4 Transformaciones geométricas

Una transformación geométrica o, simplemente, una transformación, es una aplicación en la que se establece una correspondencia entre puntos de un plano; es decir, a cada punto le corresponde otro punto y a cada recta, otra recta. En consecuencia, una figura se transforma en otra figura, tal como sucede con los edificios de la fotografía, reflejados en el agua.

1 Series lineales

Los elementos geométricos fundamentales son el **punto**, la **recta** y el **plano**. Las formas constituidas con estos elementos se denominan **formas geométricas**.

Las series lineales son un tipo de forma geométrica.

Una **serie lineal** o **serie rectilínea** es el conjunto de los infinitos puntos de una recta (fig. 1).

Figura 1

1.1. Razón simple de tres puntos

Dados dos puntos fijos, A y B (fig. 2), en una recta r orientada (que tiene sentido positivo y negativo), se llama **razón simple de tres puntos** P, A y B a la relación:

$$h = (PAB) = \frac{PA}{PB}$$

Figura 2

1.2. Razón doble de cuatro puntos

Dados dos puntos fijos, A y B, en una recta r orientada (fig. 3), se llama **razón doble de cuatro puntos** M, N, A y B al cociente de las razones simples de los dos primeros respecto a los dos segundos:

$$k = (MNAB) = \frac{(MAB)}{(NAB)} = \frac{MA/MB}{NA/NB}$$

A cada grupo de cuatro puntos elegidos en la recta se le denomina **cuaterna anarmónica**.

Si la razón doble de cuatro puntos vale −1, se dice que los cuatro puntos forman una **cuaterna armónica**:

$$k = (MNAB) = \frac{(MAB)}{(NAB)} = \frac{MA/MB}{NA/NB} = -1 \Rightarrow \frac{MA}{MB} = -\frac{NA}{NB}$$

Figura 3

EJERCICIOS RESUELTOS

1 Dados los puntos *A* y *B* (*AB* = 23 mm) de una recta *r* (fig. 4), determina el punto *C* de la recta tal que $(ABC) = -7/9$.

Solución:

1. Sobre una recta *s* cualquiera que pasa por el punto *A* se toman las magnitudes *AM* = 7 y *AN* = 9 en sentido contrario (por ser negativa la razón simple) y se traza la recta *BM*.
2. Por el punto *N* se traza la paralela a la recta *BM*, que corta a la recta *r* en el punto *C*.

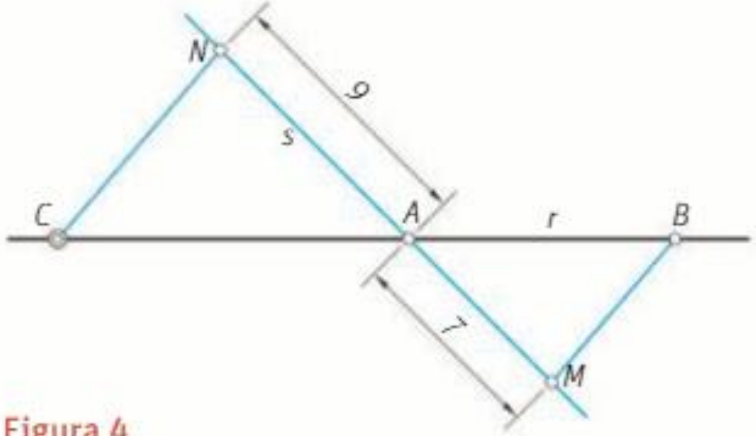

Figura 4

2 Dados tres puntos *N*, *A* y *B*, sobre una recta *r* (fig. 5), halla un punto *M* que forme una cuaterna armónica con *N* respecto de los puntos *A* y *B*.

Solución:

1. Por los puntos *A* y *B* se trazan dos rectas *a* y *b* cualesquiera paralelas entre sí, y por el punto *N* se traza una recta *c* cualquiera, que corta a las otras dos en los puntos *C* y *D*.
2. Con centro en *B* y radio *BD* se traza una semicircunferencia que corta a la recta *b* en el punto *E*.
3. El punto *M* de intersección de la recta que une los puntos *C* y *E* con la recta *r* es la solución.

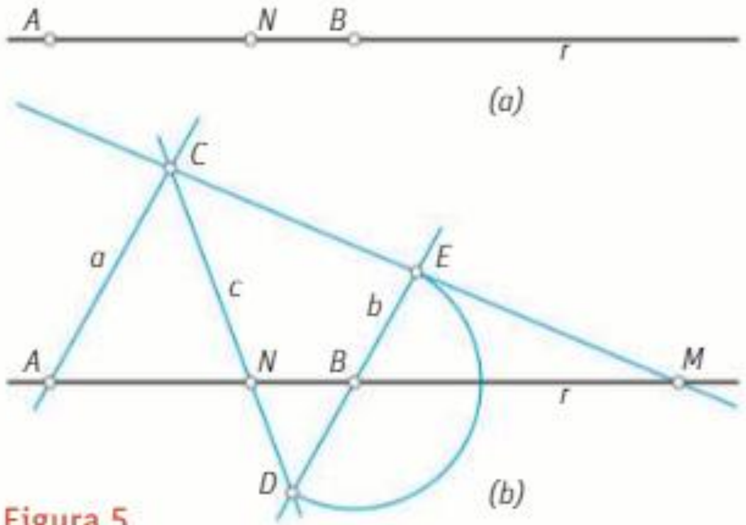

Figura 5

2 Homotecia

El concepto de **transformación** en geometría es equivalente al concepto de **función** en álgebra.

Una **transformación geométrica** es una correspondencia (o aplicación) entre elementos de dos formas geométricas.

Una **transformación proyectiva** es tal que cuatro puntos en línea recta se transforman en otros cuatro puntos en línea recta, siendo la razón doble de los cuatro primeros igual a la razón doble de los cuatro segundos.

La **homotecia** (fig. 6) es un tipo de transformación geométrica cuyo ejemplo de aplicación más conocido son las escalas.

La **homotecia** es una transformación que cumple las siguientes leyes (fig. 7):

- Dos puntos homotéticos A y A' están alineados con un punto fijo O llamado **centro de homotecia**.
- Dos rectas homotéticas a y a' son paralelas.

