1 Trazados fundamentales en el plano

1 Paralelismo

El paralelismo es algo que se encuentra a menudo en la vida diaria: los raíles de las vías del tren, las líneas que delimitan los arcenes y carriles de la carretera o las calles de una pista de atletismo (fig. 1), etc. Por eso conviene conocer algunas definiciones y saber cómo se dibujan.

- **Recta**. Es una sucesión ilimitada de puntos en la misma dirección (fig. 2a).
- **Semirrecta**. Es una recta limitada en uno de sus extremos (fig. 2b).
- **Segmento**. Es una parte de recta limitada por dos puntos (fig. 2c).

Ten en cuenta

- Un **lugar geométrico** es el conjunto de puntos del plano o del espacio que gozan de la misma propiedad.
- Dos rectas coplanarias, es decir, que pertenecen a un mismo plano, son paralelas cuando su punto de intersección se encuentra en el infinito (se dice entonces que el punto es impropio).

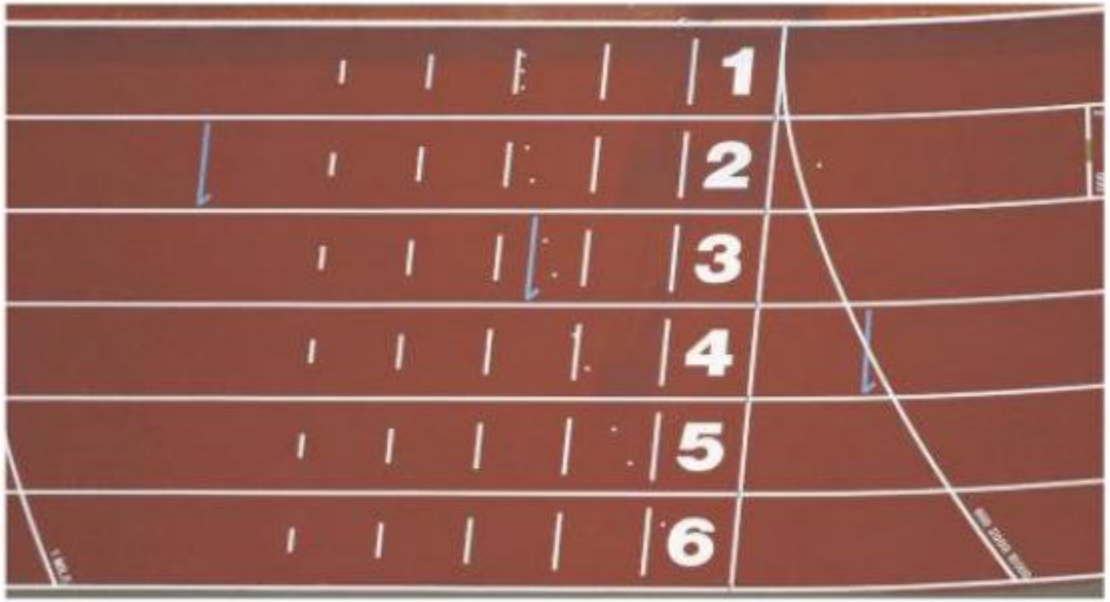


Figura 1

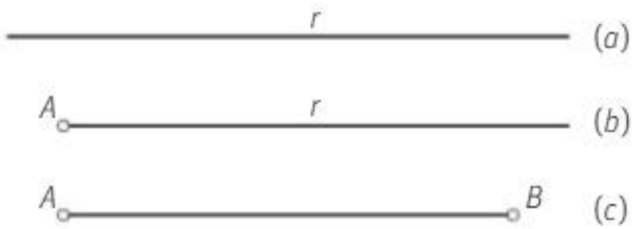


Figura 2

Cómo trazar por un punto la paralela a una recta dada

Dados la recta *r* y el punto *A* (fig. 3):

1. Se elige un punto *B* cualquiera de la recta *r* y se traza la semicircunferencia de centro *B* y radio *BA*, que corta a la recta *r* en *C* y *D*.
2. Con centro en *D* y radio *CA* se traza un arco que corta a la semicircunferencia en el punto *E*.
3. La recta *s* que une los puntos *A* y *E* es la paralela buscada.

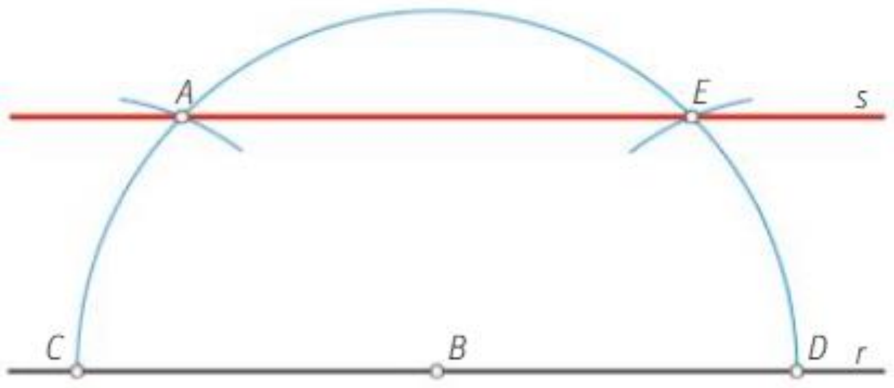


Figura 3

Cómo trazar la paralela a una recta dada a una distancia determinada

Dadas la recta *r* y la longitud *l* (fig. 4):

1. Se elige un punto cualquiera *A* de la recta *r* y se traza la perpendicular *t* a la recta *r* (ver apartado 2, perpendicularidad (fig. 9)).
2. Sobre la recta *t* se traslada el segmento *AE* = *l*.
3. Por el punto *E* se traza la recta *s* paralela a la recta *r* como se hizo en el caso anterior.

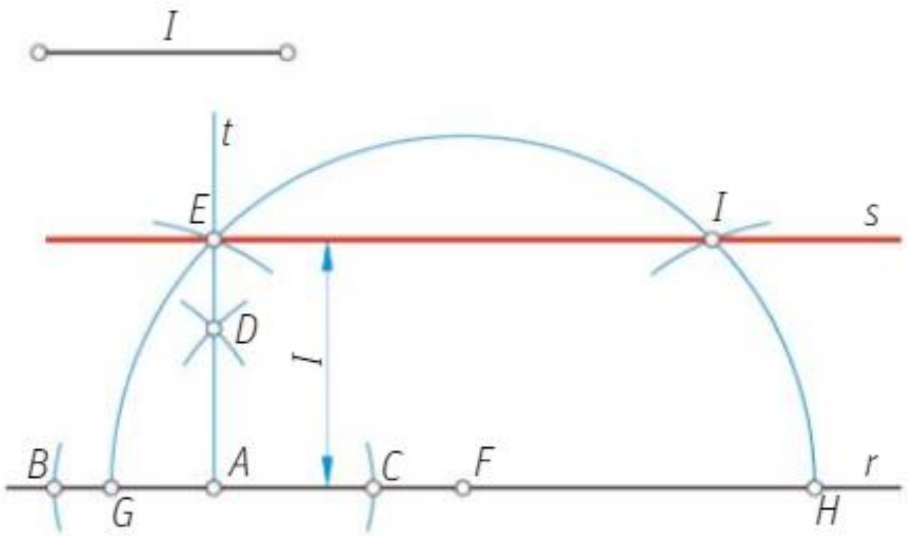


Figura 4

Cómo trazar rectas paralelas con escuadra y cartabón

Dados la recta *r* y el punto *A* (fig. 5a):

1. Se hace coincidir la hipotenusa de la escuadra con la recta *r* (fig. 5b).
2. Sin mover la escuadra, se apoya la hipotenusa del cartabón en uno de los catetos de la escuadra (fig. 5c).
3. Sin mover el cartabón, se desliza la escuadra sobre el cartabón hasta que su hipotenusa pase por *A* (fig. 5d).
4. Por el punto *A* se traza la recta *s* (fig. 5e).

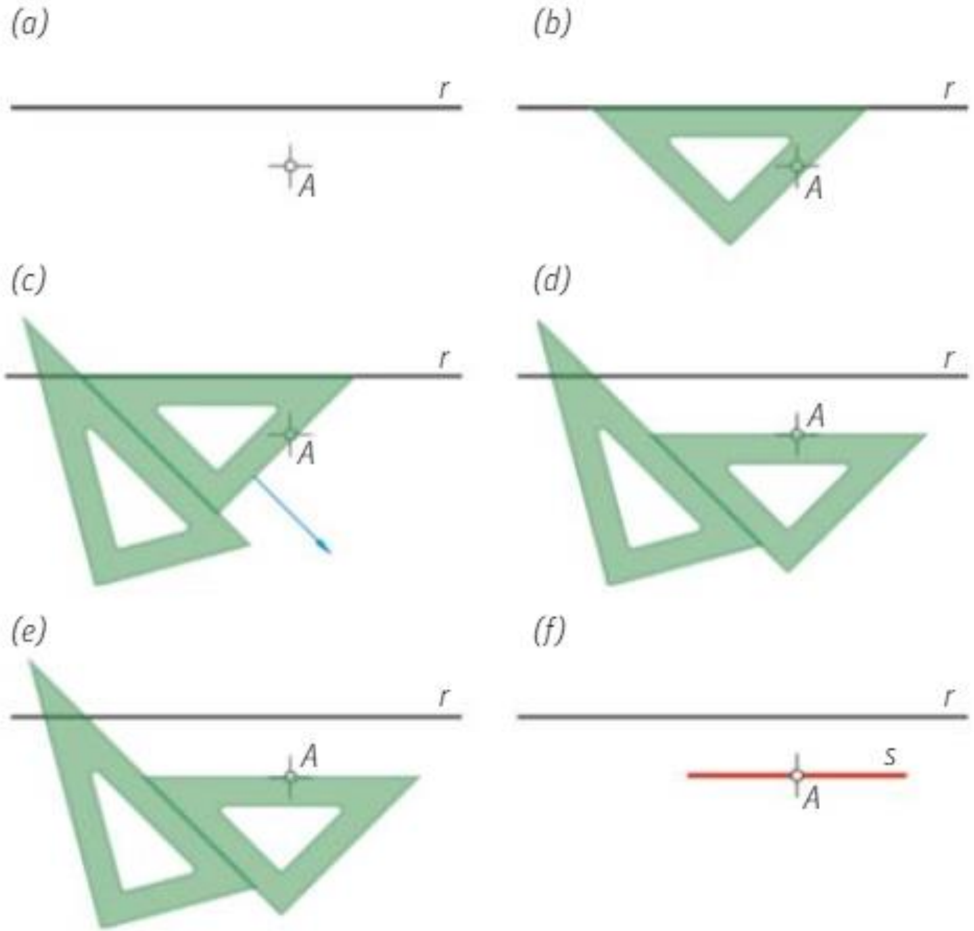


Figura 5

2 Perpendicularidad

Se puede entender el concepto de perpendicularidad observando una lámpara que cuelgue atada a un extremo de un cable, mientras se sujeta este por el extremo opuesto; el cable quedará perpendicular al suelo y al techo (fig. 6).

Dos rectas son **perpendiculares** cuando se cortan formando un ángulo de 90º.

La **mediatriz** de un segmento es la recta perpendicular a dicho segmento trazada por su punto medio.

Figura 6

Cómo trazar la mediatriz de un segmento

Dado el segmento *AB* (fig. 7):

1. Con centro en el extremo *A* del segmento y radio arbitrario se trazan dos arcos, uno a cada lado del segmento.
2. Con centro en el extremo *B* y con el mismo radio anterior, se trazan otros dos arcos, que se cortan con los anteriores en los puntos *D* y *E*.
3. La recta *s* que une los puntos *D* y *E* es la mediatriz.

