2 Trazado de polígonos

1 Triángulos

Hay un sinfín de ejemplos de triángulos a nuestro alrededor: las señales de tráfico (fig. 1), la escuadra y el cartabón con los que dibujamos, la punta de las flechas que hay pintadas en algunas calles, etc.

Un **triángulo** es una superficie plana limitada por tres rectas que se cortan dos a dos. Los puntos de intersección de las rectas se llaman **vértices**, y los segmentos comprendidos entre los vértices, **lados** del triángulo.

Los vértices se designan con letras mayúsculas latinas en sentido contrario a las agujas del reloj, y los lados con minúsculas, utilizando para ello la misma letra del vértice opuesto; por ejemplo, el lado *a* será el lado opuesto al vértice *A*.

Los triángulos se pueden clasificar atendiendo a sus lados o a sus ángulos. Según sus lados (fig. 2) se clasifican en:

- **Equilátero** (a). Triángulo con los tres lados iguales.
- **Isósceles** (b). Triángulo con dos lados iguales y el tercero distinto.
- **Escaleno** (c). Triángulo con los tres lados distintos.

Según sus ángulos (fig. 3) se clasifican en:

- **Rectángulo** (a). Triángulo con un ángulo recto (igual a 90°).
- **Acutángulo** (b). Triángulo con los tres ángulos agudos (inferiores a 90°).
- **Obtusángulo** (c). Triángulo con un ángulo obtuso (superior a 90°).

Figura 1

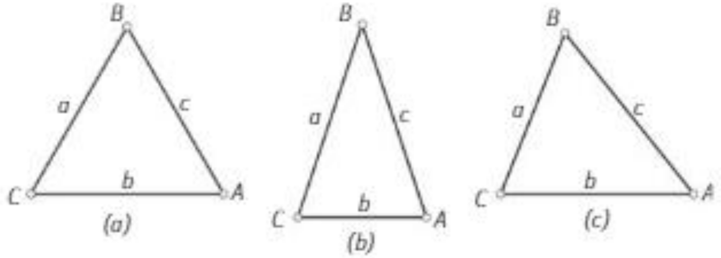


Figura 2

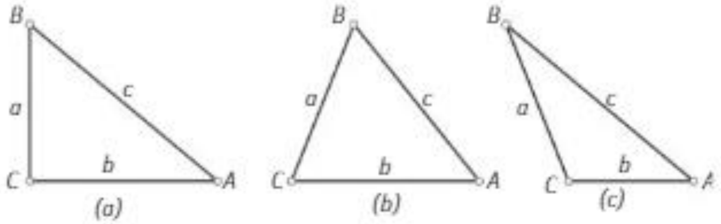


Figura 3

Las **rectas** y **puntos notables** de los triángulos son:

- **Altura.** Es la recta perpendicular trazada desde un vértice al lado opuesto. Un triángulo tiene tres alturas. Las tres alturas de un triángulo se cortan en un punto llamado **ortocentro** (fig. 4).
- **Mediana.** Es la recta que une un vértice con el punto medio del lado opuesto. Un triángulo tiene tres medianas. Las tres medianas de un triángulo se cortan en un punto que se llama **baricentro** (fig. 5). El baricentro de un triángulo es el centro de gravedad del mismo y está a una distancia de los vértices igual a dos tercios de la longitud total de la correspondiente mediana.
- **Mediatriz.** Es la recta perpendicular trazada por el punto medio de un lado. Un triángulo tiene tres mediatrices. Las tres mediatrices de un triángulo se cortan en un punto llamado **circuncentro** (fig. 6). Se llama así por ser el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo. Equidista de los tres vértices.
- **Bisectriz**. Es la recta que divide uno de los ángulos en dos ángulos iguales. Un triángulo tiene tres bisectrices interiores. Las tres bisectrices interiores de un triángulo se cortan en un punto, llamado **incentro** (fig. 7). Se llama así por ser el centro de la circunferencia inscrita al triángulo.

Ten en cuenta

- La suma de los tres ángulos interiores de un triángulo vale 180°.
- Cada lado de un triángulo es menor que la suma de los otros dos, pero mayor que su diferencia.
- En un triángulo rectángulo la hipotenusa es mayor que cada uno de sus catetos.

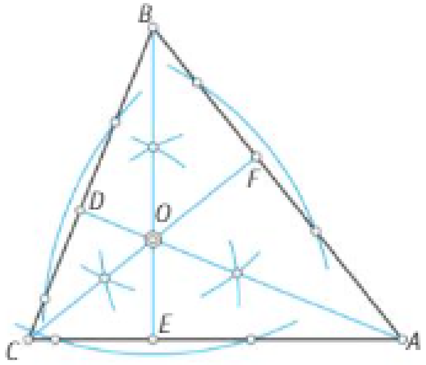


Figura 4

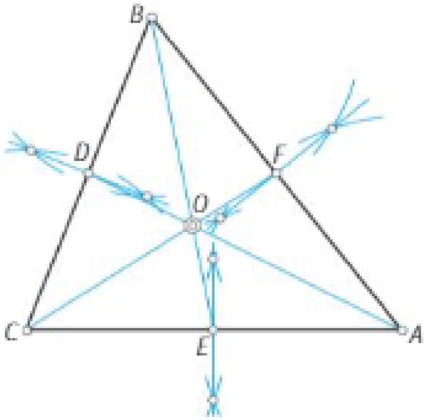


Figura 5

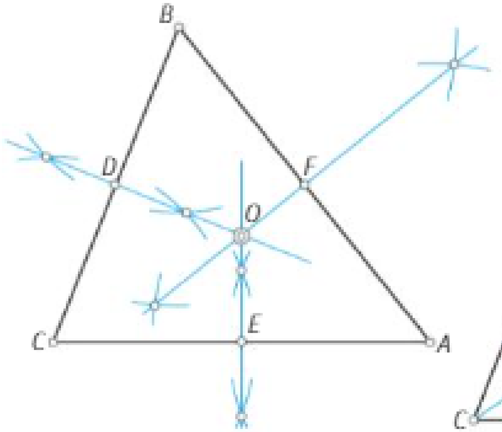


Figura 6

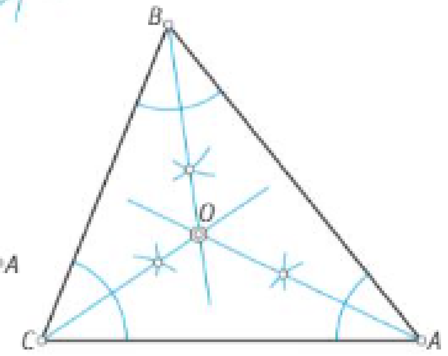


Figura 7

Otros **triángulos** y **rectas notables** del triángulo son:

- **Bisectrices exteriores.** Las tres bisectrices exteriores de un triángulo se cortan en tres puntos (fig. 8), que en el ejemplo de la figura son los puntos *D*, *E* y *F*. Estos puntos son los centros de las circunferencias **exinscritas** (inscritas por el exterior).

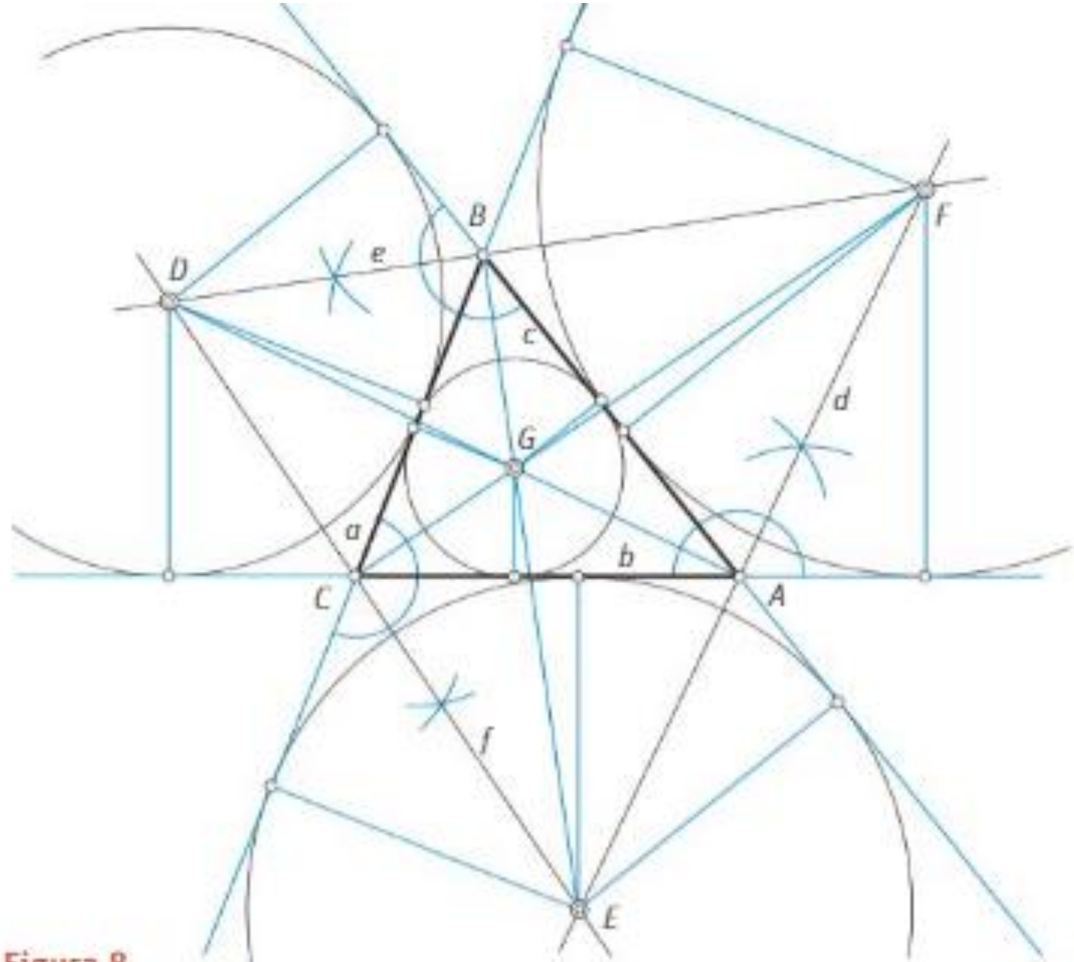


Figura 8

- **Ceviana.** Es la línea que une un vértice con cualquier punto del lado opuesto (fig. 9).

- **Triángulo órtico.** Se llama así al triángulo cuyos vértices son los pies de las tres alturas de un triángulo (fig. 10).

- **Triángulo complementario.** Es aquel cuyos vértices son los puntos medios de los tres lados de otro triángulo (fig. 11).

- **Triángulo podar.** Se denomina triángulo podar de un triángulo dado, respecto de un punto *P*, al triángulo cuyos vértices son los pies de las perpendiculares a los lados trazadas desde el punto *P* (fig. 12).

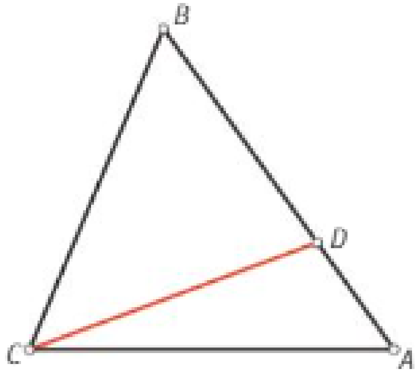


Figura 9

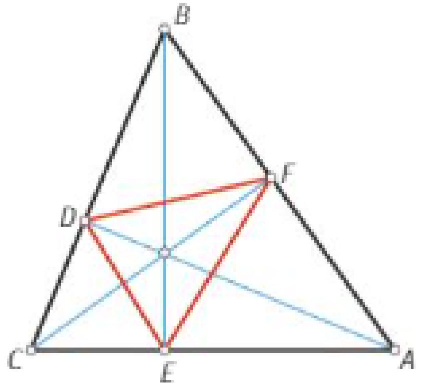


Figura 10

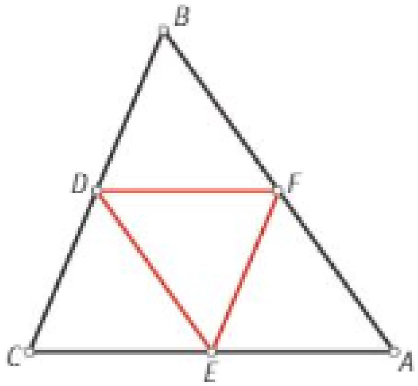


Figura 11

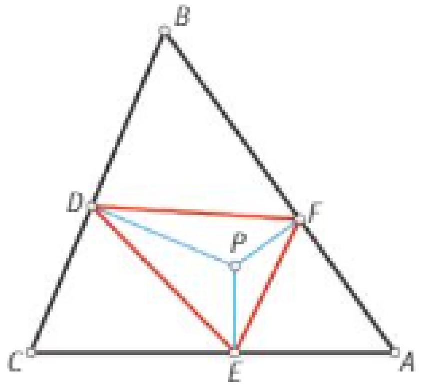


Figura 12

EJERCICIOS RESUELTOS

1 Construye un triángulo rectángulo sabiendo que su altura sobre la hipotenusa vale 30 mm y que la proyección de uno de sus catetos sobre la hipotenusa vale 20 mm. Halla el incentro, el circuncentro, el baricentro y el ortocentro de dicho triángulo.

EJERCICIOS RESUELTOS

1 Construye un triángulo rectángulo sabiendo que su altura sobre la hipotenusa vale 30 mm y que la proyección de uno de sus catetos sobre la hipotenusa vale 20 mm. Halla el incentro, el circuncentro, el baricentro y el ortocentro de dicho triángulo.

Solución:

1. Sobre una recta *r* cualquiera se sitúa el segmento *AD* = 20 mm (fig. 13).
2. Por el punto *D* se traza la perpendicular a la recta *r* y se traslada la distancia *DC* = 30 mm.
3. Se dibujan las mediatrices a los segmentos *AB* en el punto medio *E* y *BC* en su punto medio *F*.
4. **Ortocentro**, *C*: punto donde se cortan las alturas *AC*, *BC* y *CD*; **circuncentro**, *E*: punto donde se cortan las mediatrices; **baricentro**, *M*: punto donde se cortan las medianas *AF* y *CE*; **incentro**, *N*: punto donde se cortan las bisectrices *AN* y *BN*.

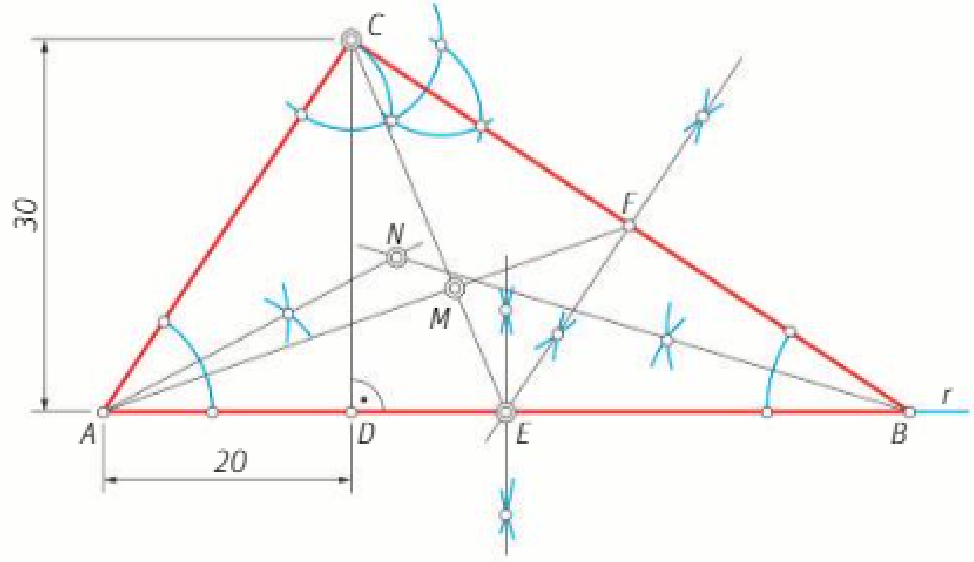


Figura 13

Cómo construir un triángulo conociendo sus tres lados

Sean los segmentos *AB*, *AC* y *BC* (fig. 14):

1. Sobre una recta *r* cualquiera se toma un segmento *AB* igual a uno de los lados del triángulo.
2. Con centro en el extremo *A* y radio igual al segundo de los lados, segmento *AC*, se describe un arco de circunferencia.
3. Con centro en *B* y radio igual al tercer lado conocido, segmento *BC*, se describe otro arco, que corta al anterior en el punto *C*, tercer vértice del triángulo.