Razón de la homotecia

Razón o **coeficiente de homotecia** es la razón entre las distancias que hay desde el centro O hasta los puntos homotéticos A y A'.

$$k = \frac{OA}{OA'}$$

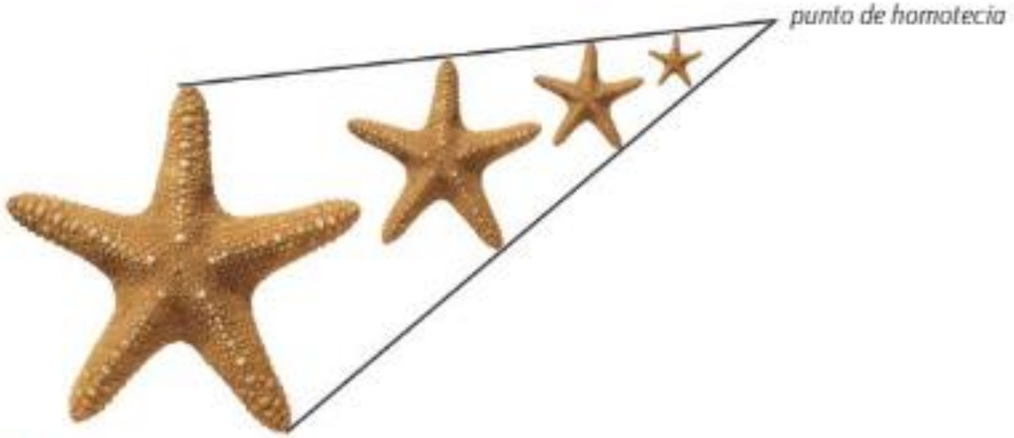

Figura 6

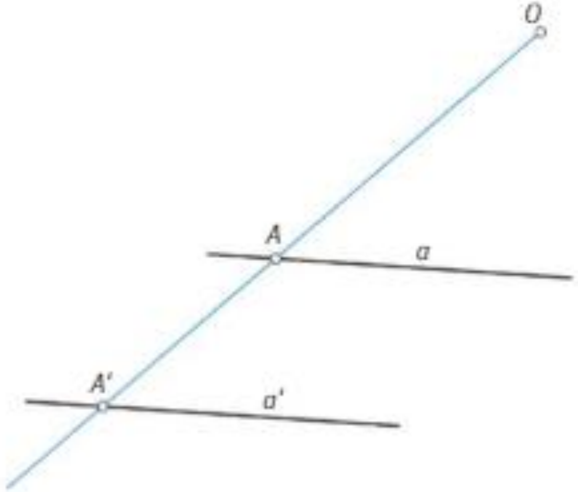

Figura 7

Ten en cuenta

- Si el coeficiente de homotecia es positivo, ambos puntos están al mismo lado del centro de homotecia, y si es negativo, están a distinto lado.
- Para definir una homotecia basta con conocer uno de estos datos: el centro y dos puntos homotéticos; el centro y la razón de homotecia, o bien dos figuras homotéticas.

EJERCICIOS RESUELTOS

3 Halla el homotético B' de un punto B (fig. 8), conociendo el centro de homotecia O y un par de puntos homotéticos A y A'.

Solución:

Por A' se traza una recta a' paralela a la recta a que une los puntos A y B. El punto B' es la solución.

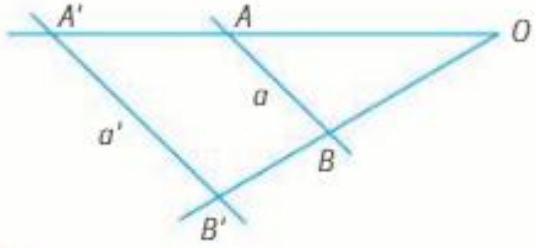

Figura 8

4 Dado el triángulo ABC, con AB = 60 mm, BC = 55 mm y AC = 35 mm (fig. 9), dibuja un cuadrado inscrito en el mismo.

Solución:

1. Dado el triángulo ABC, a partir de un segmento DG arbitrario, perpendicular al lado AB, se dibuja el cuadrado $DEFG$.
2. La recta que une los puntos A y F corta al lado BC del triángulo en el punto H.
3. Por el punto H se traza la perpendicular HK y la paralela HL al lado AB, y por L se traza la perpendicular LJ, con lo que se obtiene el cuadrado $JKHL$ que se pide.

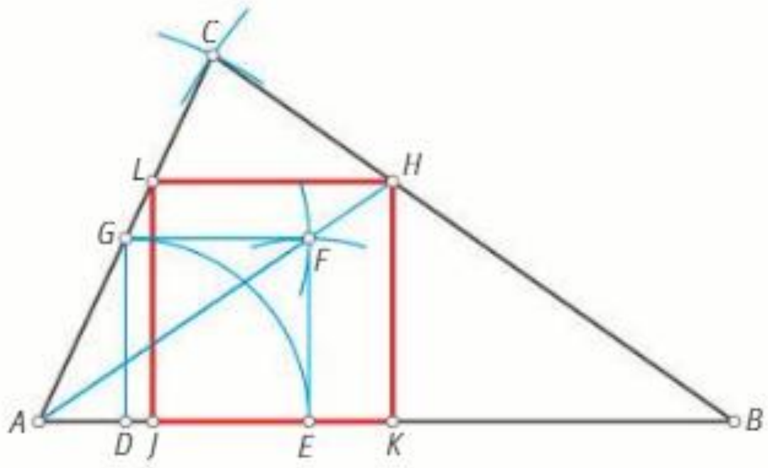

Figura 9

3 Simetría

Todos tenemos una idea intuitiva de la simetría, pues esta aparece en múltiples ocasiones en la naturaleza, por ejemplo, en ciertos animales (fig. 10). Pero la simetría está presente en muchos otros ámbitos, como la geometría, la música, la física, etc.

Figura 10

3.1. Simetría central

La **simetría central** es una transformación geométrica en la que se cumplen las siguientes leyes (fig. 11):

- Dos puntos simétricos A y A' están alineados con un punto O fijo llamado **centro de simetría**.
- Los dos puntos están a distinto lado y a igual distancia del centro ($OA = -OA'$).

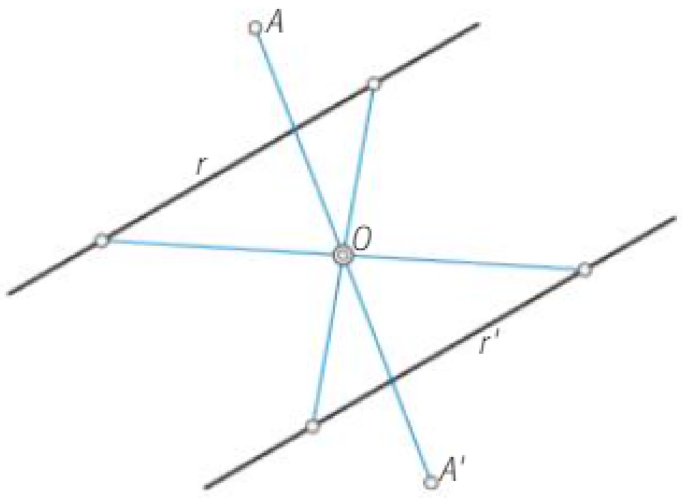

Figura 11

3.2. Simetría axial

La **simetría axial** es una transformación que cumple las siguientes leyes (fig. 12):

- La recta que une dos puntos simétricos A y A' es perpendicular a un eje e, llamado **eje de simetría**.
- Los dos puntos se encuentran a distinto lado e igual distancia del eje ($A_0A = -A_0A'$).