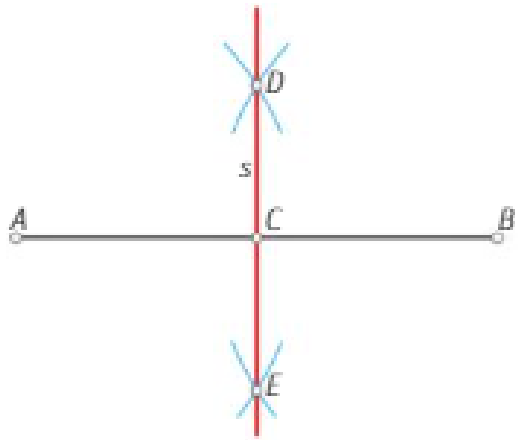


Figura 7

Cómo trazar la perpendicular a una semirrecta por su extremo

Dados la semirrecta *r* y el extremo *A* (fig. 8):

1. Con centro en *A* y radio arbitrario se traza un arco que corta a la recta *r* en el punto *B*. Con centro en *B* y el mismo radio se traza un segundo arco que corta al anterior en el punto *C*.
2. Con centro en *C* y el mismo radio se traza un tercer arco que corta al primero en el punto *D*. Con centro en *D* y el mismo radio se traza otro arco que corta al anterior en el punto *E*.
3. La recta *s* que une el punto *E* con el punto *A* es la perpendicular a la recta *r*.

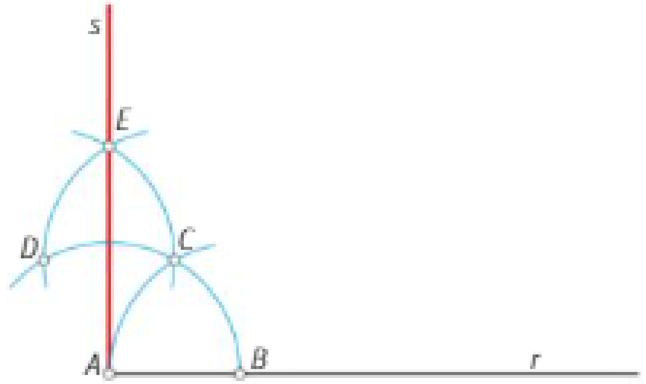


Figura 8

Cómo trazar la perpendicular a una recta por un punto de la misma

Dados la recta *r* y el punto *A* (fig. 9):

1. Con centro en *A* y radio arbitrario se trazan dos arcos que cortan a la recta *r* en los puntos *B* y *C*.
2. Con centros en *B* y *C* y radio arbitrario se trazan sendos arcos que se cortan en el punto *D*.
3. La recta *s* que une los puntos *D* y *A* es la perpendicular buscada.

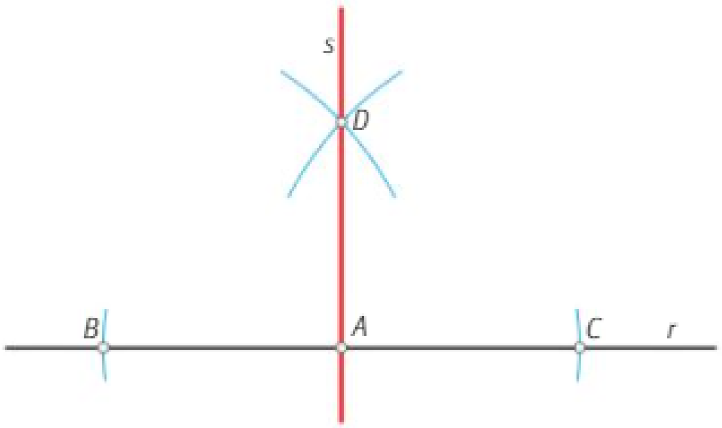


Figura 9

Cómo trazar la perpendicular a una recta por un punto exterior a ella

Dados la recta *r* y el punto *A* (fig. 10):

1. Con centro en *A* y radio arbitrario se traza un arco que corta a la recta en los puntos *B* y *C*.
2. Con centros en *B* y *C* y radio arbitrario se trazan sendos arcos que se cortan en el punto *D*.
3. La recta *s* que une los puntos *D* y *A* es la perpendicular.

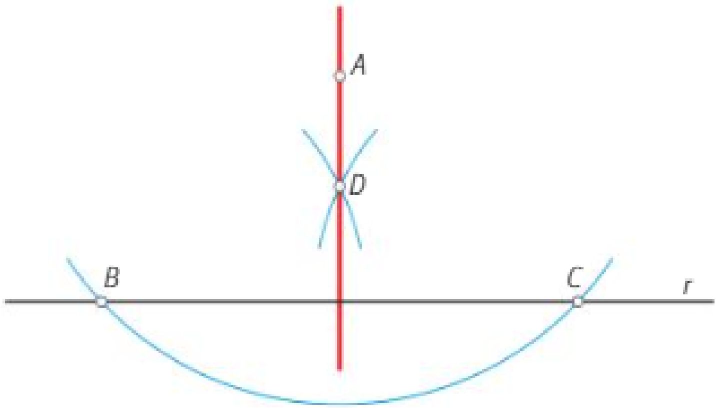


Figura 10

EJERCICIOS RESUELTOS

1 Traza la recta perpendicular al segmento dado *AB* por el extremo *A* (fig. 12).

Solución:

1. Por un punto *O* arbitrario, exterior a la recta *AB*, se traza una circunferencia de radio *OA*, que se corta con el segmento dado en el punto *C*.
2. Se traza la recta que pasa por los puntos *O* y *C*, que corta a la circunferencia anterior en el punto *D*.
3. La recta *r* que une el punto *A* con el punto *D* es la perpendicular buscada.

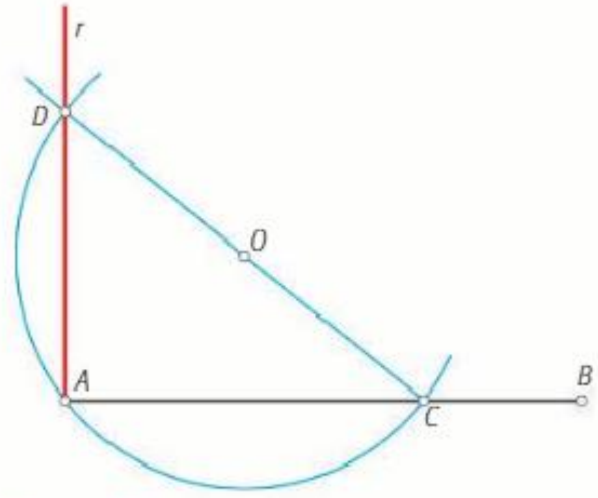
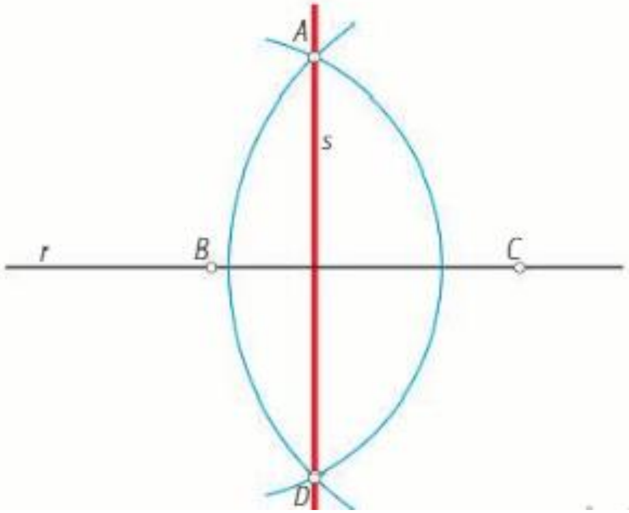


Figura 12

2 Traza por el punto *A* la recta perpendicular a la recta *r* (fig. 13).

Solución:

1. Con centro en un punto *B* arbitrario de la recta *r* se traza un arco que pase por el punto *A*.
2. Con centro en otro punto cualquiera, *C*, de la recta *r* se traza otro arco que pase por el punto *A* y que corta al arco anterior en el punto *D*.
3. La recta *s* que definen los puntos *A* y *D* es la perpendicular buscada.



3 Segmentos

Muchas de las operaciones aritméticas que normalmente se realizan con una calculadora (sumar, restar, multiplicar, etc.) se pueden realizar gráficamente. A continuación se muestran algunas operaciones que se pueden llevar a cabo por medio de construcciones de segmentos.

Cómo hallar la suma y la diferencia de dos segmentos

Dados los segmentos *AB* y *CD* (fig. 14):

1. Sobre una recta *r* se lleva el segmento *AB*.
2. **Suma**. A partir del punto *B* y sobre la recta *r* se lleva el segmento *CD* en el mismo sentido que *AB*. La longitud *AD* es la suma de ambos (fig. 14a).
3. **Resta**. A partir del punto *B* se lleva el segmento *CD* en sentido contrario al de *AB*. La longitud *AD* es la diferencia de ambos (fig. 14b).

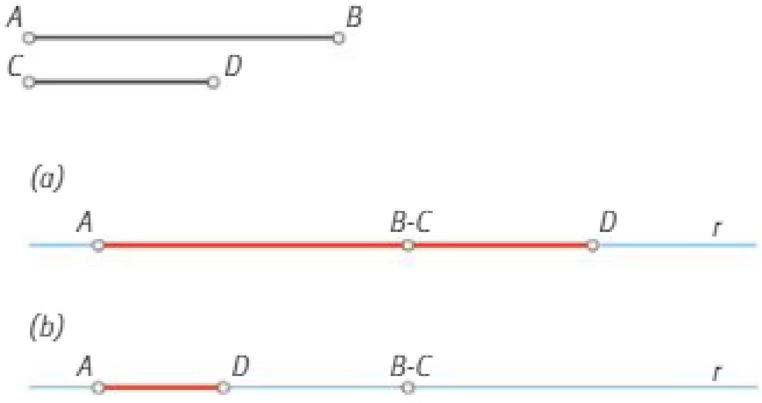


Figura 14

Cómo hallar el producto de un segmento por un número

Dado el segmento *AB* (fig. 15):

1. Sobre una recta *r* se lleva el segmento *AB* tantas veces como indique el número por el que se quiere multiplicar; en este caso, cuatro veces.
2. El segmento total *AE* es la solución.

Cómo dividir un segmento en un número de partes iguales

Dado el segmento *AB* (fig. 16):

1. Desde el extremo *A* se traza una recta cualquiera *s*.
2. Sobre la recta *s* se llevan tantos segmentos iguales, de longitud arbitraria, como el número de partes en que se quiera dividir el segmento.
3. Se traza la recta *t* que une el último punto con el extremo *B* del segmento y se trazan paralelas a *t* por los puntos *1, 2, 3,* etc., de la recta *s*.

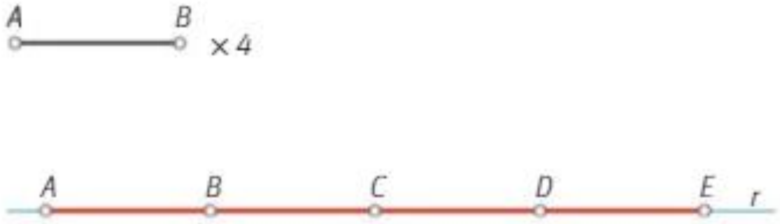


Figura 15

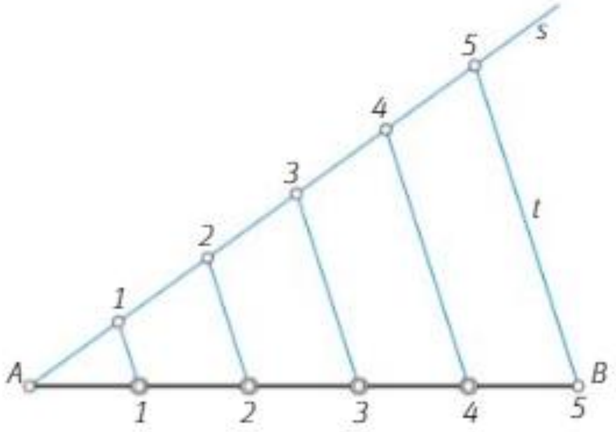


Figura 16

Cómo dividir un segmento en partes proporcionales a las dimensiones de otros segmentos

Dados el segmento *AB* y los segmentos *CD*, *EF*, *GH* e *IJ* (fig. 18):

1. Por uno de los extremos del segmento *AB*, en este caso *A*, se traza una recta cualquiera *s*.
2. Sobre la recta *s* se van llevando, uno a continuación del otro, los segmentos *CD*, *EF*, *GH* e *IJ*.
3. Se une el último punto *J* con el extremo *B* mediante la recta *t*, y se trazan paralelas a *t* por los puntos *E*, *G* e *I*.

