivalente a un pentágono regular

Sea el pentágono *ABCDE* (fig. 35):

1. Por el vértice *C* se traza la paralela a la diagonal *BD* hasta cortar en el punto *G* a la prolongación del lado *AB*.
2. Por el punto *G* se traza la perpendicular al lado *AB* y por el vértice *D*, la paralela al mismo. Se obtiene así el rectángulo *FGHD*, equivalente al pentágono dado.
3. Se dibuja el cuadrado equivalente al rectángulo: con centro en *F* y radio *FG* se traza un arco hasta cortar a la prolongación de *FD* en el punto *J*. Se dibuja la semicircunferencia de diámetro *DJ*, que se corta con el lado *AB* en el punto *L*. El segmento *FL* es el lado del cuadrado equivalente.

Ten en cuenta

- El triángulo rectángulo *FGD* es equivalente al polígono *FBCD* (medio pentágono); por tanto, el rectángulo *FGHD* es equivalente al pentágono.

Figura 34

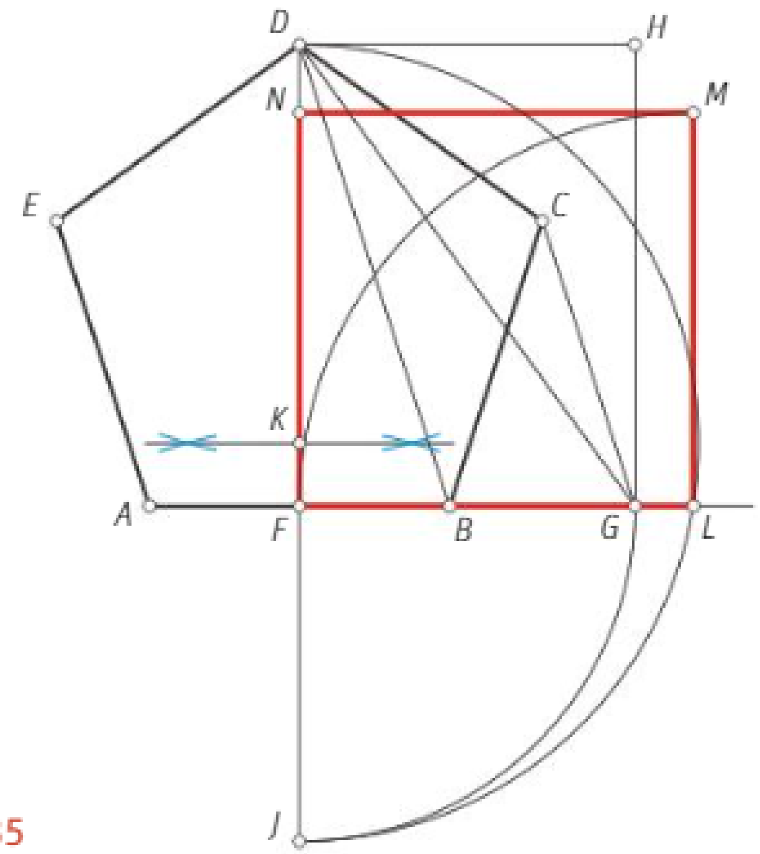


Figura 35

Cómo dibujar el cuadrado que tenga por área el doble, el triple, el cuádruple, etc., que otro dado

Sea el cuadrado *ABCD* (fig. 37):

1. Sobre la prolongación del lado *AB* se traslada sucesivamente una longitud igual al lado, obteniendo los puntos *E*, *F*, *G*, etc.
2. Se trazan semicircunferencias de diámetro *AE*, *AF*, *AG*, etc.
3. Por el punto *E* se traza la perpendicular a la recta *AH* hasta cortar a la circunferencia de diámetro *AF* en el punto *J*. El segmento *EJ* es el lado del cuadrado que tiene por área el doble del cuadrado dado.
4. Por el punto *F* se traza la perpendicular a la recta *AH* hasta cortar a la circunferencia de diámetro *AG* en el punto *L*. El segmento *FL* es el lado del cuadrado que tiene por área el triple del cuadrado dado. Y así sucesivamente.

Para hallar un cuadrado que tenga el doble de área que otro *ABCD* dado existe un procedimiento más simple. Consiste en lo siguiente (fig. 38):

1. Se traza la diagonal *BD* y a continuación, la perpendicular por el extremo *B*.
2. Sobre esta perpendicular se traslada el segmento *BE* = *BD*.

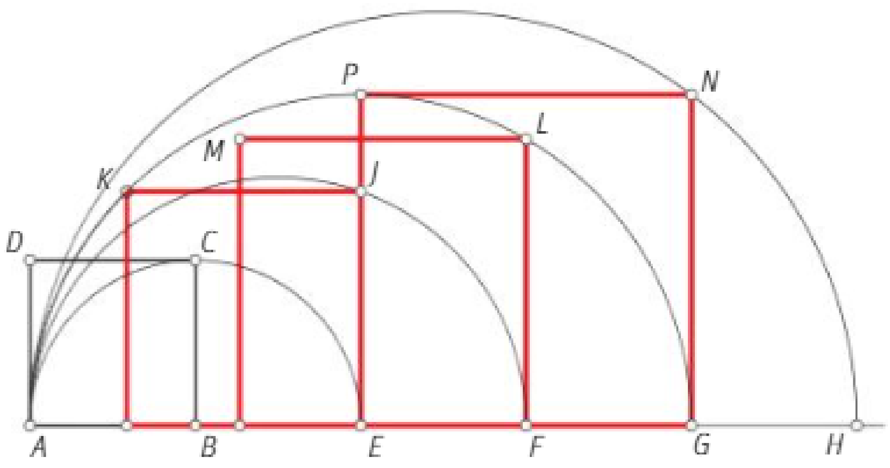


Figura 37

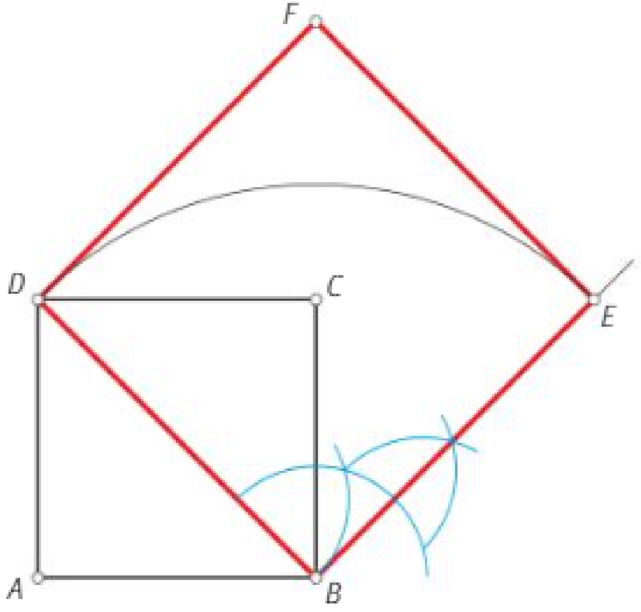


Figura 38

Cómo dibujar el cuadrado que tenga por área la suma de otros dos

Sean los cuadrados *ABCD* y *GDEF* (fig. 39):

1. El cuadrado que se busca tiene por lado la hipotenusa del triángulo rectángulo, cuyos catetos son los lados de los cuadrados dados. Se traza la perpendicular a la hipotenusa por el punto *C* y sobre ella se traslada la longitud *CH* = *CE*.
2. El punto *J* se obtiene trazando por *H* la paralela a *CE* y por *E* la paralela a *CH*.

