3 Proporcionalidad, semejanza y escalas

Según el diccionario, se entiende por proporcionalidad la conformidad o proporción de las partes de una cosa con el todo o de cosas relacionadas entre sí.

La igualdad, la semejanza y las escalas son casos de proporcionalidad. Por ejemplo, los monumentos de la fotografía son representaciones a escala de los correspondientes monumentos reales.

1 Proporcionalidad y sección áurea

Se llama **proporción** a la relación o correspondencia que hay entre dos magnitudes.

1.1. Media proporcional entre dos segmentos

Sean los segmentos $a = AB$ y $b = CD$. La media proporcional x a los segmentos a y b se expresa así:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$$

Cómo construir la media proporcional

1. Sobre una recta r (fig. 1) se trasladan los segmentos $AB = a$ y $CD = b$ y, con centro en E, punto medio de AD, se traza la semicircunferencia de diámetro AD.
2. La perpendicular a la recta r trazada por B-C corta a la circunferencia en el punto F. El segmento $x = BF$ es la media proporcional entre AB y CD.

Teorema de la altura. En todo triángulo rectángulo la altura sobre la hipotenusa es media proporcional entre los segmentos en que queda dividida la hipotenusa.

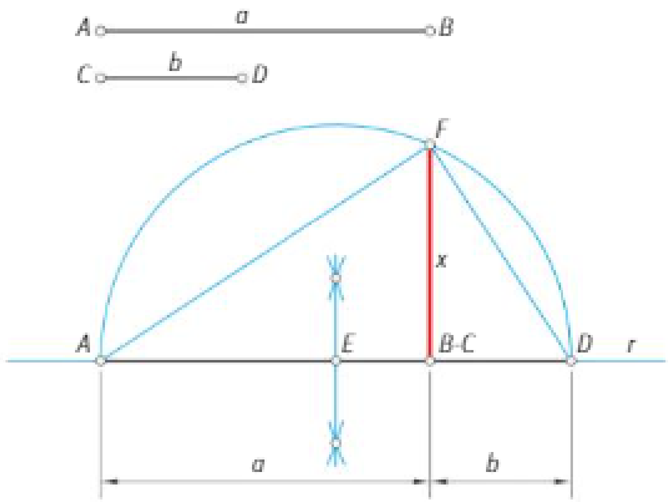

Figura 1

1.2. Teorema del cateto

Teorema del cateto. En todo triángulo rectángulo un cateto es media proporcional entre la hipotenusa y la proyección de dicho cateto sobre ella.

Sean los segmentos $a = AB$ y $b = CD$ (fig. 2):

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$$

Cómo representar gráficamente el teorema del cateto

1. Sobre una recta *r* se trasladan, a partir de un mismo punto *A-C*, los segmentos $AB = a$ y $CD = b$, y se dibuja la semicircunferencia de diámetro *AB*, el mayor de los dos segmentos.
2. Por el punto *D* se traza la perpendicular a la recta *r* hasta cortar a la semicircunferencia en el punto *F*. El segmento $x = AF$ es la media proporcional entre los dos segmentos dados.

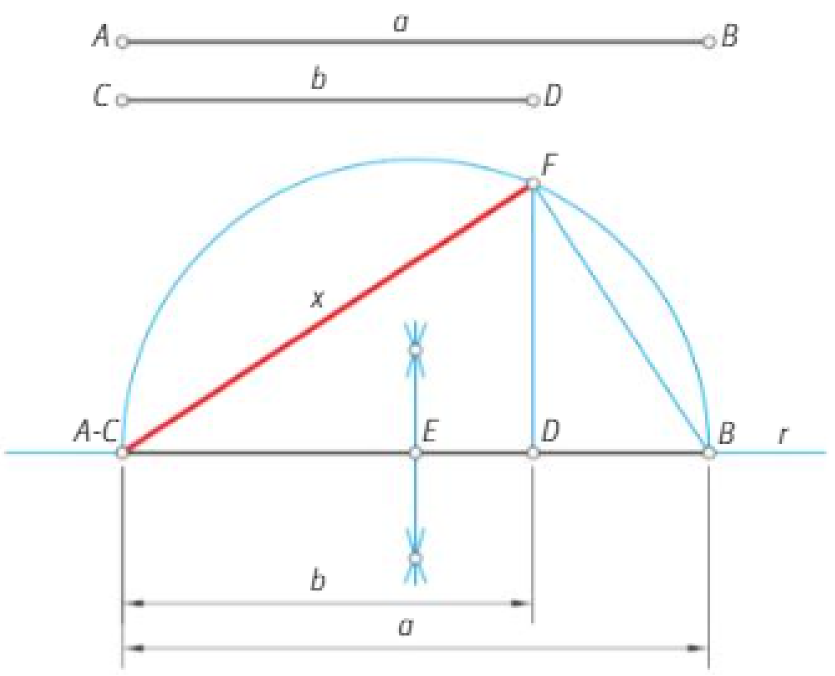

Figura 2

1.3. Teorema de Tales

El teorema de Tales, llamado así en memoria de Tales de Mileto (624-548 a. C.), es la base del estudio de la proporcionalidad:

> **Teorema del Tales**. Si dos rectas *r* y *s* son cortadas por rectas paralelas, estas determinan en *r* y *s* segmentos proporcionales.

$$\frac{AB}{AE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CD}{FG} = \frac{BD}{EG} = \dots$$ (fig. 3)

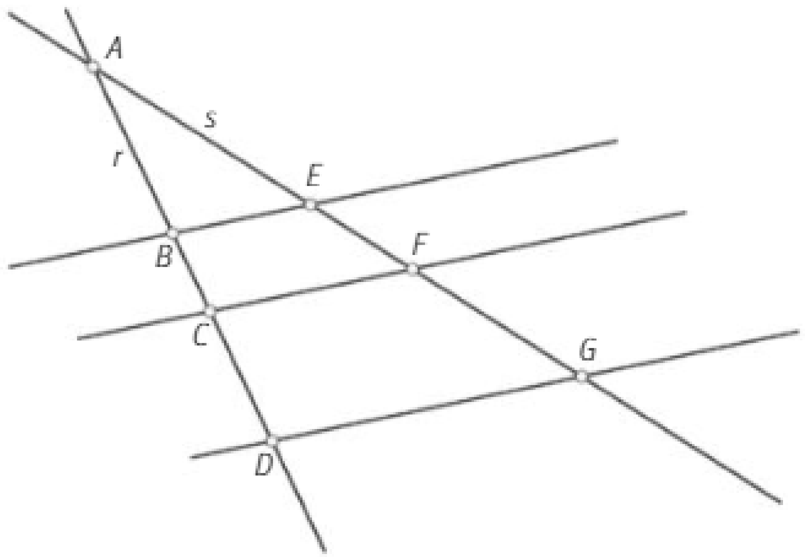

Figura 3

1.4. Tercera proporcional entre dos segmentos

Sean los segmentos $a = AB$ y $b = CD$. La **tercera proporcional** x a dos segmentos a y b se expresa así:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{x}$$

Cómo construir la tercera proporcional a dos segmentos dados

1. Se trazan dos rectas r y s que se corten (fig. 4). A partir del punto A de intersección, se lleva AB sobre la recta r y CD sobre la recta s.
2. Con centro en A y radio AD se describe un arco que corta a la recta r en el punto E.
3. Por el punto E se traza la recta paralela a BD que corta a la recta s en el punto F. El segmento $AF = x$ es la tercera proporcional.

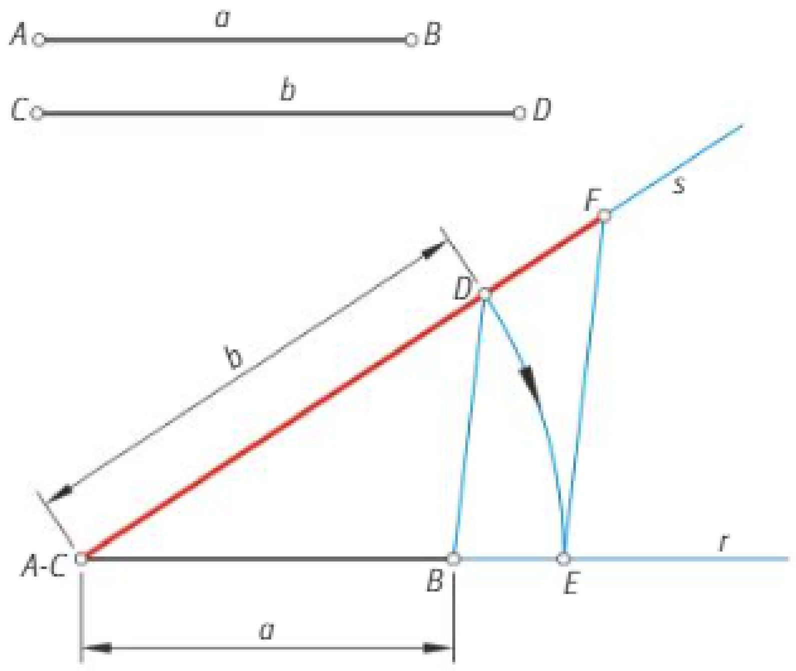

Figura 4

1.5. Cuarta proporcional a tres segmentos

Sean los segmentos $a = AB$, $b = CD$ y $c = EF$. La **cuarta proporcional** x a tres segmentos a, b y c se expresa así:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$$

Cómo construir la cuarta proporcional a tres segmentos dados

1. Se trazan dos rectas r y s que se corten (fig. 5). A partir del punto A de intersección, se lleva AB sobre la recta r y CD sobre la recta s. Sobre la recta r y a continuación del segmento AB, se lleva el segmento EF.
2. Por el punto F se traza la recta paralela a BD que corta a la recta s en el punto G. El segmento $DG = x$ es la cuarta proporcional.