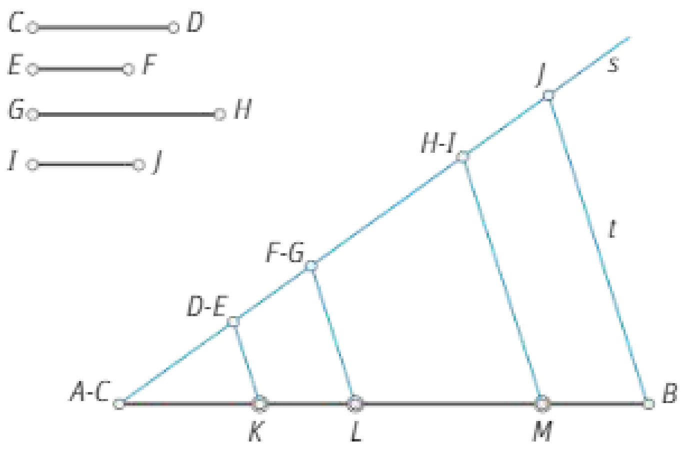


Figura 18

Cómo hallar el producto de dos segmentos

Dados los segmentos *AB* y *CD* (fig. 19):

1. Se trazan dos rectas cualesquiera *r* y *s* que se cortan en el punto *A*.
2. Sobre una de las rectas se traslada uno de los segmentos, en este caso el *AB*. Sobre la otra se traslada el segmento unidad *AC* y, a continuación, el segmento *CD*.
3. Se traza el segmento *BC*. Por el punto *D* se traza la recta paralela al segmento *BC* hasta cortar a *r* en el punto *E*.
4. El segmento *BE* es el producto de los segmentos dados.

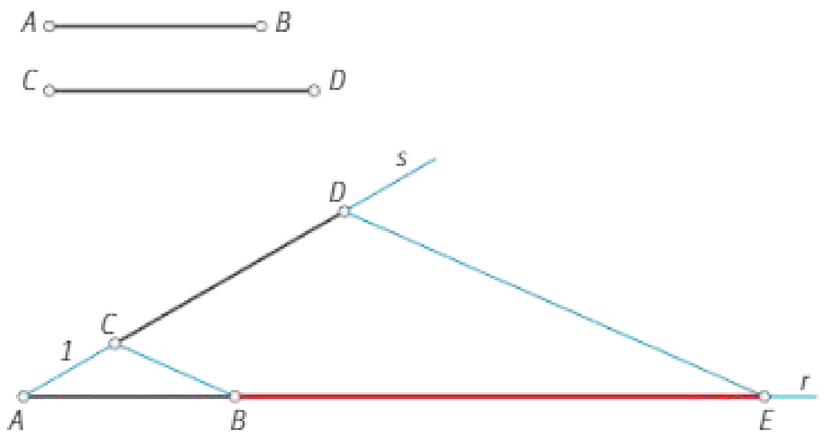


Figura 19

Cómo hallar la división de dos segmentos

Dados los segmentos *AB* y *AC* (fig. 20):

1. Se trazan dos rectas cualesquiera *r* y *s* que se cortan en el punto *A*.
2. Sobre una de ellas se traslada uno de los segmentos, el *AB*, y sobre la otra el segmento *AC*. A continuación del segmento divisor, en este caso *AC*, se traslada el segmento unidad *CD*.
3. Se traza el segmento *BC*. Por el punto *D* se traza la recta paralela al segmento *BC* hasta cortar a *r* en el punto *E*.
4. El segmento *BE* es el cociente entre *AB* y *AC*, es decir, *AB*/*AC*.

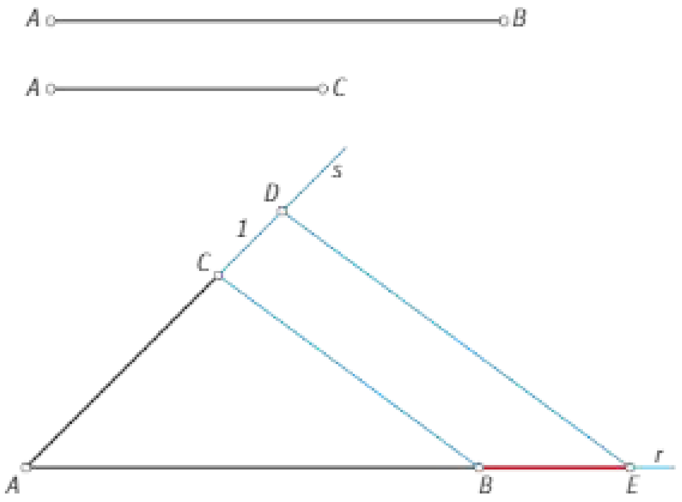


Figura 20

Cómo hallar la raíz cuadrada de un segmento

Sea el segmento *AB* (fig. 21):

1. Sobre una recta se toma el segmento *AB* y, a continuación, el segmento unidad *BC*.
2. Se determina el punto medio *D* del segmento *AC*.
3. Con centro en el punto *D* se traza la semicircunferencia de diámetro *AC*.
4. La perpendicular trazada por *B* corta a la circunferencia en el punto *E*. El segmento *BE* es la raíz cuadrada de *AB*.

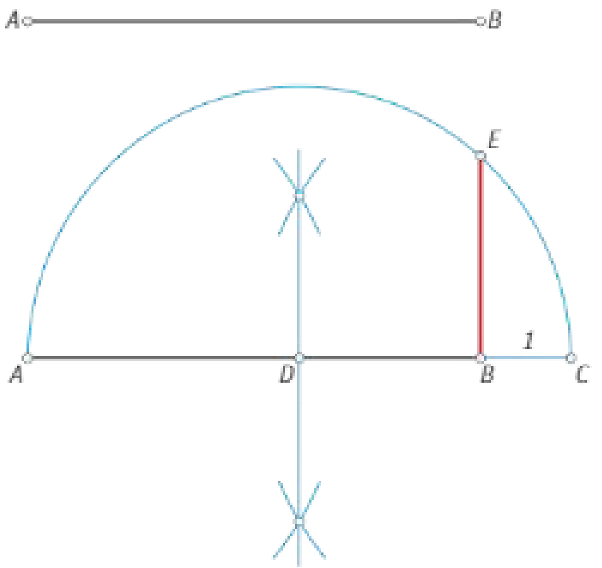


Figura 21

Teorema de la altura

Media proporcional entre dos segmentos

Sean los segmentos $a = AB$ y $b = CD$. La media proporcional x a los segmentos a y b se expresa así:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$$

Cómo construir la media proporcional

1. Sobre una recta r (fig. 1) se trasladan los segmentos $AB = a$ y $CD = b$ y, con centro en E, punto medio de AD, se traza la semicircunferencia de diámetro AD.
2. La perpendicular a la recta r trazada por B-C corta a la circunferencia en el punto F. El segmento $x = BF$ es la media proporcional entre AB y CD.

Teorema de la altura. En todo triángulo rectángulo la altura sobre la hipotenusa es media proporcional entre los segmentos en que queda dividida la hipotenusa.

Este teorema es la aplicación directa de la construcción de la media proporcional entre dos segmentos (fig. 1).

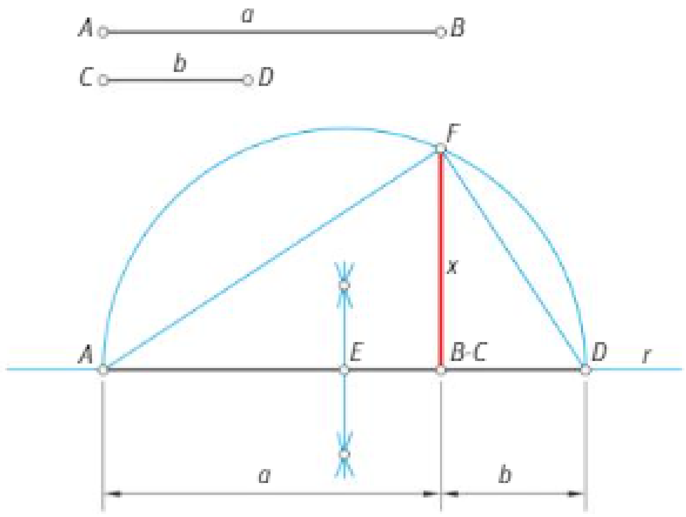


Figura 1

Teorema del cateto

Teorema del cateto. En todo triángulo rectángulo un cateto es media proporcional entre la hipotenusa y la proyección de dicho cateto sobre ella.

Sean los segmentos $a = AB$ y $b = CD$ (fig. 2):

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$$

Cómo representar gráficamente el teorema del cateto

1. Sobre una recta *r* se trasladan, a partir de un mismo punto *A-C*, los segmentos $AB = a$ y $CD = b$, y se dibuja la semicircunferencia de diámetro *AB*, el mayor de los dos segmentos.
2. Por el punto *D* se traza la perpendicular a la recta *r* hasta cortar a la semicircunferencia en el punto *F*. El segmento $x = AF$ es la media proporcional entre los dos segmentos dados.

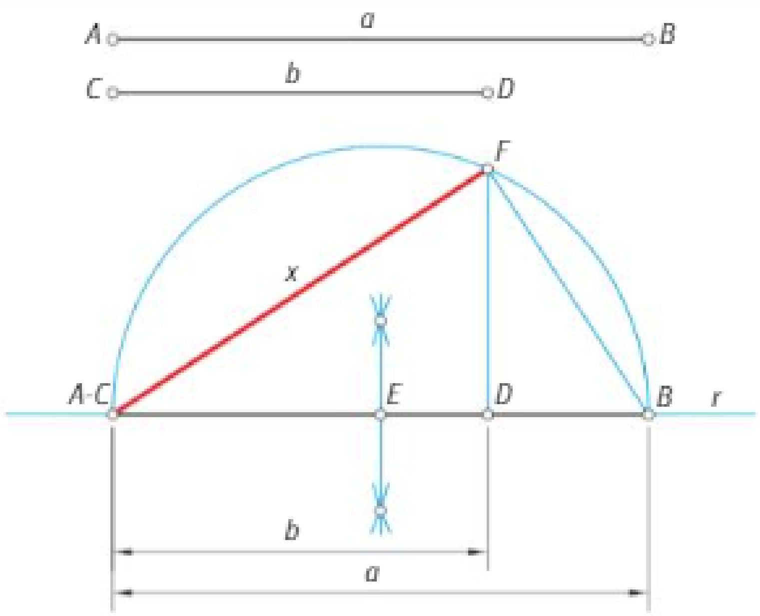


Figura 2

Sección áurea de un segmento

Se denomina **sección áurea** de un segmento *AC* (fig. 8) a la división que le produce un punto *B* de tal forma que la proporción que existe entre la parte más pequeña y la parte más grande es la misma que hay entre la parte más grande y el todo. Es decir:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a+b} = \frac{1}{\mu} \text{ (siendo } \mu = 1{,}6180\ldots)$$

Cómo hallar la división áurea de un segmento dado

Dado el segmento *AB* (fig. 9):

1. Por el extremo *B* se traza la recta *r* perpendicular.
2. Se halla el punto medio *C* del segmento *AB* trazando su mediatriz y, con centro en *B* y radio *BC*, se describe un arco hasta cortar a *r* en el punto *D*. Se une *D* con el extremo *A* y, con centro en *D* y radio *DB*, se describe un arco hasta cortar a la recta *AD* en el punto *E*.
3. Con centro en *A* y radio *AE* se traza otro arco que corta al segmento *AB* en *F*. El segmento *AF* es la división áurea de *AB*.