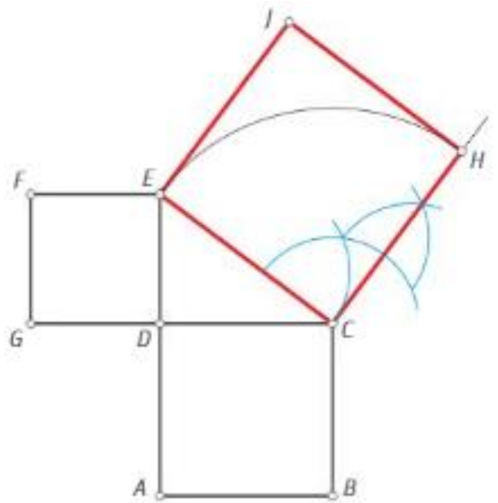


Figura 39

Cómo dibujar el cuadrado que tenga por área la suma de otros tres

Sean los cuadrados *ABCD*, *DEFG* y *GHJK* (fig. 40):

1. Se dibuja el triángulo rectángulo cuyos catetos son los lados de dos de los cuadrados dados y a continuación se traza la perpendicular a la hipotenusa por el punto *G*.
2. Se dibuja otro triángulo rectángulo cuyos catetos son ahora la hipotenusa anterior y el lado del tercer cuadrado. La hipotenusa de este segundo triángulo rectángulo es el lado del cuadrado suma de los tres.

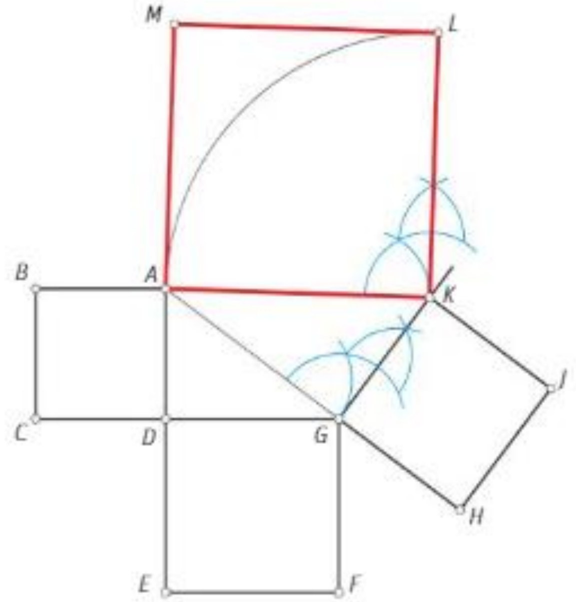


Figura 40

Ten en cuenta

- Se puede observar que esta construcción y la anterior se basan en el teorema de Pitágoras.

Cómo dibujar el cuadrado equivalente a un círculo

Los distintos métodos para construir un cuadrado que tenga la misma superficie que un círculo dado son métodos aproximados, sin solución exacta.

Sea la circunferencia de centro *O* (fig. 41):

1. Se traza un diámetro *AB* cualquiera y se divide en siete partes iguales.
2. Por el extremo *B* del diámetro se traza la recta *r*, tangente a la circunferencia. Con centro en *A* y radio tres, de las siete partes del diámetro, se traza un arco que corta a la prolongación del diámetro en el punto *C*.
3. Con centro en el punto 4 del diámetro y radio *4C* se dibuja un arco que corta a la recta *r* en el punto *D*. El segmento *BD* es el lado del cuadrado cuya superficie es aproximadamente igual a la del círculo dado.

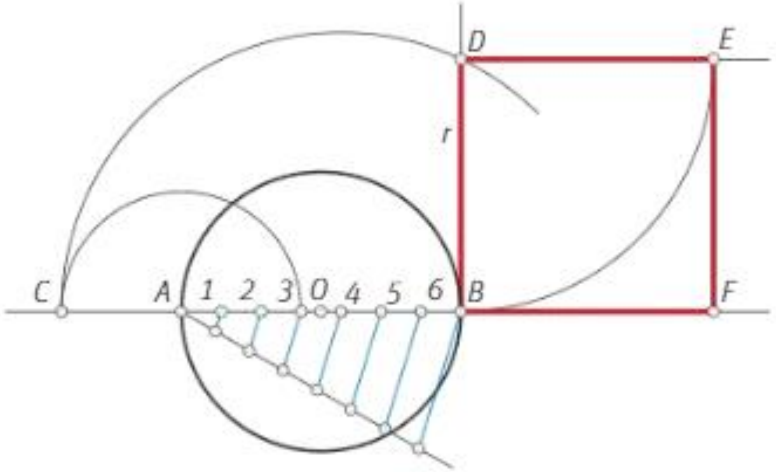


Figura 41

Ten en cuenta

- Este caso de equivalencia se conoce también como la cuadratura del círculo.
- El problema de la cuadratura del círculo ha sido descartado por geómetras y matemáticos, pero hay quien sostiene que es también un planteamiento metafísico (fig. 42).

Cómo dibujar el círculo que tenga por área la suma de otros dos

Sean las circunferencias de diámetro *AB* y *BC* (fig. 43):

1. Se dibuja un triángulo rectángulo cuyos catetos midan *AB* y *BC*.
2. El círculo que tiene por diámetro la hipotenusa *AC* tiene por área la suma de las anteriores.