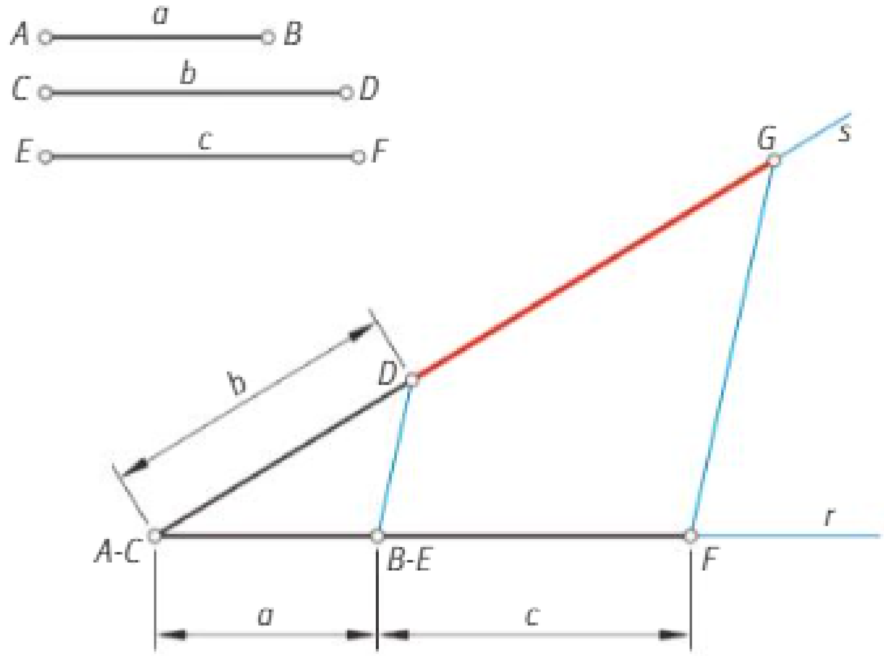

Figura 5

EJERCICIOS RESUELTOS

1 Dado el triángulo equilátero *OAB* de lado 20 mm y la circunferencia de centro *O* que pasa por *A* y *B*, dibuja una cuerda en la circunferencia de modo que quede dividida en tres partes iguales por los radios *OA* y *OB*.

EJERCICIOS RESUELTOS

1 Dado el triángulo equilátero *OAB* de lado 20 mm y la circunferencia de centro *O* que pasa por *A* y *B*, dibuja una cuerda en la circunferencia de modo que quede dividida en tres partes iguales por los radios *OA* y *OB*.

Solución:

1. Sobre las prolongaciones de la cuerda *AB* (fig. 6) se trasladan las magnitudes *AC* = *BD* = *AB*.
2. Las rectas que unen los puntos *C* y *D* con el centro *O* cortan a la circunferencia en *E* y *F*.
3. La cuerda *EF* queda dividida en tres partes iguales por los radios *OA* y *OB*.

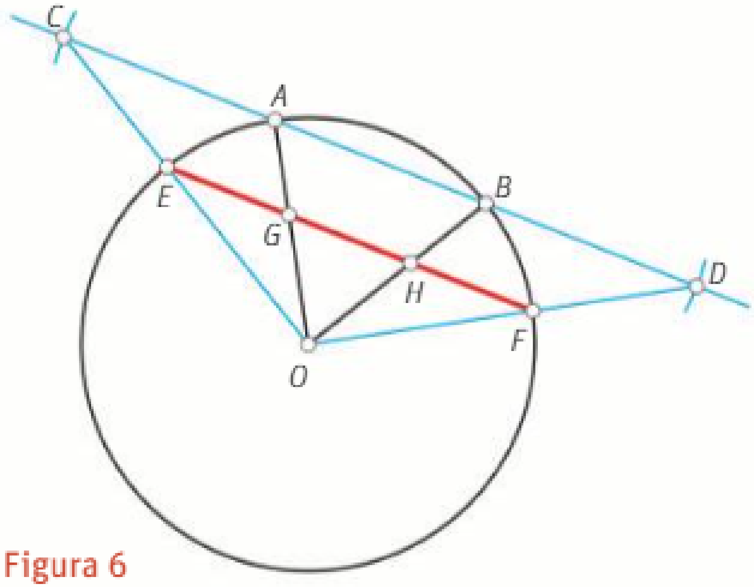

Figura 6

2 Dado el segmento a = 39 mm, halla el segmento b de manera que a/b = 16 mm.

2 Dado el segmento a = 39 mm, halla el segmento b de manera que a/b = 16 mm.

Solución:

1. Se trazan dos rectas r y s cualesquiera (fig. 7).
2. Sobre la recta r se trasladan los siguientes segmentos: $AB = a/b = 16$ y $BC = a = 39$, y sobre la recta s se traslada el segmento AD = 10 mm.
3. Se unen los puntos B y D y por el punto C se traza la paralela CE a la recta BD. El segmento $DE = b$ es el resultado.

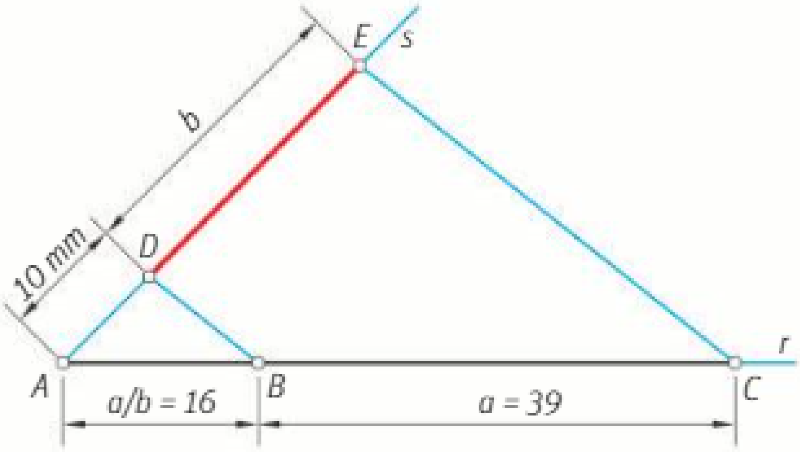

Figura 7

1.6. Sección áurea de un segmento

Se denomina **sección áurea** de un segmento *AC* (fig. 8) a la división que le produce un punto *B* de tal forma que la proporción que existe entre la parte más pequeña y la parte más grande es la misma que hay entre la parte más grande y el todo. Es decir:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a+b} = \frac{1}{\mu} \text{ (siendo } \mu = 1{,}6180\ldots\text{)}$$

Cómo hallar la división áurea de un segmento dado

Dado el segmento *AB* (fig. 9):

1. Por el extremo *B* se traza la recta *r* perpendicular.
2. Se halla el punto medio *C* del segmento *AB* trazando su mediatriz y, con centro en *B* y radio *BC*, se describe un arco hasta cortar a *r* en el punto *D*. Se une *D* con el extremo *A* y, con centro en *D* y radio *DB*, se describe un arco hasta cortar a la recta *AD* en el punto *E*.
3. Con centro en *A* y radio *AE* se traza otro arco que corta al segmento *AB* en *F*. El segmento *AF* es la división áurea de *AB*.

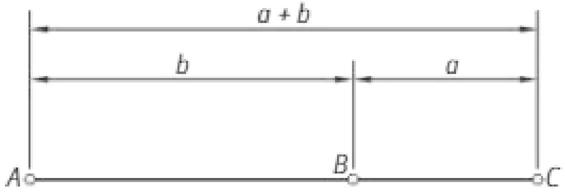

Figura 8

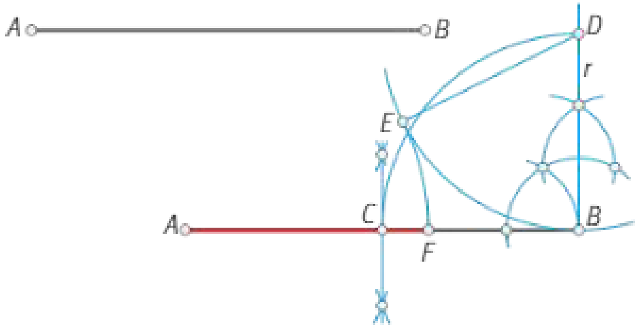

Figura 9

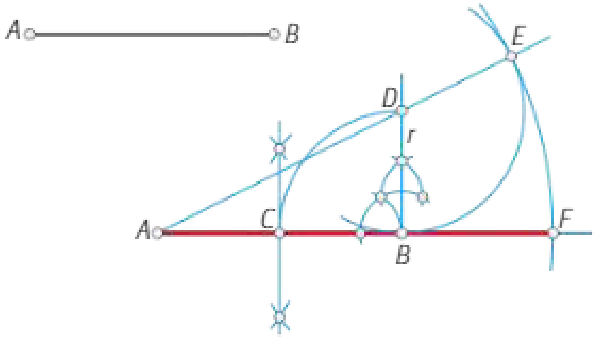

Figura 10

Cómo hallar el segmento cuya división áurea es otro segmento dado

Dado el segmento *AB* (fig. 10):

1. Por el extremo *B* se traza la recta *r* perpendicular.
2. Se halla el punto medio *C* del segmento *AB* trazando su mediatriz y, con centro en *B* y radio *BC*, se describe un arco hasta cortar a *r* en el punto *D*. Se une *D* con el extremo *A* y, con centro en *D* y radio *DB*, se describe un arco hasta cortar a la prolongación de la recta *AD* en el punto *E*.
3. Con centro en *A* y radio *AE* se traza otro arco que corta a la prolongación de *AB* en *F*. La parte áurea de *AF* es *AB*.

Cómo dibujar un rectángulo áureo

Se denomina **rectángulo áureo** a aquel cuyos lados están relacionados según la proporción áurea. Dado el lado *AB* (fig. 11):

1. Por el extremo *B* se traza una recta *r* perpendicular al segmento *AB* y se traslada sobre ella el segmento *BD* = *AB*/2.
2. Con centro en *D* y radio *DB* se describe un arco que corta a la recta *AD* en *E*. El segmento *AE* es el otro lado del rectángulo.