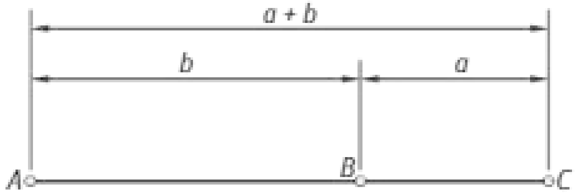


Figura 8

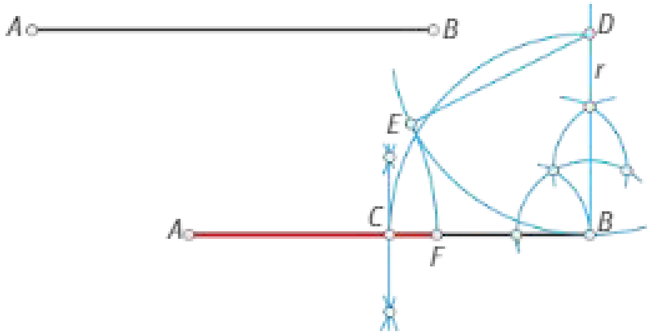


Figura 9

4 Ángulos

Dos rectas que pertenezcan a un mismo plano siempre se cortan formando un determinado ángulo (fig. 22).

Se denomina **ángulo** a cada una de las dos regiones del plano determinadas por dos semirrectas con el origen común. Las semirrectas se llaman **lados**, y el punto común, **vértice** (fig. 23).

La **bisectriz** de un ángulo es la recta que divide a este en dos ángulos iguales, o lo que es lo mismo, es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los lados del ángulo (fig. 23).

Ten en cuenta

Los ángulos pueden medirse en:

- **Grados sexagesimales**. La circunferencia se divide en 360º y el ángulo que forman dos rectas perpendiculares mide 90º.
- **Radianes**. En una circunferencia, un radián es el ángulo cuyo arco tiene igual longitud que los dos radios que lo forman.

Figura 22

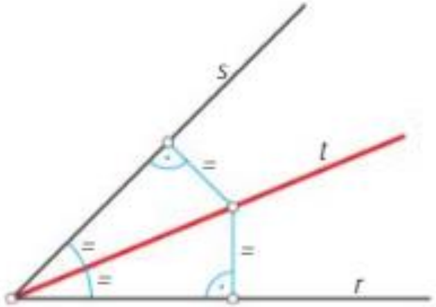


Figura 23

Tipos de ángulos

- **Ángulo agudo**. Ángulo que mide menos de 90º (fig. 24a).
- **Ángulo recto**. Ángulo que mide 90º (fig. 24b).
- **Ángulo obtuso**. Ángulo que mide más de 90º (fig. 24c).
- **Ángulo llano**. Ángulo que mide 180º (fig. 24d).
- **Ángulo cóncavo**. Es el menor de los dos ángulos determinados por dos rectas que se cortan (fig. 24e).
- **Ángulo convexo**. Es el mayor de los dos ángulos determinados por dos rectas que se cortan (fig. 24e).
- **Ángulos complementarios**. Su suma vale 90º.
- **Ángulos suplementarios**. Su suma vale 180º.

Relaciones entre ángulos

Sean *r* y *s* dos rectas concurrentes y *t* una secante (fig. 25). Los ángulos que se forman pueden ser: **externos** (1, 2, 7 y 8), **internos** (3, 4, 5 y 6), **adyacentes externos** (1-2 y 7-8), **adyacentes internos** (3-4 y 5-6), **alternos externos** (1-7 y 2-8) y **alternos internos** (3-5 y 4-6).

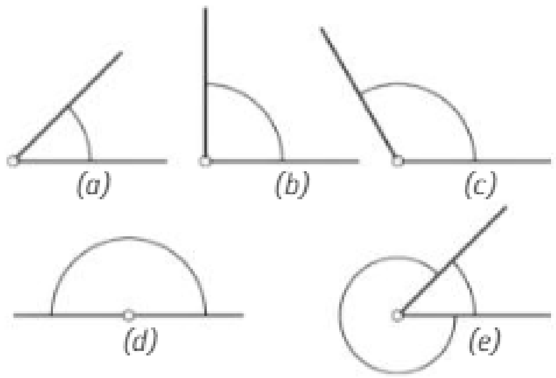


Figura 24

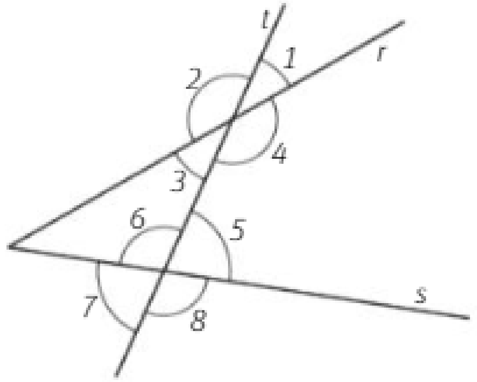


Figura 25

Ten en cuenta

- Dos ángulos cuyos lados son paralelos son iguales (fig. 26).
- Los ángulos cuyos lados son perpendiculares son iguales (fig. 27).

Cómo se construye un ángulo igual a otro

Dado el ángulo $\hat{A}$ (fig. 28):

1. Con centro en *A* y radio arbitrario se traza un arco que corta a los lados del ángulo en *C* y *D*.
2. Sobre una recta *r* se toma un punto *B* arbitrario. Con el mismo radio anterior y centro en *B* se traza un arco que corta a la recta *r* en el punto *E*.
3. Con centro en *E* y radio *CD* se describe un arco que corta al anterior en *F*. La recta *s* que une los puntos *B* y *F* forma con *r* el ángulo buscado.

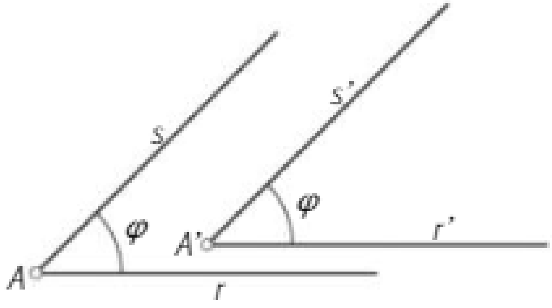


Figura 26

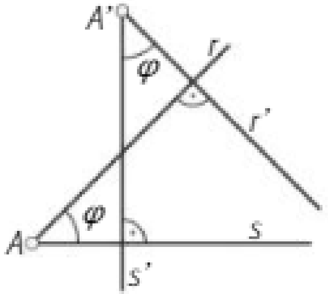


Figura 27

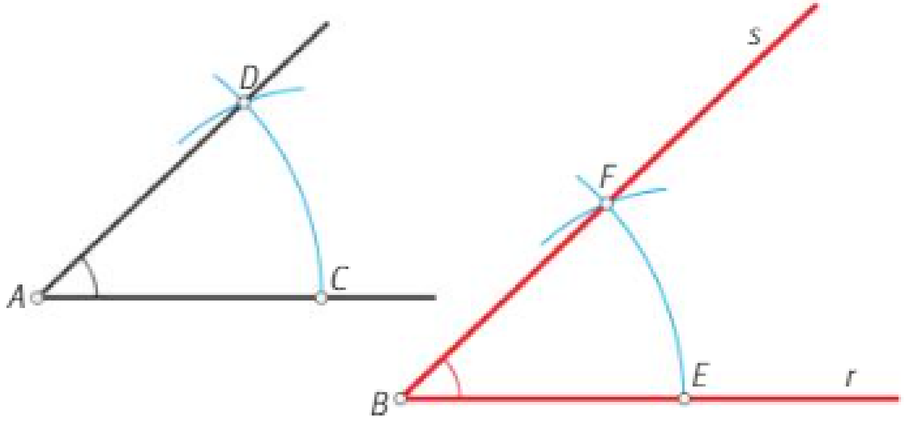


Figura 28

Cómo se suman y restan ángulos

Dados los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{B}$ (fig. 29):

1. Con radio arbitrario y centros en *A* y *B* se trazan dos arcos que cortan a los lados de los ángulos en los puntos *D, E, F* y *G*.
2. Con el mismo radio y centro en un punto *C* arbitrario se traza un arco base que corta a la recta *r* en *H*. Con centro en *H* y radio *DE* se describe un arco que corta al arco base en *I*.
3. **Suma**. Con centro en *I* y radio *FG* se describe otro arco en el mismo sentido que el anterior, que corta al arco base en el punto *J* (fig. 29a).
4. **Resta**. Con centro en *I* y radio *FG* se describe otro arco en sentido contrario al anterior, que corta al arco base en el punto *J* (fig. 29b).
5. La recta *s* que une los puntos *C* y *J* forma con *r* el ángulo buscado en los dos casos.

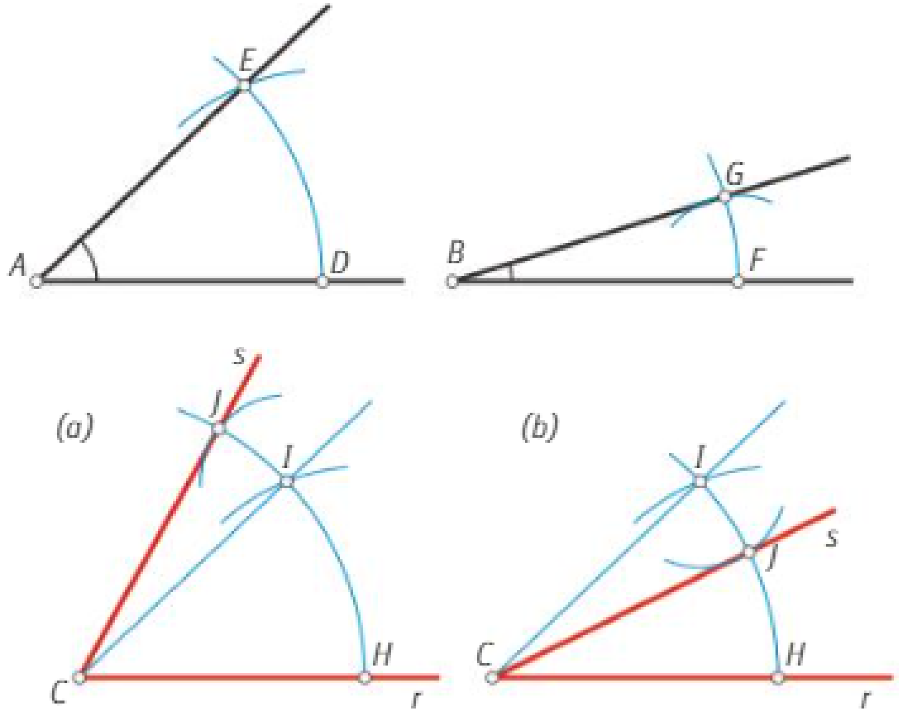


Figura 29

Cómo se traza la bisectriz de un ángulo

Dado un ángulo $\hat{A}$ formado por *r* y *s* (fig. 30):

1. Con centro en el vértice *A* y radio arbitrario se traza un arco que corta a *r* y *s* en los puntos *B* y *C*.
2. Con centros en *B* y *C* se trazan dos arcos arbitrarios de igual radio que se cortan en *D*. La recta *t* que une los puntos *A* y *D* es la bisectriz del ángulo.