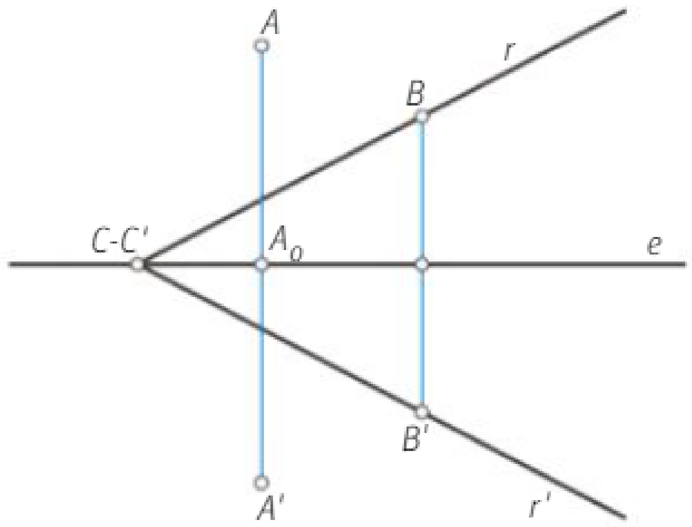

Figura 12

EJERCICIOS RESUELTOS

5 **Construye la figura simétrica del polígono *ABCDE* respecto del punto *O* (fig. 13):**

Solución:

1. Se une el punto *A* con el centro *O*, y se lleva sobre dicha recta y en sentido contrario el segmento $OA' = OA$.
2. Se une el punto *B* con el centro *O* e, igual que con el punto anterior, se lleva la distancia $OB' = OB$. Del mismo modo se obtienen los restantes puntos.

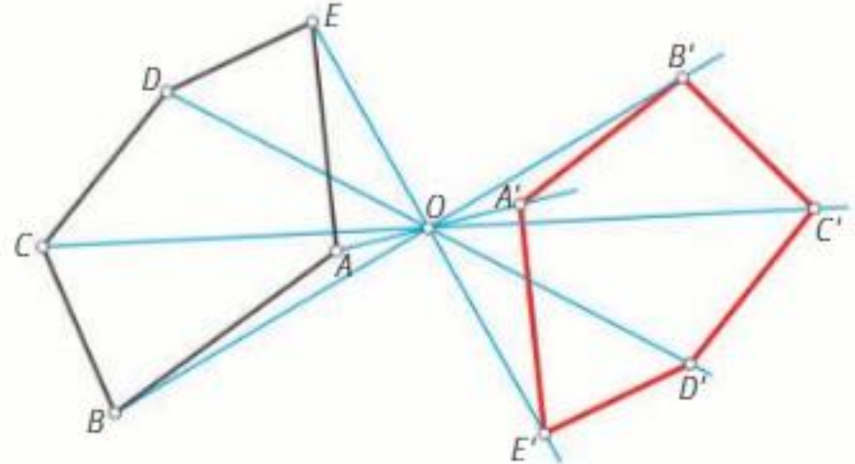

Figura 13

6 **Construye la figura simétrica del polígono *ABCDE* (fig. 14) respecto del eje *e*.**

Solución:

1. Por el punto *A* se traza la recta perpendicular al eje *e*, y se lleva sobre dicha recta y en sentido contrario el segmento $A_oA' = A_oA$.
2. Se traza por el punto *B* la recta perpendicular al eje *e* y, como con el punto anterior, se lleva la distancia $B_oB' = B_oB$, y así sucesivamente.

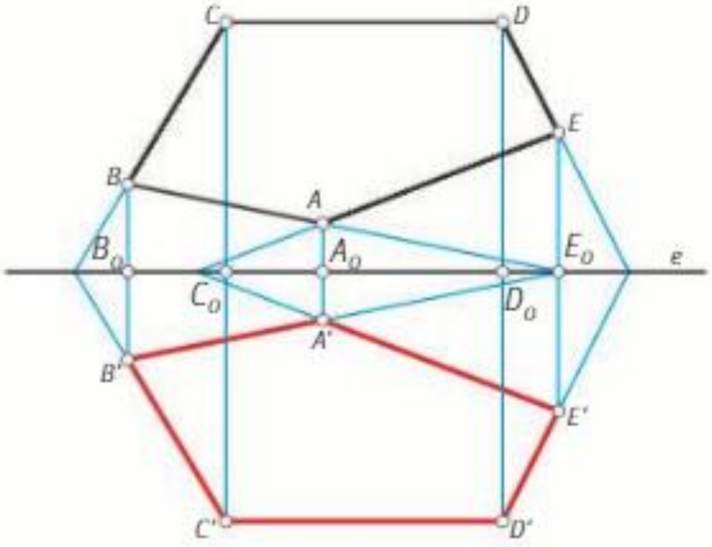

Figura 14

4 Traslación

En el mundo que nos rodea, entendemos por traslación el movimiento que cambia de lugar una cosa (fig. 15).

En geometría se denomina transformación al hecho de mover algo; por tanto, entendemos por **traslación** la transformación geométrica mediante la cual cada punto de un objeto se mueve una distancia constante en una dirección determinada.

La **traslación** es una transformación que cumple las siguientes reglas (fig. 16):

- La recta que une dos puntos homólogos *A* y *A'* es paralela a una dirección de traslación *d*.
- Dos rectas homólogas *a* y *a'* son paralelas.

Ten en cuenta

De la definición anterior se deduce que todos los puntos de una figura se trasladan la misma distancia según una misma dirección y sentido (fig. 17).