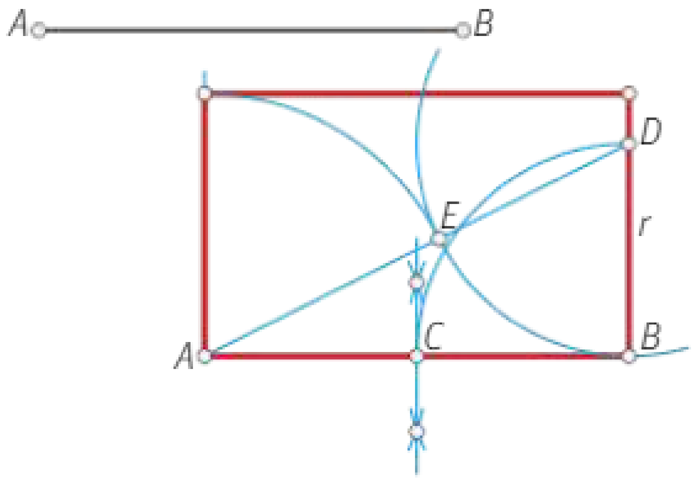

Figura 11

La proporción áurea, el pentágono regular y el pentágono estrellado

En un pentágono regular *ABCDE* (fig. 12) se observa la proporción áurea en las siguientes relaciones:

$$\frac{d}{l} = \mu \qquad \frac{h}{a} = \mu$$

En un pentágono regular estrellado *ABCDE* (fig. 13), la proporción áurea se aprecia entre los siguientes lados interiores y exteriores:

$$\frac{EF}{FG} = \mu$$

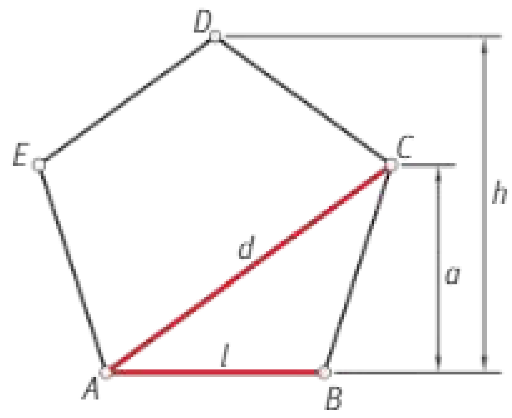

Figura 12

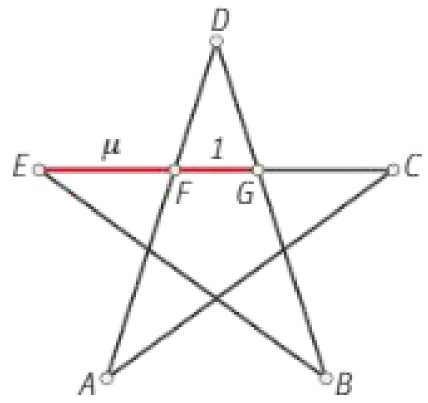

Figura 13

2 Igualdad

De forma genérica, dos elementos son iguales si tienen el mismo valor. El concepto de igualdad geométrica es equivalente al de igualdad matemática, por ejemplo: 3 + 2 = 5.

Dos figuras son **iguales** (fig. 14) cuando sus lados y sus ángulos son iguales y, además, están en el mismo orden.

Figura 14

Cómo construir una figura igual a otra por copia de ángulos

Dado el polígono *ABCDE* (fig. 15):

1. Sobre una recta *r* cualquiera se toma un segmento *A'B'* = *AB*.
2. Con centro en el vértice *B'* se traza un ángulo igual al del vértice *B*, del siguiente modo:
   - Con centro en *B* se dibuja un arco que corta a los lados del ángulo en los puntos *F* y *G*; con centro en *B'* se dibuja otro arco del mismo radio que el anterior;
   - Con radio *FG* y centro en *F'* se traza un arco que corta al último en el punto *G'*; uniendo el punto *G'* con *B'* se obtiene el ángulo buscado.
3. Sobre el lado obtenido en el punto anterior se toma el segmento *B'C'* = *BC*.
4. Con centro en el punto *C'* se dibuja un ángulo igual al del vértice *C*, repitiendo la operación 2. De este modo se van construyendo sucesivamente los lados y los ángulos hasta cerrar el polígono.

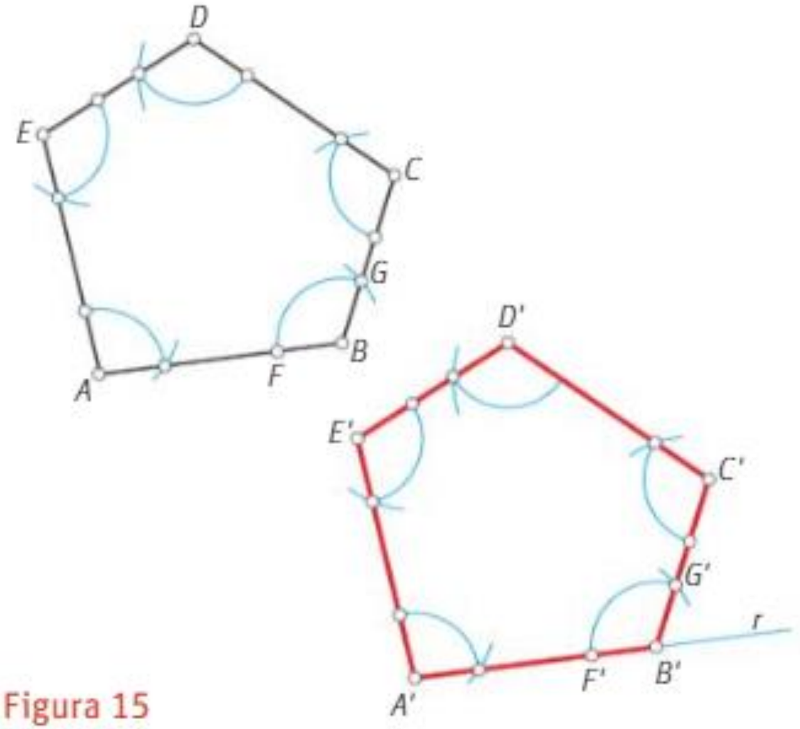

Figura 15

Cómo construir una figura igual a otra por coordenadas

Dado el polígono *ABCDE* (fig. 16):

1. Se dibujan dos ejes coordenados *X* e *Y* cualesquiera.
2. Se proyectan todos los vértices de la figura sobre el eje *X* (puntos A_x, B_x, C_x, etc.) y sobre el eje *Y* (puntos A_y, B_y, C_y, etc.).
3. Sobre dos nuevos ejes coordenados cualesquiera *X'* e *Y'* se llevan, desde el origen, las distancias $O'A'_x = OA_x$, $O'B'_x = OB_x$, $O'C'_x = OC_x$, etc., sobre el eje *X'*, y $O'A'_y = OA_y$, $O'B'_y = OB_y$, $O'C'_y = OC_y$, etc., sobre el eje *Y'*.
4. Por los puntos hallados anteriormente se trazan perpendiculares a los ejes respectivos *X'* e *Y'*, de forma que los puntos de intersección son los vértices del nuevo polígono *A'B'C'D'E'*.

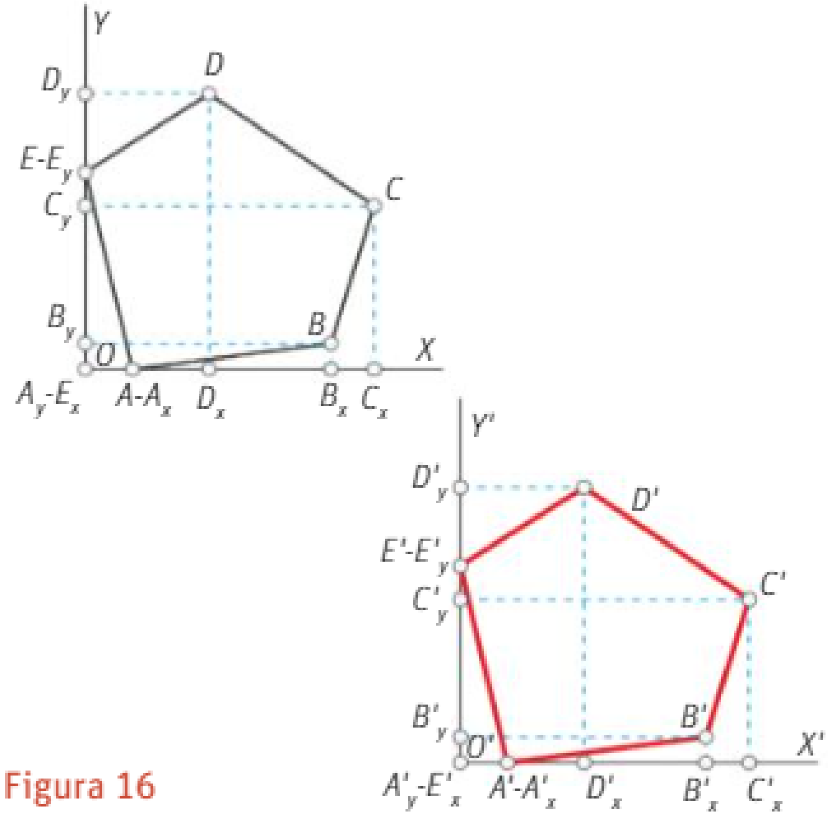

Figura 16

Cómo construir una figura igual a otra por radiación

Dado el polígono *ABCDE* (fig. 17):

1. Se elige un punto *O* cualquiera, dentro o fuera del polígono, y se une a continuación con todos y cada uno de los vértices.
2. Con centro en el punto *O* y radio arbitrario se traza una circunferencia cualquiera, y con centro en otro punto exterior *O'* se traza otra circunferencia de radio igual a la anterior.
3. Por copia de ángulos se van trazando todas las rectas que parten del punto *O'*. Sobre cada uno de los rayos se llevan las distancias $O'A' = OA$, $O'B' = OB$, $O'C' = OC$, etc.

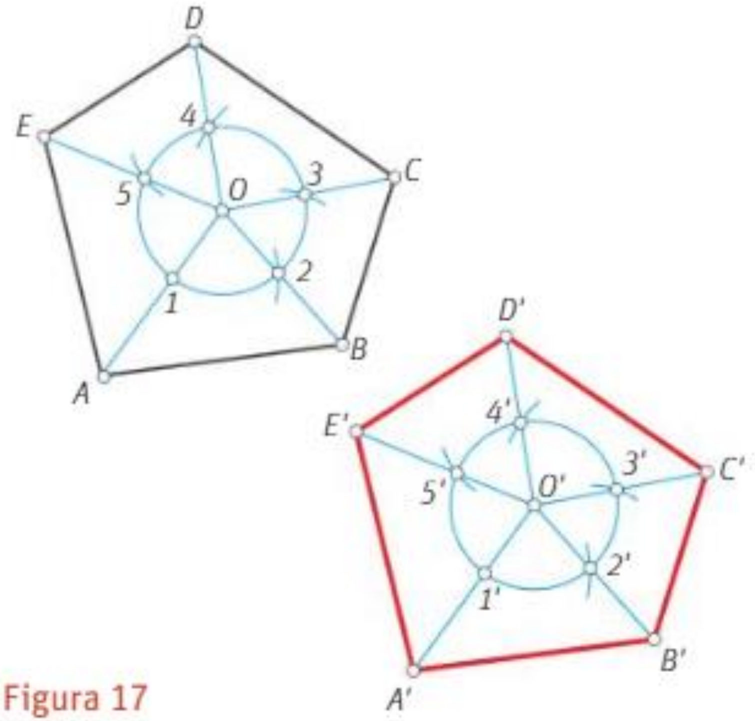

Figura 17

Cómo construir una figura igual a otra por triangulación

Este método es similar al anterior, salvo que en vez de elegir un punto cualquiera, se elige uno de los vértices del polígono *ABCDE* (fig. 18).