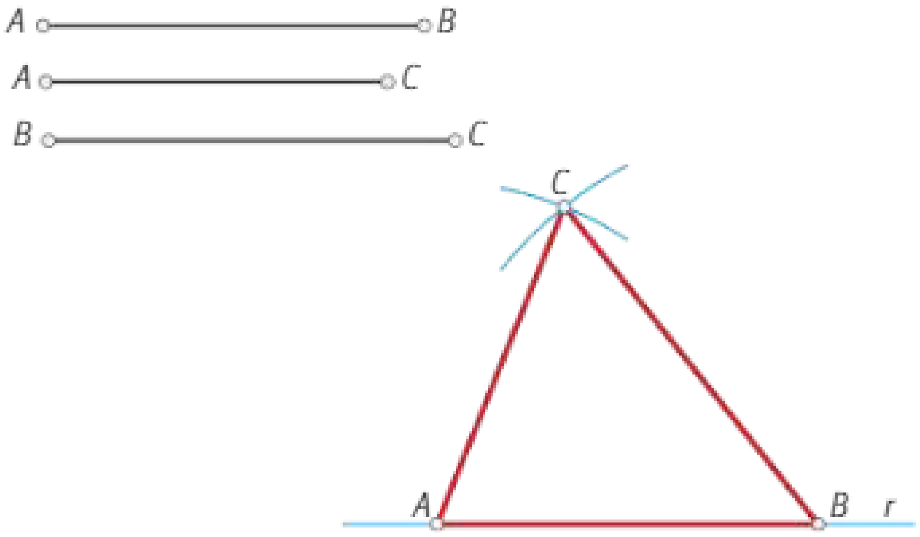


Figura 14

Cómo construir un triángulo equilátero conociendo la altura

Sea *AB* la altura del triángulo (fig. 15):

1. Sobre una recta *r* cualquiera se toma un punto *A* arbitrario.
2. Por el punto *A* se traza la perpendicular a dicha recta.
3. Sobre la perpendicular anterior, y a partir del punto *A*, se lleva una longitud *AB* igual a la altura dada del triángulo.
4. La altura *AB* se divide en tres partes iguales; se nombra *C* al primer punto a partir de la base.
5. Con centro en *C* y radio *CB*, dos tercios de la altura, se describe una circunferencia que cortará a la recta *r* en los puntos *D* y *E*, que, junto con el vértice *B*, forman el triángulo buscado.

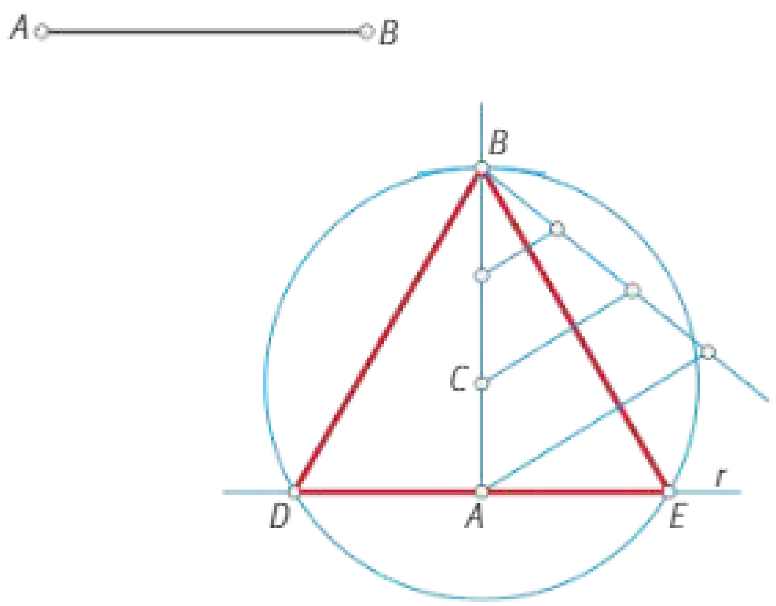


Figura 15

Cómo construir un triángulo isósceles conociendo la base y la altura

Sean *AB* la base y *CD* la altura del triángulo (fig. 16):

1. Sobre una recta *r* cualquiera se toma un segmento *AB* igual a la base.
2. Se traza la mediatriz del segmento *AB*.
3. Sobre la mediatriz, y a partir del punto medio *C*, se transporta la altura *CD*, que determina el tercer vértice *D*.

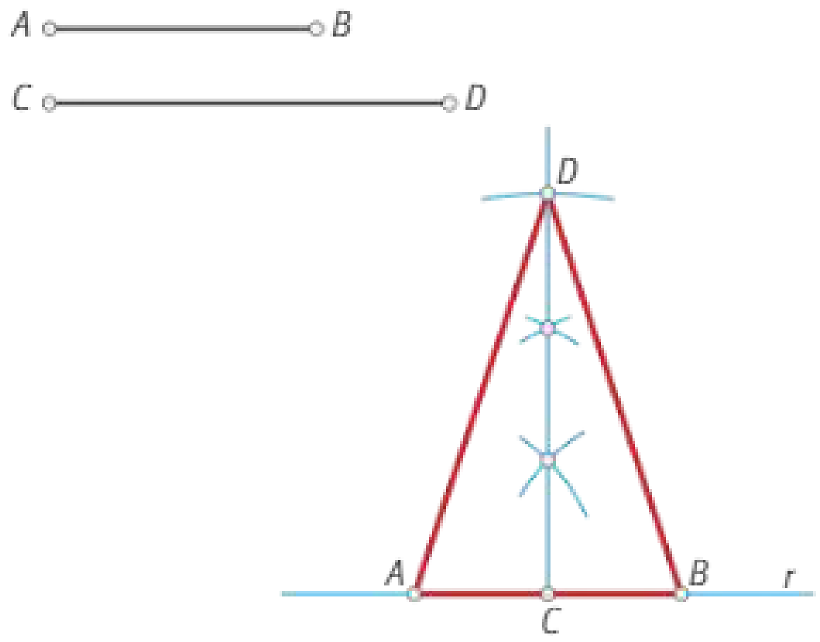


Figura 16

Cómo construir un triángulo isósceles conociendo los lados iguales y la altura

Sean *BC* el lado y *AB* la altura del triángulo (fig. 17):

1. Sobre una recta *r* se toma un punto *A* arbitrario.
2. Por el punto *A* se traza la perpendicular a la recta *r*.
3. Sobre la perpendicular anterior, y a partir del punto *A*, se transporta la altura dada *AB* del triángulo.
4. Con centro en el punto *B* y radio igual al lado, se describe un arco que corta a la recta *r* en los puntos *C* y *D* que, junto con el punto *B*, son los vértices del triángulo.

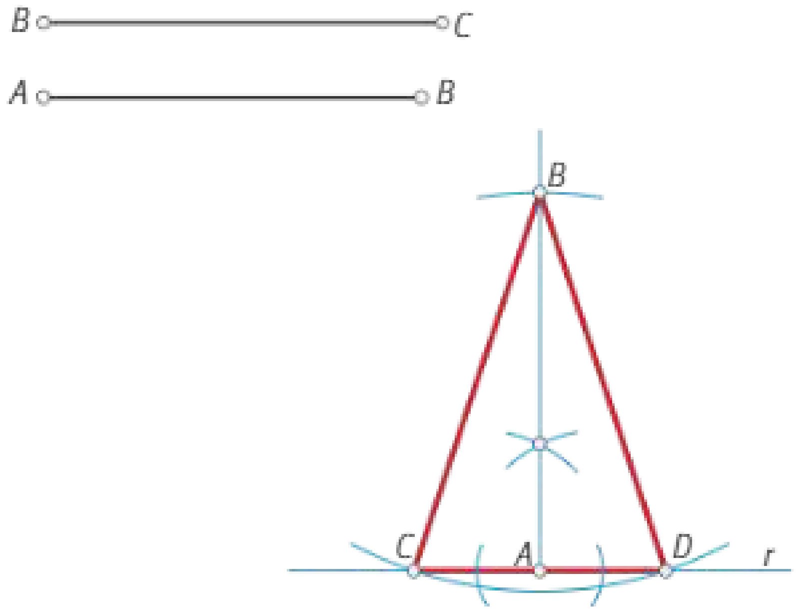


Figura 17

Cómo construir un triángulo rectángulo conociendo la hipotenusa y un cateto

Sean *AB* el cateto y *BC* la hipotenusa del triángulo (fig. 18):

1. Sobre una recta *r* cualquiera se toma un segmento *AB* igual al cateto conocido del triángulo.
2. Por el extremo *A* se traza la perpendicular a la recta *r*.
3. Con centro en el extremo *B* y radio igual a la hipotenusa, se traza un arco de circunferencia que corta a la perpendicular en el punto *C*, que será el tercer vértice.

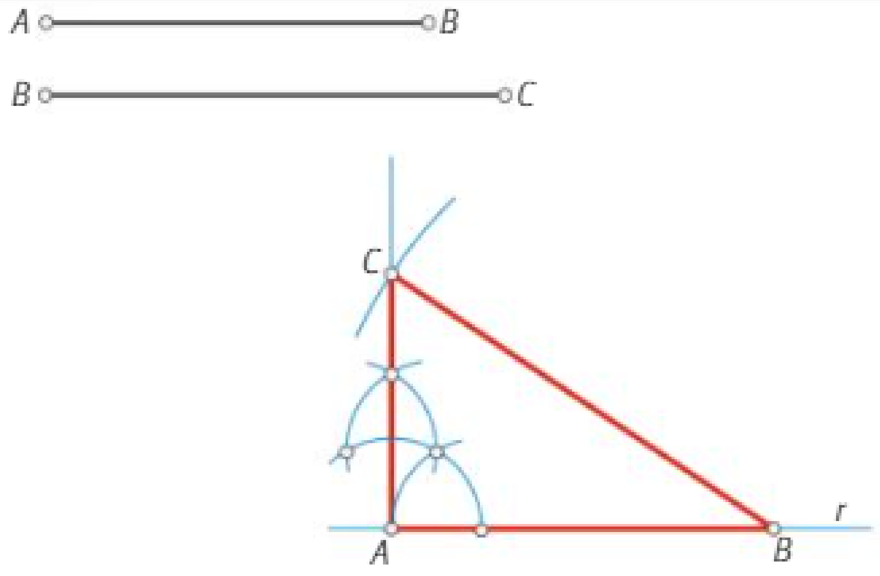


Figura 18

Cómo construir un triángulo rectángulo conociendo un cateto y el ángulo opuesto

Sean *AB* el cateto y φ el ángulo del triángulo **(fig. 19)**:

1. Sobre una recta *r* cualquiera se toma un segmento *AB* igual al cateto conocido. Por el extremo *A* se traza la perpendicular a la recta *r*.
2. Por un punto *C* cualquiera de la perpendicular se traza una recta que forme un ángulo igual al dado.
3. Por el extremo *B* del cateto se traza la paralela al lado del ángulo anterior, que corta a la perpendicular trazada por el extremo *A* en el punto *D*, que será el tercer vértice.

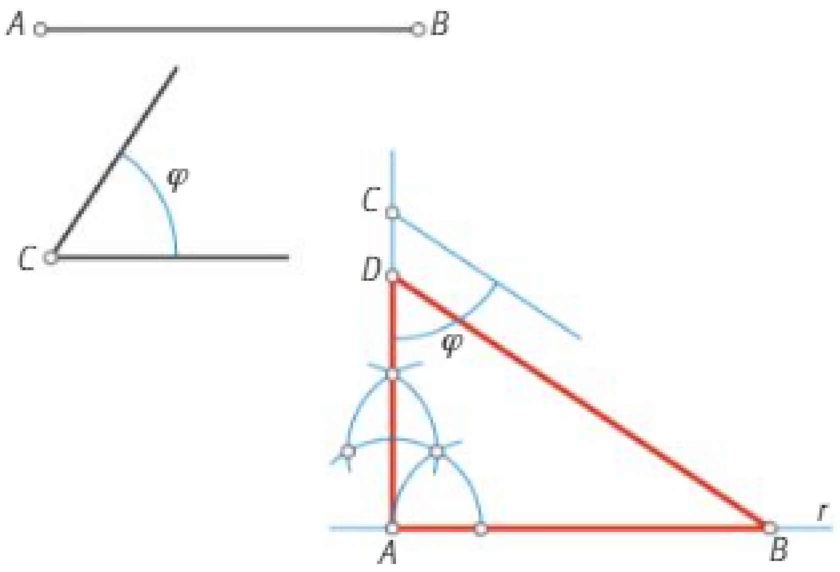


Figura 19

Cómo construir un triángulo rectángulo conociendo un cateto y el ángulo adyacente no recto

Sean AB el cateto y φ el ángulo del triángulo (fig. 20):

1. Sobre una recta r cualquiera se toma un segmento AB igual al cateto conocido del triángulo.
2. Por el extremo A se traza la perpendicular a r y por el extremo B se construye un ángulo igual al dado.
3. El punto en que el lado del ángulo anterior se corta con la perpendicular trazada por A es el vértice C.

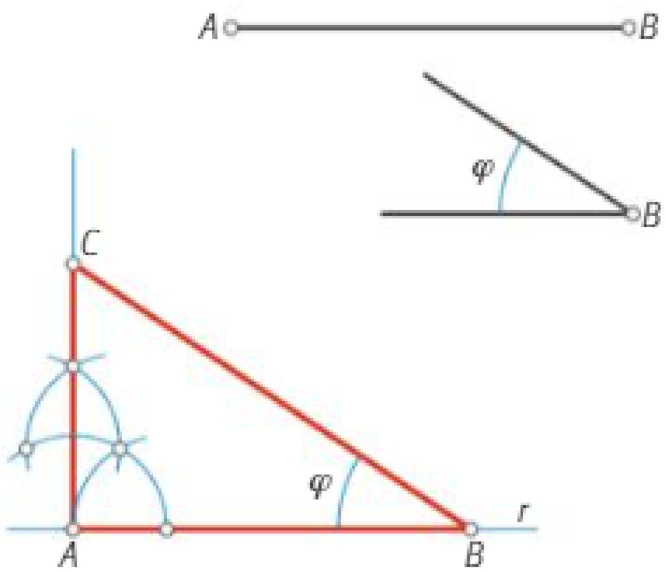


Figura 20

EJERCICIOS RESUELTOS

2 Dibuja un triángulo conociendo los lados *AB* = 30 mm y *AC* = 45 mm y la mediana del lado *AB*, que vale 35 mm.

3 Dibuja un triángulo isósceles cuya hipotenusa mida 40 mm.

EJERCICIOS RESUELTOS

2 Dibuja un triángulo conociendo los lados *AB* = 30 mm y *AC* = 45 mm y la mediana del lado *AB*, que vale 35 mm.

Solución:

1. Se dibuja la mediatriz del lado *AB* (fig. 21) y se obtiene el punto *M*.
2. Con centro en *A* y radio 45 mm se dibuja un arco de circunferencia. Con centro en *M* se traza otro arco de radio 35 mm, que corta al anterior en *C*, tercer vértice del triángulo.