Cómo dibujar el círculo que tenga por área el doble, el triple, el cuádruple, etc., que otro dado

Sea la circunferencia de diámetro *AB* (fig. 44):

1. Sobre una recta cualquiera se traslada sucesivamente el diámetro de la circunferencia dada, obteniendo los puntos *A*, *C*, *D*, *E*, *F*, etc.
2. Se dibujan las semicircunferencias de diámetro *AD*, *AE*, *AF*, etc.
3. La perpendicular a la recta *AG*, trazada por el punto *D*, corta a la circunferencia de diámetro *AE* en el punto *H*. El segmento *DH* es el diámetro del círculo que tiene el doble de superficie que la circunferencia dada.
4. La perpendicular a la recta *AG*, trazada por el punto *E*, corta a la circunferencia de diámetro *AF* en el punto *J*. El segmento *EJ* es el diámetro del círculo que tiene el triple de superficie que la circunferencia dada.

Y así sucesivamente.

Figura 42

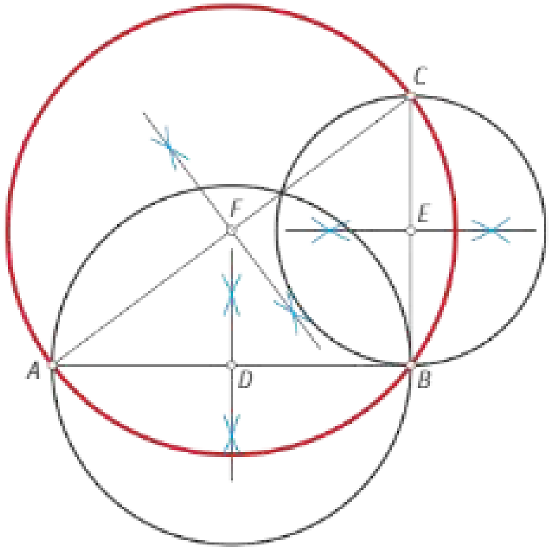
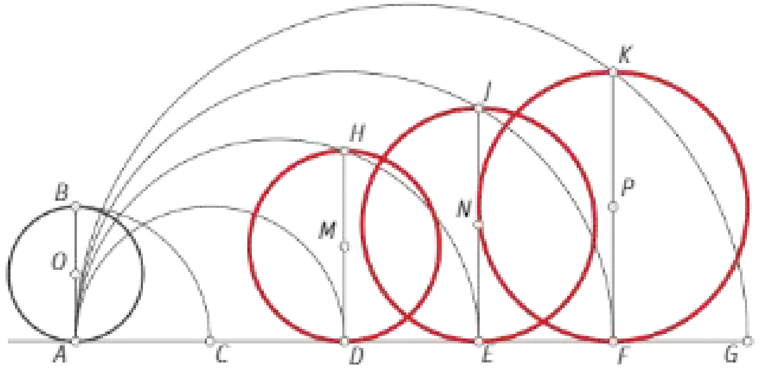


Figura 43



Construye una figura semejante a la dada (fig. 45), pero que tenga el doble de área.

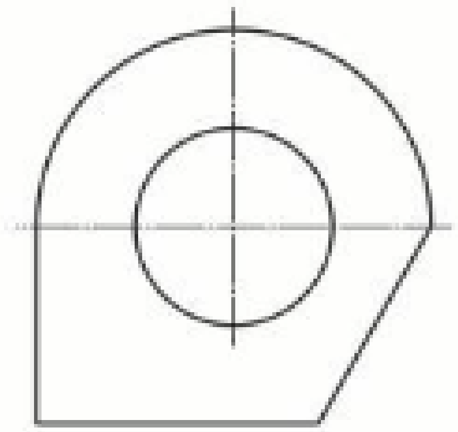


Figura 45

Construye una figura semejante a la dada (fig. 45), pero que tenga el doble de área.

Solución:

1. Sobre la recta *r*, tangente a la circunferencia interior en el punto *A* de la misma (fig. 46), se traslada por tres veces el diámetro de la circunferencia dada, obteniendo los puntos *A*, *C*, *D* y *E*.
2. Se dibuja la semicircunferencia de diámetro *AE* y por el punto *D* se traza la perpendicular a este diámetro hasta cortar a la circunferencia en el punto *G*.
3. El segmento *DG* es el diámetro del círculo que tiene por área el doble del círculo de diámetro *AB*.
4. El punto *O* donde se cortan las rectas *AD* y *BG* (en nuestro caso, fuera de los límites del dibujo) es el centro de la semejanza entre la figura dada y la que se pide.

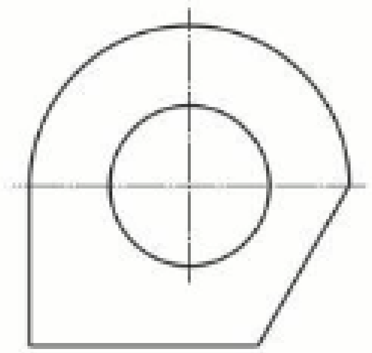


Figura 45

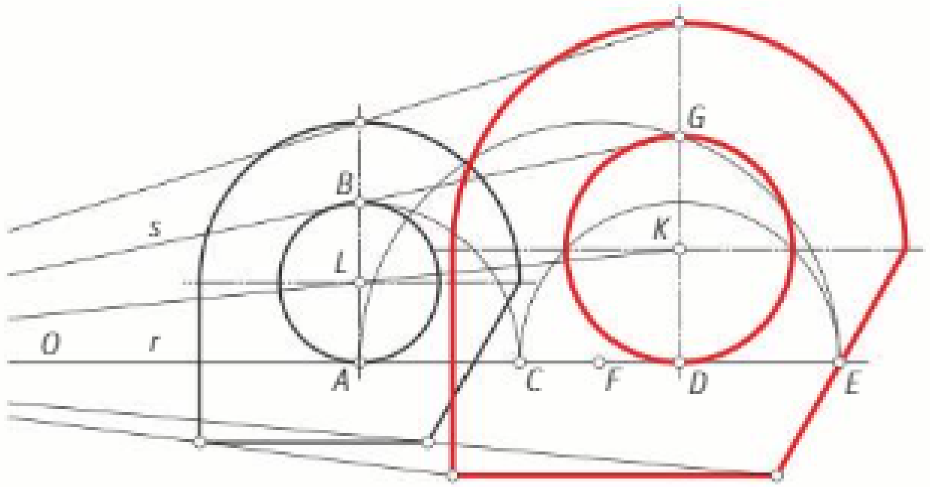


Figura 46

Cómo dividir un círculo en dos superficies equivalentes por medio de una circunferencia concéntrica

1. Se divide la circunferencia dada, de centro *O* (fig. 49), en cuatro partes iguales. A continuación se trazan dos diámetros, *AB* y *CD*, perpendiculares entre sí.
2. Se determina el punto medio *E* del segmento que une dos puntos consecutivos *B* y *D*, por ejemplo.
3. La circunferencia de centro *O* y radio *OE* divide a la circunferencia dada en dos superficies de igual área.