1. Se une un vértice, por ejemplo el *A*, con todos los demás vértices.
2. Por copia de triángulos se van construyendo los triángulos *A'B'C'*, *A'C'D'* y *A'D'E'*, iguales a los triángulos *ABC*, *ACD* y *ADE* del polígono dado.

También se puede trazar una circunferencia de radio arbitrario con centro en *A* y, a continuación, aplicar el procedimiento anterior, por radiación.

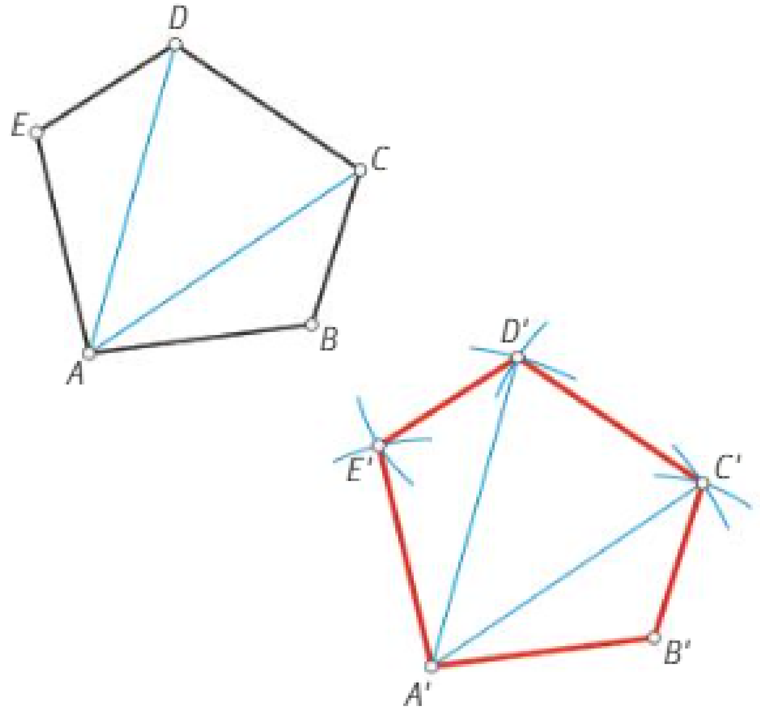

Figura 18

EJERCICIOS RESUELTOS

3 Dibuja un triángulo isósceles cuya base de 30 mm es la parte áurea del otro lado.

Solución:

1. Se traza la mediatriz de la base *AB* = 30 mm para determinar su punto medio *C* y, a continuación, se traza la perpendicular por el extremo *B* (fig. 19).
2. Con centro en *B* se traza un arco que pasa por *C* y corta a la perpendicular en el punto *D*.
3. Con centro en *D* y radio *DB* se traza otro arco que corta a la prolongación de la recta *AD* en el punto *E*.
4. El segmento *AE* es el otro lado del triángulo isósceles. Por tanto, con radio *AE* y centros en *A* y en *B* se trazan dos arcos que se cortan en el punto *F*, que será el tercer vértice del triángulo.

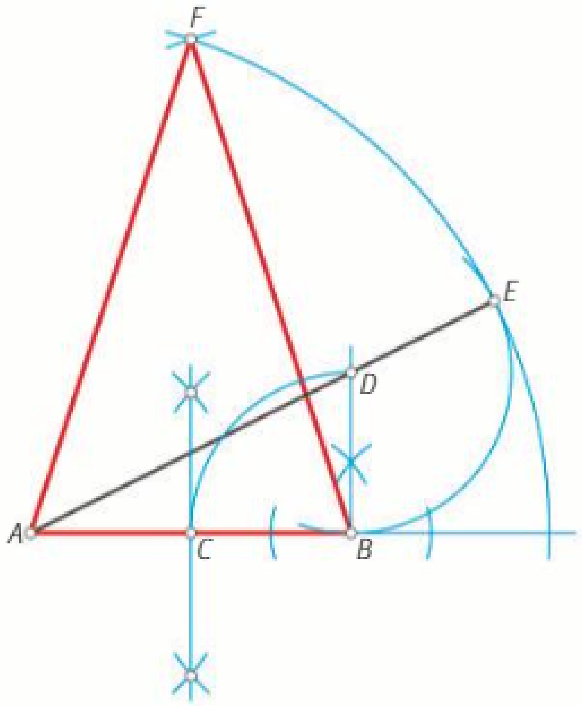

Figura 19

4 **Dada la pajarita y un punto *O* exterior a ella (fig. 20), construye por triangulación una figura igual conociendo el punto *O'* donde debe estar situada.**

Solución:

1. Se une el punto *O* con todos y cada uno de los vértices de la figura, trazando también por *D* una recta horizontal y por *O* una recta vertical que se cortan en el punto *M*.
2. Por el punto *O'* se traza la recta *O'M'* = *OM* (fig. 20) y por el punto *M'* se traza la recta horizontal *r* sobre la que se marcan los puntos *D'* y *E'* a partir del centro *O'*.
3. Por triangulación se construyen los triángulos *O'E'C'* y *O'C'A'*.
4. Con centro en *O'* se van trasladando las distancias *O'F'* y *O'G'* sobre la recta *E'C'*, *O'B'* sobre la recta *A'C'* y *O'J'* sobre la recta *A'E'*.

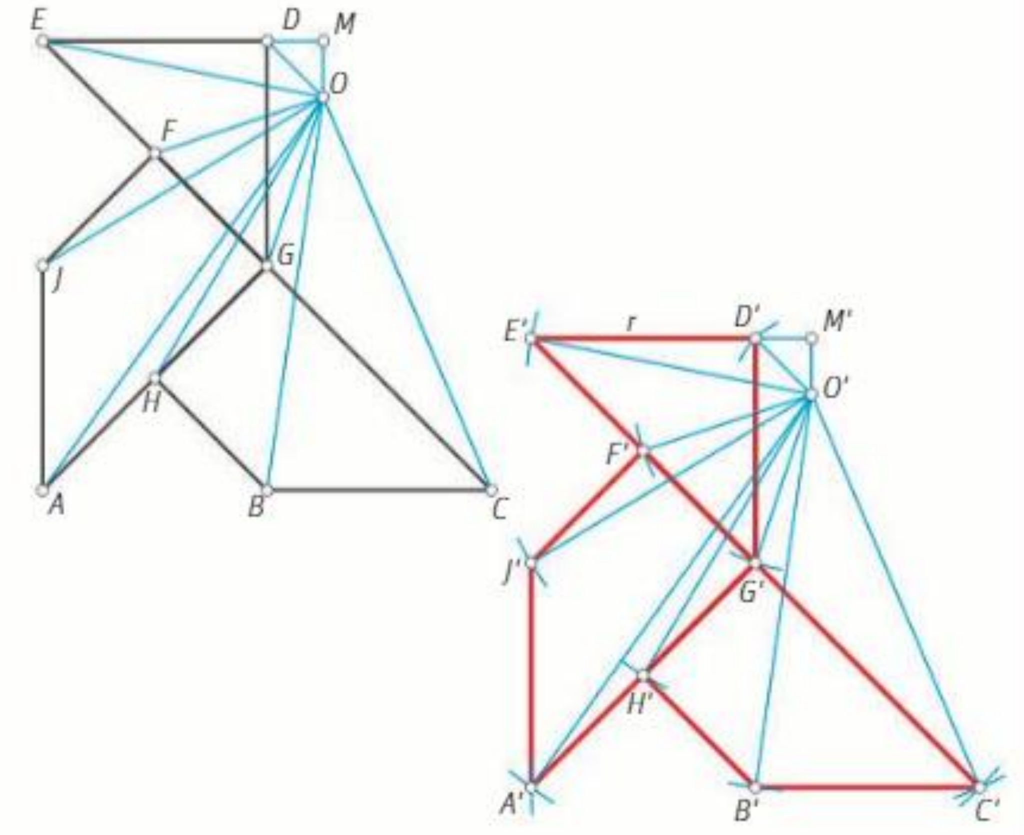

Figura 20

3 Semejanza

Dos figuras son **semejantes** cuando tienen sus ángulos iguales y sus lados proporcionales (fig. 21).

La proporcionalidad entre los lados, es decir, el cociente entre las magnitudes homólogas, se denomina **razón de semejanza**.

Figura 21

Cómo construir una figura directamente semejante a otra a partir de la razón de semejanza (por radiación)

Dado el polígono *ABCDE* (fig. 22), supongamos que la razón de semejanza es 2/3:

1. Se toma un punto arbitrario *O* y se une con todos los vértices del polígono dado. Uno de los segmentos así hallados, por ejemplo *OA*, se divide en tantas partes como indique el denominador de la razón de semejanza, en nuestro caso 3, y a partir del punto *O* se toman tantas partes como indique el numerador. El punto así hallado, *A'*, es el punto homólogo del *A*.
2. Por el punto *A'* se traza la paralela a la recta *AB* hasta cortar a la recta *OB* en el punto *B'*. Por el punto *B'* se traza la paralela a la recta *BC* hasta cortar a la recta *OC* en el punto *C'*, y así sucesivamente hasta cerrar el polígono.