Figura 15

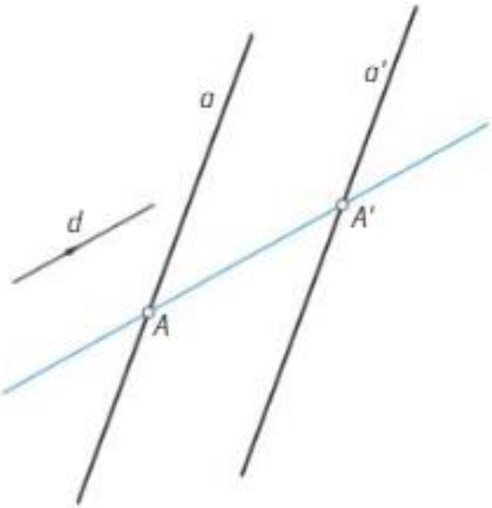

Figura 16

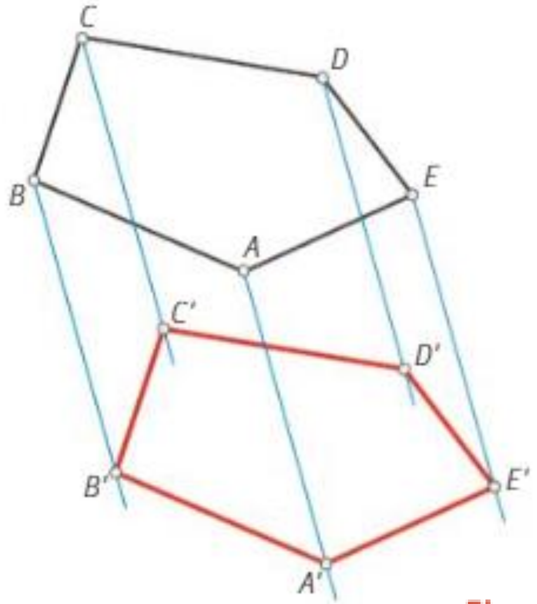

Figura 17

EJERCICIOS RESUELTOS

7 Dadas dos rectas paralelas *r* y *s* (fig. 18) y una tercera *t* no paralela, construye un triángulo *ABC* (*AB* = 20 mm, *BC* = 25 mm y *AC* = 15 mm) que tenga un vértice en cada recta.

Solución:

1. Con centro en un punto *A* cualquiera de la recta *r* y radio *AB*, se traza un arco hasta cortar a la recta *s* en el punto *B*.
2. Con centro en *A* y radio *AC* y con centro en *B* y radio *BC* se dibujan dos arcos, que se cortan en el punto *C*.
3. Se traslada el triángulo *ABC*: por el punto *C* se traza una recta paralela a las rectas *r* y *s* hasta cortar a *t* en el punto *C'*.
4. Por *C'* se trazan las paralelas a *AC* y a *BC*, que cortan a *r* y *s* en los puntos *A'* y *B'*, respectivamente.

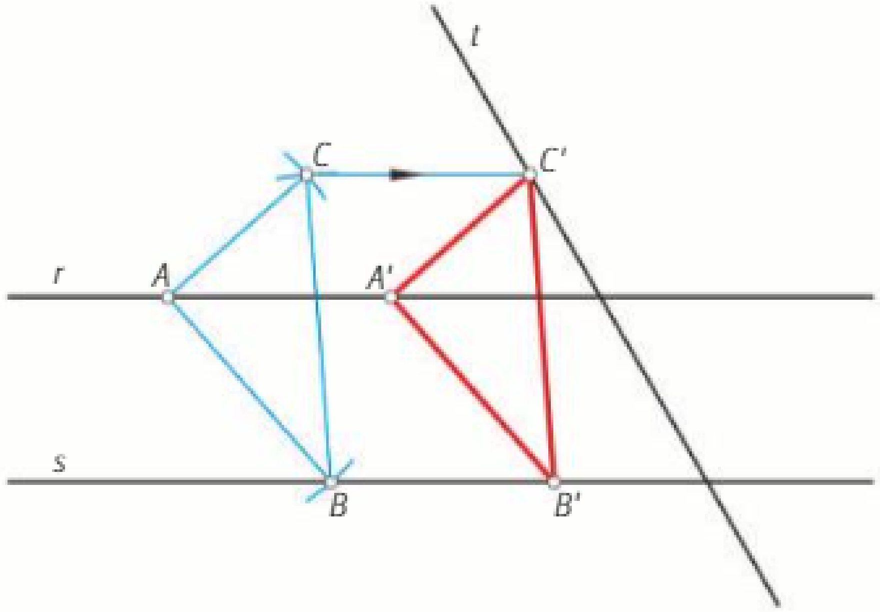

Figura 18

8 Dibuja un segmento paralelo al segmento *AB* (fig. 19) e igual a él, cuyos extremos estén situados uno en cada una de las circunferencias dadas.

Solución:

1. A partir del punto *O*, centro de una de las circunferencias dadas, se traza el segmento *OP*, igual y paralelo al segmento *AB* dado (fig. 19).
2. Con centro en *P* y radio igual al de la circunferencia de centro *O* se traza una nueva circunferencia, que corta a la de centro *O'* en los puntos *D* y *D'*.
3. A partir de los puntos *D* y *D'* se trazan dos rectas paralelas al segmento *AB*, que cortan a la circunferencia de centro *O* en los puntos *C* y *C'*. Los segmentos *CD* y *C'D'* son las dos soluciones del ejercicio.

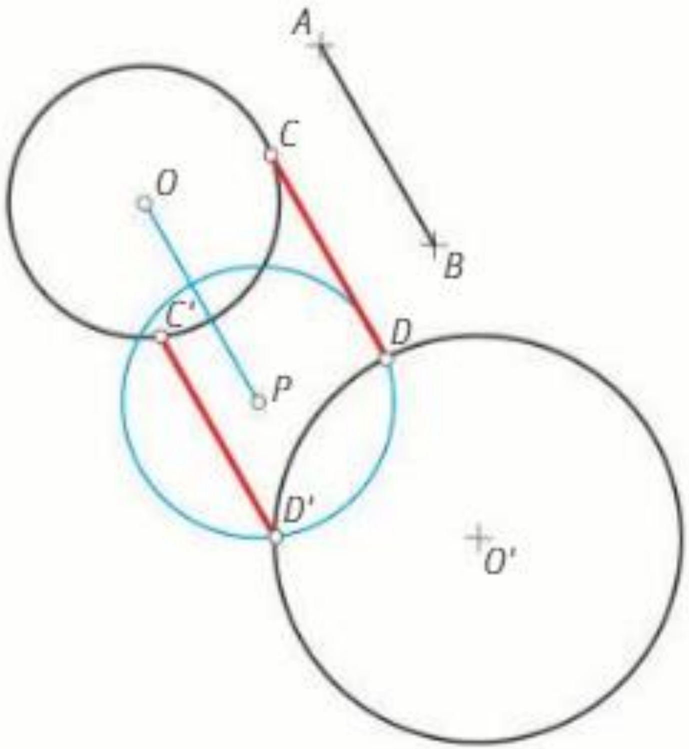

Figura 19

5 Giro

El concepto de girar se puede definir como dar vueltas alrededor de un eje o en torno a un punto.

En el espacio, por ejemplo, los satélites giran alrededor de su eje; también giran alrededor de su eje las ruedas de cualquier vehículo, las agujas de un reloj o las paletas de un aerogenerador (fig. 20); los caballos de un tiovivo giran alrededor del poste central, etc.