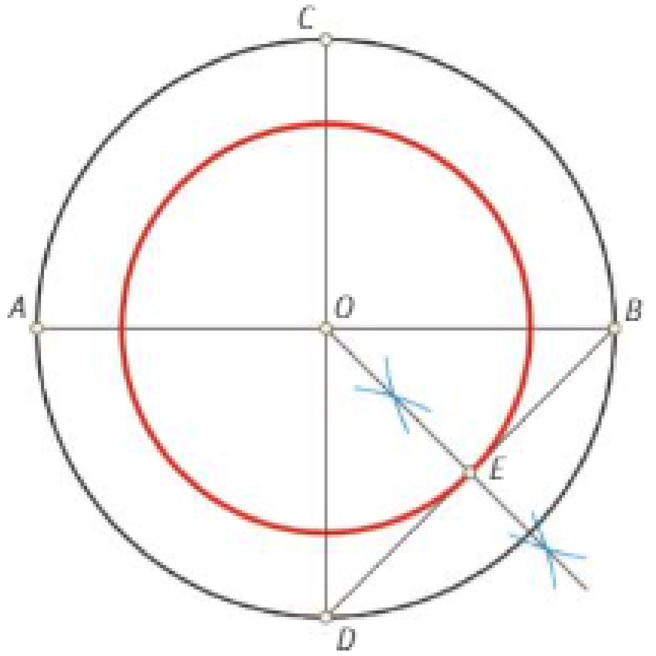


Figura 49

1 Circunferencia

1.1. Definiciones

- **Circunferencia.** Es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo, llamado centro.
- **Arco.** Es un segmento de circunferencia.
- **Círculo.** Es la parte de plano interior a la circunferencia.
- **Sector circular.** Es la porción de círculo, comprendida entre dos radios (fig. 1).
- **Segmento circular.** Es la parte de círculo comprendida entre una cuerda y su arco (fig. 1).

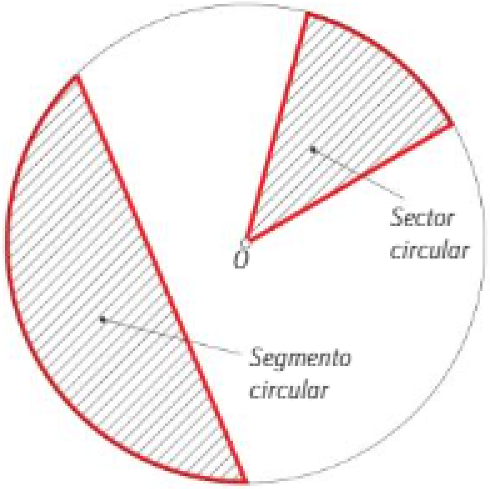


Figura 1

1.2. Rectas de una circunferencia

- **Radio** *(r)*: es el segmento *OA* que une el centro con cualquier otro punto de la circunferencia (fig. 2).
- **Diámetro** *(d)*: es el segmento que une los puntos *B* y *C* de intersección de la circunferencia con cualquier recta que pasa por el centro.
- **Cuerda** *(c)*: es el segmento *DE* que une dos puntos de la circunferencia sin pasar por el centro.
- **Tangente** *(t)*: es la recta que tiene un solo punto común *F* con la circunferencia. La tangente y el radio en el punto de tangencia son perpendiculares.

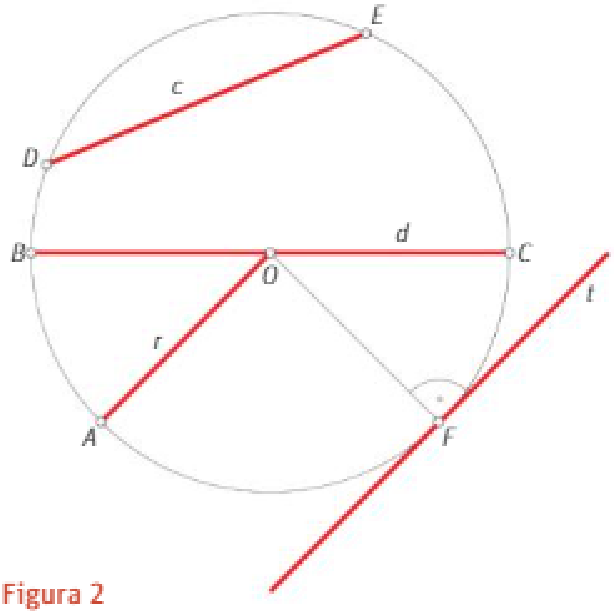


Figura 2

1.3. Ángulos de una circunferencia

- **Ángulo central:** El vértice del ángulo es el centro de la circunferencia (fig. 3). Su valor es:

$$\varphi = \frac{a}{r} \cdot \frac{180^\circ}{\pi}$$

- **Ángulo inscrito:** El vértice es un punto de la circunferencia y sus lados son cuerdas de la misma (fig. 4).

$$\varphi = \frac{\alpha}{2}$$

- **Ángulo seminscrito:** El vértice es un punto de la circunferencia; uno de los lados es secante y el otro es tangente a la circunferencia (fig. 5).

$$\varphi = \frac{\alpha}{2}$$

- **Ángulo interior:** El vértice del ángulo es un punto interior de la circunferencia (fig. 6).

$$\varphi = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

- **Ángulo exterior:** El vértice es un punto exterior de la circunferencia y los lados son rectas secantes (fig. 7).

$$\varphi = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

- **Ángulo circunscrito:** El vértice es un punto exterior y los lados son rectas tangentes a la circunferencia (fig. 8).