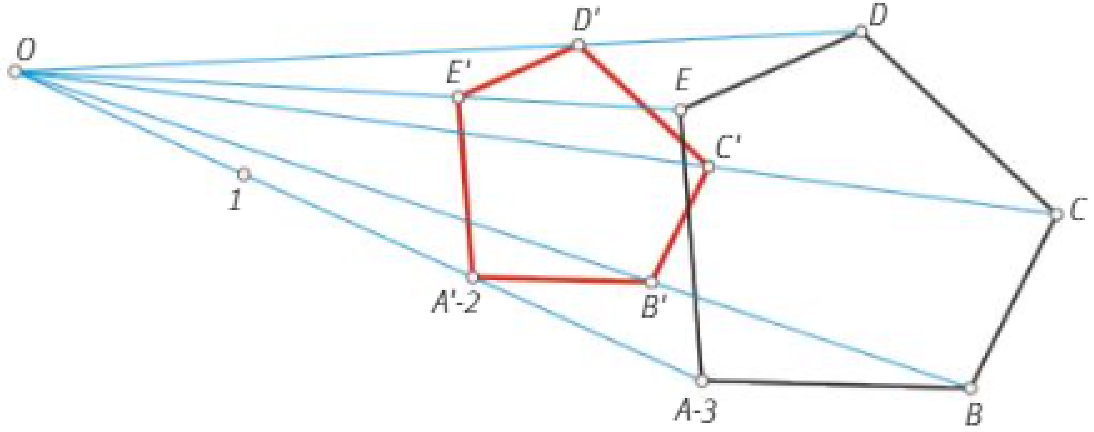

Figura 22

Cómo construir una figura directamente semejante a otra a partir de la razón de semejanza (por coordenadas)

Dado el polígono *ABCDE* (fig. 23), supongamos que la razón de semejanza es, como en el caso anterior, 2/3:

1. Se dibujan dos ejes coordenados *X* e *Y* cualesquiera y se proyectan los vértices de la figura sobre el eje *X* (puntos A_x, B_x, C_x, etc.) y sobre el eje *Y* (puntos A_y, B_y, C_y, etc.).
2. Sobre dos nuevos ejes coordenados *X'* e *Y'* se llevan, a partir de *O'*, las distancias $O'A'_x = (2/3)(OA_x)$, $O'B'_x = (2/3)(OB_x)$, $O'C'_x = (2/3)(OC_x)$, etc., sobre el eje *X'*, y $O'A'_y = (2/3)(OA_y)$, $O'B'_y = (2/3)(OB_y)$, etc., sobre el eje *Y'*.
3. Por los puntos hallados anteriormente se trazan perpendiculares a los ejes *X'* e *Y'*. Los puntos de intersección son los vértices del polígono *A'B'C'D'E'*, semejante al dado.

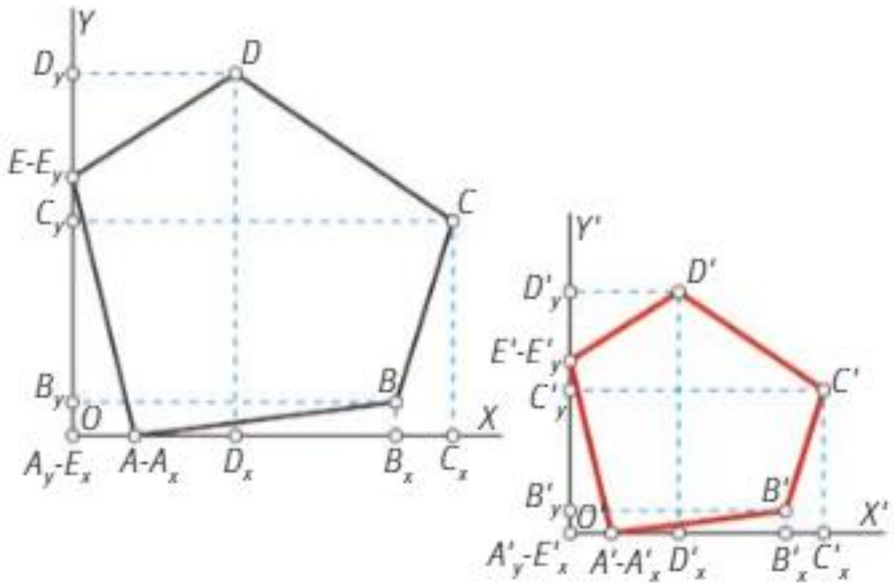

Figura 23

Cómo construir una figura inversamente semejante a otra

En este caso la razón de semejanza es negativa. Se actúa también "por radiación", salvo que las partes que indica el numerador se toman en sentido contrario a las partes del denominador (fig. 24).

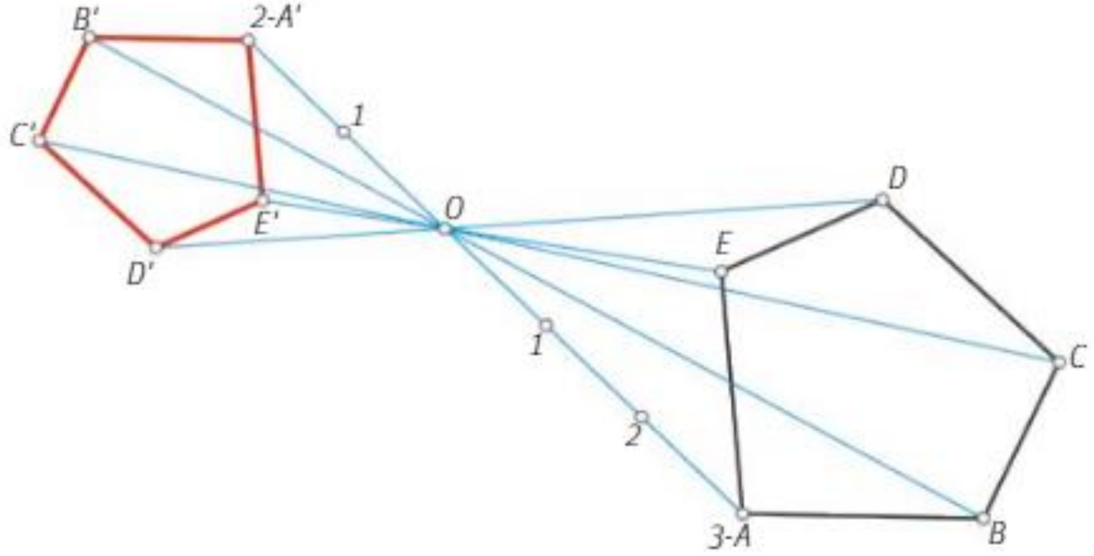

Figura 24

EJERCICIOS RESUELTOS

5 Construye un polígono de lados proporcionales al heptágono regular dado y cuyo lado *A'B'* mida 18 mm.

Solución:

1. Se sitúa *A'B'* paralelo al lado *AB* (fig. 25). Las rectas que unen los puntos *A* con *A'* y *B* con *B'* se cortan en el punto *P*, centro de semejanza.
2. La mediatriz del lado *A'B'* se corta con la recta *PO* en *O'*. Con centro en *O'* y radio *O'A'* se traza la circunferencia que contiene al heptágono regular pedido.

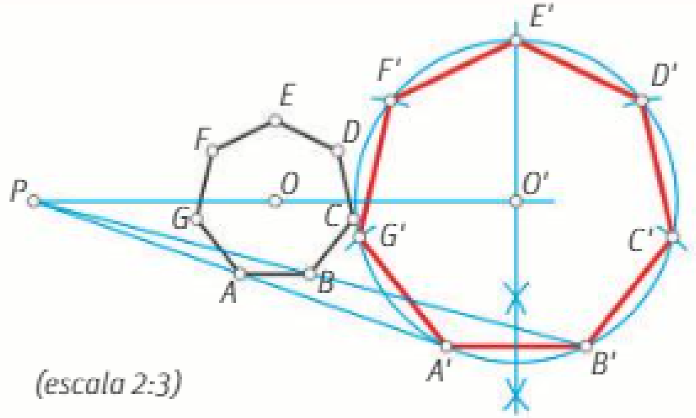

Figura 25

4 Escalas

Las escalas pueden considerarse como la aplicación práctica de la semejanza. Su uso se hace indispensable para la representación en un papel de figuras de mayor tamaño (fig. 26).

Escala es la relación que existe entre dos figuras, la figura del dibujo y la figura real. Igual que en la semejanza, esta relación se representa mediante un cociente. El numerador representa la medida del dibujo y el denominador, la medida en la realidad.

$$\text{escala} = \frac{\text{dibujo}}{\text{realidad}}$$

Por ejemplo, supongamos que la dimensión real de un objeto mide 1475 mm y sobre el papel la vamos a representar como 55 mm; esto significa que hemos aplicado una escala $E = 55/1475$ o, simplificando, $E = 1/25$.

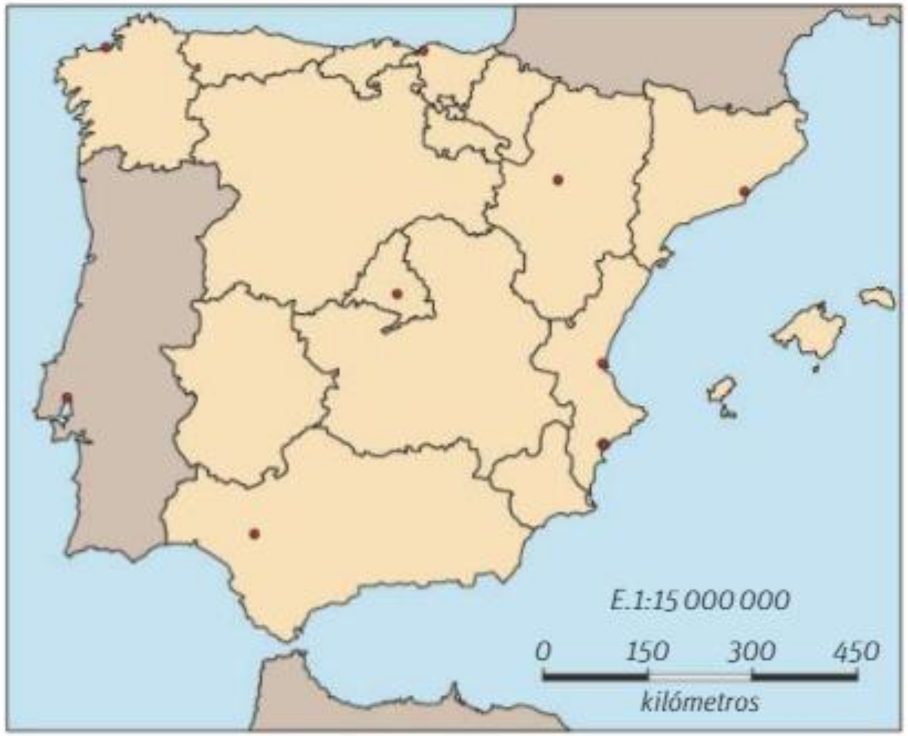

Figura 26

Las escalas pueden ser de tres tipos:

- De **reducción**: reducen el objeto real al dibujarlo (el numerador es menor que el denominador).
- De **ampliación**: aumentan el objeto real (el numerador es mayor que el denominador).
- De **tamaño natural**: el dibujo y el objeto tienen las mismas medidas (se representa por $E = 1/1$).