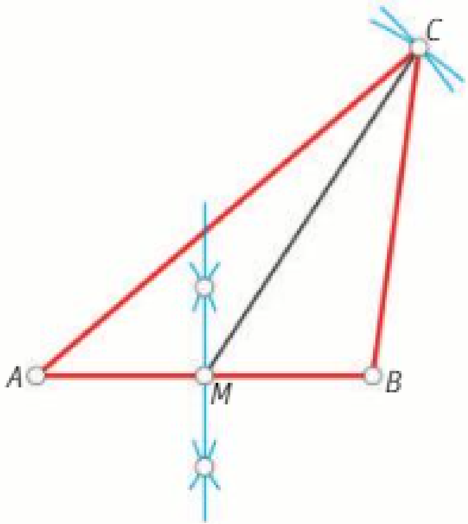


Figura 21

3 Dibuja un triángulo isósceles cuya hipotenusa mida 40 mm.

Solución:

1. Se dibuja la mediatriz de la hipotenusa *AB* (fig. 22), que corta a esta en el punto *O*, y se traza la semicircunferencia de centro *O* que tiene por diámetro *AB*.
2. El punto en que se cortan la mediatriz y la circunferencia anteriores es el tercer vértice, *C*.

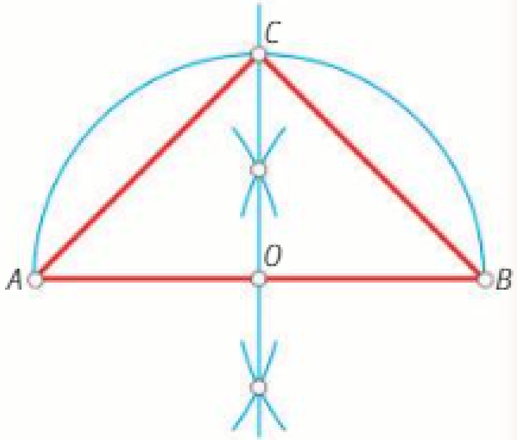


Figura 22

2 Cuadriláteros

La pantalla de un ordenador, una hoja de papel, la mayor parte de las mesas sobre las que trabajamos, los letreros de las carreteras (fig. 23), un campo de fútbol, etc., son ejemplos de figuras de cuatro lados.

Un **cuadrilátero** es una superficie plana limitada por cuatro rectas que se cortan dos o dos. Los puntos de intersección se llaman **vértices** y los segmentos entre los vértices, **lados**. Un cuadrilátero es un polígono de cuatro lados.

Figura 23

Como en los triángulos, los vértices de los cuadriláteros se designan con letras mayúsculas y sus lados con minúsculas. Se clasifican en tres tipos principales, **paralelogramos**, **trapecios** y **trapezoides**:

- **Paralelogramos** (fig. 24). Tienen sus lados paralelos dos a dos. A su vez se clasifican en:
  - **Cuadrado** (a). Los cuatro lados son iguales y los cuatro ángulos miden 90°. Las diagonales son iguales y perpendiculares entre sí; se cortan en su punto medio.
  - **Rectángulo** (b). Los lados opuestos son iguales entre sí y los cuatro ángulos miden 90°. Las diagonales son oblicuas y de igual longitud.
  - **Rombo** (c). Los cuatro lados son iguales y los ángulos opuestos miden lo mismo. Las diagonales son perpendiculares pero de distinta longitud.
  - **Romboide** (d). Los lados y ángulos opuestos son iguales entre sí. Las diagonales son desiguales y oblicuas.
- **Trapecios** (fig. 25). Tienen solo dos lados paralelos, denominados bases. Pueden ser de tres tipos:
  - **Isósceles** (a). Los lados que no son las bases son iguales; también tiene los ángulos iguales dos a dos. Tiene un eje de simetría.
  - **Rectángulo** (b). Tiene un ángulo recto, luego la altura coincide con uno de sus lados.
  - **Escaleno** (c). Todos sus lados y ángulos son distintos.
- **Trapezoides** (fig. 25d). Son cuadriláteros sin lados paralelos.

Ten en cuenta

La suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero vale 360°.

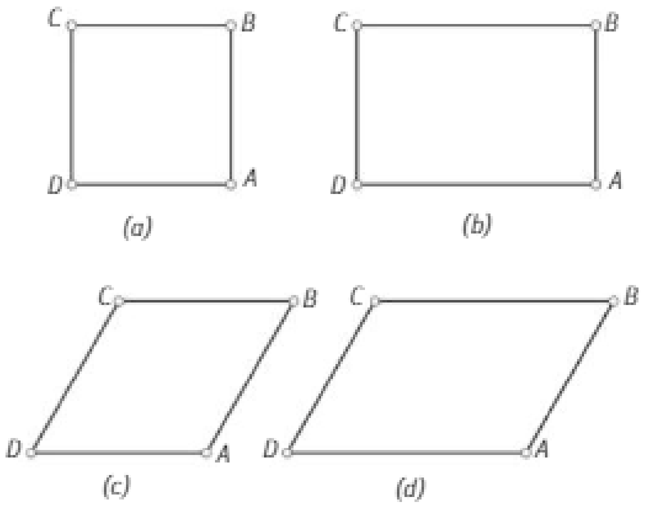


Figura 24

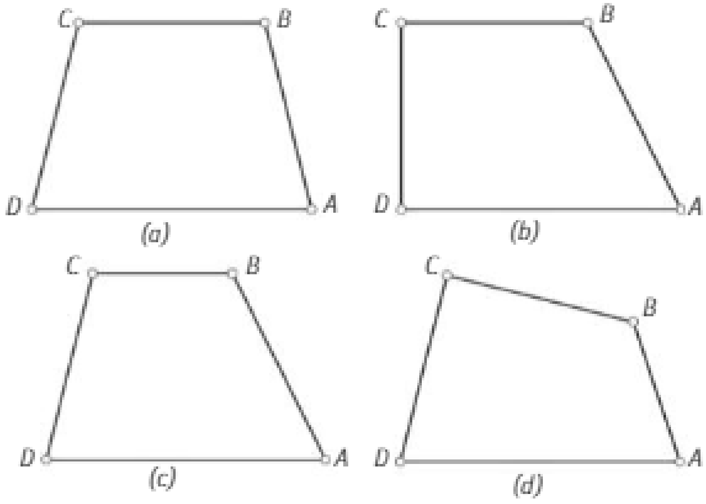


Figura 25

Cómo construir un cuadrado conociendo el lado

Sea *AB* el lado (fig. 26):

1. Sobre un segmento *AB* igual al lado se traza la perpendicular por uno de sus extremos *A*. Sobre la perpendicular trazada, con radio igual al lado *AB* y centro en *A* se transporta la magnitud *AD* del lado.
2. Con centros en *B* y *D* se describen sendos arcos, que se cortan en el cuarto vértice, *C*.

Cómo construir un cuadrado conociendo la diagonal

Sea *AC* la diagonal (fig. 27):

1. Con la diagonal *AC* como diámetro, se dibuja la circunferencia de centro *O*.
2. Se traza la mediatriz del segmento *AC*, que corta a la circunferencia en los otros dos vértices del cuadrado, *B* y *D*.

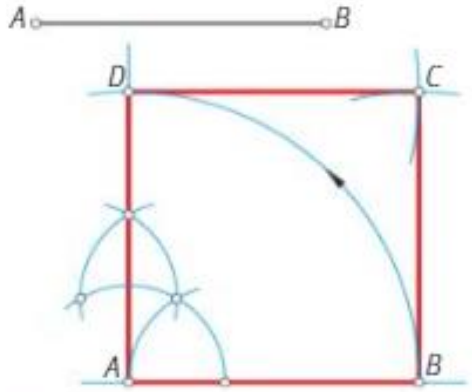


Figura 26

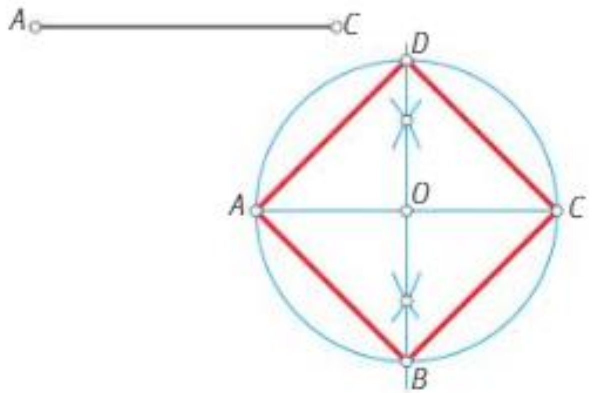


Figura 27

Cómo construir un rectángulo conociendo sus lados

Sean *AB* y *AD* los lados (fig. 28):

1. Por el extremo *A* del lado *AB* se traza la perpendicular al mismo, y sobre esta se traslada la magnitud del lado *AD*.
2. Con centro en el vértice *B* y radio igual al lado *AD* se traza un arco.
3. Con centro en el vértice *D* y radio igual al lado *AB* se traza otro arco, que corta al anterior en el punto *C*, cuarto vértice del rectángulo.

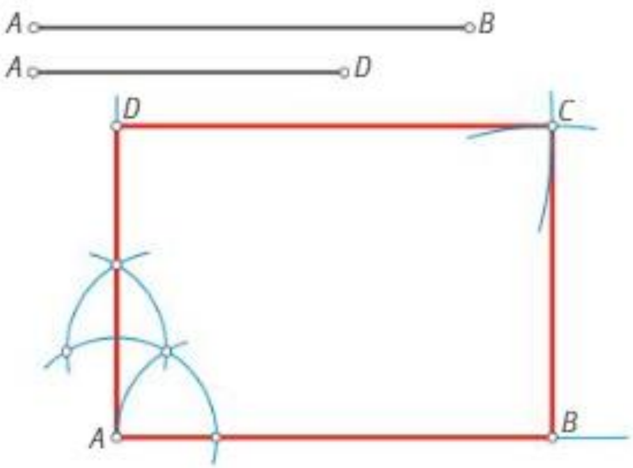


Figura 28

Cómo construir un rectángulo conociendo un lado y la diagonal

Sean *AD* el lado y *AC* la diagonal (fig. 29):

1. Con la diagonal *AC* como diámetro, se dibuja la circunferencia de centro *O*.
2. Haciendo centro en los puntos *A* y *C* y con radio igual al lado conocido, se trazan dos arcos de circunferencia en sentido contrario, que cortan a la circunferencia en los puntos *B* y *D*. Los puntos *A*, *B*, *C* y *D* son los vértices del rectángulo.

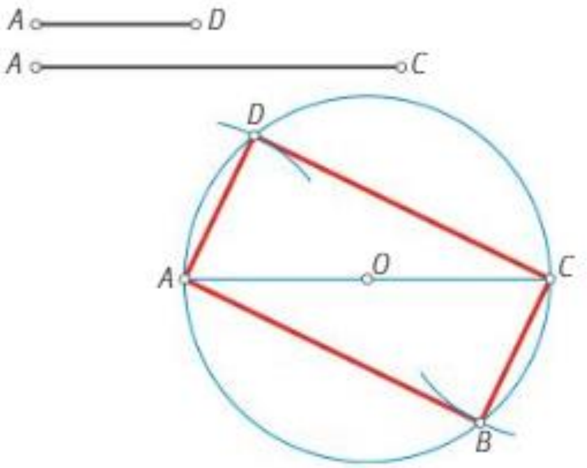


Figura 29

Cómo construir un rectángulo conociendo la suma de los lados desiguales y la diagonal

Sea *AE* un segmento igual a la suma de los lados y *AC* la diagonal (fig. 30):

1. Por el extremo *E* del segmento se traza la recta que forma 45º con dicho segmento.
2. Con centro en el otro extremo *A* y radio igual a la diagonal dada, se traza un arco, que corta a la recta anterior en el punto *C*.
3. Por el punto *C* se traza la perpendicular al segmento *AE*, que lo corta en el punto *B*.
4. Con centros en *A* y *C* y radios igual a *CB* y *AB* respectivamente, se trazan dos arcos, que se cortan en el punto *D*. Los puntos *A*, *B*, *C* y *D* son los vértices del rectángulo.

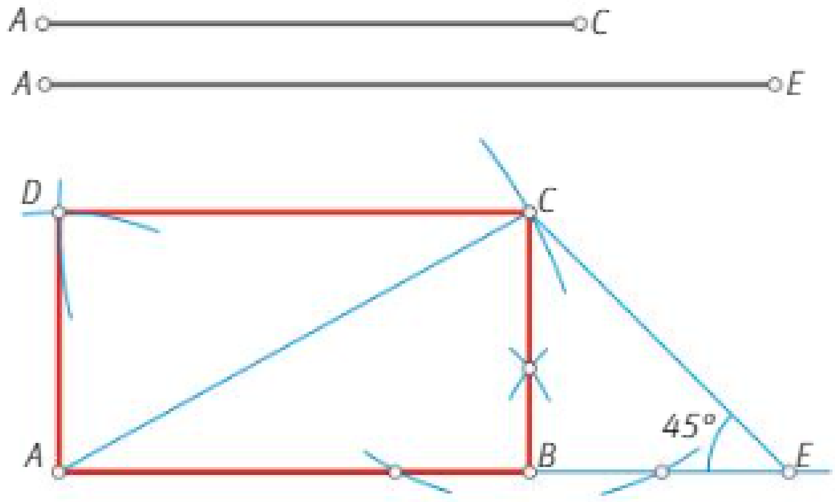


Figura 30

EJERCICIOS RESUELTOS

4 Construye un rectángulo sabiendo que la suma de sus lados vale 55 mm y la diferencia vale 15 mm.

EJERCICIOS RESUELTOS

4 Construye un rectángulo sabiendo que la suma de sus lados vale 55 mm y la diferencia vale 15 mm.

Solución:

1. Sobre una recta *r* y a partir de un punto *A* (fig. 31) se traslada el segmento suma *AB* = 55 mm y el segmento diferencia *AC* = 15 mm.
2. Se traza la mediatriz del segmento *BC*, con lo que se obtiene el punto *D*, vértice del rectángulo.
3. Con centro en *D* y diámetro *BC* se traza la semicircunferencia que corta a la mediatriz anterior en el punto *E*, tercer vértice del rectángulo.
4. Con centros en *A* y *E* y radios igual a *DE* y *AD* respectivamente, se trazan dos arcos, que se cortan en el punto *F*. Los puntos *A*, *D*, *E* y *F* son los vértices del rectángulo.

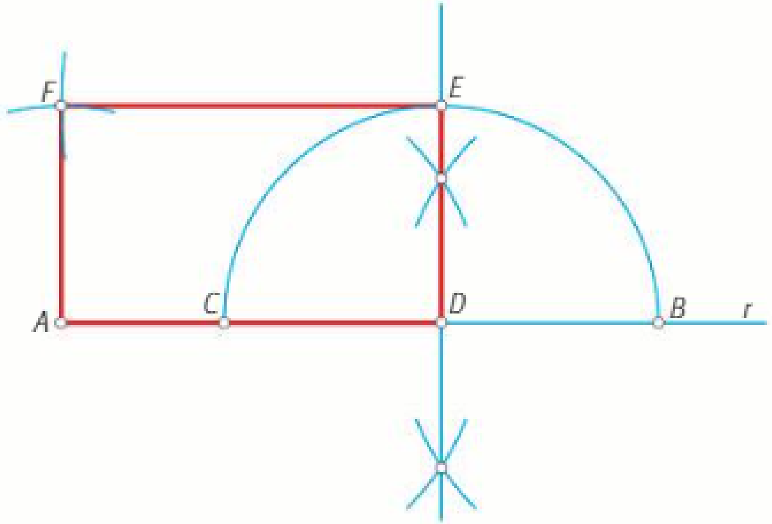


Figura 31

Cómo construir un rombo conociendo el lado y una diagonal

Sean *AD* el lado y *AC* la diagonal (fig. 32):

1. Con centros en los extremos *A* y *C* de la diagonal y radio igual al lado se describen cuatro arcos, que se cortan en los puntos *B* y *D*.
2. Los puntos *A*, *B*, *C* y *D* son los vértices del rombo.