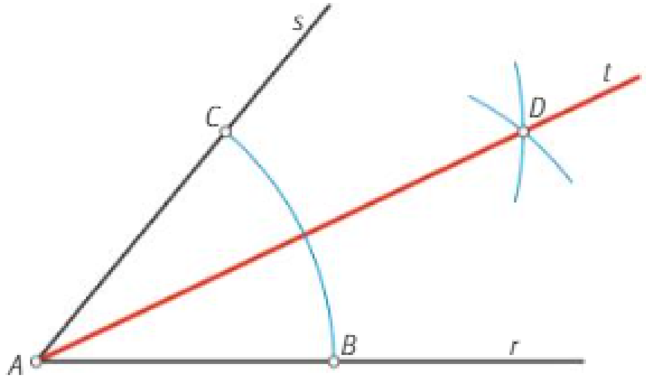


Figura 30

Cómo se traza la bisectriz del ángulo que forman dos rectas que se cortan fuera de los límites del dibujo

Dadas las rectas *r* y *s* (fig. 32):

1. Se traza una recta que corta a *r* y *s* en los puntos *A* y *B*.
2. Se trazan las bisectrices *a*, *b*, *c* y *d* de los ángulos que forman las rectas *r* y *s* con la recta *AB*.
3. Las bisectrices anteriores se cortan en los puntos *C* y *D*. La recta *t* que une estos puntos es la bisectriz buscada.

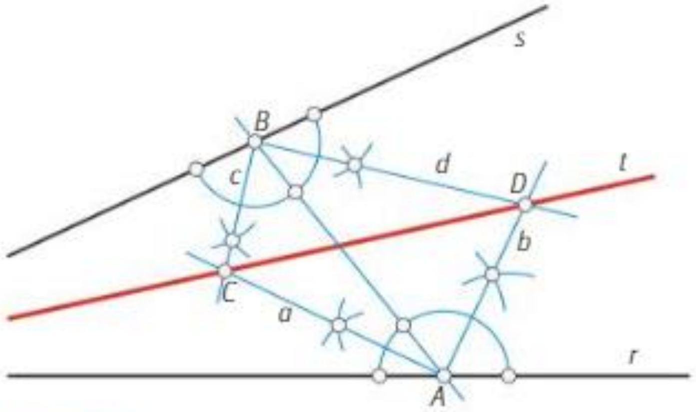


Figura 32

Cómo se traza la recta que pasa por un punto dado y que es concurrente con otras dos rectas dadas que se cortan fuera de los límites del dibujo

Dadas las rectas *r* y *s* y el punto *P* (fig. 33):

1. Se traza una recta que corta a *r* y *s* en los puntos *B* y *C*.
2. Se unen los puntos *B* y *C* con *P*, definiendo el triángulo *PBC*.
3. Se traza otra recta arbitraria paralela a la recta *BC*, que corta a *r* y *s* en *E* y *F*.
4. Por el punto *E* se traza una paralela a *PB* y por el punto *F* se traza una paralela a *PC*; ambas paralelas se cortan en *D*. La recta *t* que une *P* y *D* es la solución.

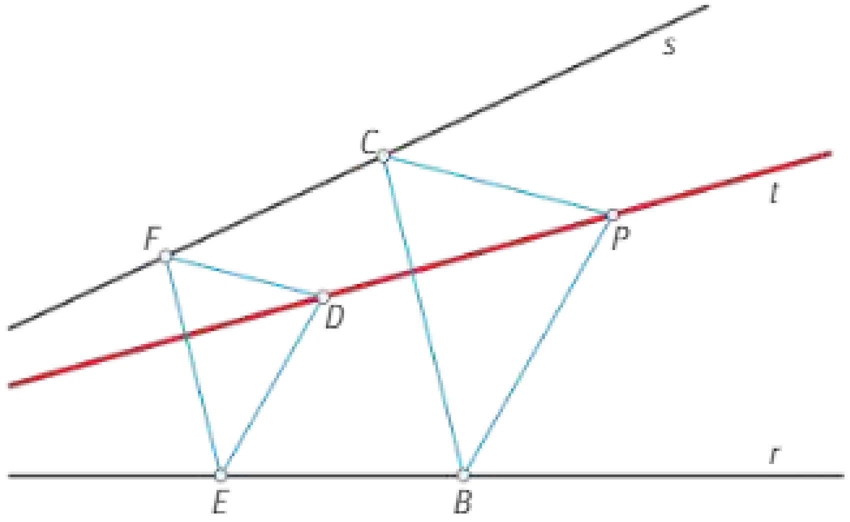
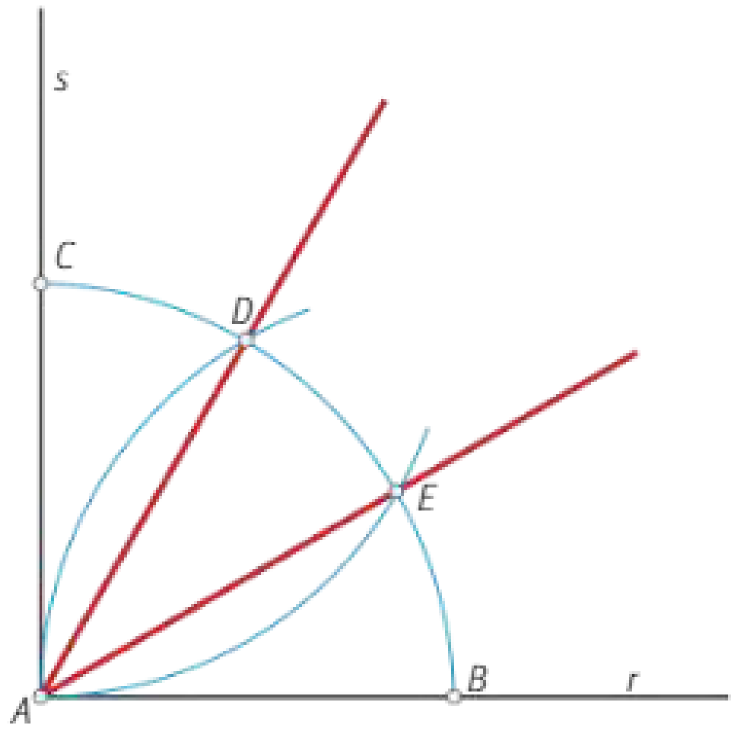


Figura 33

Cómo se divide un ángulo recto en tres partes iguales

Dadas las rectas *r* y *s* que forman 90° (fig. 34):

1. Con centro en el vértice *A* y radio arbitrario se traza un arco de circunferencia que corta a la recta *r* en *B* y a la recta *s* en *C*.
2. Con centros en *B* y *C* y el mismo radio, se trazan dos arcos que cortan al primero en *D* y en *E*.
3. Las rectas *AD* y *AE* dividen el ángulo recto en tres ángulos iguales.



4.1. Ángulos mixtilíneos y curvilíneos

La bisectriz de un ángulo formado por una recta y una curva o por dos curvas es la línea que equidista de ambos elementos geométricos.

- **Ángulo rectilíneo**. Es el formado por dos líneas rectas.
- **Ángulo mixtilíneo**. Es el formado por una línea recta y una línea curva (fig. 35).
- **Ángulo curvilíneo**. Es el formado por dos líneas curvas; por ejemplo, dos arcos de circunferencia (fig. 36).

Cómo se construye la bisectriz de un ángulo mixtilíneo

Sea la recta *r* y el arco de centro *O* (fig. 35):

1. Por un punto *B* de la recta se traza una perpendicular; se llevan sobre ella divisiones iguales, y se trazan paralelas a *r*.
2. Por un punto *C* del arco se traza el radio; se llevan sobre él divisiones iguales a las anteriores, y se trazan arcos concéntricos.
3. Los puntos de intersección de la paralela *1* con el arco *1*, de la paralela *2* con el arco *2*, de la paralela *3* con el arco *3*, etc., determinan la bisectriz del ángulo mixtilíneo.

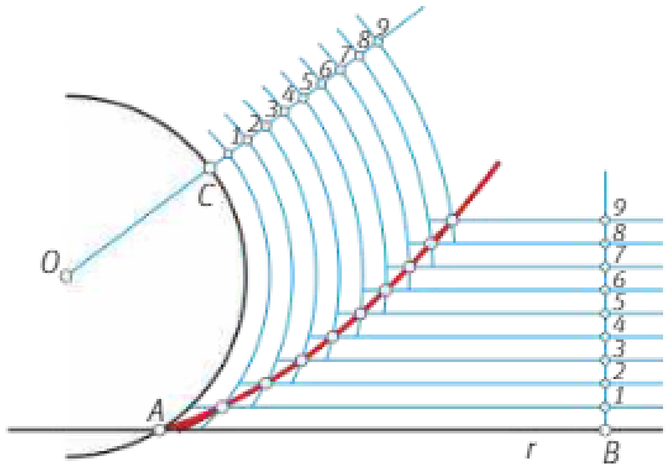


Figura 35

Cómo se construye la bisectriz de un ángulo curvilíneo

Sean los arcos de centros O_1 y O_2 (fig. 36):

1. Por los puntos arbitrarios B y C de los arcos se trazan sendos radios; se llevan sobre ellos divisiones iguales, y se trazan arcos concéntricos.
2. Los puntos de intersección de los arcos correspondientes determinan la bisectriz del ángulo curvilíneo.

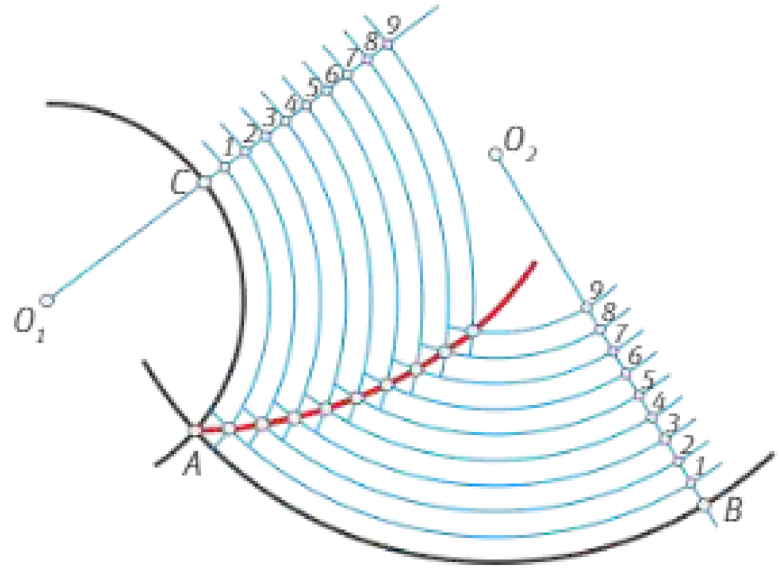


Figura 36

4.2. Otras construcciones de ángulos

Cuando no se dispone de un transportador de ángulos, es posible trazar ciertos ángulos con sencillas construcciones realizadas con otros instrumentos de dibujo.

Cómo construir ángulos con el compás

Con un compás se pueden trazar los ángulos de 15°, 30°, 45°, 60°, 75° y 90°, así como los que se obtienen al sumar 90° a los anteriores: 105°, 120°, etc. (fig. 37).

