

Orquintero

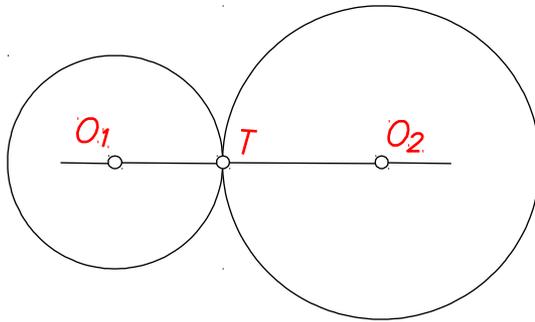
Tangencias y enlaces

tema

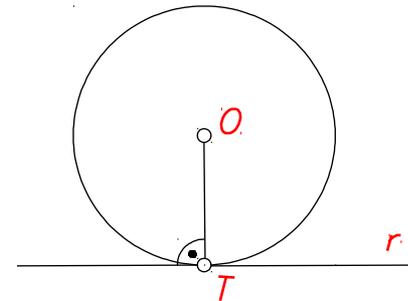
5



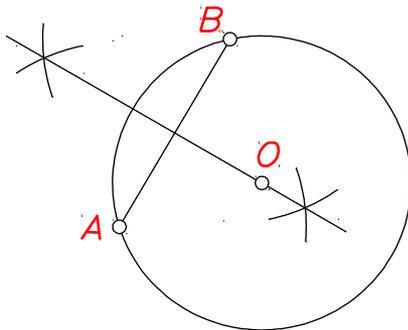
Propiedades de las tangencias



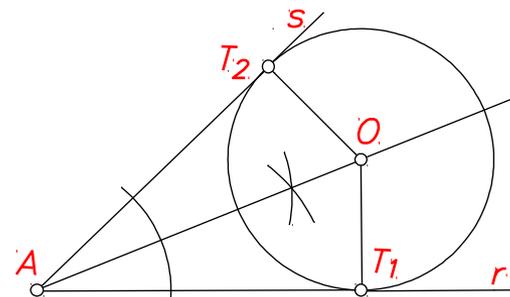
Si dos circunferencias son tangentes, el punto de tangencia está en la recta O_1O_2



Si una recta es tangente a una circunferencia el punto de tangencia está en la perpendicular a r , trazada por O



Si una circunferencia pasa por dos puntos, el centro está en la mediatriz



Si una circunferencia es tangente a dos rectas el centro está en la bisectriz



A continuación vamos a estudiar los casos más relevantes en la práctica del dibujo técnico, indicando entre paréntesis la abreviatura que identifica cada caso para su posible sistematización. El significado de cada letra es el siguiente:

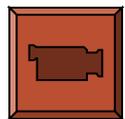
R radio

p punto

r recta

c circunferencia



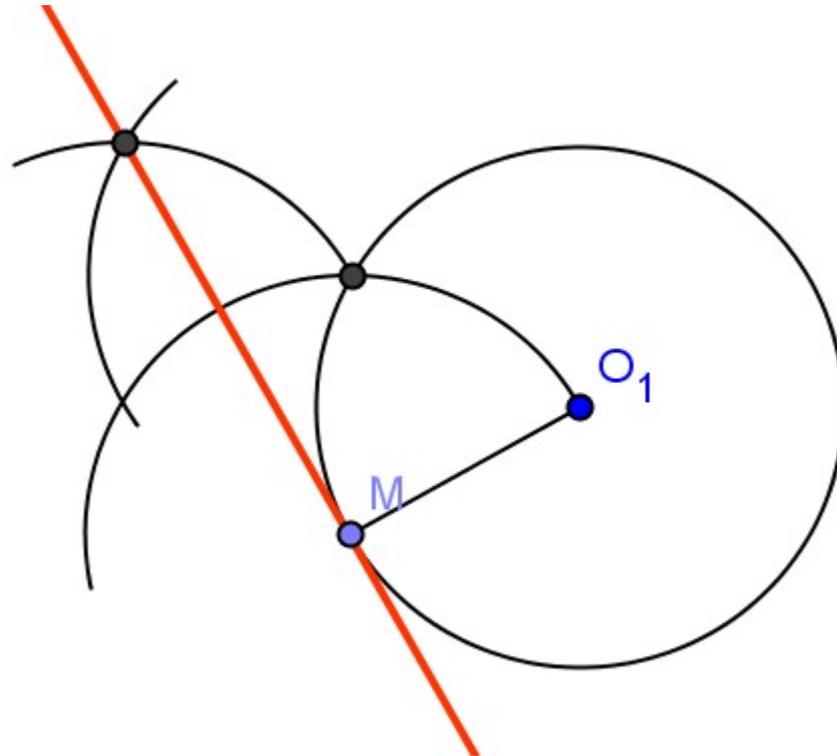


=básico



RECTAS TANGENTES A UNA CIRCUNFERENCIA QUE PASAN POR UN PUNTO

El punto está en la circunferencia.



(Número de soluciones: 1.)

Dada la circunferencia de centro O y el punto M :

- 1 Se traza el radio OM correspondiente al punto dado.
- 2 Por el punto M se traza la recta r perpendicular al radio OM .



RECTAS TANGENTES A UNA CIRCUNFERENCIA QUE PASAN POR UN PUNTO

El punto es exterior a la circunferencia

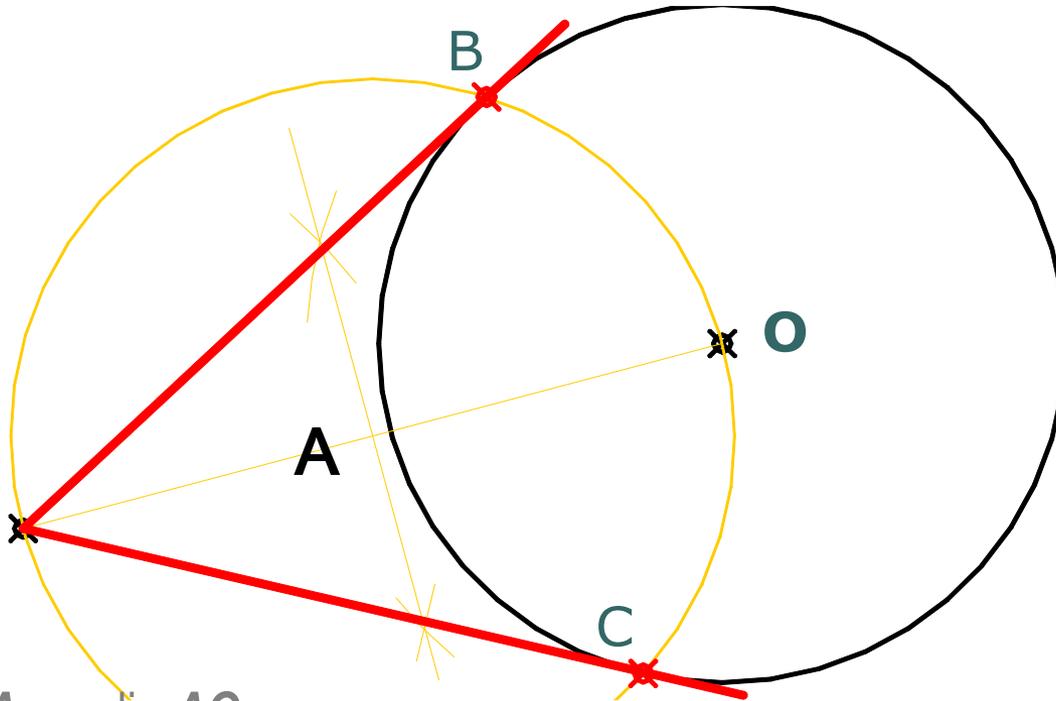
(Número de soluciones: 2.)