Figura 20

Dados un punto O, un ángulo φ y un sentido, el **giro** es una transformación tal que a un elemento A le corresponde un elemento A', de modo que se cumplen las siguientes reglas (fig. 21):

- La distancia de ambos puntos, A y A', a un punto fijo O, llamado **centro de giro**, es constante ($OA = OA'$).
- El ángulo que se forma al unir los dos puntos con el centro de giro, y su sentido, es igual a un ángulo dado, llamado **ángulo de giro** (ángulo $AOA' = \varphi$).

Ten en cuenta

El centro de giro O es el punto de intersección de las mediatrices de los segmentos que unen puntos homólogos, AA', BB', etc.

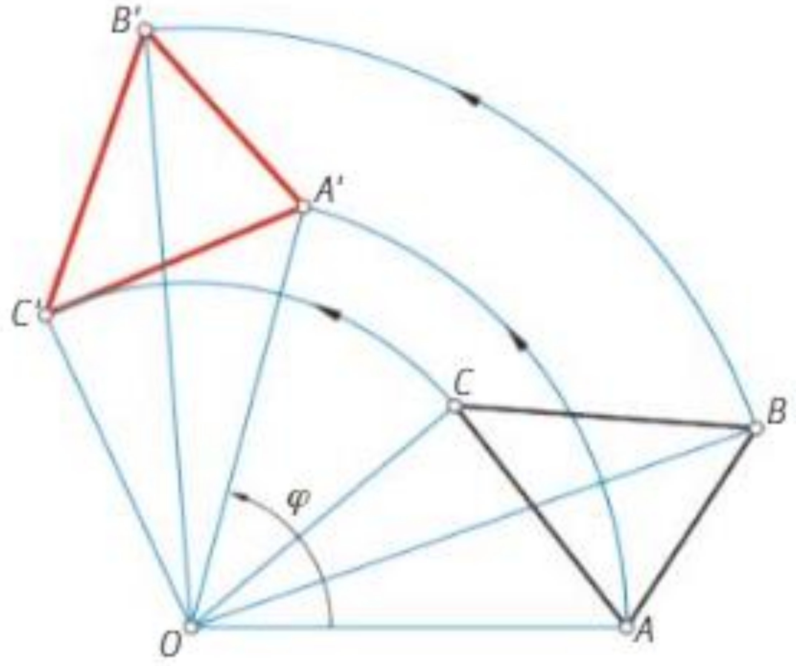

Figura 21

EJERCICIOS RESUELTOS

9 Gira la recta *r* dada en el sentido de las agujas del reloj, si el centro de giro es *O* y el ángulo de giro, φ (fig. 22).

Solución:

1. Por el punto *O* se traza la perpendicular a *r*, con lo que se halla *A*.
2. Con centro en *O* y ángulo φ se gira el punto *A* hasta la posición *A'*. Por *A'* se traza la recta *r'*, perpendicular a *OA'*.

Para girar cualquier otro punto, *B*, de la recta *r* basta con trazar un arco *BB'* de centro *O* hasta cortar a la recta girada *r'* en el punto *B'*. Por supuesto, el ángulo $\varphi = AOA'$ es igual al ángulo *BOB'*.

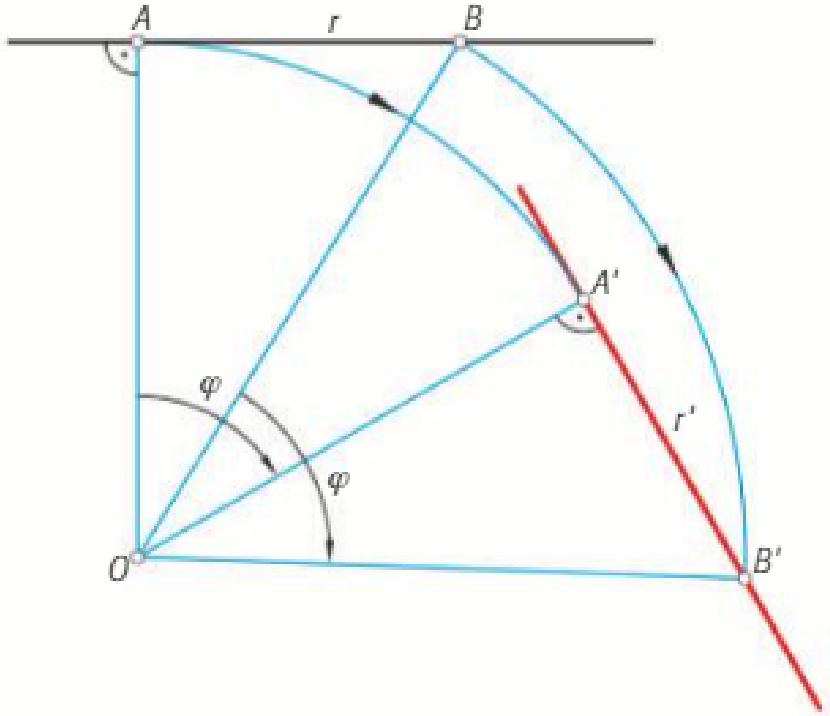

Figura 22

10 Dados los cuadrados *ABCD* y *A'B'C'D'*, iguales y girados (fig. 23), halla el centro de giro.

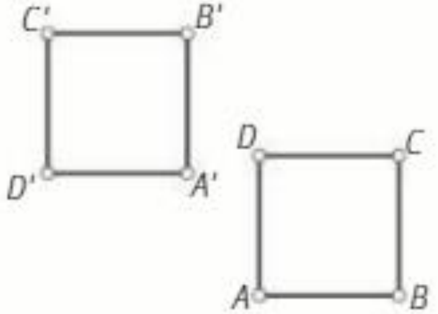

Figura 23 *(escala 1:2)*

Solución:

1. Se dibuja la mediatriz de los segmentos *AA'* y *CC'*, que se cortan en el punto *O*, centro de giro (fig. 24).
2. El ángulo que forman las rectas *OA* y *OA'* es igual al ángulo de giro.