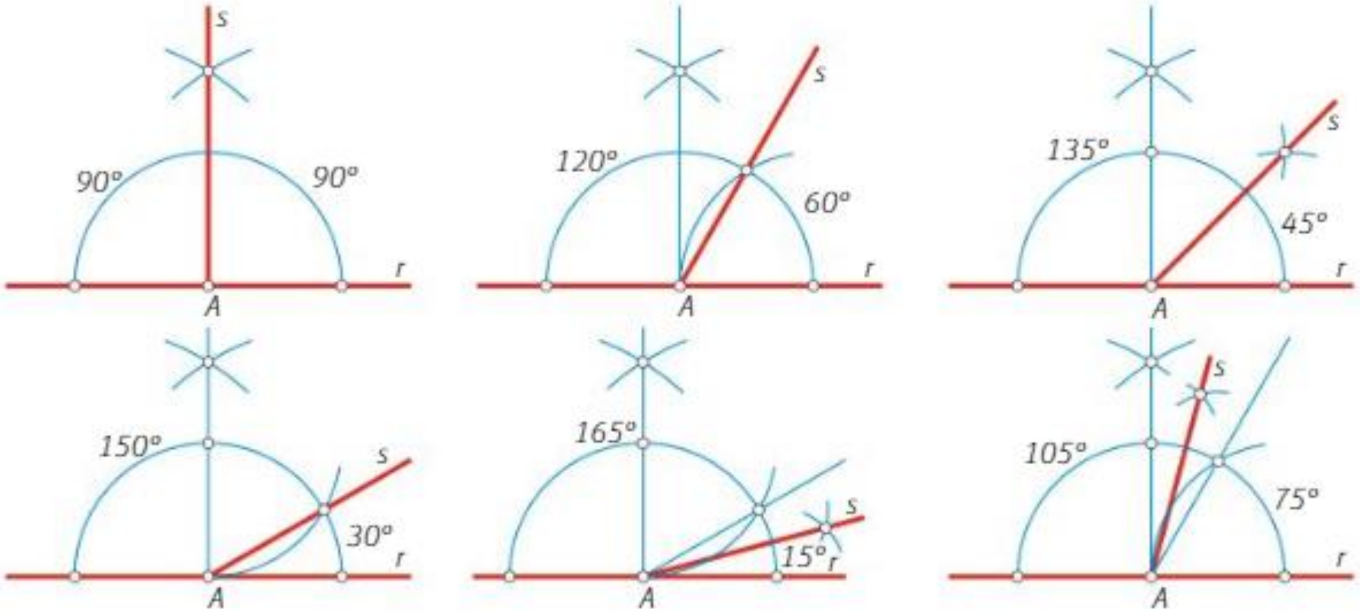


Figura 37

Cómo construir ángulos con la escuadra y el cartabón

Con el simple manejo de la escuadra y el cartabón también pueden obtenerse determinados ángulos (fig. 38).

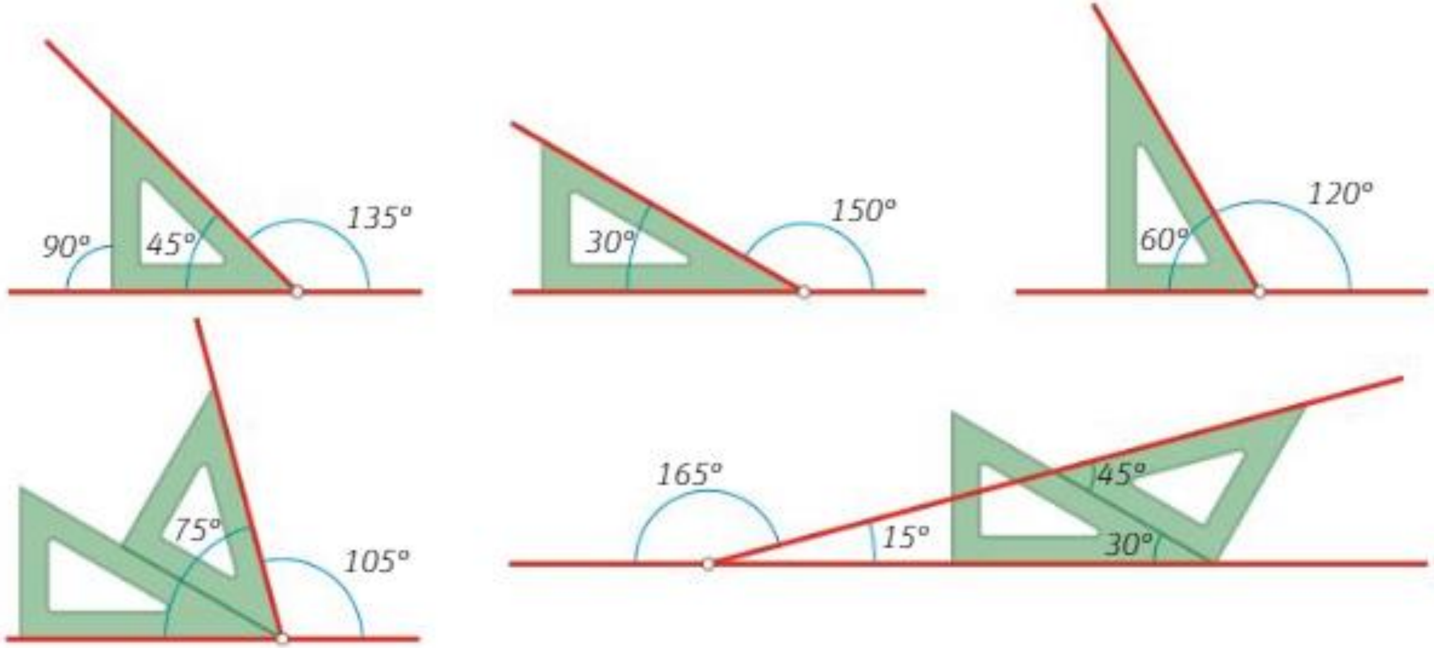


Figura 38

EJERCICIOS RESUELTOS

5 Dadas las rectas *r* y *s* y el punto *P* (fig. 39), halla los puntos *M* y *N* que están a 20 mm del punto *P* y que equidistan de las rectas *r* y *s*.

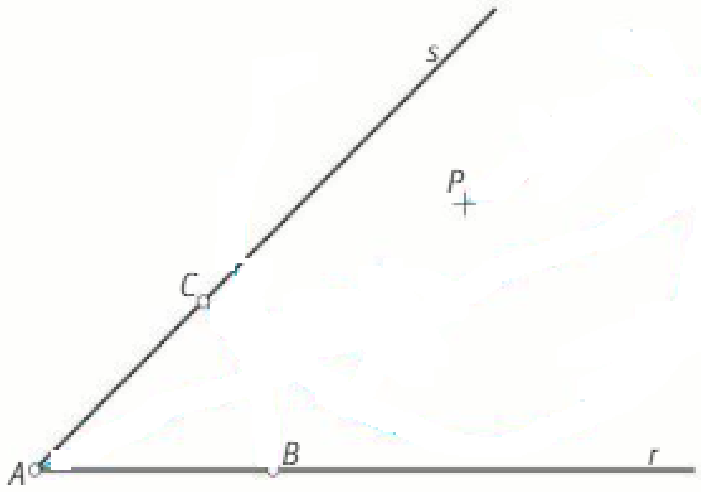


Figura 39

EJERCICIOS RESUELTOS

5 Dadas las rectas *r* y *s* y el punto *P* (fig. 39), halla los puntos *M* y *N* que están a 20 mm del punto *P* y que equidistan de las rectas *r* y *s*.

Solución:

1. Se traza la bisectriz *t* del ángulo que forman las rectas *r* y *s* dadas (fig. 39), lugar geométrico de los puntos que equidistan de *r* y *s*.
2. Con centro en *P* se traza la circunferencia de radio 20 mm, que corta a la recta *t* en los puntos *M* y *N*, soluciones del ejercicio.

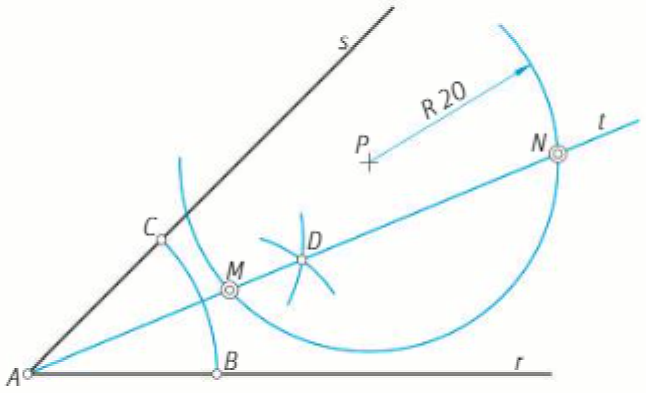


Figura 39

Dibuja la imagen (fig. 48), teniendo en cuenta que *m/m'* = *n/n'*.

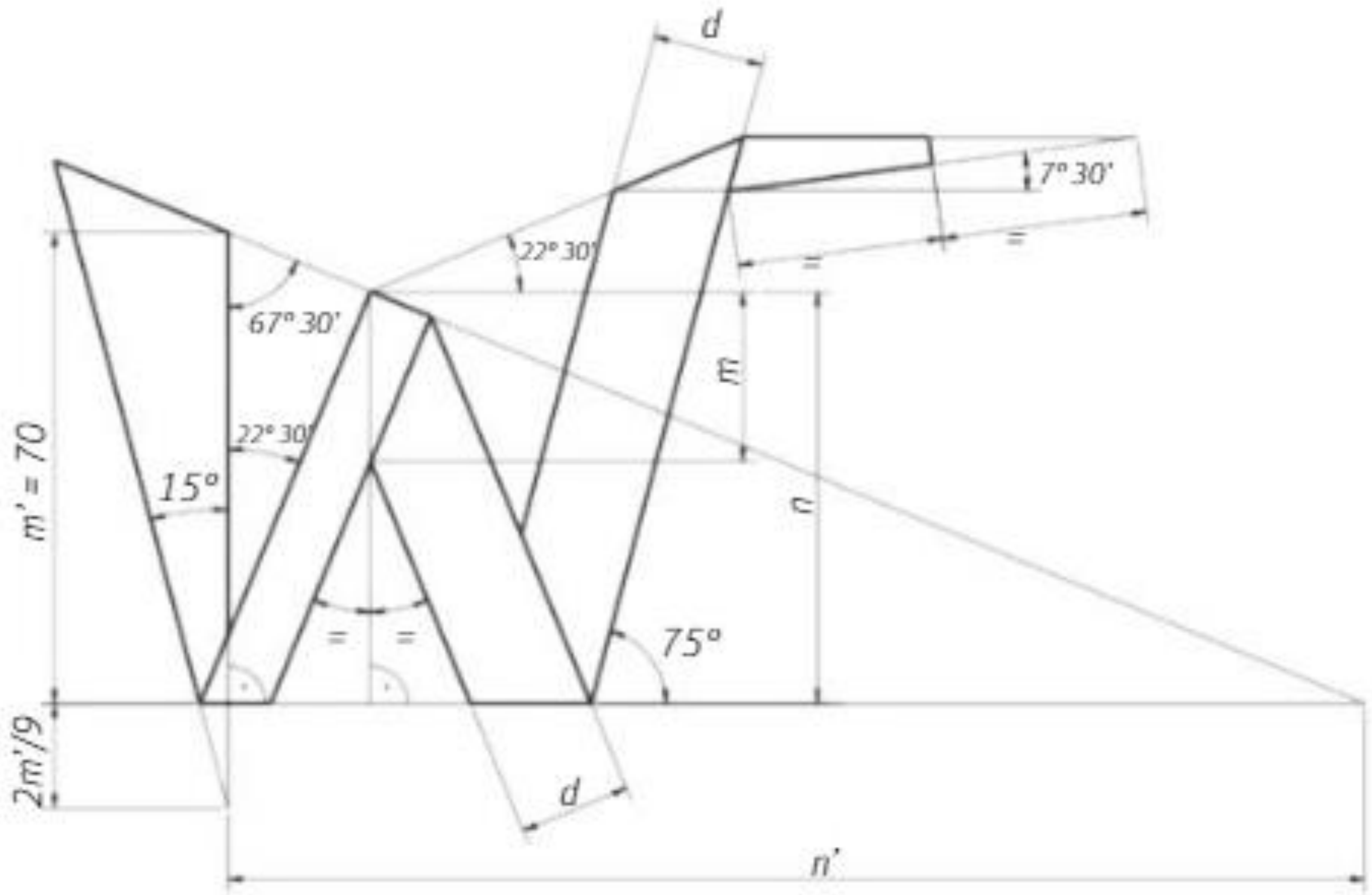


Figura 48

Circunferencia

Definiciones

- **Circunferencia.** Es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo, llamado centro.
- **Arco.** Es un segmento de circunferencia.
- **Círculo.** Es la parte de plano interior a la circunferencia.
- **Sector circular.** Es la porción de círculo, comprendida entre dos radios (fig. 1).
- **Segmento circular.** Es la parte de círculo comprendida entre una cuerda y su arco (fig. 1).