$$\varphi = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

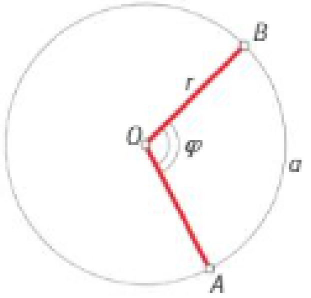


Figura 3

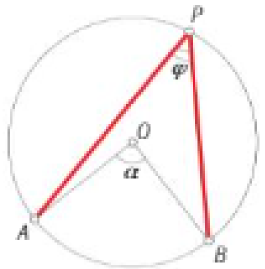


Figura 4

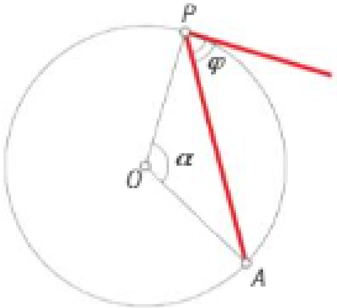


Figura 5

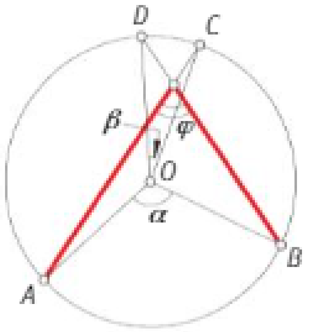


Figura 6

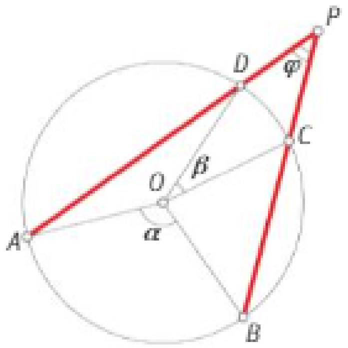


Figura 7

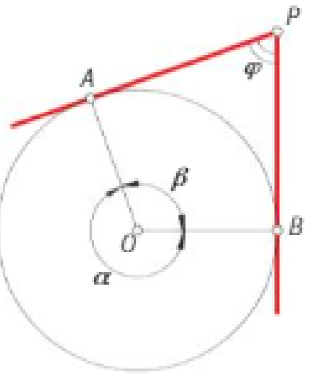


Figura 8

1.4. Arco capaz

Se llama **arco capaz** de un ángulo φ dado respecto a un segmento también conocido (fig. 9), al lugar geométrico de los puntos del plano desde los cuales se ve el segmento bajo el ángulo φ.

Cómo se traza el arco capaz

Dados el segmento AB y el ángulo φ (fig. 10):

1. Se traza la mediatriz del segmento AB.
2. Por uno de los extremos A del segmento dado se traza la recta m, perpendicular a AB, restando a continuación el ángulo φ hasta cortar a la mediatriz en O_1, de tal forma que el ángulo O_1AB es de $90 - \varphi$.
3. Se construye el ángulo simétrico de $90 - \varphi$ respecto de AB hasta cortar a la mediatriz en O_2.
4. Con centros en O_1 y O_2 se trazan dos arcos de circunferencia que comiencen en A y terminen en B. Dichos arcos son los arcos capaces buscados.

Ten en cuenta

- Siempre existen dos arcos simétricos respecto al segmento, que cumplen la condición de arco capaz.

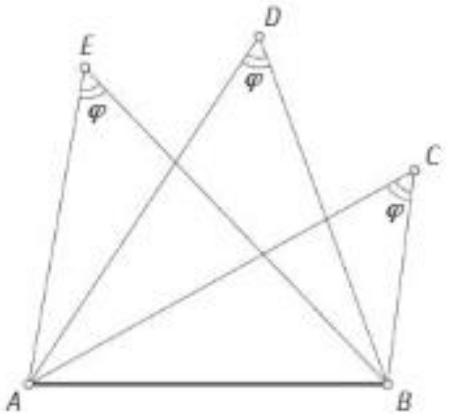


Figura 9

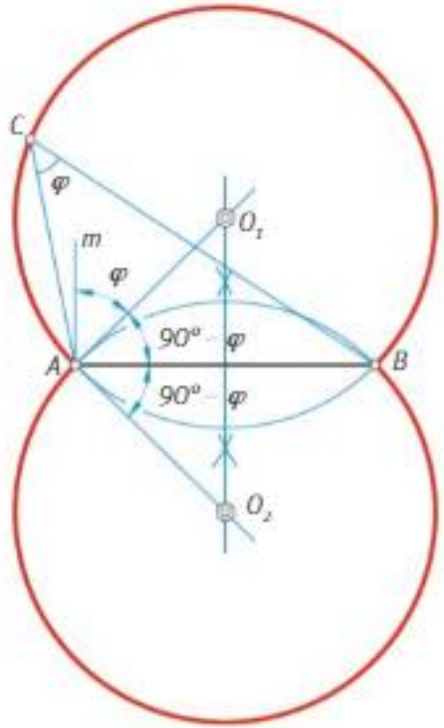


Figura 10

En la costa hay tres faros *R*, *S* y *T* (fig. 11), separados en línea recta *RS* = 30 km, *ST* = 40 km y *RT* = 60 km. Desde un barco *P*, situado en el mar, se ven los faros *R* y *S* desde un ángulo de 45° y los faros *S* y *T* desde un ángulo de 60°. Determina la posición del barco *P* en el mar.

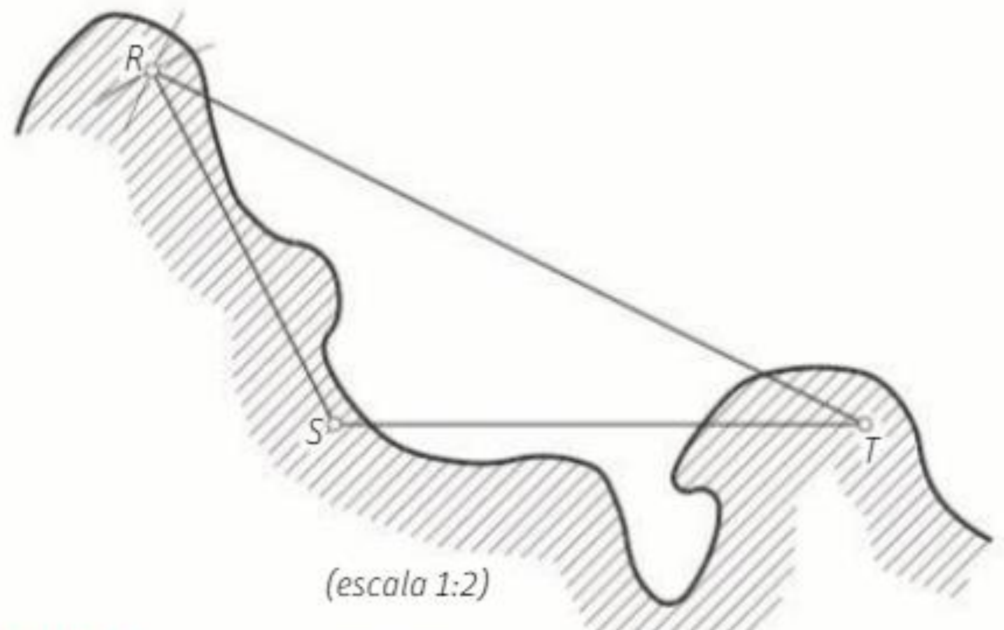


Figura 11

En la costa hay tres faros *R*, *S* y *T* (fig. 11), separados en línea recta *RS* = 30 km, *ST* = 40 km y *RT* = 60 km. Desde un barco *P*, situado en el mar, se ven los faros *R* y *S* desde un ángulo de 45° y los faros *S* y *T* desde un ángulo de 60°. Determina la posición del barco *P* en el mar.