Cómo construir un rombo conociendo un ángulo y su diagonal

Sean *AC* la diagonal y φ el ángulo (fig. 33):

1. Se dibuja el ángulo φ conocido, de vértice *A*, y se traza la bisectriz del mismo.
2. A partir del punto *A* y sobre la bisectriz se lleva la magnitud *AC* de la diagonal conocida.
3. Por el punto *C* se trazan las paralelas a los lados del ángulo, que se cortan con estos en los puntos *B* y *D*, los otros dos vértices del rombo.

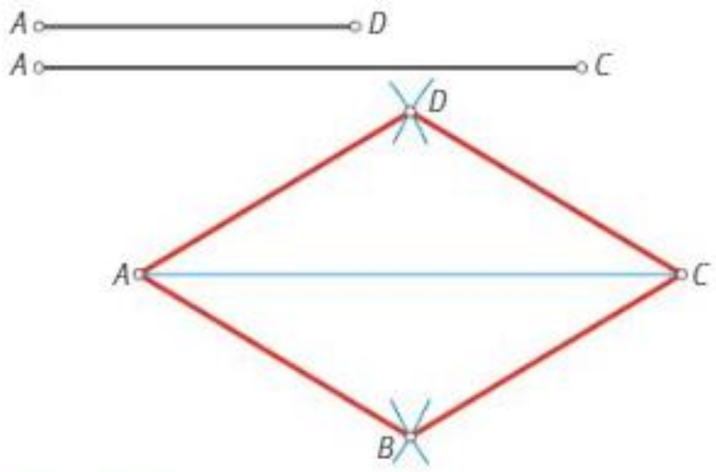
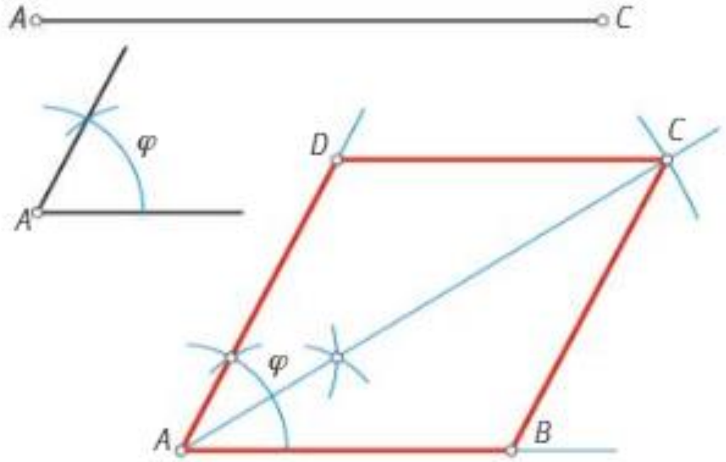


Figura 32



Cómo construir un romboide conociendo sus lados y un ángulo

Sean AD y AB los lados y φ el ángulo (fig. 34):

1. Se dibuja el ángulo φ conocido, de vértice A, y se transportan sobre cada lado las longitudes AB y AD, es decir, los lados conocidos del romboide.
2. Desde el punto B y con radio AD, se traza un arco; y desde el punto D y con radio AB se traza otro arco, que corta al anterior en el punto C, cuarto vértice del romboide.

Cómo construir un romboide conociendo sus lados y la altura

Sean AD y AB los lados y BE la altura (fig. 35):

1. Se dibuja un segmento AB igual a uno de los lados conocidos.
2. Por el punto B se traza la perpendicular al mismo, y se transporta a partir de B la distancia BE, igual a la altura.
3. Por el punto E se traza la recta paralela al segmento AB.
4. Con centro en los puntos A y B y radio igual al otro lado conocido se trazan sendos arcos, que cortan a la paralela trazada por E en los puntos C y D, los otros dos vértices del romboide.

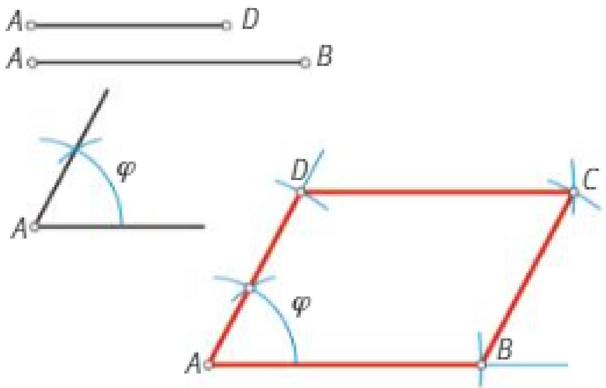


Figura 34

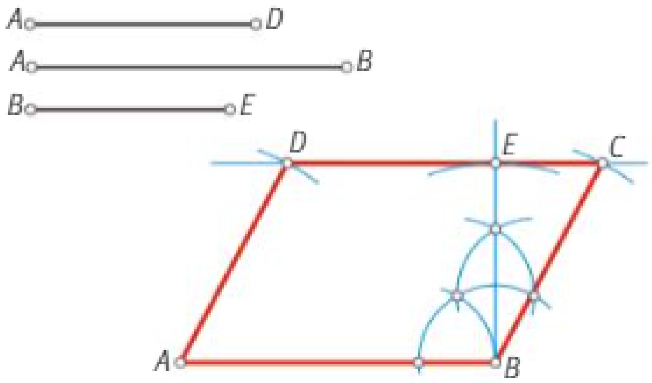


Figura 35

EJERCICIOS RESUELTOS

5 Construye un rombo a partir del lado l = 30 mm y del ángulo φ = 60° que forman sus lados.

EJERCICIOS RESUELTOS

5 Construye un rombo a partir del lado l = 30 mm y del ángulo φ = 60° que forman sus lados.

Solución:

1. Se dibuja, con vértice en *A*, un ángulo de 60° (fig. 36).
2. Sobre cada uno de los lados del ángulo y a partir del vértice *A* se trasladan los segmentos *AB* = *AD* = 30 mm, con lo que se obtienen los vértices *B* y *D*.
3. Con centros en *B* y *D* se dibujan dos arcos de circunferencia de radio 30 mm, que se cortan en el punto *C*, cuarto vértice del rombo.

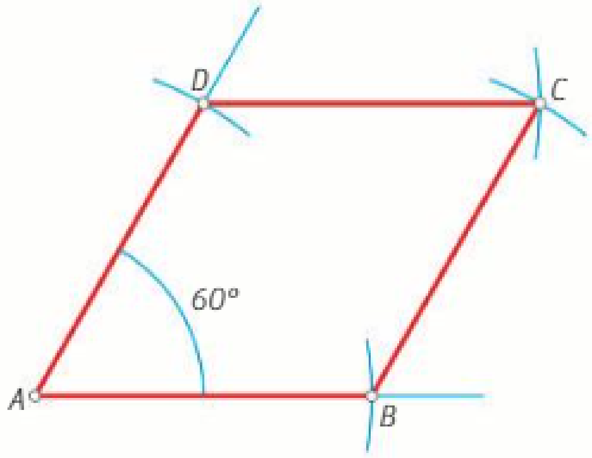


Figura 36

Cómo construir un trapecio escaleno conociendo los cuatro lados

Sean *DC*, *AD*, *BC* y *AB* los cuatro lados de un trapecio cuyas bases son *AB* y *CD* (fig. 37):

1. Se dibuja un segmento *AB* igual a uno de los lados conocidos.
2. A partir del punto *A* y sobre dicho segmento se traslada el segmento *AE* igual al lado *CD*, paralelo a *AB*.
3. Con centro en *E* y radio igual a uno de los lados laterales, por ejemplo *AD*, se describe un arco; con centro en *B* y radio igual al otro lado lateral, *BC*, se traza otro arco, que corta al anterior en el punto *C*.
4. Con centro en *A* y radio *AD* y con centro en *C* y radio *CD* se describen dos arcos, que se cortan en el cuarto vértice, *D*.

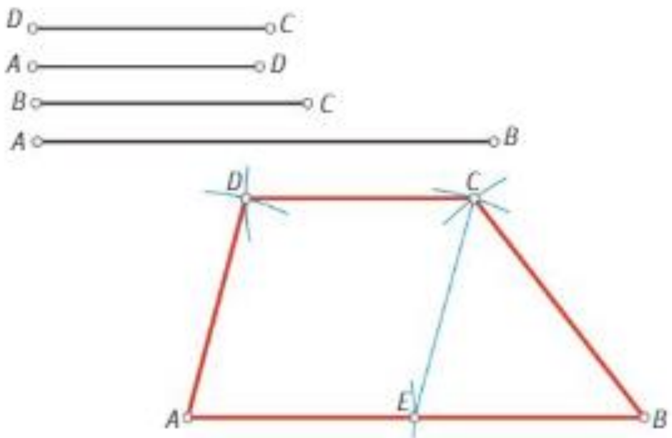


Figura 37

Cómo construir un trapecio escaleno conociendo sus bases y sus diagonales

Sean *AB* y *CD* las bases y *AC* y *BD* las diagonales (fig. 38):

1. Sobre una recta *r* cualquiera y a partir de un punto *A* se lleva el segmento *AB* igual a una de las bases. A partir del punto *B* se suma el segmento *BE* igual a la otra base.
2. Con centro en *A* y radio igual a la diagonal *AC* se traza un arco, y con centro en *E* y radio igual a la diagonal *BD* se traza otro arco, que corta al anterior en el punto *C*.
3. La intersección de la recta paralela a *AE* trazada por el punto *C* con el arco de centro *B* y radio *EC* es el vértice *D*.

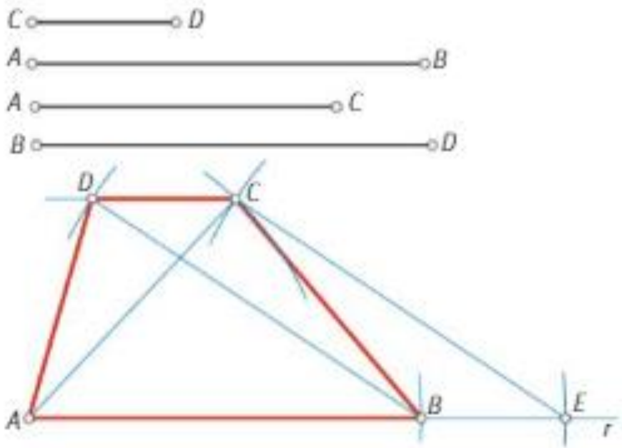


Figura 38

EJERCICIOS RESUELTOS

6 Construye el trapecio rectángulo del que se conocen la base mayor AB = 50 mm, la altura h = 25 mm y la diagonal AC = 40 mm.

7 Construye el trapecio isósceles del que se conocen la base mayor AB = 45 mm, la altura h = 25 mm y la diagonal d = 40 mm.

EJERCICIOS RESUELTOS

6 **Construye el trapecio rectángulo del que se conocen la base mayor AB = 50 mm, la altura h = 25 mm y la diagonal AC = 40 mm.**

Solución:

1. Situado el segmento AB = 50 mm (fig. 39), se traza por el extremo A de la recta r una perpendicular y se traslada a partir del punto A el segmento AD = 25 mm.
2. Por el punto D se traza la recta s paralela al lado AB.
3. Con centro en A y radio 40 mm se dibuja un arco de circunferencia, que corta a la recta s en el vértice C.

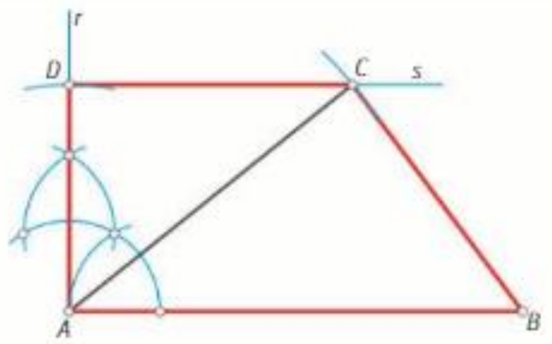


Figura 39

7 **Construye el trapecio isósceles del que se conocen la base mayor AB = 45 mm, la altura h = 25 mm y la diagonal d = 40 mm.**

Solución:

1. Situado el segmento AB = 45 mm (fig. 40), se traza la mediatriz r, que determina el punto medio E.
2. Sobre la recta r y a partir del punto E se traslada el segmento EF = 25 mm.
3. Por el punto F se dibuja la recta s paralela al lado AB.
4. Con centros en A y en B y radio 40 mm se trazan sendos arcos, que cortan a la recta s en los puntos C y D, con lo que se obtiene el trapecio $ABCD$.

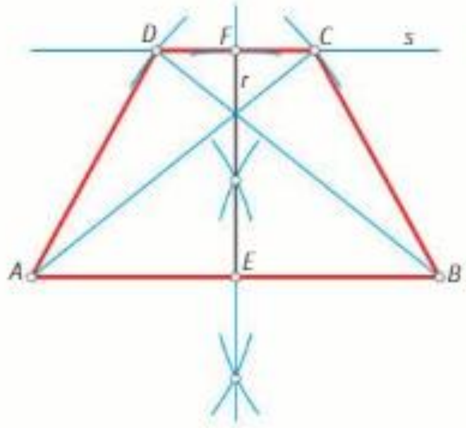


Figura 40

3 Polígonos regulares

La señal de *stop* que indica "parada" (fig. 41), la forma en planta del edificio del ministerio de defensa de Estados Unidos, la forma de las celdillas en los paneles de miel de las abejas, cada una de las caras de un dado, etc., son ejemplos que nos dan idea de la multitud de sitios en los que podemos encontrar polígonos regulares.

Un **polígono** es el espacio limitado por una línea quebrada, cerrada y plana. Cada segmento de la línea quebrada se denomina **lado** y los puntos de intersección de los lados, **vértices**.

Figura 41

Los polígonos se pueden clasificar en:

- **Polígono equilátero**. Tiene todos sus lados iguales.
- **Polígono equiángulo**. Tiene todos los ángulos iguales.
- **Polígono regular**. Sus lados y sus ángulos son iguales.
- **Polígono irregular**. No cumple ninguna de las tres condiciones anteriores.

En esta unidad nos referiremos siempre a los polígonos regulares.

Por otro lado, los polígonos pueden ser de dos tipos:

- **Polígono convexo**. Al trazar cualquier recta, solo corta al polígono en dos puntos.
- **Polígono cóncavo**. Existe al menos una recta que lo corta en más de dos puntos.

Una tercera clasificación de los polígonos es la siguiente:

- Se dice que un polígono está **inscrito** en una circunferencia si todos sus vértices están en ella.
- Se dice que un polígono está **circunscrito** a una circunferencia si todos sus lados son tangentes a la misma.

Los polígonos reciben distintos nombres según el número de lados:

Nombre	Número de lados
Triángulo	3
Cuadrilátero	4
Pentágono	5
Hexágono	6
Heptágono	7
Octógono	8
Eneágono	9
Decágono	10
Undecágono	11
Dodecágono	12
Pentadecágono	15

El triángulo regular se llama **triángulo equilátero** y el cuadrilátero regular se llama **cuadrado**.

Los polígonos que no aparecen en la tabla se nombran indicando el número de lados que tienen; así, un polígono que tenga el doble de lados que un eneágono se llama *polígono de dieciocho lados*.