Dada la circunferencia de centro O y el punto M :

1 Se dibuja el segmento OM y se halla el punto medio A del mismo mediante el trazado de la mediatriz.

2 Con centro en el punto A y radio $AO = AM$ se traza la circunferencia que corta a la dada en los puntos B y C , puntos de tangencia de las soluciones.

3 Se une el punto M con los puntos B y C mediante las rectas r y s .



RECTAS TANGENTES A DOS CIRCUNFERENCIAS DE DISTINTO RADIO

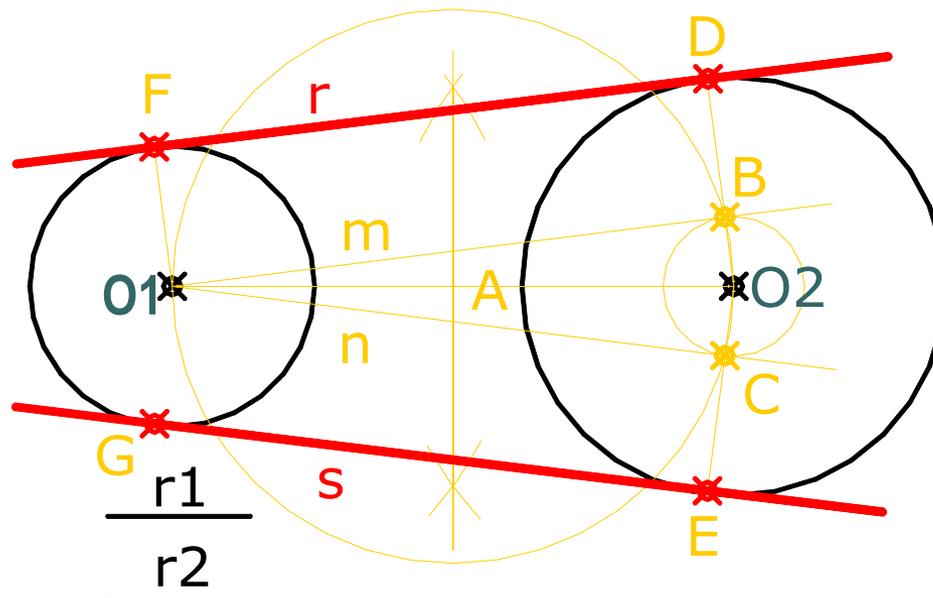
Tangentes exteriores

(Número de soluciones: 2.)

Sean las circunferencias de centro O_1 y O_2 . Y radios r_1 y r_2 , respectivamente:

1 Con centro en O_2 , centro de la circunferencia de mayor radio, se traza otra circunferencia cuyo radio valga $r_2 - r_1$.

2 Desde el centro O_1 se trazan las rectas m y n tangentes a la circunferencia anterior, de radio $r_2 - r_1$ (para ello, con centro en el punto medio A del segmento O_1O_2 , se dibuja un arco de radio AO_2 que corta a la circunferencia en los puntos B y C , que unidos con O_1 nos dan las tangentes m y n).



3 Las rectas que unen el punto O_2 con B y C se cortan con la circunferencia dato en los puntos D y E de tangencia. Los puntos de tangencia con la otra circunferencia se hallan trazando por O_1 las rectas paralelas a O_2D y a O_2E hasta cortar a la circunferencia en los puntos F y G .