Cómo emplear las escalas multiplicando y dividiendo

De todo lo dicho anteriormente se deduce una primera forma de dibujar a escala, que consistiría en:

1. Se toma la medida del objeto real que se pretende dibujar; dicha medida se multiplica por el numerador de la escala y se divide por el denominador.
2. El resultado de la operación anterior se lleva al dibujo.

Ten en cuenta

Efectuar operaciones matemáticas no es un buen procedimiento para el empleo de escalas, puesto que, además de tener que realizar numerosas operaciones, resulta poco ortodoxo; en la asignatura de dibujo técnico deben realizarse todas las operaciones de forma gráfica.

Figura 26

Escalas normalizadas (según norma UNE-EN ISO 5455)	
Escala natural	1:1
Escalas normalizadas de reducción	1:2 y 1:5 1:10, 1:20 y 1:50 1:100, 1:200 y 1:500 1:1000, 1:2000 y 1:5000 ...
Escalas normalizadas de ampliación	2:1, 5:1 y 10:1

EJERCICIOS RESUELTOS

6 **Dado el segmento BC = 39 mm, representado a escala 7:9, determina gráficamente su verdadera magnitud.**

Solución:

1. Se trazan dos rectas *r* y *s* cualesquiera (fig. 27), que se cortan en el punto *A*.
2. A partir del punto *A* se traslada sobre la recta *r* la distancia AB = 7 y sobre la recta *s* se traslada la magnitud AD = 9, numerador y denominador de la escala, respectivamente.
3. Sobre la recta *r* se determina el punto *C*, siendo BC = 39.
4. Por el punto *C* se traza la paralela a BD, que corta a la recta *s* en el punto *E*, siendo DE la verdadera magnitud de dicho segmento.

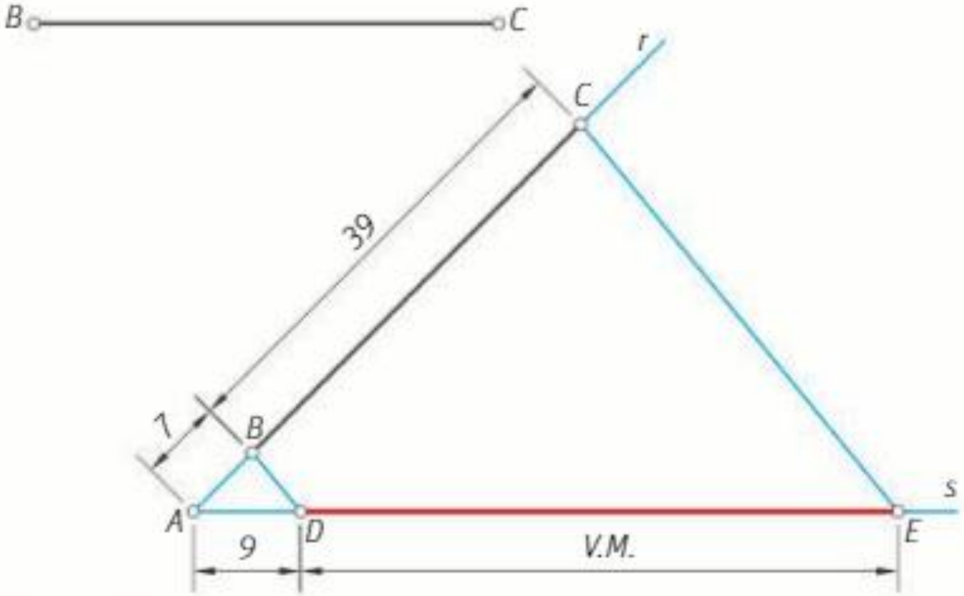

Figura 27

4.1. Escala gráfica

La **escala gráfica** o **escala volante** consiste en la construcción de una regla reducida, o ampliada, según sea el caso, que nos permita dibujar con ella; de esta forma, las magnitudes del objeto real son tomadas con la regla natural, pero dibujadas sobre el papel con la regla volante que hayamos "fabricado".

Cómo se construye una escala gráfica

Supongamos que se desea construir la escala 3:20:

1. Se elige la unidad que vamos a reducir. En nuestro caso no se elegirá el centímetro como unidad, pues al multiplicar por 3 y dividir por 20 se obtiene 0,15 cm = 1,5 mm, una unidad muy pequeña para trabajar con ella; tampoco conviene elegir el metro como unidad a reducir, pues al efectuar la operación se obtiene 0,15 m = 15 cm, que, por el contrario, es una magnitud muy grande. Sin embargo, al tomar como unidad el decímetro el resultado de la operación es 0,15 dm = 1,5 cm, un tamaño apropiado para nuestro propósito.
2. Sobre una cartulina se trazan dos rectas paralelas al borde de la misma (fig. 28) y, a continuación, se llevan, a partir del extremo de la izquierda, tantas unidades reducidas (1,5 cm) como quepan, numerándolas a partir del –1 (–1, 0, 1, 2, 3, ...).
3. La primera de las divisiones obtenidas la dividimos a su vez en diez partes iguales por el procedimiento de división de un segmento en partes iguales. La graduación así obtenida se denomina **contraescala gráfica**.

Una vez tomada una medida sobre el objeto real con la regla natural, para transportarla sobre el dibujo basta con hacer coincidir la medida con una división entera de la escala gráfica (fig. 28), añadiendo los decimales en la contraescala, como se ve en el ejemplo, donde se ha marcado una medida de 8,6 dm sobre el dibujo.

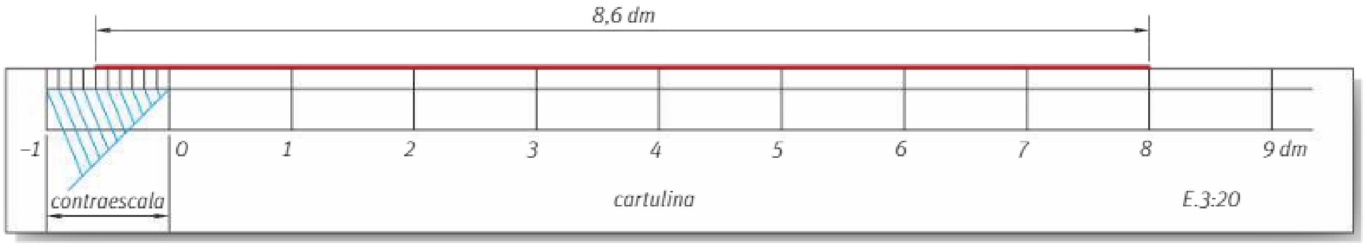

Figura 28

4.2. Escala transversal

Esta escala se diferencia de la anterior en que permite apreciar hasta las centésimas de unidad.

Cómo se construye una escala transversal

Supongamos que se quiere construir la escala 2:5:

1. Se elige la unidad que vayamos a reducir, tal como se ha visto en el punto 1 del proceso para la construcción de una escala gráfica. Si escogemos 1 dm, la unidad reducida será 1 dm × 2/5 = 0,4 dm = 4 cm.
2. Sobre una recta *r* cualquiera (fig. 29) se lleva la unidad reducida tantas veces como sea posible, numerando las divisiones tal como se indica en la figura: *10*, *0*, *1*, *2*, *3* ... La primera de estas divisiones, entre los puntos *10* y *0*, se divide a su vez en diez partes iguales. Esta subdivisión se denomina **contraescala**.
3. Se trazan diez rectas paralelas a la recta *r* con distancias iguales entre sí. Por los puntos *10*, *0*, *1*, *2*, *3* ... se trazan rectas perpendiculares a la recta *r* que corten a las otras diez rectas.
4. En la recta *s*, última de las diez rectas paralelas, se construye la correspondiente contraescala.
5. Se unen los puntos de división de las contraescalas de las rectas *r* y *s* de la siguiente manera: el punto *0* de *r* con el punto *1* de *s*, el punto *1* de *r* con el punto *2* de *s*, el punto *2* de *r* con el punto *3* de *s*, etc.

Para utilizar esta escala se hace coincidir el extremo derecho de la medida con una división entera de una de las rectas paralelas, de modo que el extremo izquierdo coincida exactamente con una de las divisiones de la contraescala. La división entera indica las unidades, la división de la contraescala indica las décimas, y el número de la recta paralela, las centésimas (fig. 29).

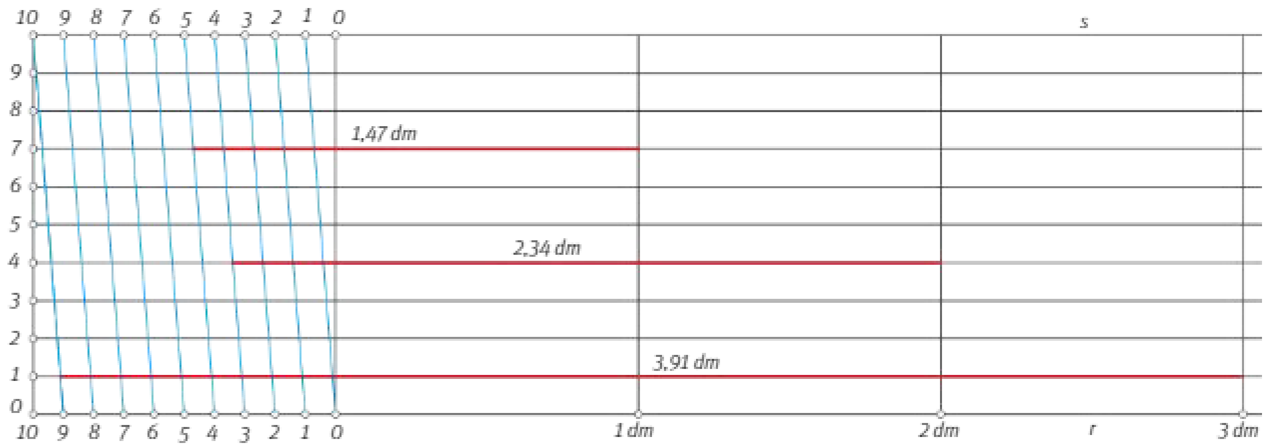

Figura 29

4.3. Triángulo universal de escalas

Resulta útil disponer de instrumentos que permitan dibujar a varias escalas. Los **escalímetros** son reglas con las escalas gráficas de más frecuente uso (fig. 30 y fig. 31). Además, es posible construir un triángulo, denominado **triángulo universal de escalas**, que incorpora las escalas más utilizadas.