Ten en cuenta

- La suma de los ángulos α internos de un polígono de n lados es igual a 180° por el número de lados menos dos:

$$\varphi = 180^{\circ} \cdot (n-2)$$

- La suma de los ángulos β externos de un polígono es igual a 360°.
- El número de diagonales de un polígono de n lados es:

$$\text{número de diagonales} = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$$

3.1. Elementos notables de un polígono

En un polígono de un número cualquiera de lados se distinguen los siguientes elementos (fig. 42):

- **Centro**. Es el punto *O* del plano equidistante de todos los vértices.
- **Radio**. Es la recta *R* que va del centro a un vértice cualquiera. Coincide con el radio de la circunferencia *c* circunscrita.
- **Apotema**. Es la recta *a* que une el centro con el punto medio de uno de sus lados. Coincide con el radio de la circunferencia *c'* inscrita en el polígono.
- **Altura**. Es la recta *h* perpendicular a uno de los lados trazada desde el vértice opuesto.
- **Diagonal**. Es la recta *d'* que une dos vértices no consecutivos.
- **Diagonal principal**. En los polígonos de un número par de lados, es la recta *d* que une dos vértices opuestos.
- **Perímetro**. Es la suma de las longitudes de todos los lados de un polígono.

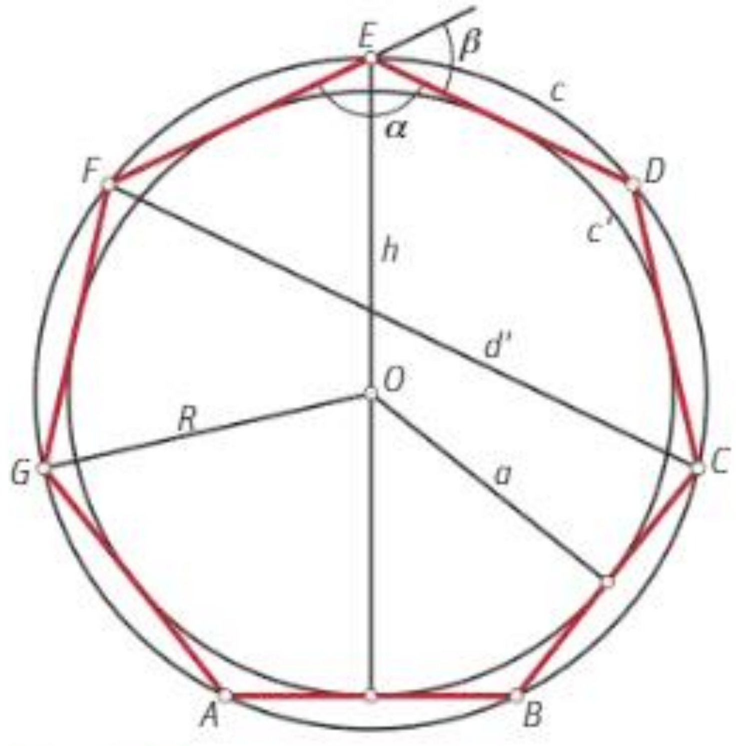


Figura 42

3.2. Construcción de polígonos regulares conociendo el radio

Cómo dividir una circunferencia en 3, 6, 12, ... partes iguales

Dada la circunferencia de centro *O* (fig. 43):

1. Se traza un diámetro *AG* cualquiera.
2. **Hexágono.** Con radio igual al radio de la circunferencia dada y con centros en *A* y *G* se trazan dos arcos, que cortan a la circunferencia en los puntos *K*, *I*, *C* y *E*, vértices del hexágono.
3. **Triángulo.** El triángulo equilátero *AEI* se halla uniendo los vértices del hexágono de dos en dos.
4. **Dodecágono.** Si se trazan desde el centro de la circunferencia las perpendiculares a los lados del hexágono, estas cortarán a la circunferencia en seis puntos que, junto con los vértices del hexágono, forman el polígono de doce lados.

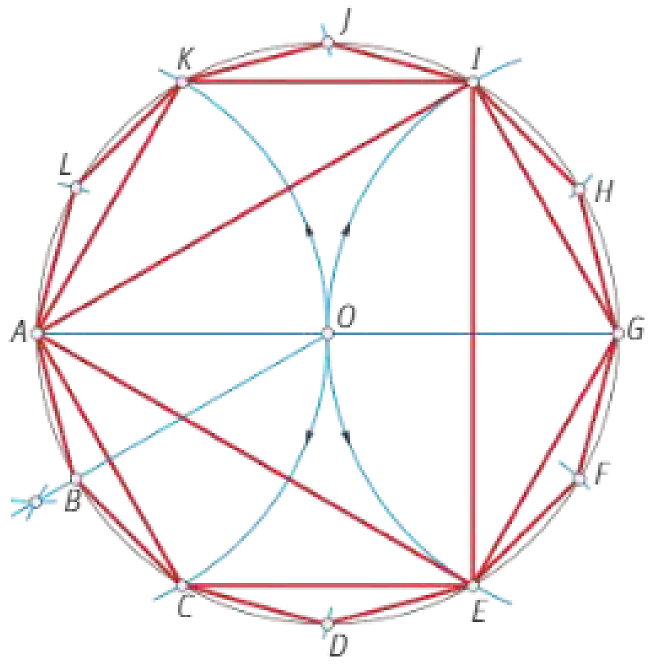


Figura 43

Cómo dividir una circunferencia en 4, 8, 16, ... partes iguales

Dada la circunferencia de centro *O* (fig. 44):

1. **Cuadrado.** Se trazan dos diámetros *AE* y *CG* perpendiculares entre sí, que dividen a la circunferencia en cuatro partes iguales.
2. **Octógono.** Si se trazan desde el centro de la circunferencia las perpendiculares a los lados del cuadrado, estas cortarán a la circunferencia en cuatro puntos que, junto con los vértices del cuadrado, forman el polígono de ocho lados.
3. **Polígono de dieciséis lados.** Si se trazan nuevas perpendiculares a los lados del octógono, se obtiene la división de la circunferencia en dieciséis partes iguales.

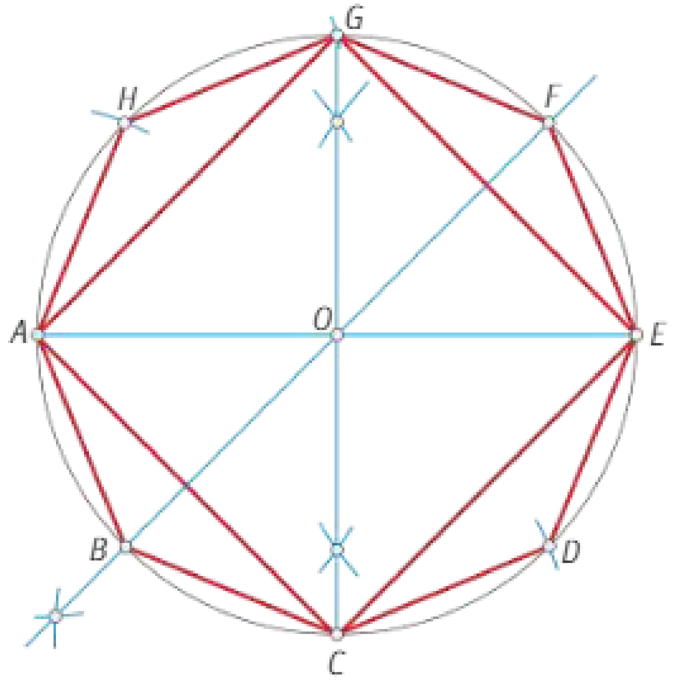


Figura 44

Cómo dividir una circunferencia en 5, 10, ... partes iguales

Dada la circunferencia de centro *O* (fig. 45):

1. Se dibujan dos diámetros, *KL* y *AF*, perpendiculares entre sí.
2. Se divide el radio *OL* en dos partes iguales mediante el trazado de la mediatriz, con lo que se halla el punto *M*.
3. Con centro en *M* se describe un arco de radio *MA* hasta cortar al diámetro *KL* en el punto *N*.
4. **Pentágono.** El segmento *AN* es el lado l_5 del pentágono regular inscrito.
5. **Decágono.** El segmento *ON* es el lado l_{10} del decágono regular inscrito.

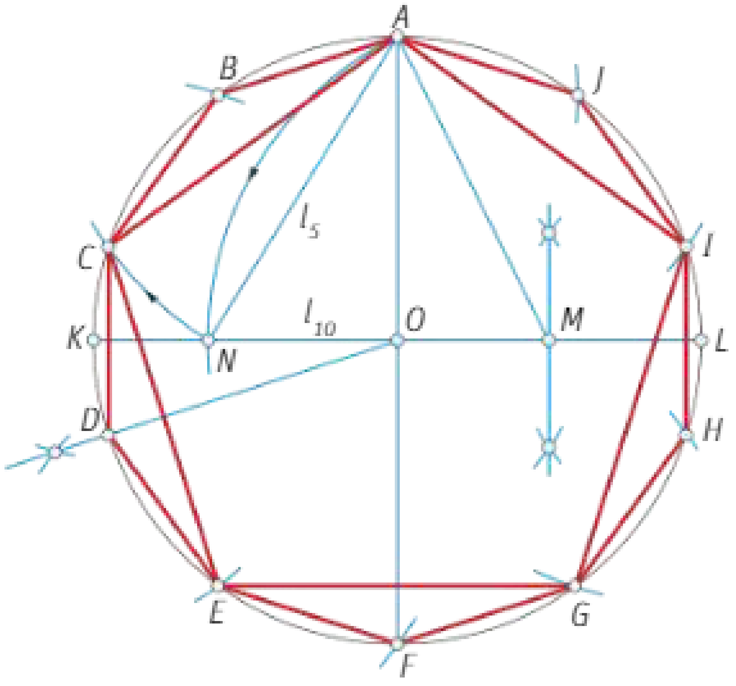


Figura 45

Cómo dividir una circunferencia en 7, 14, ... partes iguales

Dada la circunferencia de centro *O* (fig. 46):

1. Se traza un diámetro cualquiera *HA*.
2. **Heptágono.** Se traza la mediatriz del radio *OA*, que pasa por su punto medio, *S*, y corta a la circunferencia en los puntos *P* y *Q*. El segmento *PS* es el lado l_7 del heptágono.
3. **Polígono de catorce lados.** Si se trazan desde el centro de la circunferencia las perpendiculares a los lados del heptágono, estas cortarán a la circunferencia en siete puntos que, junto con los vértices del heptágono, forman el polígono de catorce lados.

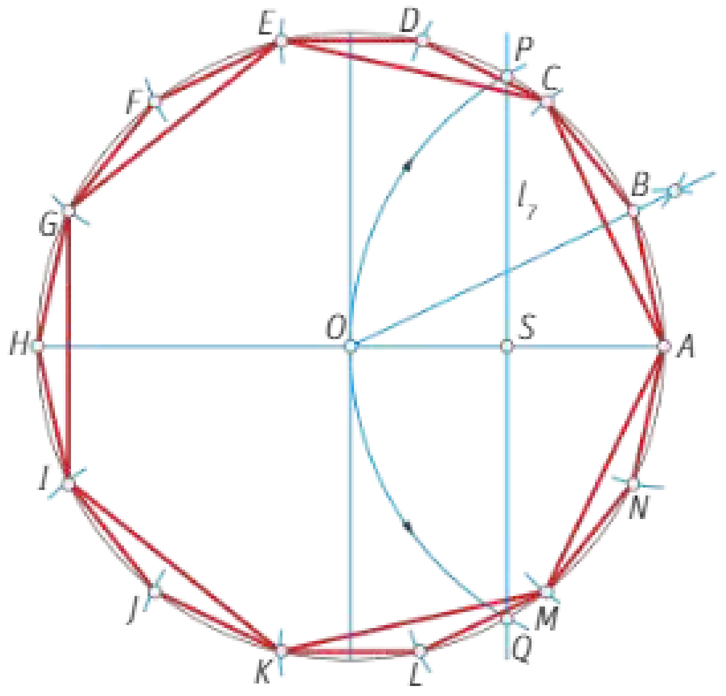


Figura 46

Cómo dividir una circunferencia en 9, 18, ... partes iguales

Dada la circunferencia de centro *O* (fig. 47):

1. Se trazan dos diámetros *AQ* y *JK*, perpendiculares entre sí.
2. Desde un extremo, *K*, de uno de los diámetros, se traza un arco con el mismo radio de la circunferencia, que corta a esta en el punto *L*.
3. Con centro en el otro extremo, *J*, del mismo diámetro, y radio *JL*, se traza un arco que corta a la prolongación del otro diámetro en el punto *M*.
4. Con centro en *M* y radio *MJ* se traza un nuevo arco que corta al diámetro *AQ* en el punto *N*.
5. **Eneágono.** El segmento *AN* es el lado l_9 del polígono regular de nueve lados.
6. **Polígono de dieciocho lados.** Si se trazan desde el centro de la circunferencia las perpendiculares a los lados del eneágono, estas cortarán a la circunferencia en nueve puntos que, junto con los vértices del eneágono, forman el polígono de dieciocho lados.

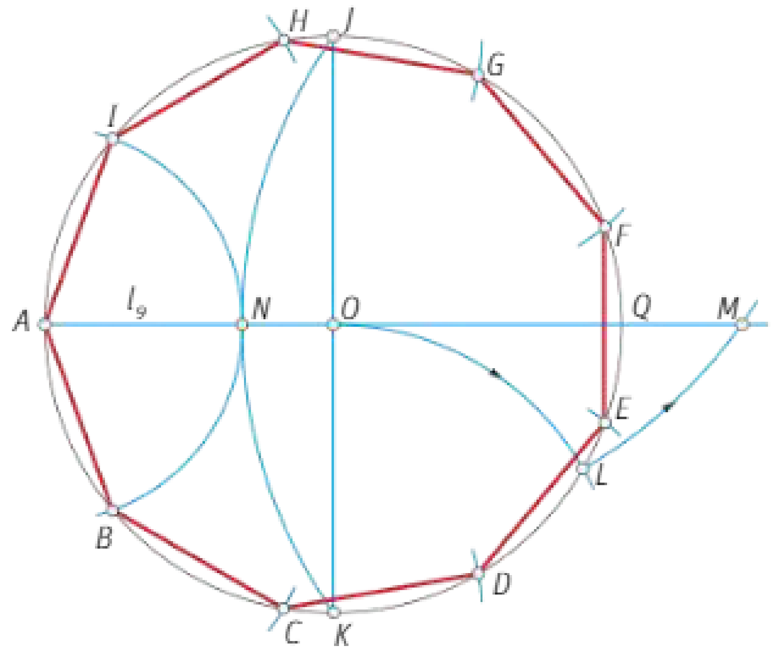


Figura 47

Cómo realizar la división aproximada de una circunferencia en un número cualquiera de partes iguales

Dada la circunferencia de centro *O* (fig. 48):

1. Se divide un diámetro *AL* de la circunferencia en el mismo número de partes iguales en que se desea dividir la circunferencia, y se numeran dichas divisiones. En este caso, se divide en once partes.
2. Con centros en los extremos *A* y *L* del diámetro anterior y con radio igual al diámetro se trazan dos arcos, que se cortan en el punto *M*.
3. El punto *M* se une con el punto número 2 del diámetro, y se prolonga dicha recta hasta que corte a la circunferencia en el punto *B*. El segmento *AB* es la división buscada y el lado aproximado del polígono correspondiente, en este caso un undecágono.