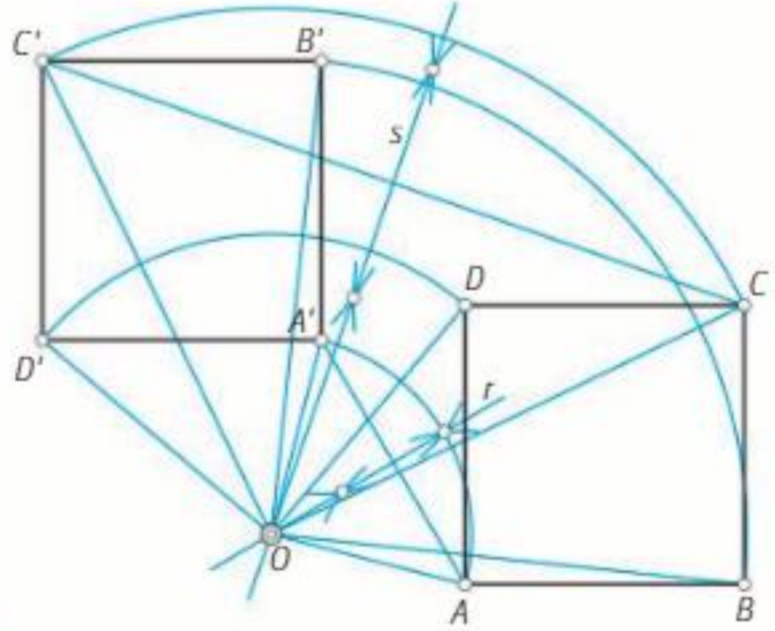

Figura 24

EJERCICIOS RESUELTOS

11 Dados los puntos *A*, *B* y *C*, situados en la recta *r* (fig. 25), halla el punto *D* de la misma, de manera que la razón doble (*ABCD*) valga –18/13.

Solución:

1. Por los puntos *A* y *B* se trazan dos rectas *a* y *b* cualesquiera paralelas entre sí.
2. Sobre la recta *a* y a partir del punto *A* se toman los segmentos *AE* = 18 y *AF* = 13, uno en sentido contrario del otro.
3. La recta que une los puntos *C* y *E* corta a la recta *b* en el punto *G*. El punto *D* de intersección de la recta *r* con la recta que une los puntos *F* y *G* es la solución.

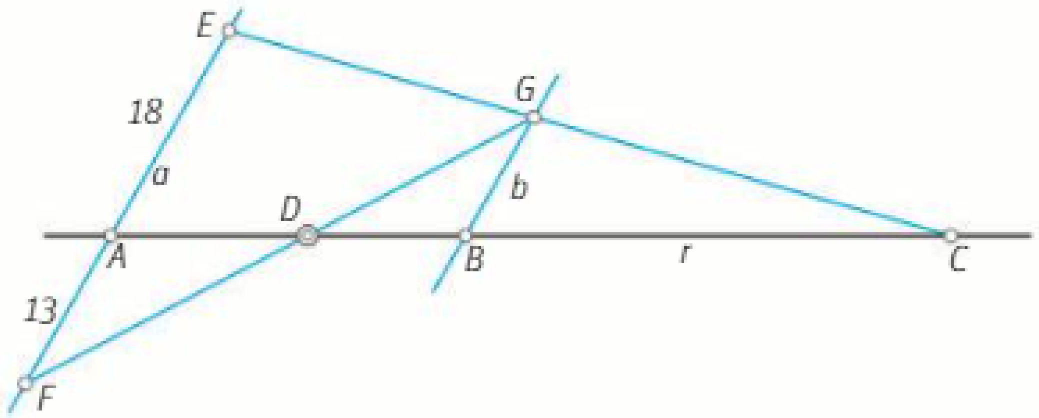

Figura 25

12 Dados el triángulo *ABC* y el punto *O* (fig. 26), halla la figura homotética de *ABC* cuyo centro de homotecia es *O* y cuya razón vale $k = 1,7$.

Solución:

1. Se une el punto *O* con los vértices del triángulo mediante los rayos *OA*, *OB* y *OC*.
2. Se divide el segmento *OC* en diez partes iguales, y se trasladan al otro lado de *C* siete de esas partes en el mismo sentido del segmento, con lo que se obtiene el punto *C'*, de manera que $OC' = OC \times 1,7$.
3. Por el punto *C'* se trazan las paralelas a *CA* y *CB*, que cortan a los rayos *OA* y *OB* en los puntos *A'* y *B'*, con lo que se obtiene el triángulo *A'B'C'*.

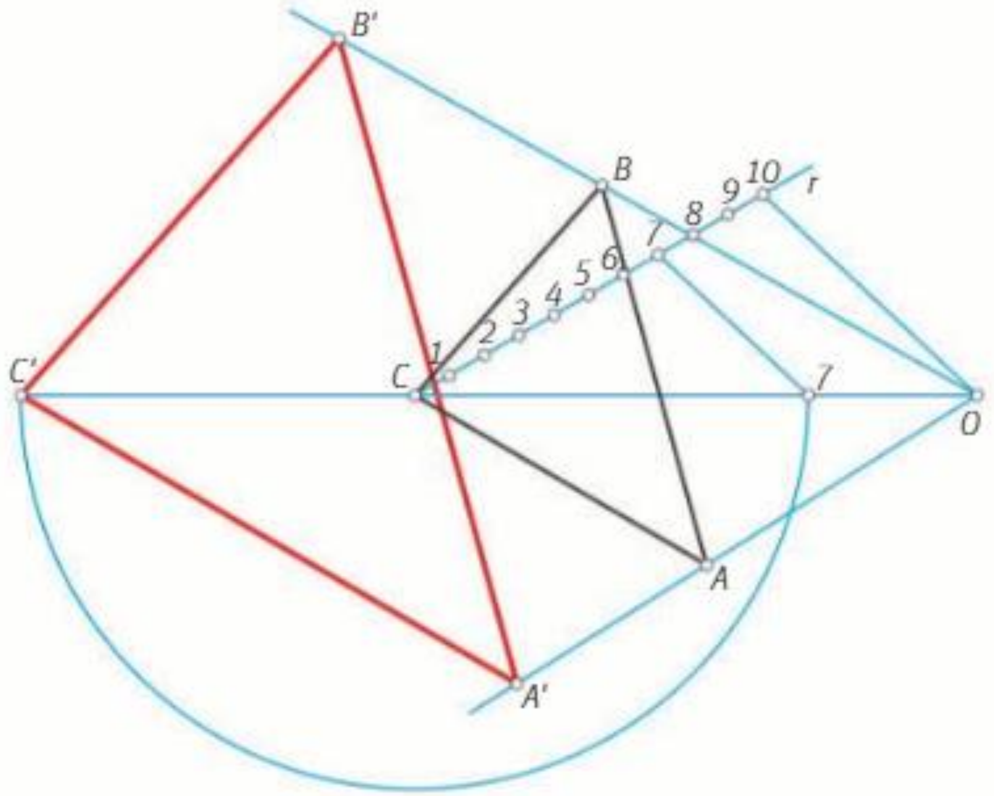

Figura 26

14 **Dadas las rectas *r*, *s* y *t* (fig. 29), dibuja un triángulo equilátero de 25 mm de lado que tenga un vértice en cada recta.**

Solución:

1. Con centro en un punto *A* cualquiera de la recta *s* se traza un arco de radio 27 mm, que corta a la recta *r* en los puntos *B* y *E*. Con el lado *AB* se dibuja el triángulo equilátero *ABC*.
2. Por el punto *C* se traza la paralela *m* a las rectas *r* y *s* hasta cortar a la recta *t* en el punto *C'*.
3. A partir del punto *C'* se dibuja el triángulo *A'B'C'* de lados paralelos al triángulo *ABC*.