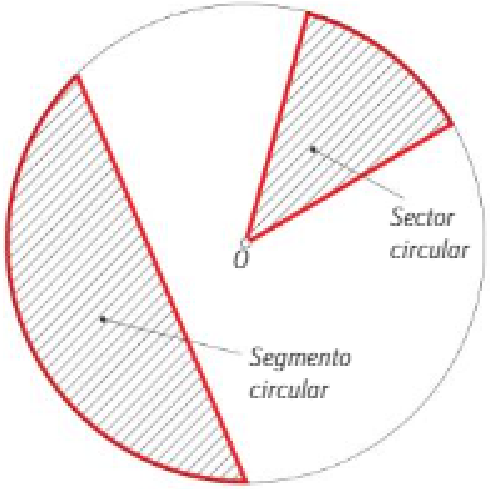


Figura 1

Rectas de una circunferencia

- **Radio** *(r)*: es el segmento *OA* que une el centro con cualquier otro punto de la circunferencia (fig. 2).
- **Diámetro** *(d)*: es el segmento que une los puntos *B* y *C* de intersección de la circunferencia con cualquier recta que pasa por el centro.
- **Cuerda** *(c)*: es el segmento *DE* que une dos puntos de la circunferencia sin pasar por el centro.
- **Tangente** *(t)*: es la recta que tiene un solo punto común *F* con la circunferencia. La tangente y el radio en el punto de tangencia son perpendiculares.

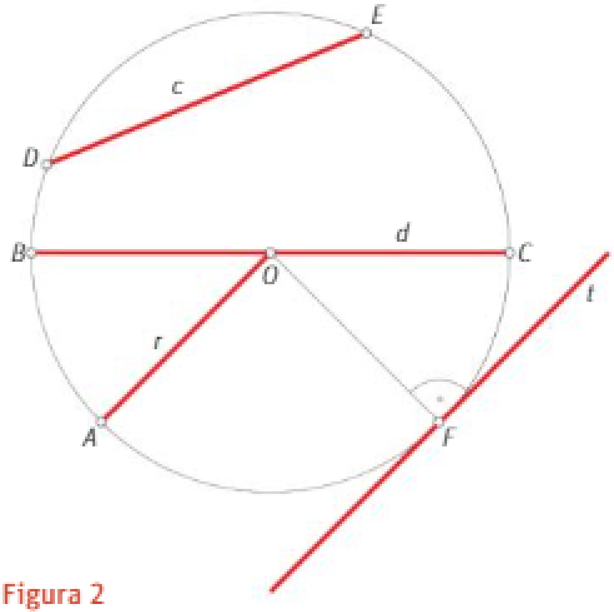


Figura 2

Ángulos de una circunferencia

- **Ángulo central:** El vértice del ángulo es el centro de la circunferencia (fig. 3). Su valor es:

$$\varphi = \frac{a}{r} \cdot \frac{180^\circ}{\pi}$$

- **Ángulo inscrito:** El vértice es un punto de la circunferencia y sus lados son cuerdas de la misma (fig. 4).

$$\varphi = \frac{\alpha}{2}$$

- **Ángulo seminscrito:** El vértice es un punto de la circunferencia; uno de los lados es secante y el otro es tangente a la circunferencia (fig. 5).

$$\varphi = \frac{\alpha}{2}$$

- **Ángulo interior:** El vértice del ángulo es un punto interior de la circunferencia (fig. 6).

$$\varphi = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

- **Ángulo exterior:** El vértice es un punto exterior de la circunferencia y los lados son rectas secantes (fig. 7).

$$\varphi = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

- **Ángulo circunscrito:** El vértice es un punto exterior y los lados son rectas tangentes a la circunferencia (fig. 8).

$$\varphi = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

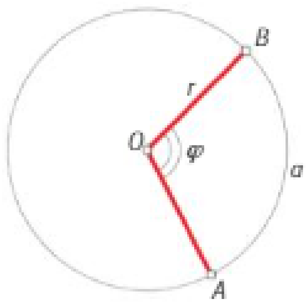


Figura 3

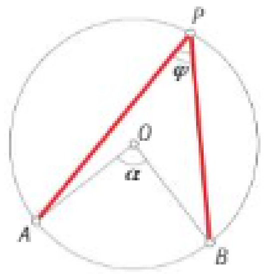


Figura 4

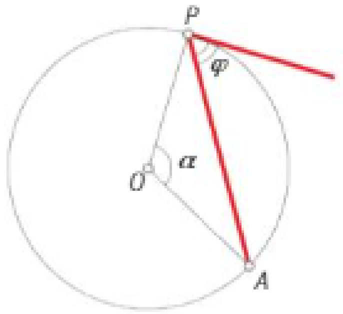


Figura 5

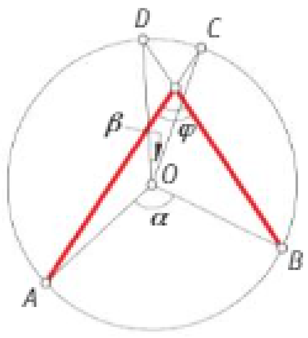


Figura 6

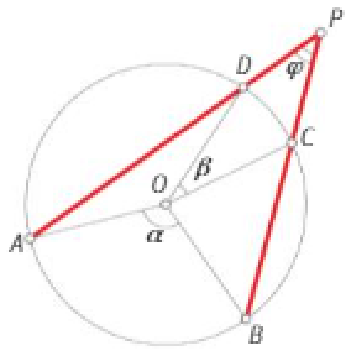


Figura 7

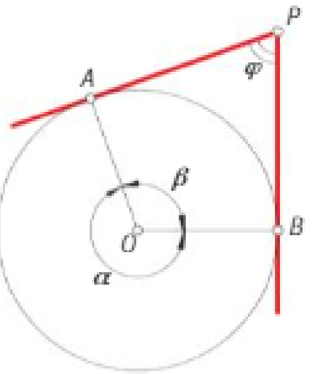


Figura 8

Arco capaz

Se llama **arco capaz** de un ángulo φ dado respecto a un segmento también conocido (fig. 9), al lugar geométrico de los puntos del plano desde los cuales se ve el segmento bajo el ángulo φ.

Cómo se traza el arco capaz

Dados el segmento *AB* y el ángulo φ (fig. 10):

1. Se traza la mediatriz del segmento *AB*.
2. Por uno de los extremos *A* del segmento dado se traza la recta *m*, perpendicular a *AB*, restando a continuación el ángulo φ hasta cortar a la mediatriz en O_1, de tal forma que el ángulo O_1AB es de $90 - \varphi$.
3. Se construye el ángulo simétrico de $90 - \varphi$ respecto de *AB* hasta cortar a la mediatriz en O_2.
4. Con centros en O_1 y O_2 se trazan dos arcos de circunferencia que comiencen en *A* y terminen en *B*. Dichos arcos son los arcos capaces buscados.

Ten en cuenta

- Siempre existen dos arcos simétricos respecto al segmento, que cumplen la condición de arco capaz.

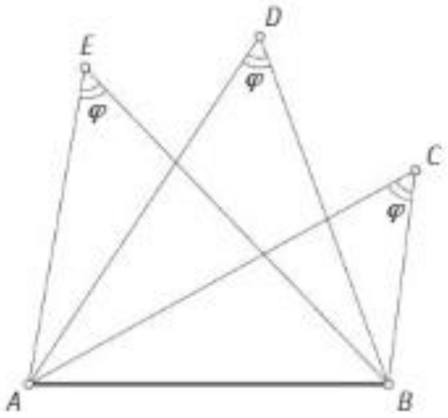


Figura 9

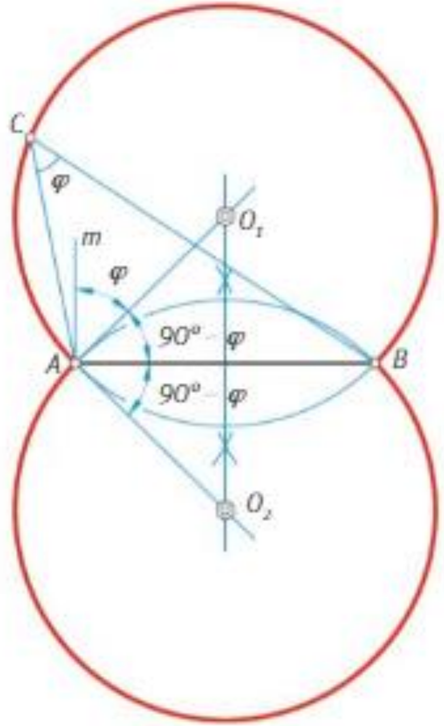


Figura 10

En la costa hay tres faros *R*, *S* y *T* (fig. 11), separados en línea recta *RS* = 30 km, *ST* = 40 km y *RT* = 60 km. Desde un barco *P*, situado en el mar, se ven los faros *R* y *S* desde un ángulo de 45° y los faros *S* y *T* desde un ángulo de 60°. Determina la posición del barco *P* en el mar.

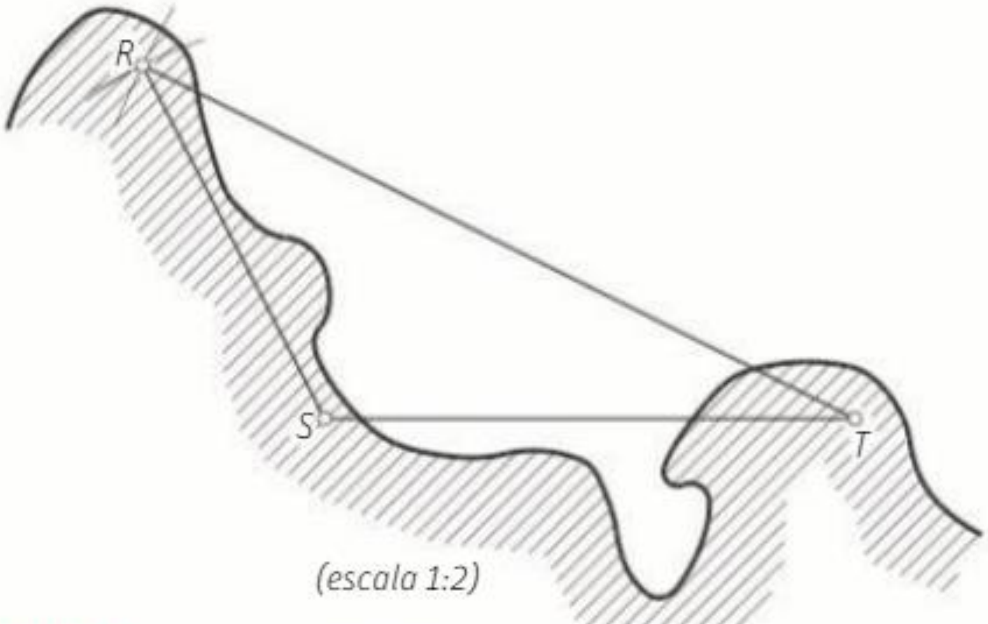


Figura 11

En la costa hay tres faros *R*, *S* y *T* (fig. 11), separados en línea recta *RS* = 30 km, *ST* = 40 km y *RT* = 60 km. Desde un barco *P*, situado en el mar, se ven los faros *R* y *S* desde un ángulo de 45° y los faros *S* y *T* desde un ángulo de 60°. Determina la posición del barco *P* en el mar.