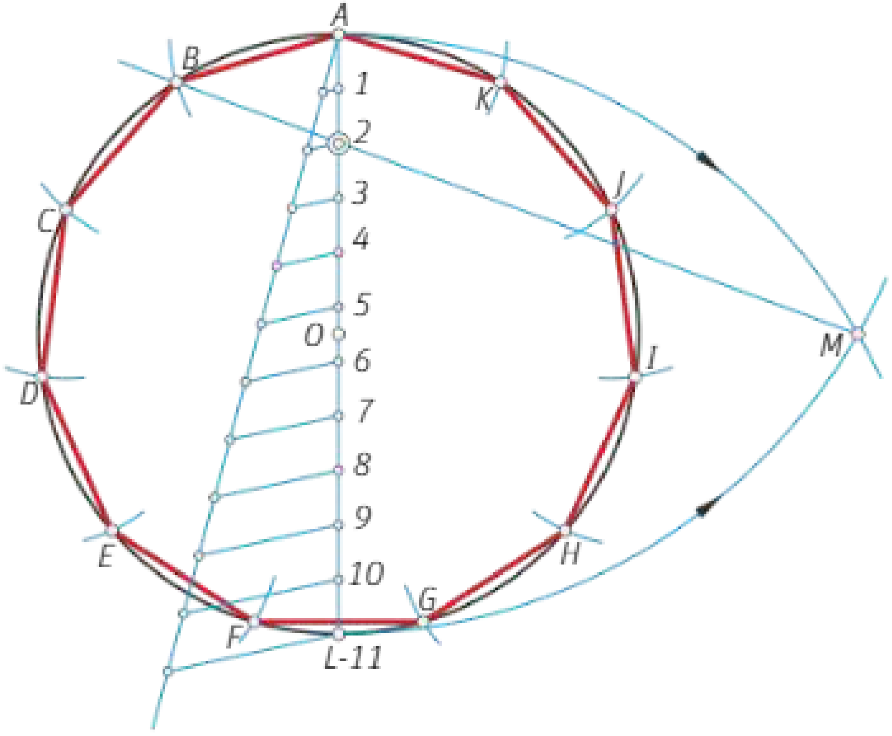


Figura 48

3.3. Construcción de polígonos regulares conociendo el lado

Cómo construir un pentágono regular

Dado el segmento *AB* (fig. 51):

1. Se prolonga el lado *AB*; se dibuja la mediatriz *s* del segmento *AB*, cuyo punto medio es *F*, y se traza la perpendicular *t* al lado *AB*, por uno de los extremos.
2. Se traza un arco con centro en *B* y radio *BA* hasta cortar en *G* a la perpendicular *t* trazada por *B*.
3. Se traza un segundo arco con centro en *F* y radio *FG* hasta cortar en *H* a la prolongación del lado *AB*.
4. Se traza un tercer arco con centro en *A* y radio *AH* (diagonal del pentágono regular) hasta cortar al primer arco en *C* y a la mediatriz *s* en *D*, vértices ambos del pentágono.
5. Con centros en *A* y *D* y radio *AB* se trazan dos arcos que se cortarán en *E*, el quinto y último vértice del pentágono.

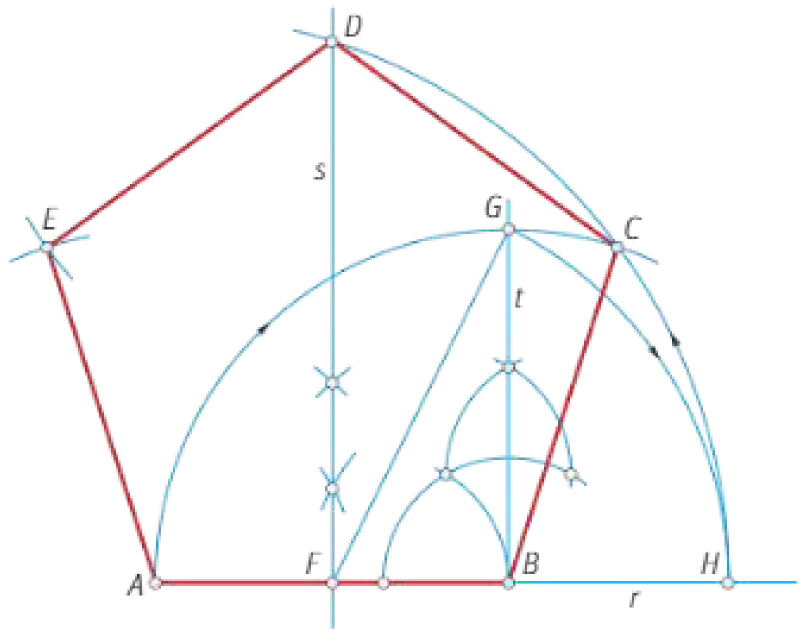


Figura 51

Cómo construir un heptágono regular

Dado el segmento *AB* (fig. 52):

1. Se trazan la mediatriz *s* del segmento *AB* y la perpendicular *t* al lado *AB* por el extremo *B*.
2. Con vértice en *A*, se construye un ángulo de 30º, cuyo lado corta a la perpendicular *t* en *H*.
3. Desde *A* y con radio *AH* se describe un arco de circunferencia que cortará a la mediatriz *s* en el punto *O*, centro de la circunferencia que inscribe al polígono de siete lados.
4. Con centro en *B* y con radio *AB* se traza un pequeño arco que cortará a la circunferencia en el punto *C*; con centro en *C* y con radio *AB* se traza otro arco que cortará a la circunferencia en el punto *D*, y así sucesivamente hasta obtener todos los vértices del heptágono.

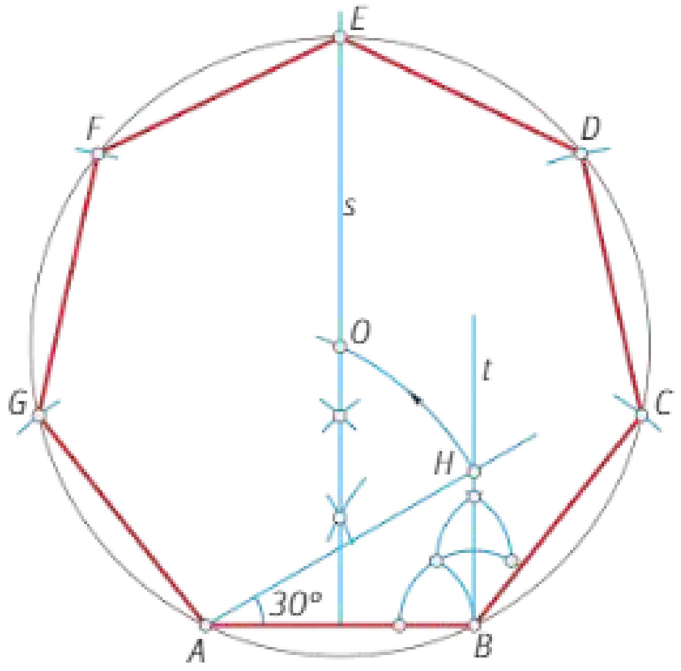


Figura 52

Cómo construir un octógono regular

Dado el segmento *AB* (fig. 53):

1. Se traza la mediatriz *s* del segmento *AB*, cuyo punto medio es *I*.
2. Se dibuja una circunferencia con centro en *I* y diámetro *AB*, que corta a la mediatriz en el punto *J*.
3. Con centro en *J* y radio *JA*, o *JB*, se traza otra circunferencia que corta a la mediatriz en el punto *O*, centro de la circunferencia que inscribe el octógono de lado *AB*.
4. Con centro en *B* y con radio *AB* se traza un pequeño arco que cortará a la circunferencia en el punto *C*; del mismo modo se van obteniendo los restantes puntos del octógono.

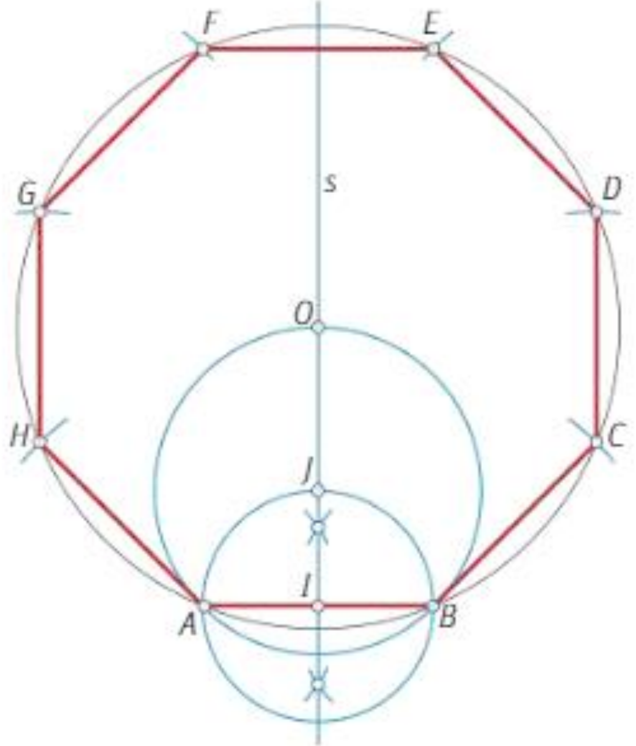


Figura 53

Cómo construir un eneágono regular

Dado el segmento *AB* (fig. 54):

1. Se traza la mediatriz *s* del segmento *AB*.
2. Con centro en *A* y radio *AB* se traza un arco que corta a la mediatriz en *J*.
3. Con centro en *J* y radio *JB* se traza un arco que corta a la mediatriz en *K*.
4. Con centro en *K* y radio *KJ* se traza un arco que corta a *s* en el punto *F*, vértice opuesto al lado *AB*.
5. Se une *A* con *F* y se traza la mediatriz de dicho segmento, que corta a la mediatriz de *AB* en el punto *O*, centro de la circunferencia circunscrita.
6. Con centro en *B* y con radio *AB* se traza un pequeño arco que cortará a la circunferencia en el punto *C*; del mismo modo se van obteniendo los restantes puntos del eneágono.

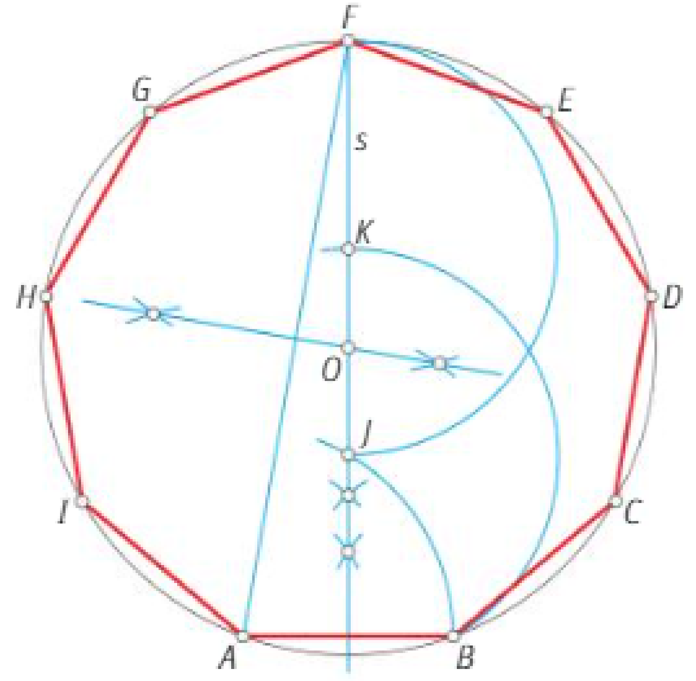


Figura 54

Cómo dibujar la construcción aproximada de un polígono de un número cualquiera de lados conociendo el lado

Primer método

1. Con centro en un punto *O* cualquiera se traza una circunferencia de radio arbitrario (fig. 55).
2. Se toma un diámetro *LM* cualquiera y se divide en tantas partes como lados tenga el polígono que se desea construir, numerando dichos puntos: *1*, *2*, ...
3. Con centros en *L* y *M* y radio *LM* se trazan dos arcos, que se cortan en *P*.
4. Se une el punto *P* con el punto *2*; la prolongación de dicha recta corta a la circunferencia en *Q*.
5. Se prolonga el segmento *LQ* y a partir del punto *L* se lleva la distancia *LR*, igual al lado del polígono que se desea construir.
6. Por el punto *R* se traza la paralela al radio *OL*, que corta a la prolongación del radio *OQ* en el punto *B*.
7. La distancia *OB* es el radio de la circunferencia que inscribe al polígono que se pide.

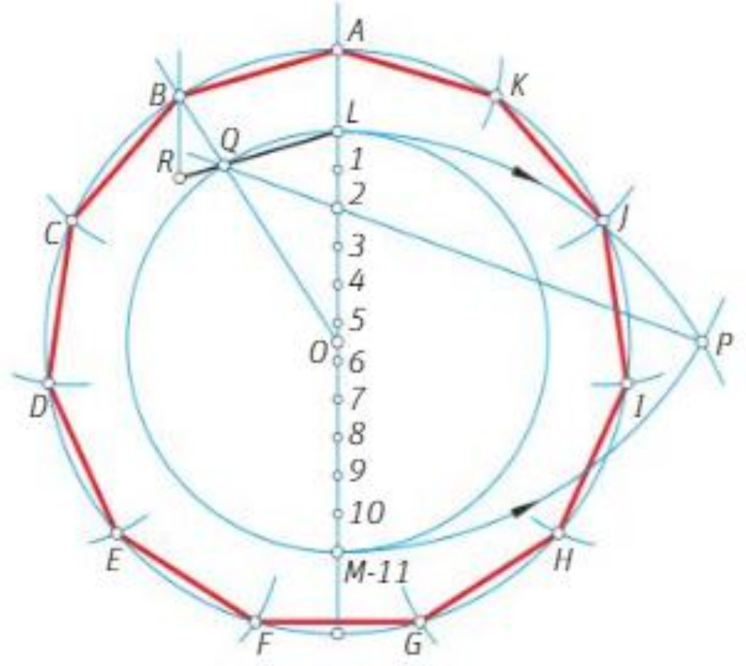


Figura 55

Segundo método

Dado el segmento *AB* (fig. 56):

1. Con radio *AB* y centros en *A* y en *B* se trazan dos arcos que se cortan en el punto *O* de la mediatriz. El punto *O* es el centro del hexágono de lado *AB*.
2. Con centro en el punto *O* y radio *OA* se dibuja la circunferencia que corta a la mediatriz de *AB* en el punto *C*.
3. Se divide el radio *OC* en seis partes iguales. Los puntos *7*, *8*, *9*, *10*, *11* y *12* son los centros de las circunferencias circunscritas a los polígonos de *7*, *8*, *9*, *10*, *11* y *12* lados, respectivamente.

En las figuras correspondientes a los dos ejemplos, se ha representado un **undecágono**.

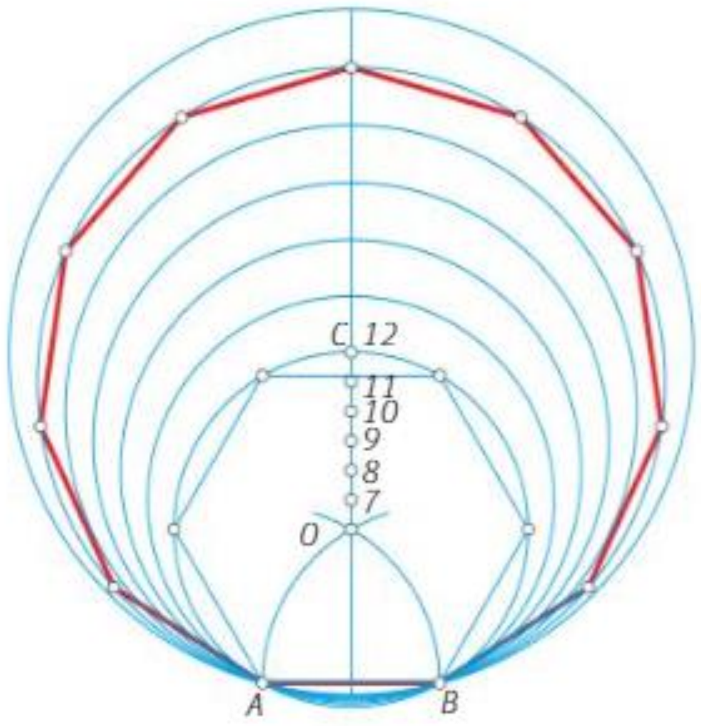


Figura 56

4 Construcción de polígonos estrellados

Para construir un polígono regular estrellado de un número determinado de vértices se debe dividir la circunferencia en tantas partes iguales como vértices tenga el polígono que se va a construir y unir dichos vértices de dos en dos, de tres en tres, de cuatro en cuatro, etc.