Otra solución se obtiene a partir del triángulo equilátero *DEF*. Se obtienen dos soluciones más, no dibujadas, si se realizan estas mismas operaciones al otro lado de la recta *t*.

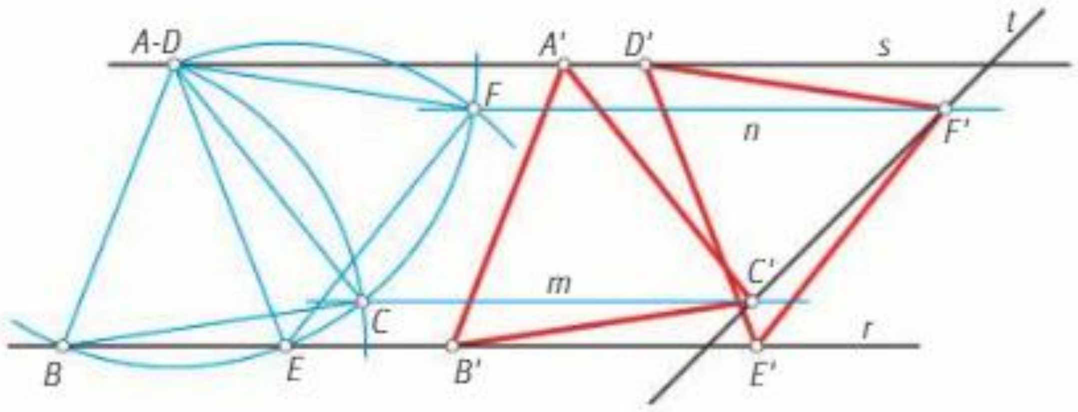

Figura 29

13 Un rayo de luz *r* procede del punto *A* (fig. 27) y, tras incidir en el espejo *m*, sale reflejado hacia el espejo *n*, desconocido, que lo refleja al punto *D*. Dibuja el espejo *n* que pasa por el punto *E*.

Solución:

1. Se determina el punto *A'* simétrico del *A* (fig. 28): por el punto *A* se traza la perpendicular al espejo *m* y, con centro en el punto *B* de intersección, se traza un arco de radio *BA*, que corta a la perpendicular en el punto *A'*.
2. Se une el punto *A'* con el punto *B* de intersección del rayo de luz *r* con el espejo *m*, mediante la recta *s*.
3. Con centro en el punto *E* y radio *ED* se traza un arco hasta cortar a la recta *s* en el punto *D'*, simétrico del *D* respecto del espejo *n*, aún no trazado. El espejo *n* se obtiene al trazar la mediatriz del segmento *DD'*, que pasará por *E*.

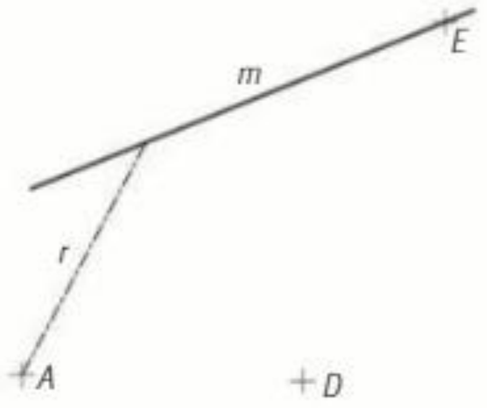

Figura 27

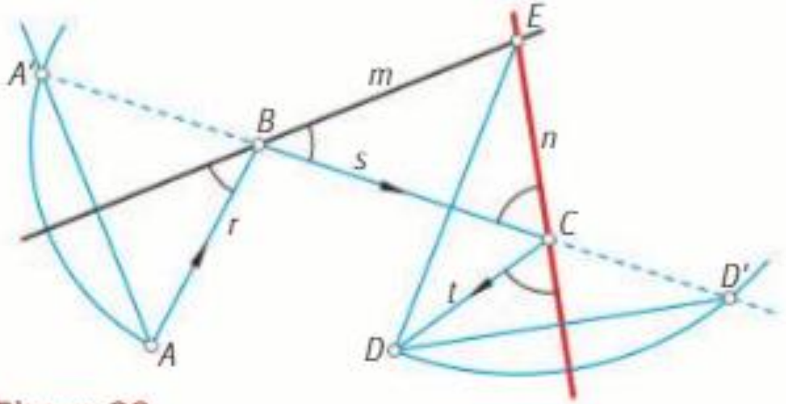

Figura 28

ACTIVIDADES

1. Dados los puntos A, B y C sobre una recta r, sabiendo que $AB = 20$ mm y $BC = 20$ mm, determina sobre r el punto D para que la razón doble sea $(ABCD) = 19/14$.

2. Sobre una recta r hay situados tres puntos, M, N y P, tales que $MN = 20$ mm y $NP = 20$ mm. Halla el punto Q de r para que se cumpla que $(NMPQ) = -2$.

3. Dadas las rectas r y s y el punto P (fig. 30), dibuja las circunferencias tangentes a las rectas r y s y que pasen por P.

4. Dados el punto A y la recta r (fig. 31), dibuja un pentágono regular que tenga un lado en la recta r y el vértice opuesto en A.

5. Dados el triángulo ABC ($AB = 60$ mm, $BC = 50$ mm y $AC = 45$ mm) y el punto O situado en el lado AC ($AO = 15$ mm), dibuja el triángulo $A'B'C'$ homotético del ABC cuyo centro de homotecia es el punto O si la razón de homotecia vale -1.

6. Con centro de homotecia en A, determina un polígono homotético del polígono dado (fig. 32), de manera que sus longitudes sean 5/7 de las longitudes iniciales.

7. En una homotecia de centro P (fig. 33), el punto A' es homotético del punto A. Construye la figura homotética del pentágono regular dado. A continuación, determina el centro del mismo y escribe la longitud real, en centímetros, del segmento OP, si la escala del dibujo es 5:2.

8. Dados los puntos A y B y la recta r (fig. 34), localiza en la recta un punto C de manera que la distancia $AC + CB$ sea la mínima posible.

9. Dada la figura $ABCDEFGHIJ$ (fig. 35), dibuja la figura simétrica respecto del punto O. Con la figura obtenida, efectúa una simetría axial según el eje e dado.

10. Dadas dos posiciones del mismo pentágono (fig. 36), halla el giro (centro y ángulo) que lleva uno sobre el otro.

11. Halla la figura transformada de la figura dada (fig. 37) después de efectuar, primero, un giro de +60°, y después una homotecia de razón 3:5 respecto del punto O.