Solución:

1. Se dibuja el arco capaz de 45° respecto del segmento *RS* (fig. 12). Desde cualquier punto de dicho arco se ve el segmento *RS* desde un ángulo de 45°.
2. Se dibuja el arco capaz de 60° respecto del segmento *ST*. Dicho arco contiene todos los puntos desde los que se ve el segmento *ST* desde un ángulo de 60°.
3. El punto *P* donde se cortan los dos arcos anteriores determina la posición del barco en el mar.

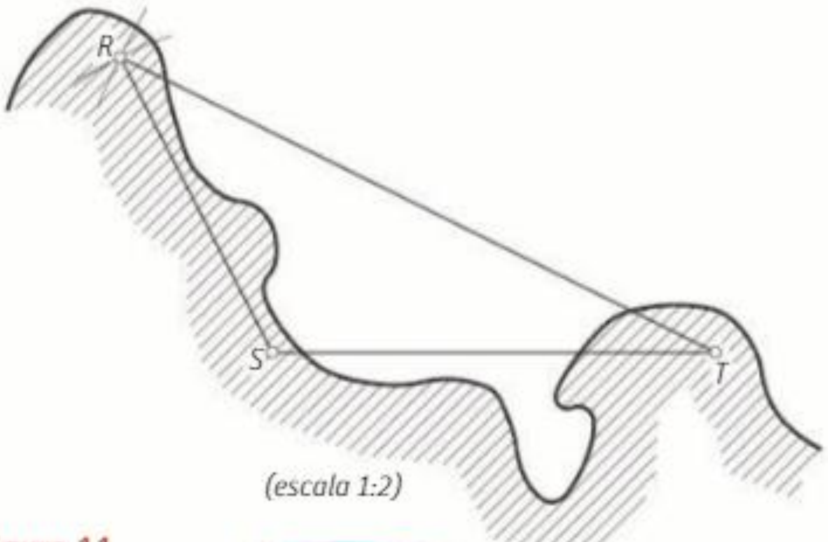


Figura 11

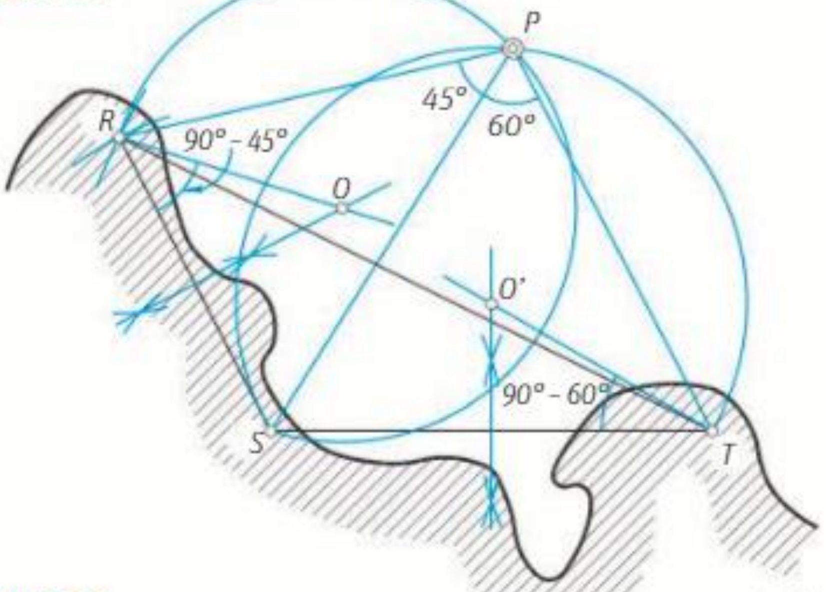


Figura 12

Potencia

Potencia de un punto respecto de una circunferencia

Sean un punto P, una circunferencia de centro O y una recta trazada por P que corta a la circunferencia en los puntos A y B (fig. 17); se denomina potencia p del punto P respecto a la circunferencia O al producto de las distancias PA y PB.

Si por el punto P trazamos cualquier otra recta secante o tangente a la circunferencia, se cumple lo siguiente:

$$p = PA \times PB = PC \times PD = PE \times PE = (PE)^2 = \text{constante}$$

Ten en cuenta

- Si el punto P es interior a la circunferencia, la potencia es negativa.

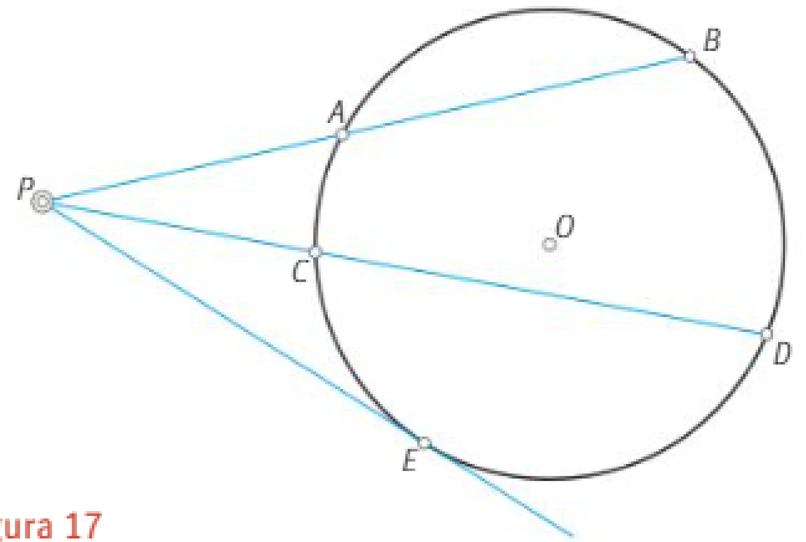


Figura 17

Eje radical de dos circunferencias

Dadas dos circunferencias de centros O_1 y O_2 (fig. 18), se llama eje radical al lugar geométrico de los puntos del plano que tienen la misma potencia respecto de ambas circunferencias:

$$MA \times MB = MC \times MD$$

Ten en cuenta

- El eje radical es siempre perpendicular a la recta que une los centros de las dos circunferencias.

Cómo se halla el eje radical de dos circunferencias secantes

Se halla uniendo los puntos de intersección A y B de ambas circunferencias (fig. 19).

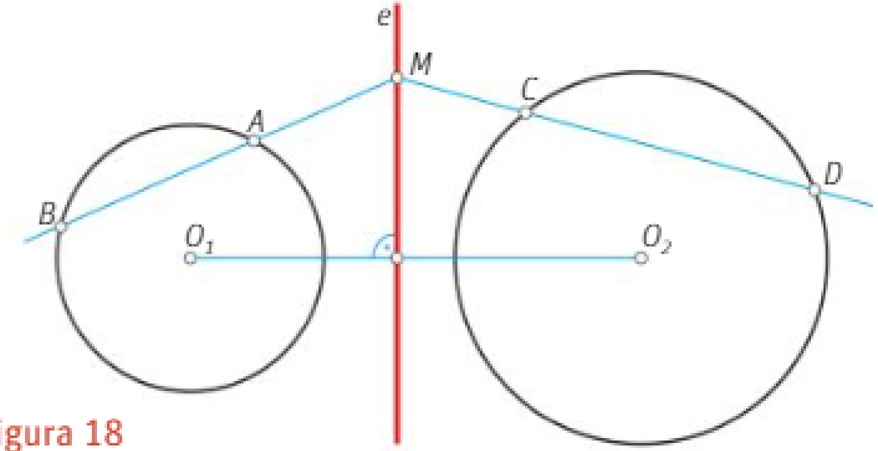


Figura 18

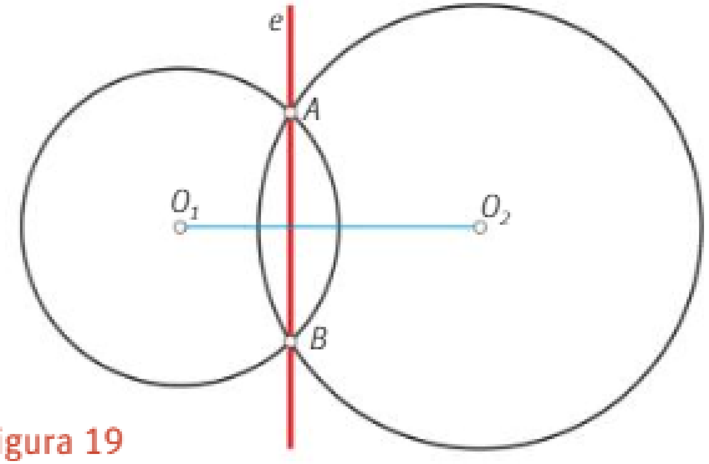


Figura 19

Cómo se halla el eje radical de dos circunferencias tangentes

Se halla trazando la recta tangente común a ambas circunferencias (fig. 20).

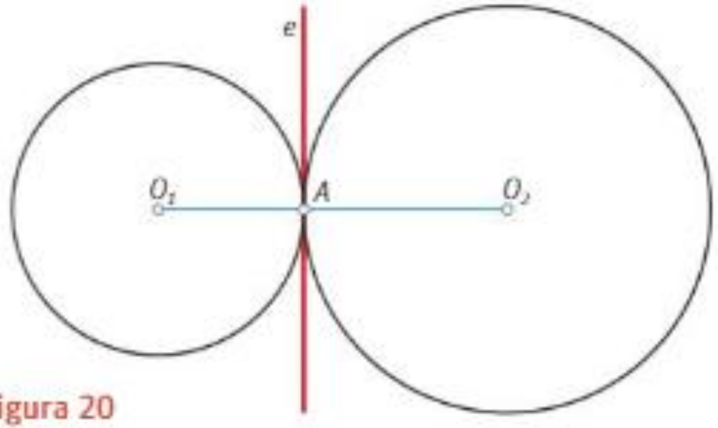


Figura 20

Cómo se halla el eje radical de dos circunferencias exteriores

El eje se determina trazando una circunferencia auxiliar de centro O (fig. 21), hallando los ejes radicales r y s de esta con las de centro O_1 y O_2, respectivamente, y trazando por último la recta e que pasa por el punto E de intersección de r y s y es perpendicular a la recta O_1O_2 que une los centros dados.

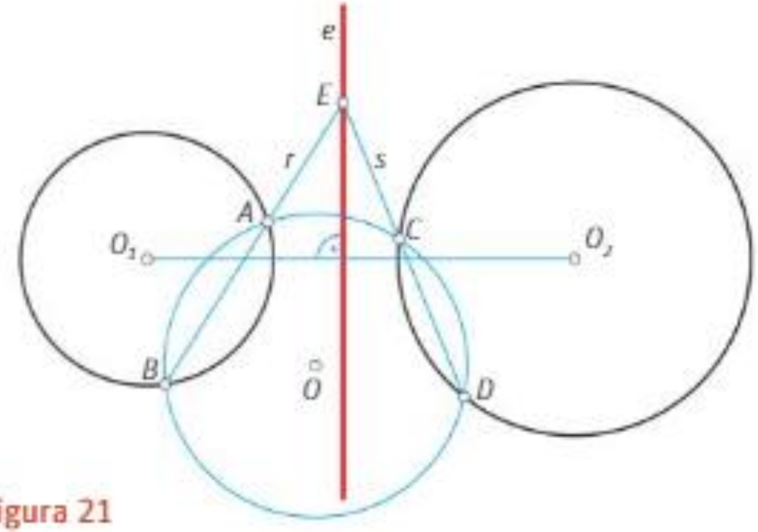


Figura 21

Centro radical de tres circunferencias

Dadas tres circunferencias de centros O_1, O_2 y O_3 (fig. 22), se llama centro radical al punto O que tiene la misma potencia respecto de las tres circunferencias.

Cómo se halla el centro radical de tres circunferencias

El centro radical será el punto de intersección de los ejes radicales de las circunferencias, tomadas de dos en dos.