El número de polígonos estrellados que existen para un número *v* de vértices es igual al número de cifras primas con *v* (números que no tienen división exacta con *v*) que sean menores de *v*/2. Los vértices se unen de la manera que nos indican las cifras primas. En el siguiente cuadro se puede ver el número de polígonos estrellados que existen para un número determinado de vértices, así como la manera de unirlos:

v	p	n
5	1	2
6	0	–
7	2	2-3
8	1	3
9	2	2-4
10	2	3-4

v	p	n
11	4	2-3-4-5
12	1	5
13	5	2-3-4-5-6
14	4	3-4-5-6
15	4	2-4-6-7
...	...	...

En el cuadro, ***v*** es el número de vértices del polígono estrellado; ***p*** es el número de polígonos estrellados de *v* vértices, y ***n*** son los números primos con *v* menores de la mitad, que indican además la forma de unir los vértices.

Ten en cuenta

Para construir un polígono estrellado se ha de partir de un vértice, recorrer todos y cada uno de ellos, y cerrar en el mismo vértice donde se comenzó.

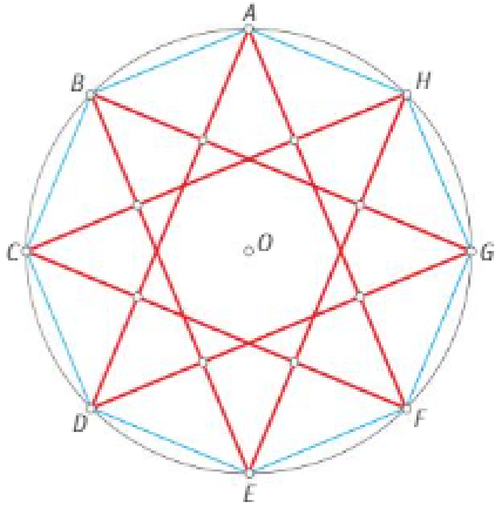


Figura 57

Cómo construir un octógono regular estrellado

Tal como se indica en la tabla anterior, solo existe un polígono estrellado de ocho vértices, ya que solo hay un número menor que 4 (8/2), que sea primo con 8: el 3.

Dada la circunferencia de centro *O* (fig. 57):

1. Se divide la circunferencia en ocho partes iguales.
2. Se unen los vértices de tres en tres, puesto que el número primo con 8 es el 3.

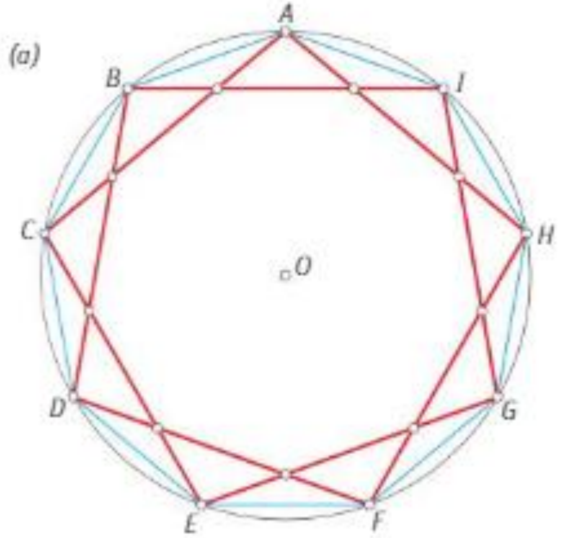
Cómo construir un eneágono regular estrellado

La tabla anterior indica que existen dos polígonos estrellados de nueve vértices, puesto que hay dos números menores de 4,5 (9/2) que son primos con 9: el 2 y el 4.

Dada la circunferencia de centro *O*:

1. Se divide la circunferencia en nueve partes iguales.
2. Para obtener el primer polígono estrellado, se unen los vértices de dos en dos (fig. 58a), ya que un número primo con 9 es el 2.
3. Para obtener el segundo polígono estrellado, se unen los vértices de cuatro en cuatro (fig. 58b), pues el otro número primo con 9 es el 4.

Si se intentan unir los vértices de tres en tres, se obtienen tres triángulos equiláteros girados uno respecto del otro, pero que no forman un polígono regular estrellado.



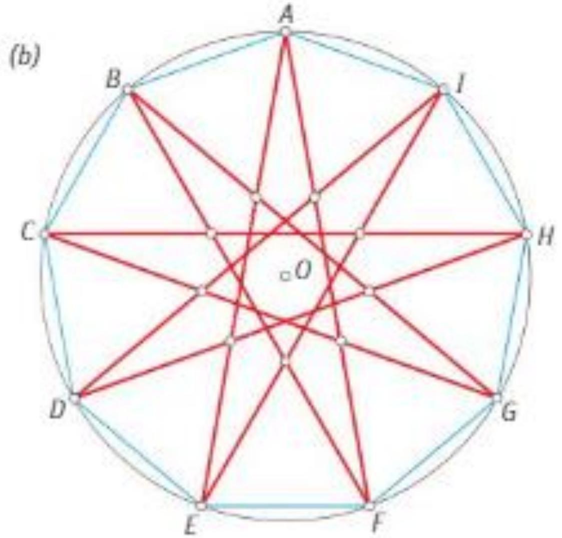


Figura 58

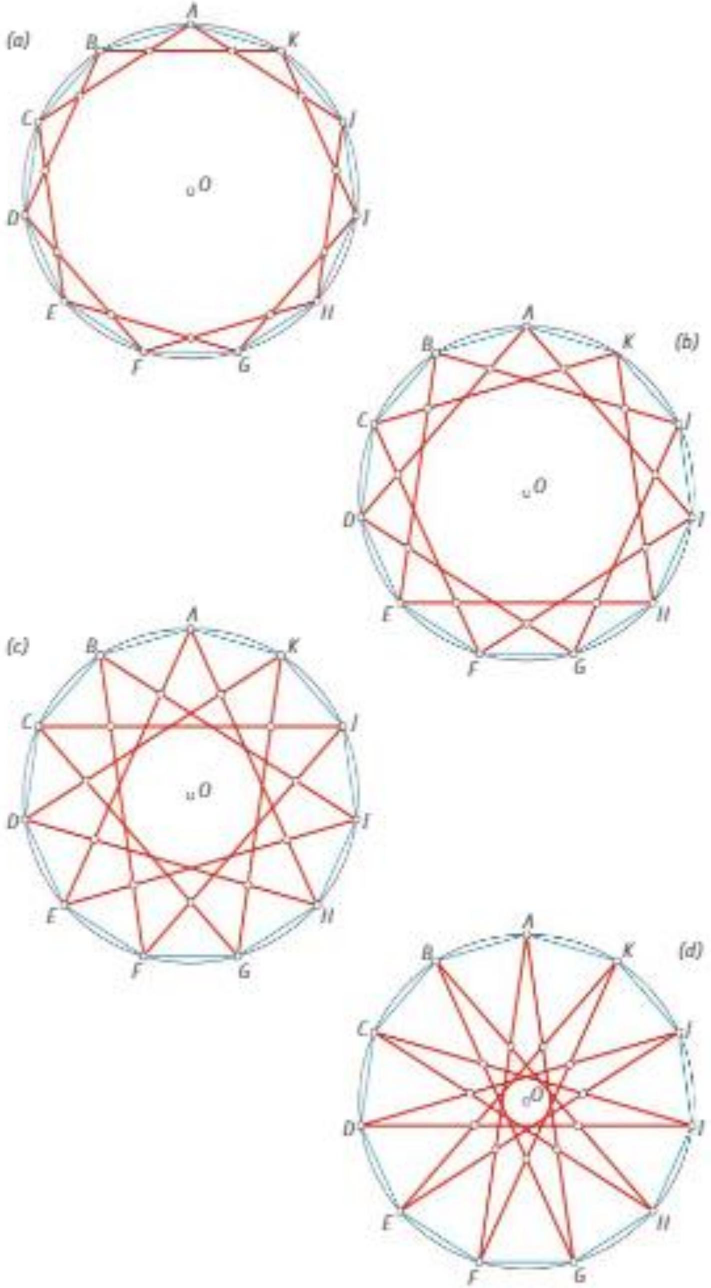
Cómo construir un undecágono regular estrellado

Existen cuatro polígonos regulares estrellados de once vértices, puesto que hay cuatro números menores de 5,5 (11/2) que son primos con 11: el 2, el 3, el 4 y el 5.

Dada la circunferencia de centro *O*:

1. Se divide la circunferencia en once partes iguales.
2. Se unen los vértices de dos en dos (fig. 59a), ya que un número primo con 11 es el 2.
3. Se unen los vértices de tres en tres (fig. 59b), pues otro número primo con 11 es el 3.
4. Se unen los vértices de cuatro en cuatro (fig. 59c), pues el cuatro es también número primo con 11.
5. Por último, se unen los vértices de cinco en cinco (fig. 59d), ya que el cinco es también primo con 11.

No hay más polígonos estrellados de once vértices, puesto que, aunque el número seis es también primo con once, es ya mayor de 5,5.



EJERCICIOS RESUELTOS

11 **Completa el triángulo *ABC*, del que se conocen la posición del lado *AB* y el ortocentro *O*.**

Solución:

1. Se unen los extremos *A* y *B* con el ortocentro *O* (fig. 62), punto donde se cortan las alturas de un triángulo.
2. Por el punto *A* se traza la perpendicular a la recta *OB* y por el punto *B* se traza la perpendicular a la recta *OA*. El vértice *C* es el punto en el que se cortan ambas rectas.

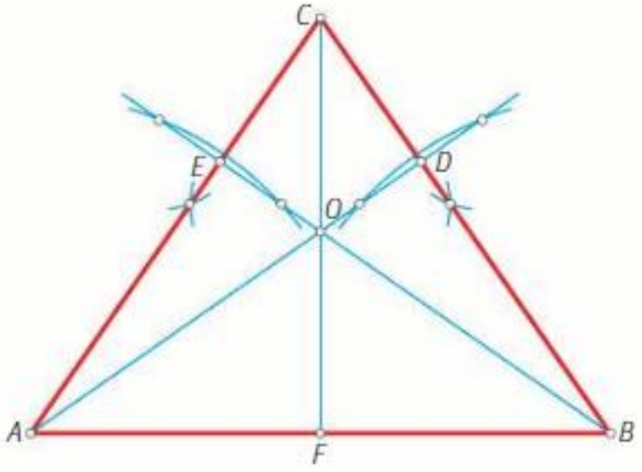
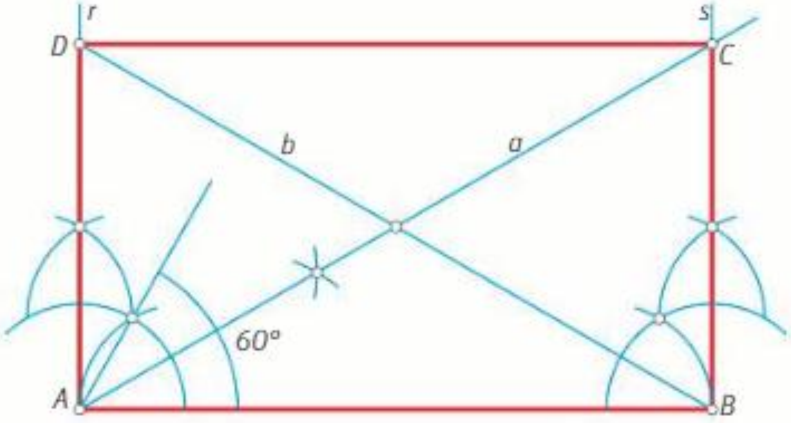


Figura 62

12 **Dibuja un rectángulo, conocidos el lado mayor, *AB* = 60 mm, y el ángulo que forman las diagonales, $\alpha = 60°$.**

Solución:

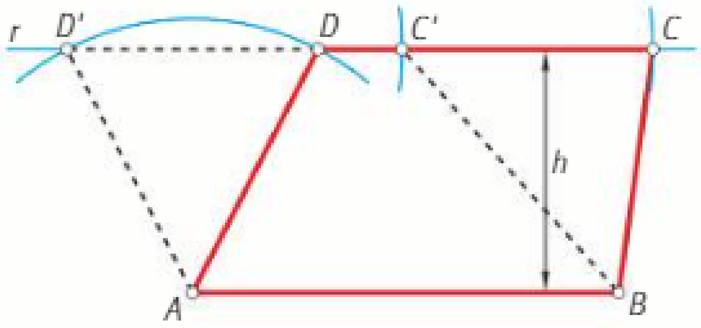
1. Por los extremos *A* y *B* se trazan sendas perpendiculares, *r* y *s*, al segmento *AB* (fig. 63).
2. Con vértice en *A* se dibuja el ángulo de 60° que forman las diagonales y se traza a continuación la bisectriz *a*, que corta a la recta *s* en el vértice *C*.
3. El vértice *D* se halla realizando la misma operación con el otro vértice *B* (recta *b*) o bien trazando por *C* una paralela al lado *AB* hasta cortar a la recta *r*.



13 Construye un trapecio, conocidas las bases AB = 70 mm y CD = 55 mm, el lado AD = 45 mm y la altura h = 40 mm. Dibuja todas las posibles soluciones.

Solución:

1. Se dibuja la recta r paralela al lado AB a la distancia de 40 mm (fig. 64).
2. Con centro en A se traza un arco de circunferencia de radio 45 mm, que corta a la recta r en los puntos D y D'.
3. Con centro en los puntos D y D' y radio 55 mm se trazan dos arcos, que cortan a la recta r en los puntos C y C'.
4. Los trapecios $ABCD$ y $ABC'D'$ son dos de las soluciones del ejercicio. Habría otras dos soluciones simétricas a las anteriores por debajo del lado AB.



(escala 1:2)

Figura 64

14 Dibuja la estrella representada (fig. 65), sabiendo que el radio de la circunferencia circunscrita vale 30 mm.

Figura 65

Solución:

1. Se divide la circunferencia exterior de 30 mm de radio en siete partes iguales (fig. 66).
2. Se unen los puntos de tres en tres: *A* con *F*, *F* con *J*, *J* con *E*, y así sucesivamente, hasta cerrar la construcción de nuevo en el punto *A*.

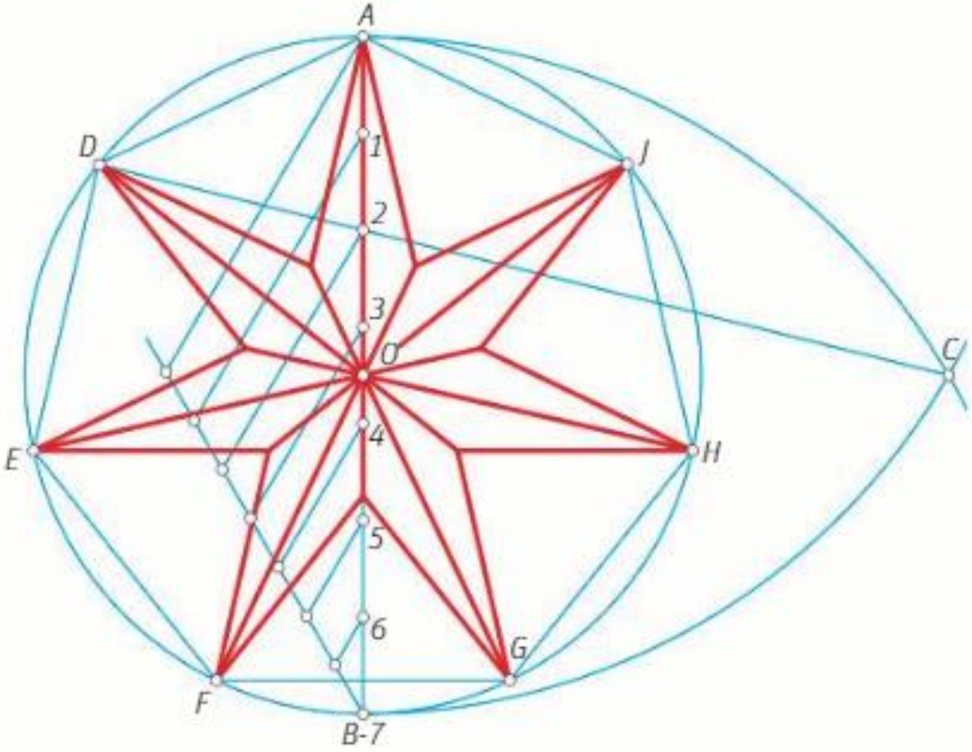


Figura 66

ACTIVIDADES

1. Dibuja un triángulo conociendo un lado, AB = 40 mm, la altura, h = 35 mm, y la mediana correspondiente a dicho lado, m = 40 mm.