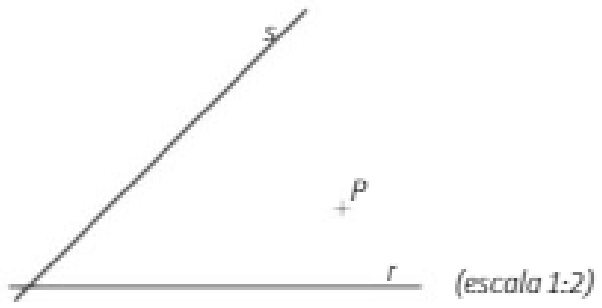

Figura 30

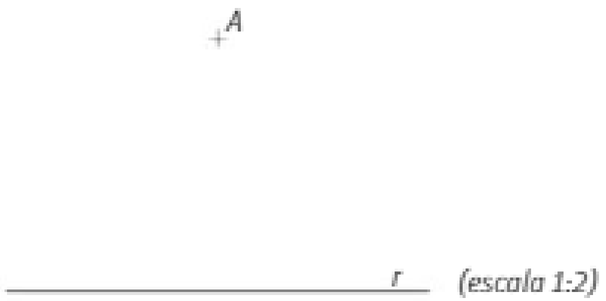

Figura 31

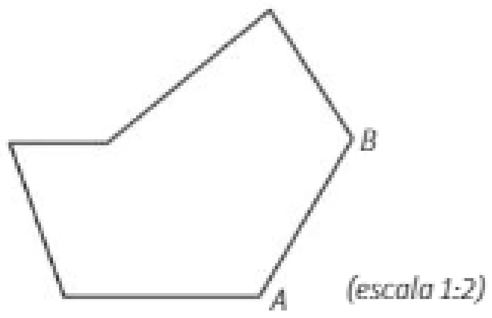

Figura 32

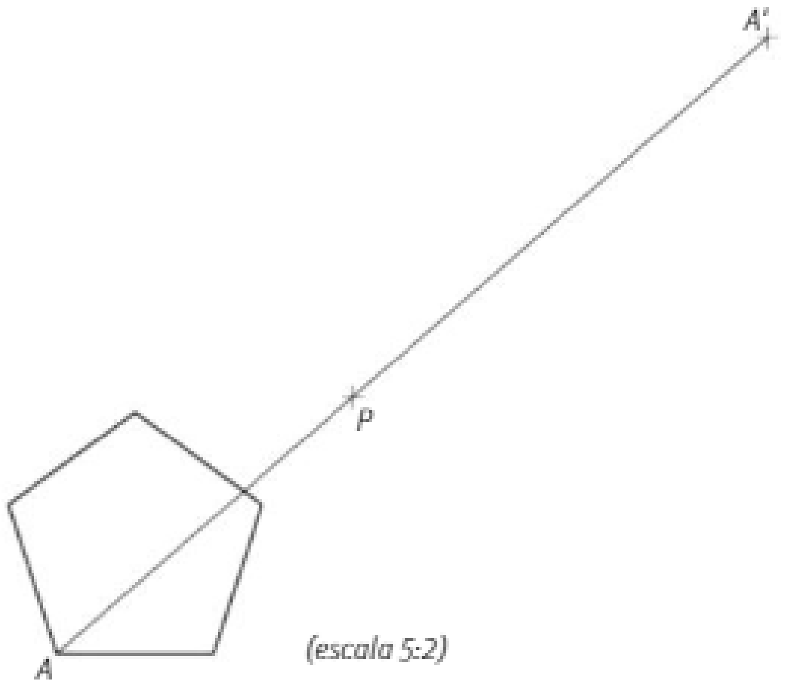

Figura 33

Figura 34

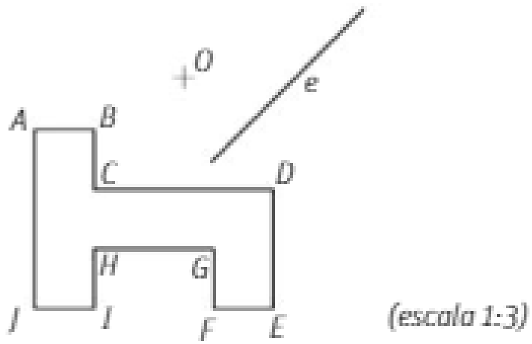

Figura 35

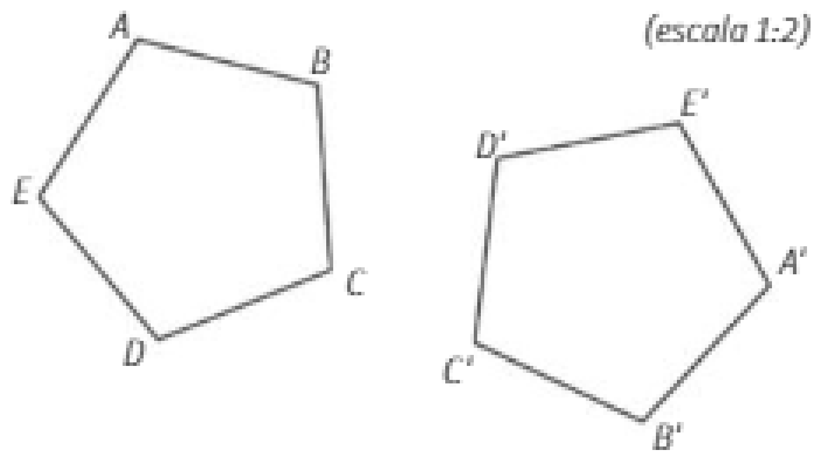

Figura 36

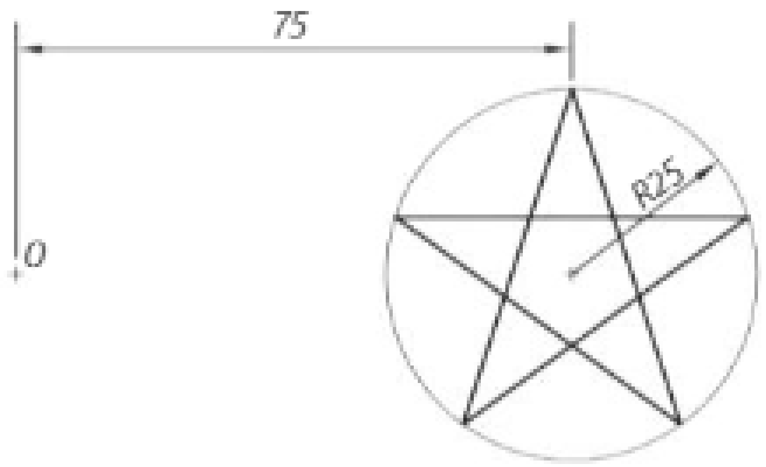

Figura 37