Cómo construir el triángulo universal de escalas

1. Se construye un triángulo cualquiera con la única condición de que un lado mida 10 cm. Por facilidad de construcción, se aconseja que dicho triángulo sea equilátero o un rectángulo isósceles cuyos catetos midan 10 cm (fig. 32).
2. El lado que mide 10 cm se divide en diez partes iguales. Cada uno de los puntos de división, numerados del *1* al *10*, se une con el vértice opuesto *A* del triángulo.
3. Uno cualquiera de los otros dos lados se divide también en diez partes iguales, numerando los puntos de división del *1* al *10*, y comenzando por el vértice *A*. Por cada punto de división se trazan paralelas al lado que mide 10 cm, de modo que todas ellas quedan divididas en diez partes iguales al cortarse con las rectas que concurren en *A*. Se obtienen así diversas escalas de reducción: 1:10, 1:5, 3:10, 2:5, etc.
4. Si se prolongan las rectas que concurren en el punto *A* y se siguen trazando rectas paralelas a la recta que contiene la escala natural, por debajo de ella y a la misma distancia que las anteriores, se obtienen las escalas de ampliación 11:10, 6:5, 13:10, etc.

Figura 30

Figura 31

4.3. Triángulo universal de escalas

Resulta útil disponer de instrumentos que permitan dibujar a varias escalas. Los **escalímetros** son reglas con las escalas gráficas de más frecuente uso (fig. 30 y fig. 31). Además, es posible construir un triángulo, denominado **triángulo universal de escalas**, que incorpora las escalas más utilizadas.

Cómo construir el triángulo universal de escalas

1. Se construye un triángulo cualquiera con la única condición de que un lado mida 10 cm. Por facilidad de construcción, se aconseja que dicho triángulo sea equilátero o un rectángulo isósceles cuyos catetos midan 10 cm (fig. 32).
2. El lado que mide 10 cm se divide en diez partes iguales. Cada uno de los puntos de división, numerados del *1* al *10*, se une con el vértice opuesto *A* del triángulo.
3. Uno cualquiera de los otros dos lados se divide también en diez partes iguales, numerando los puntos de división del *1* al *10*, y comenzando por el vértice *A*. Por cada punto de división se trazan paralelas al lado que mide 10 cm, de modo que todas ellas quedan divididas en diez partes iguales al cortarse con las rectas que concurren en *A*. Se obtienen así diversas escalas de reducción: 1:10, 1:5, 3:10, 2:5, etc.
4. Si se prolongan las rectas que concurren en el punto *A* y se siguen trazando rectas paralelas a la recta que contiene la escala natural, por debajo de ella y a la misma distancia que las anteriores, se obtienen las escalas de ampliación 11:10, 6:5, 13:10, etc.

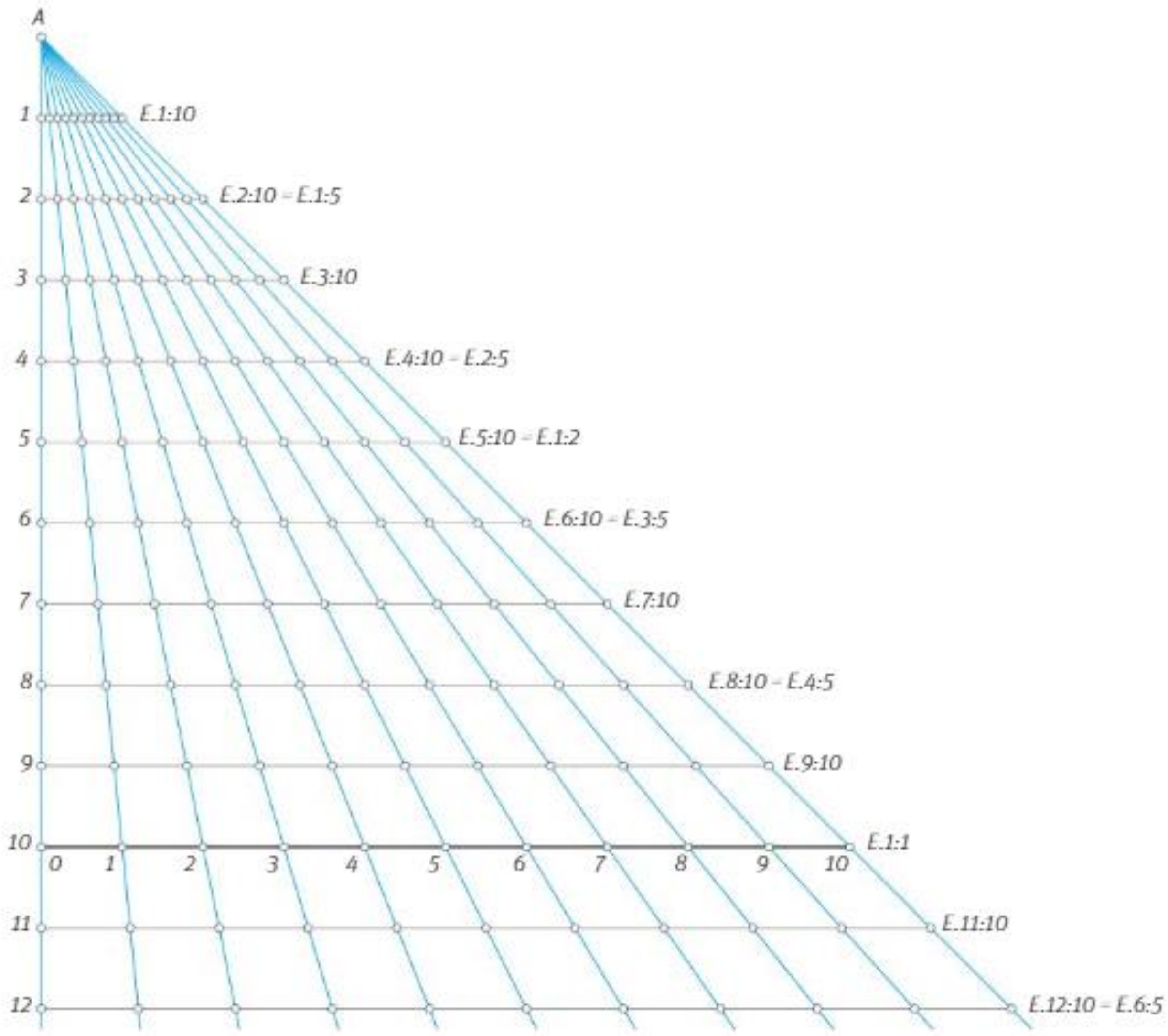

Figura 32

EJERCICIOS RESUELTOS

7 Dados el punto *P* y las rectas *r* y *s* (fig. 33), traza la recta que, pasando por el punto *P*, corte a las rectas *r* y *s* en dos puntos *M* y *N* de manera que *PM* = *PN*.

Solución:

1. Por el punto *P* se traza la recta *s'* paralela a la recta *s* y que corta a la recta *r* en el punto *B* (fig. 33).
2. Sea *A* el punto de intersección de las rectas *r* y *s*; sobre la recta *r* se traslada la magnitud *BM* = *BA*.
3. La recta *t* que une los puntos *P* y *M* corta a la recta *s* en el punto *N* de manera que *PM* = *PN*.

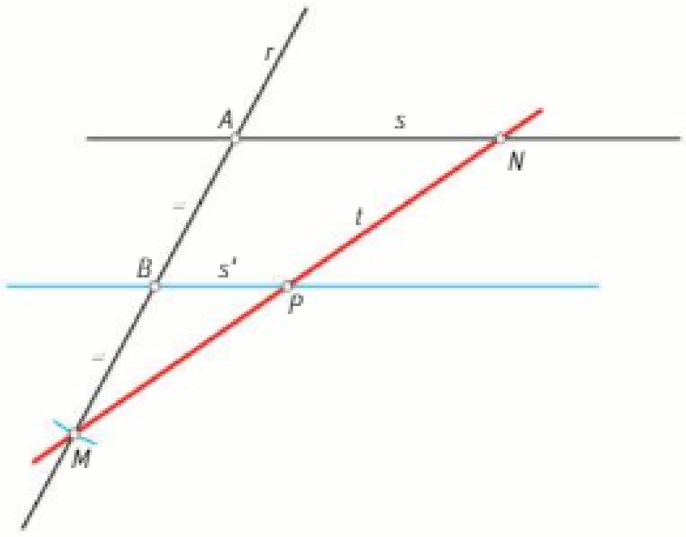

Figura 33

8 Determina a qué escala está dibujada la figura dada (fig. 34).

Solución:

El segmento dado mide en el dibujo 36 mm, pero realmente vale 54 mm, tal como indica la cota; por tanto, la escala será:

$$E = \frac{\text{dibujo}}{\text{realidad}} = \frac{36}{54} = \frac{2}{3}$$

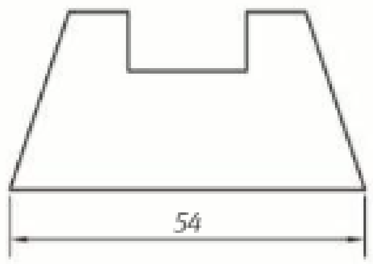

Figura 34

9 Dada la figura a escala 1:1 (fig. 35), dibújala a escala 3:2.

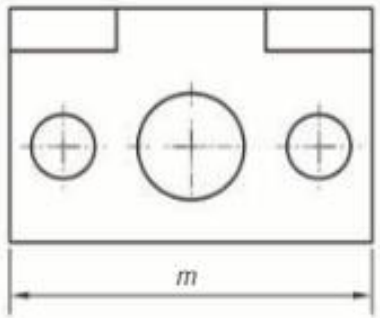

Figura 35

Solución:

1. Si la figura dada está dibujada a escala 1:1, las medidas del dibujo coinciden con las medidas reales. Por lo tanto, para dibujar a escala 3:2, cada medida tomada del dibujo se debe multiplicar por 3 y dividir por 2 (fig. 36).