Solución:

1. Se dibuja el arco capaz de 45° respecto del segmento *RS* (fig. 12). Desde cualquier punto de dicho arco se ve el segmento *RS* desde un ángulo de 45°.
2. Se dibuja el arco capaz de 60° respecto del segmento *ST*. Dicho arco contiene todos los puntos desde los que se ve el segmento *ST* desde un ángulo de 60°.
3. El punto *P* donde se cortan los dos arcos anteriores determina la posición del barco en el mar.

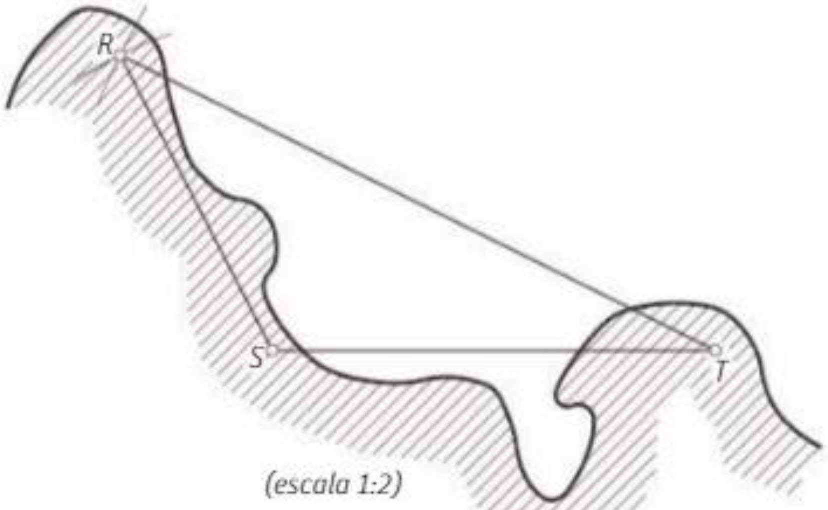


Figura 11

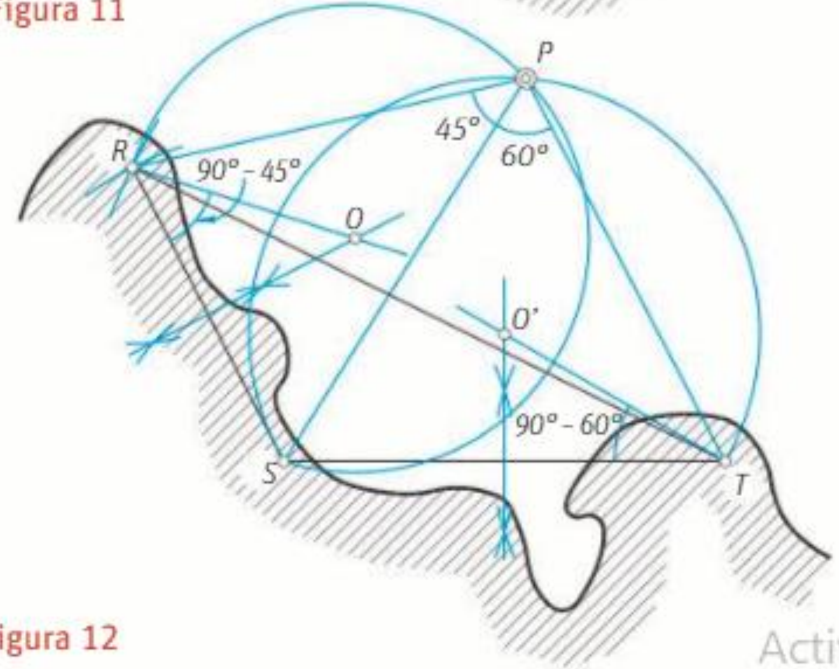


Figura 12

3 Potencia

3.1. Potencia de un punto respecto de una circunferencia

Sean un punto P, una circunferencia de centro O y una recta trazada por P que corta a la circunferencia en los puntos A y B (fig. 17); se denomina potencia p del punto P respecto a la circunferencia O al producto de las distancias PA y PB.

Si por el punto P trazamos cualquier otra recta secante o tangente a la circunferencia, se cumple lo siguiente:

$$p = PA \times PB = PC \times PD = PE \times PE = (PE)^2 = \text{constante}$$

Ten en cuenta

- Si el punto P es interior a la circunferencia, la potencia es negativa.

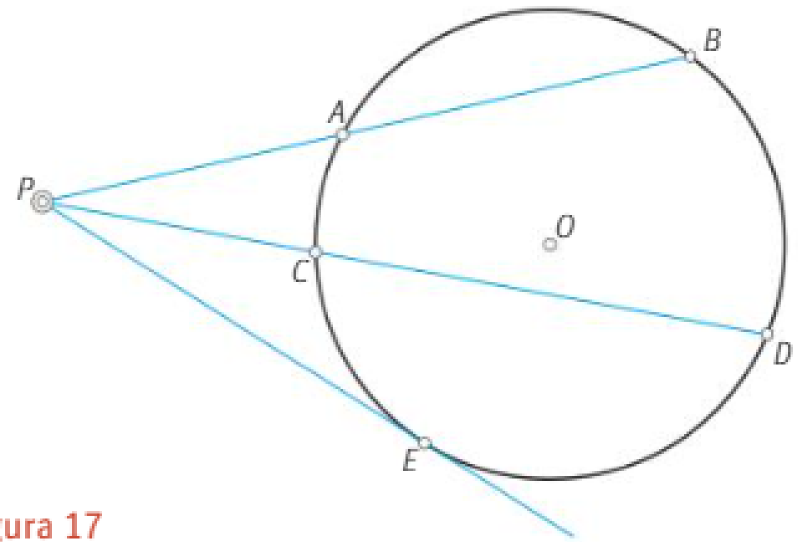


Figura 17

Eje radical de dos circunferencias

Dadas dos circunferencias de centros O_1 y O_2 (fig. 18), se llama eje radical al lugar geométrico de los puntos del plano que tienen la misma potencia respecto de ambas circunferencias:

$$MA \times MB = MC \times MD$$

Ten en cuenta

- El eje radical es siempre perpendicular a la recta que une los centros de las dos circunferencias.