2. Dibuja un triángulo isósceles inscrito en una circunferencia de radio 30 mm y cuya base mide 30 mm.

3. Dibuja un triángulo rectángulo tal que la altura y la mediana sobre la hipotenusa midan 25 mm y 30 mm, respectivamente.

4. Dibuja el paralelogramo $MNPQ$ cuyo perímetro mide 170 mm, la diagonal MP = 60 mm y la distancia entre dos lados opuestos, h = 30 mm.

5. Construye un romboide cuya base mida 35 mm, la altura sea 25 mm y uno de los ángulos valga 60°.

6. Dibuja un romboide sabiendo que sus lados miden 25 mm y 40 mm y una diagonal mide 50 mm.

7. Dibuja un trapecio del que se conocen el radio de la circunferencia circunscrita, R = 60 mm, un lado no paralelo, 60 mm, y la altura, 50 mm.

8. Dibuja un trapecio inscrito en una circunferencia de radio R = 35 mm, conociendo su diagonal, d = 65 mm, y una de sus bases, l = 60 mm.

9. Construye un trapezoide cuya base mida 50 mm, cuya altura sea 25 mm y cuyas diagonales midan 35 mm y 40 mm.

10. Dibuja un trapezoide cuyos lados midan AB = 55 mm, BC = 25 mm, CD = 35 mm y AD = 20 mm, y cuya diagonal mida BD = 55 mm.

11. Dibuja el octógono regular inscrito en un cuadrado cuya diagonal mide d = 80 mm.

12. Construye la figura $ABCDE$ con los siguientes datos:
    - **a)** En el triángulo BCD, CD = 70 mm, la altura sobre el lado BD vale h_{BD} = 55 mm y la altura sobre el lado CD vale h_{CD} = 60 mm.
    - **b)** En el triángulo ABD, AD = 100 mm y la mediana sobre el lado AD mide m_{AD} = 65 mm.
    - **c)** En el triángulo ADE, el ángulo $\hat{E}$ vale 90°, la altura sobre el lado AD vale h_{AD} = 30 mm y el lado DE es mayor que el lado AE.

13. Dibuja la pieza mecánica representada (fig. 67).

14. Dibuja el acoplamiento-trinquete que se representa (fig. 68).

15. La rosa de los vientos es un círculo que tiene marcados los 32 rumbos en que se divide. Dibuja la rosa de los vientos que se representa (fig. 69).

16. El fuste de las columnas jónicas de la arquitectura clásica tiene 24 canales a lo largo de toda su altura. Dibuja la sección horizontal (fig. 70) del fuste de una columna jónica de 60 mm de diámetro, sabiendo que el radio de cada canalillo mide 3,5 mm.

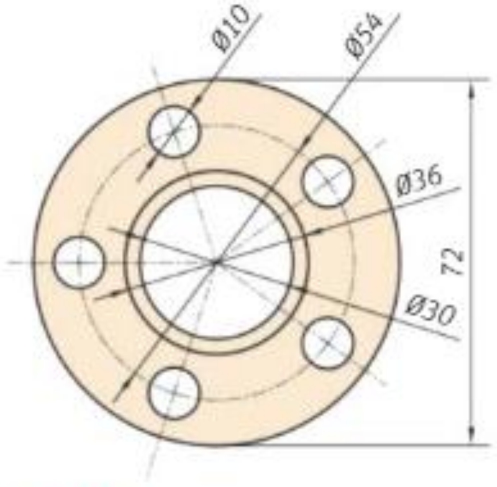


Figura 67

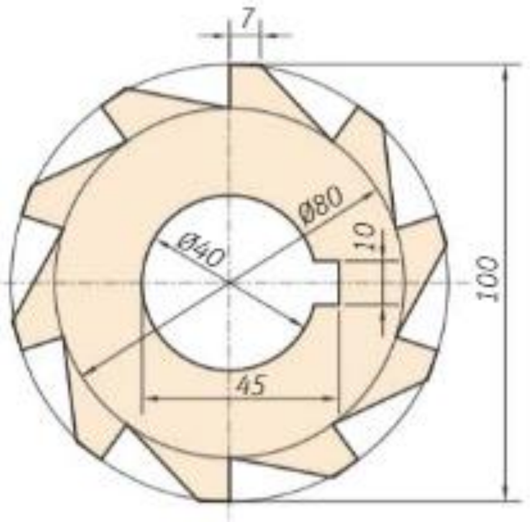


Figura 68

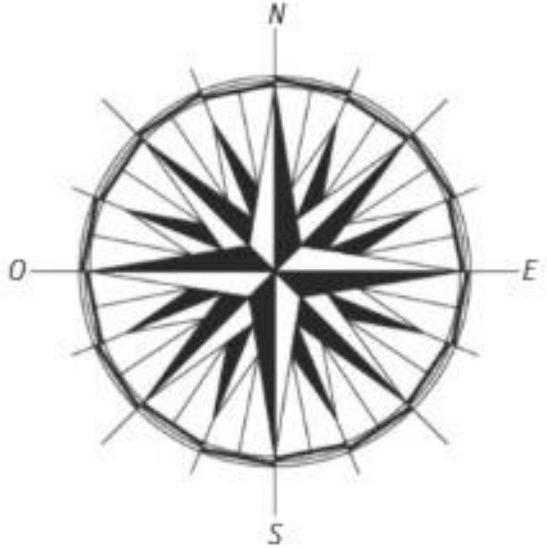


Figura 69

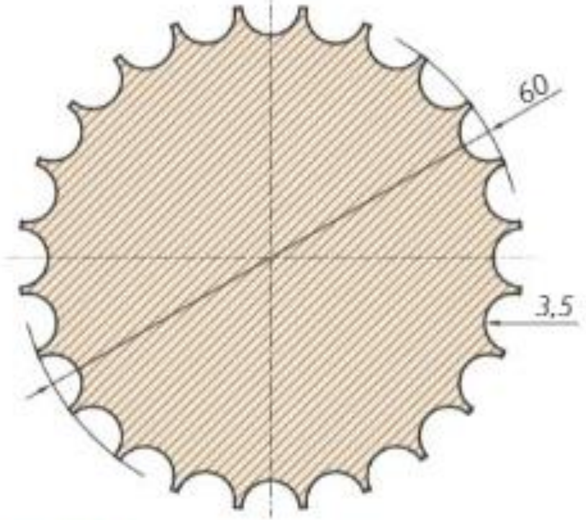


Figura 70

17. Dibuja el triángulo rectángulo *ABC* del que se conoce la mediana de la hipotenusa, BE = 38 mm, y la mediana del cateto, AD = 50 mm.

18. Dibuja el triángulo *ABC* del que se conocen los lados AB = 20 mm y AC = 30 mm y el ángulo del vértice *A*, $\hat{A}$ = 37°.

19. Dibuja el triángulo *ABC* del que se conocen los lados AC = 30 mm y BC = 20 mm y la altura correspondiente al vértice *A*, h_a = 15 mm.

20. Dibuja el triángulo *ABC* si se conocen los lados AB = 25 mm y BC = 20 mm y la mediana correspondiente al vértice *A* vale m_a = 20 mm.

21. Dibuja el triángulo *ABC* del que se conoce el ángulo del vértice *C*, $\hat{C}$ = 60°, la altura correspondiente al vértice *B*, h_b = 25 mm y la mediana del vértice *A*, m_a = 30 mm.

22. Dibuja el triángulo *ABC* del que se conocen los ángulos de los vértices *B* y *C*, $\hat{B}$ = 45° y $\hat{C}$ = 60°, y la altura correspondiente al vértice *C*, h_c = 20 mm.

23. Dibuja el triángulo órtico del triángulo *ABC*, siendo AB = 65 mm, BC = 40 mm y AC = 35 mm.

24. Dibuja el rectángulo cuya suma de lados vale 60 mm, sabiendo que el ángulo que forman sus diagonales es de 120°.

25. Construye el octógono regular cuya distancia entre lados opuestos es de 50 mm.

26. Construye un octógono regular de manera que cuatro de sus lados estén situados en los lados de un cuadrado de 50 mm de lado.

27. Dibuja el hexágono regular cuya apotema vale 25 mm.

28. Dibuja el pentágono regular cuya apotema mide 35 mm.

29. Dibuja la pieza mecánica representada (fig. 71) sabiendo que las cotas vienen expresadas en milímetros.

30. Dibuja la planta y el alzado de la tuerca que se representa (fig. 72), teniendo en cuenta que *d* = 35 mm.

31. Dibuja todos los posibles dodecágonos regulares estrellados de radio 30 mm.

32. Dibuja el octógono regular estrellado cuya distancia entre dos vértices consecutivos vale 20 mm.

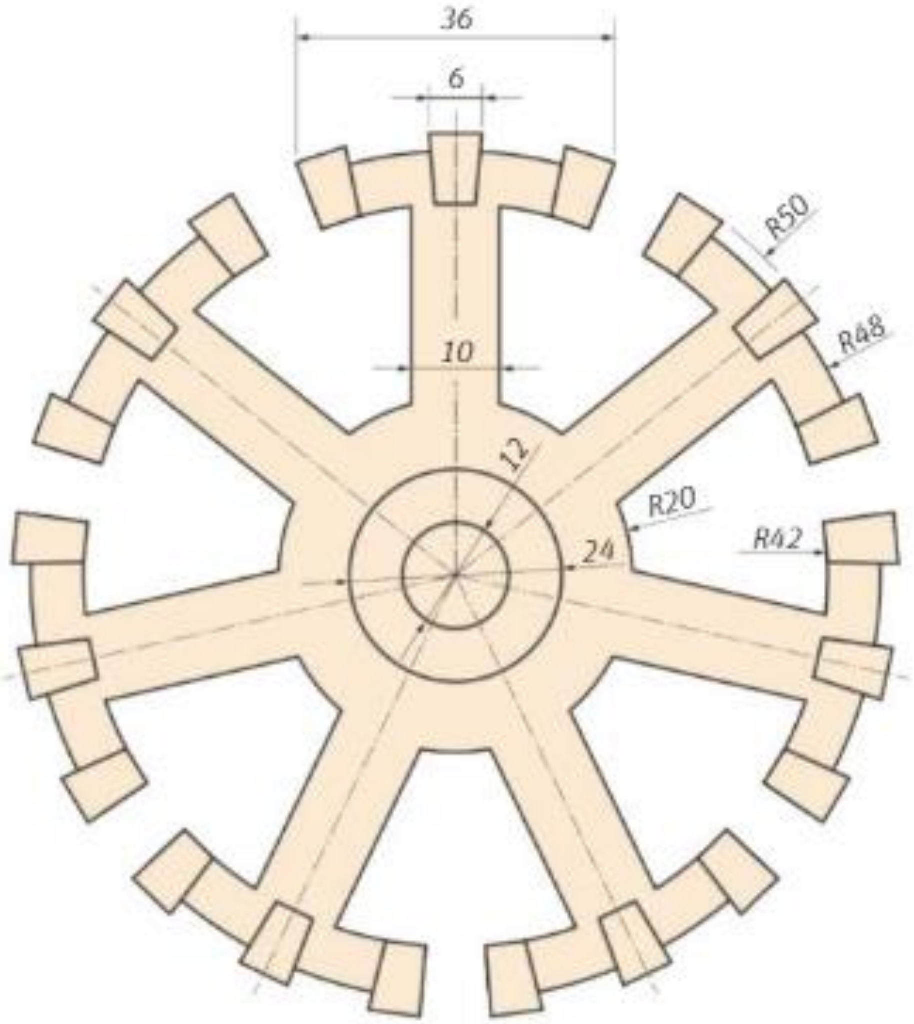


Figura 71

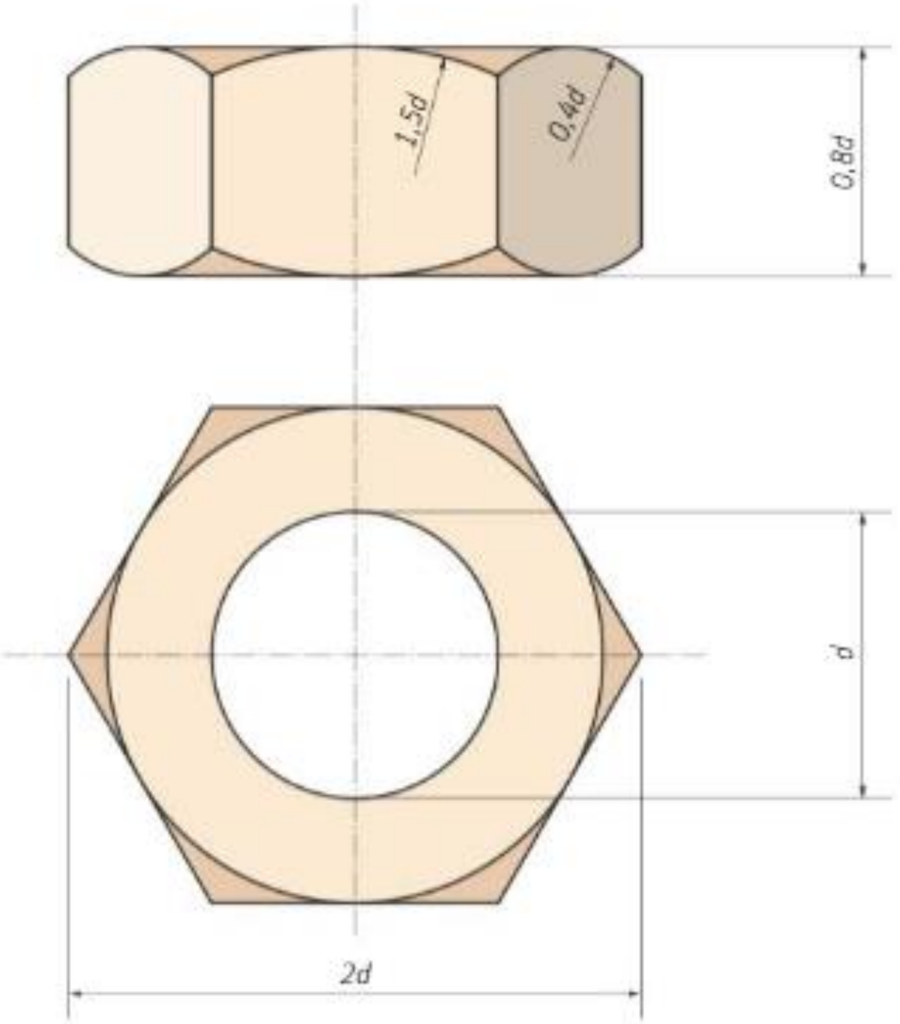


Figura 72