2 Otro procedimiento, gráficamente más ortodoxo, consiste en construir la escala gráfica 3:2 sobre una cartulina, a modo de regla volante. Las magnitudes reales se toman entonces con la regla natural de escala 1:1, pero se dibujan con la regla volante a escala 3:2.

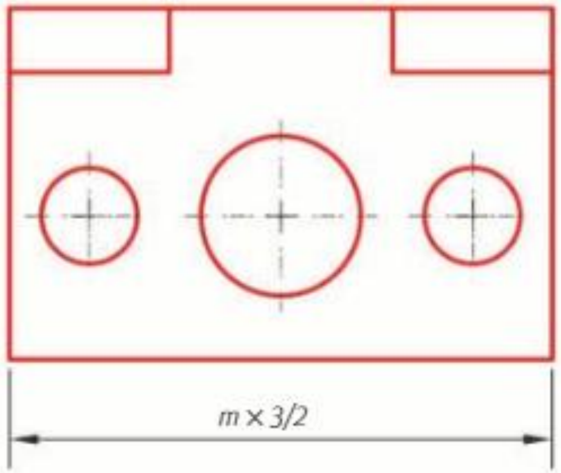

Figura 36

10 Dada la figura definida por una cota (fig. 37), dibújala a escala 1:2.

Solución:

1. En primer lugar hay que averiguar a qué escala está dibujada la figura dada. Para ello se observa que la magnitud real 72 se corresponde con una medida en el papel de 36 mm (fig. 37). Por tanto, la escala será:

$$E = \frac{\text{dibujo}}{\text{realidad}} = \frac{36}{72} = \frac{1}{2}$$

2. Se pide dibujar la figura a escala 1:2, es decir, a la misma escala a la que ya está dibujada, con lo que bastará con realizar el dibujo al mismo tamaño.

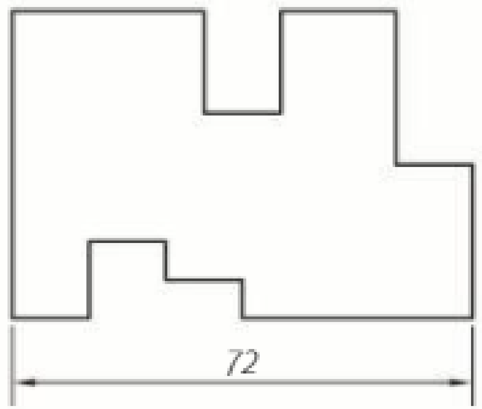

Figura 37

ACTIVIDADES

1. Por los puntos *M* y *N* dados, traza dos rectas *m* y *n* de tal manera que la recta *r*, también dada, sea la bisectriz de ambas (fig. 38).
2. Dada la circunferencia de centro *O* (fig. 39) y los puntos *A*, *B* y *C* situados en ella, dibuja las cuerdas de la circunferencia que, pasando por el punto *A*, son cortadas por la cuerda *BC* en dos partes iguales.
3. El segmento *MN* = 80 mm es el lado de un triángulo *MNP* del que se sabe que el ángulo en *P* es de 60° y que la altura de dicho vértice es media proporcional entre el lado *MN* dado y el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo. Dibuja las soluciones posibles.
4. Halla la figura semejante al polígono *ABCDE* (fig. 40), si su perímetro es 1,75 veces el del polígono dado.
5. Dibuja la escala gráfica 1:40 con su correspondiente contraescala, indicando la unidad de medida.
6. Determina a qué escala están dibujadas las figuras dadas (fig. 41 y fig. 42).
7. Dada la figura a escala 1:1 (fig. 43), dibújala a escala 7:4.
8. Dada la figura a escala 1:1 (fig. 44), dibújala a escala 4:3.
9. Dada la figura definida por una cota (fig. 45), dibújala a escala 3:4.
10. Dada la figura definida por una cota (fig. 46), dibújala a escala 4:5.
11. Dada la figura a escala 1:2 (fig. 47), dibújala a escala 3:4.
12. Dada la figura a escala 2:3 (fig. 48), dibújala a escala 4:5.

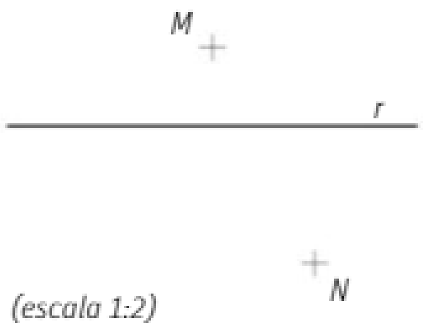

Figura 38

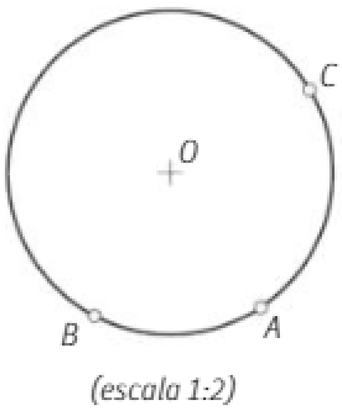

Figura 39

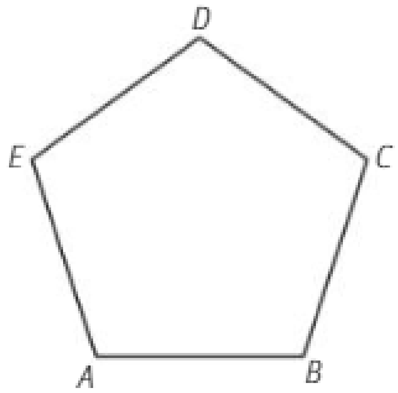

Figura 40

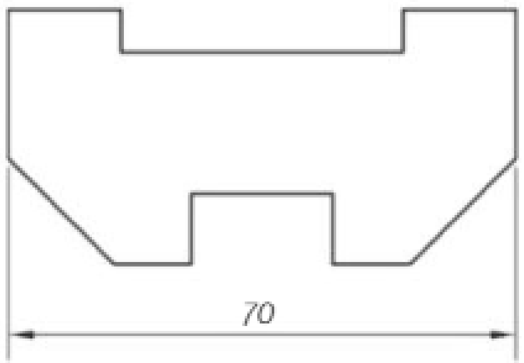

Figura 41

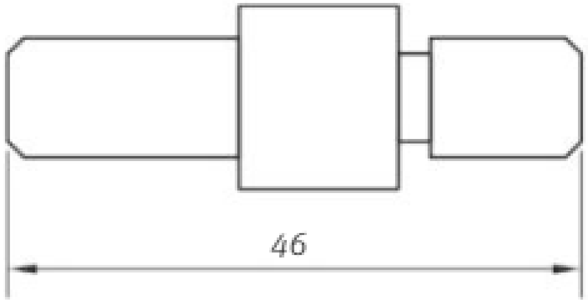

Figura 42

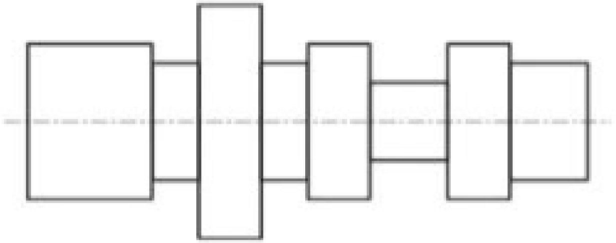

Figura 43

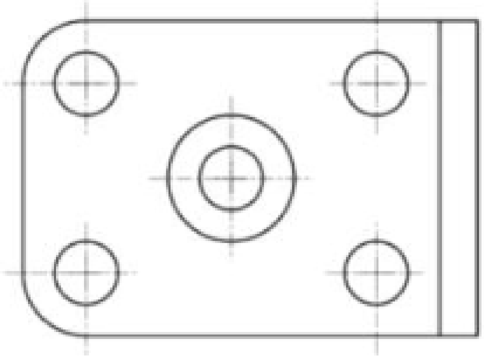

Figura 44

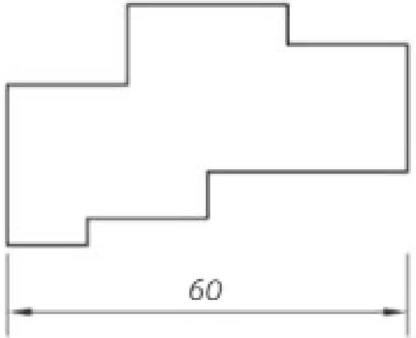

Figura 45

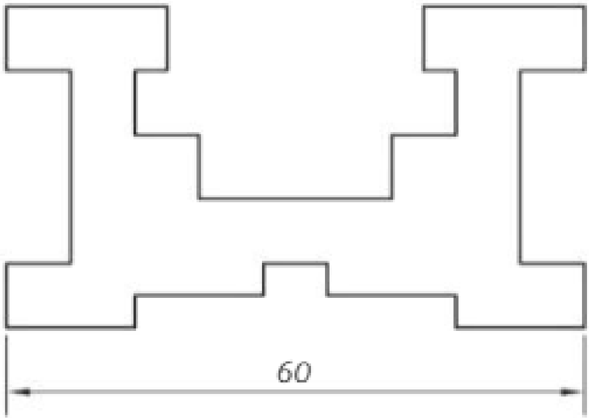

Figura 46

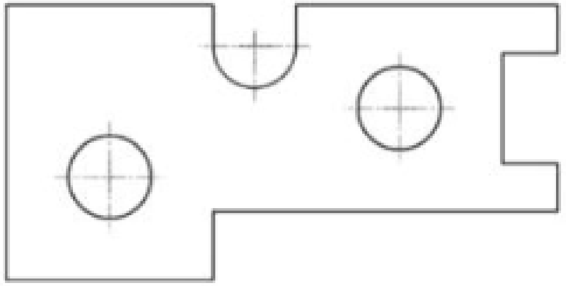

Figura 47

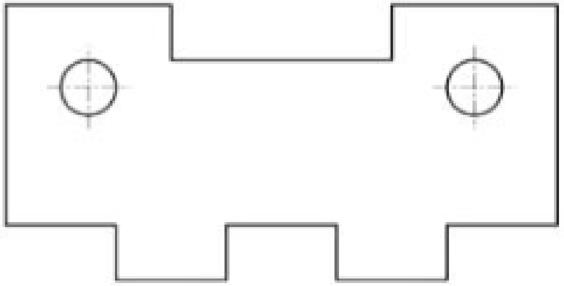

Figura 48