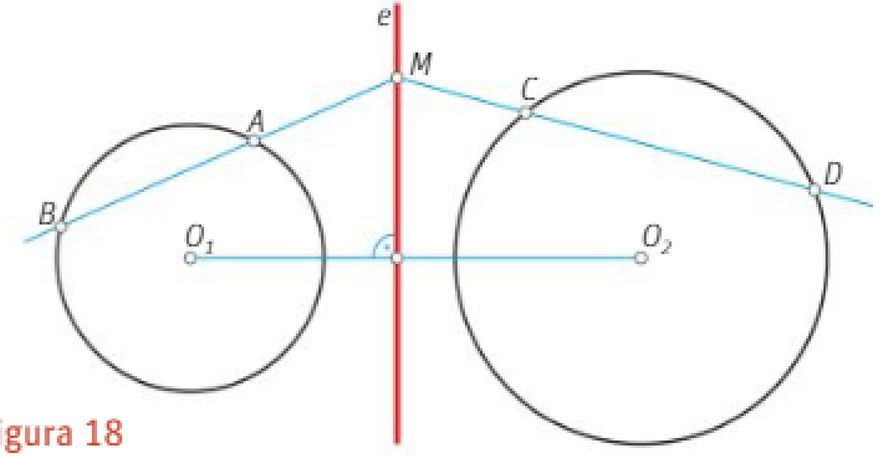


Figura 18

Cómo se halla el eje radical de dos circunferencias secantes

Se halla uniendo los puntos de intersección A y B de ambas circunferencias (fig. 19).

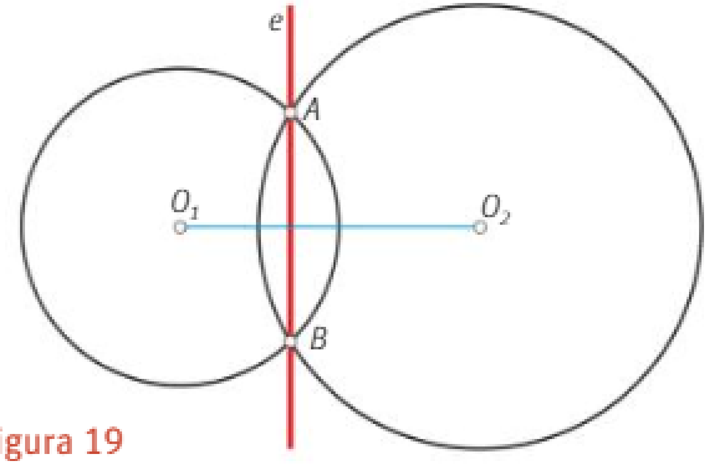


Figura 19

Cómo se halla el eje radical de dos circunferencias tangentes

Se halla trazando la recta tangente común a ambas circunferencias (fig. 20).

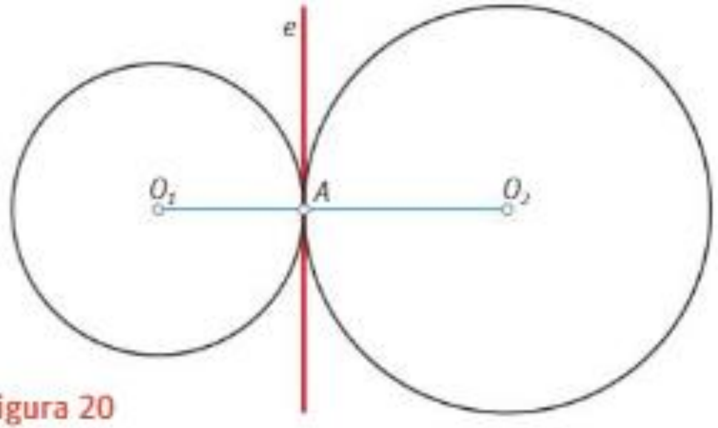


Figura 20

Cómo se halla el eje radical de dos circunferencias exteriores

El eje se determina trazando una circunferencia auxiliar de centro O (fig. 21), hallando los ejes radicales r y s de esta con las de centro O_1 y O_2, respectivamente, y trazando por último la recta e que pasa por el punto E de intersección de r y s y es perpendicular a la recta O_1O_2 que une los centros dados.

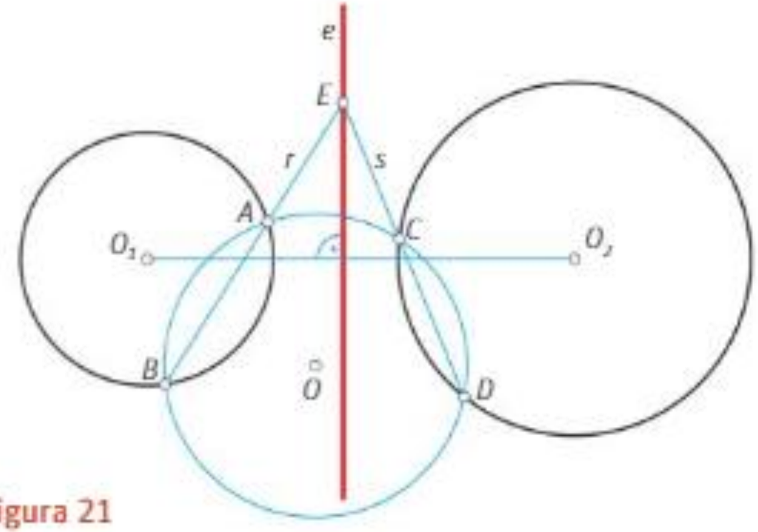
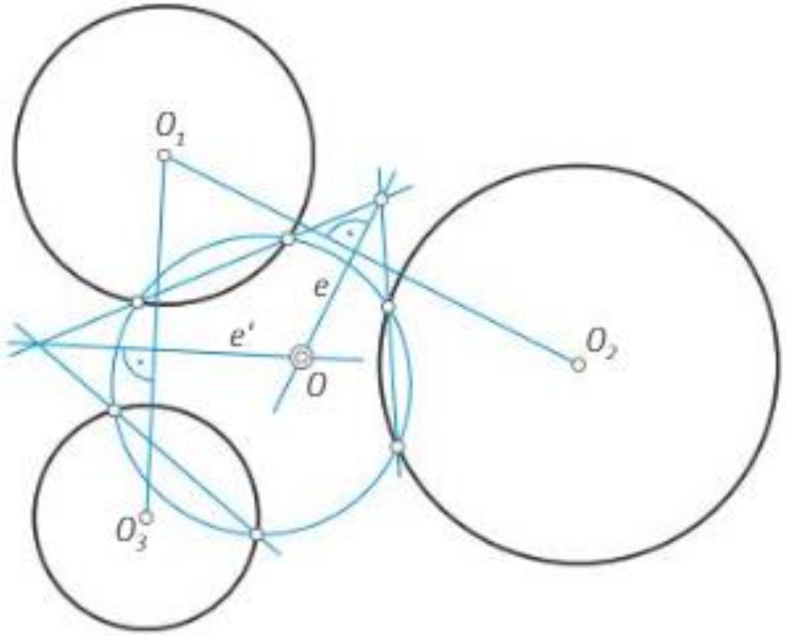


Figura 21

Centro radical de tres circunferencias

Dadas tres circunferencias de centros O_1, O_2 y O_3 (fig. 22), se llama centro radical al punto O que tiene la misma potencia respecto de las tres circunferencias.



Cómo se halla el centro radical de tres circunferencias

El centro radical será el punto de intersección de los ejes radicales de las circunferencias, tomadas de dos en dos.

EJERCICIOS RESUELTOS

Construye el eje radical de dos circunferencias de radios 5 y 20 mm, cuyos respectivos centros O_1 y O_2 están separados 10 mm.

Solución:

Sean las circunferencias con centro en O_1 y O_2 (fig. 23):

1. Con centro en un punto *O'* cualquiera se dibuja una circunferencia que corte a las dos circunferencias dadas.
2. Se dibujan los ejes radicales *a* y *b* de la circunferencia de centro *O'* y las circunferencias dadas.
3. Por el punto *A* de intersección de los ejes *a* y *b* se traza la perpendicular *e* a la recta O_1O_2.

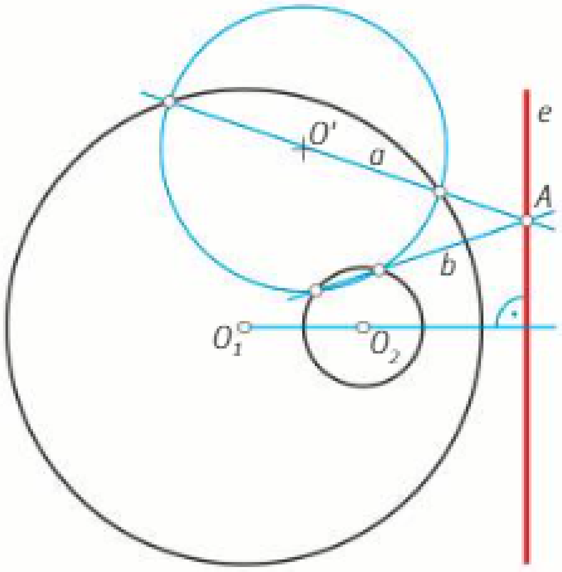


Figura 23

Determina el centro radical de tres circunferencias, sabiendo que los centros son los vértices de un triángulo *ABC*, donde *AB* = *AC* = 10 mm y *BC* = 15 mm, y cuyos radios valen 10, 10 y 15 mm, respectivamente.

Solución:

1. Se dibuja el triángulo *ABC* (fig. 24) y se trazan las circunferencias de centro en *A* y radio 10 mm, centro en *B* y radio 10 mm y centro en *C* y radio 15 mm.
2. Los puntos *D* y *E* de intersección de dos de las circunferencias determinan el eje radical *e* de las circunferencias de centros *B* y *C*.
3. Por el punto *F* de tangencia de las circunferencias de centros *A* y *C* se traza la perpendicular *e'* a la recta *AC*, tangente común a las dos circunferencias y eje radical de ambas.
4. El punto *O* de intersección de los ejes *e* y *e'* es el centro radical de las tres circunferencias.

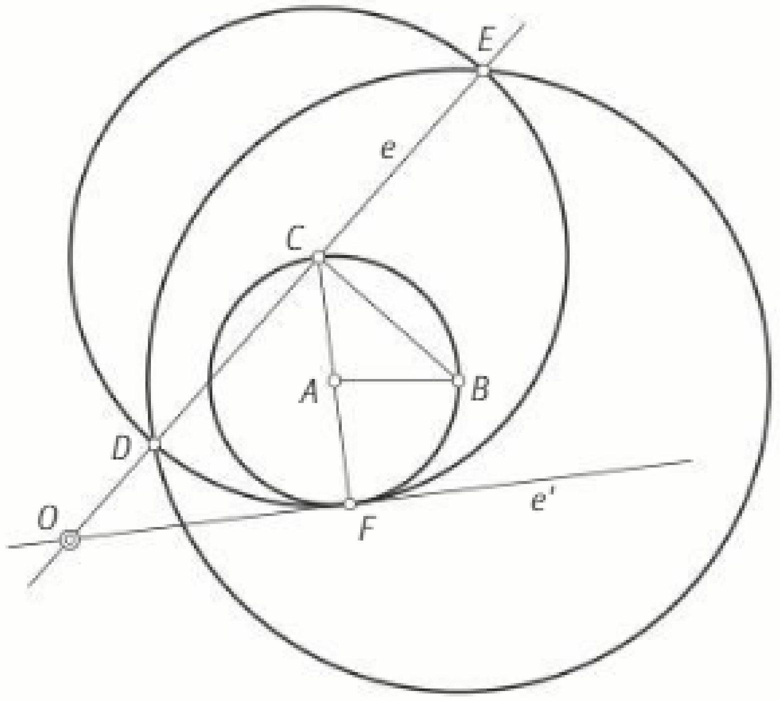


Figura 24

ACTIVIDADES

1. En una costa hay tres puntos (*A*, *B* y *C*), situados de manera que $AB = BC = 40$ km y $AC = 70$ km. Un velero ha salido del punto *A* y se sabe que está a 35 km del mismo cuando recibe las señales de los radiofaros, situados en los puntos *B* y *C* formando un ángulo de 45°. Determina la posición del barco.

2. Entre el faro de Ferrol, representado por el punto *M*, y el faro de A Coruña, representado por el punto *N*, hay una distancia de 20 km en línea recta. Un barco que se encuentra en la perpendicular a la línea *MN*, trazada por *M*, divisa los dos faros desde un ángulo de 60°. Sitúa la posición del barco.

3. Dibuja el triángulo equilátero cuyo perímetro es igual a la longitud de la circunferencia de radio 12 mm.

4. Determina el centro radical de tres circunferencias: la de centro en *A* tiene un radio de 24 mm; la de centro en *B*, 12 mm, y la de centro en *C*, 5 mm. Se sabe que $AB = 12$ mm, $BC = 17$ mm y $AC = 19$ mm.

5. Dado el triángulo *ABC*, de manera que $AB = BC = CA = 5$ mm y siendo *A*, *B* y *C* los centros de tres circunferencias de radio 30, 20 y 10 mm, respectivamente, determina el centro radical de las tres circunferencias.