4 Las rectas r y s que unen los puntos de tangencia FD y GE son la solución.

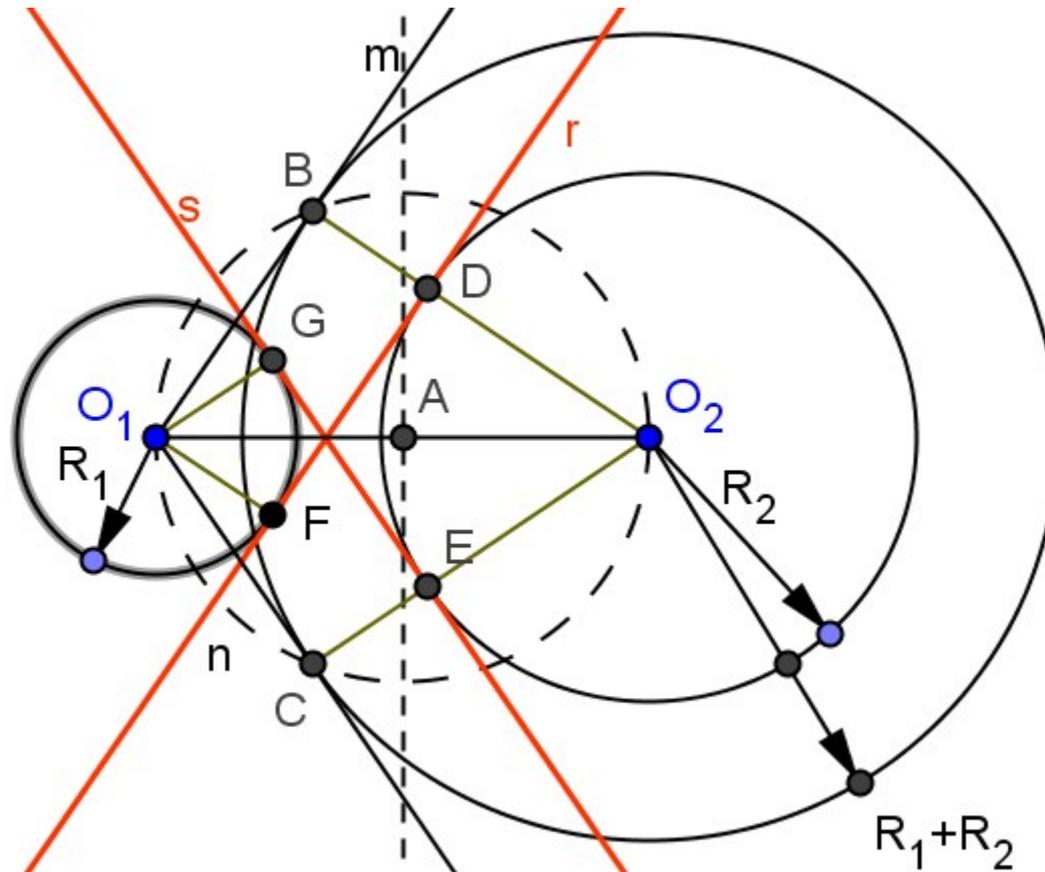
(Número de soluciones: 2.)

Tangentes interiores

Sean las circunferencias de centro O_1 y O_2 , y radios r_1 y r_2 , respectivamente:

1 Con centro en O_2 , centro de la circunferencia de mayor radio, se traza otra circunferencia cuyo radio valga $r_2 + r_1$.

2 Desde el centro O_1 se trazan las rectas m y n tangentes a la circunferencia anterior, de radio $r_2 + r_1$; es decir, con centro en el punto medio A del segmento O_1O_2 , se dibuja un arco de radio AO_2 que corta a la circunferencia en los puntos B y C , que unidos con O_1 nos dan las tangentes m y n .



3 Las rectas que unen el punto O_2 con B y C se cortan con la circunferencia dada en los puntos D y E de tangencia. Los puntos de tangencia con la otra circunferencia se hallan trazando por O_1 las rectas paralelas a O_2D y a O_2E , trazadas en sentido contrario, hasta cortar a la circunferencia en los puntos F y G .

4 Las rectas r y s que unen los puntos de tangencia FD y GE son la solución.

Trazados de circunferencias conociendo el radio

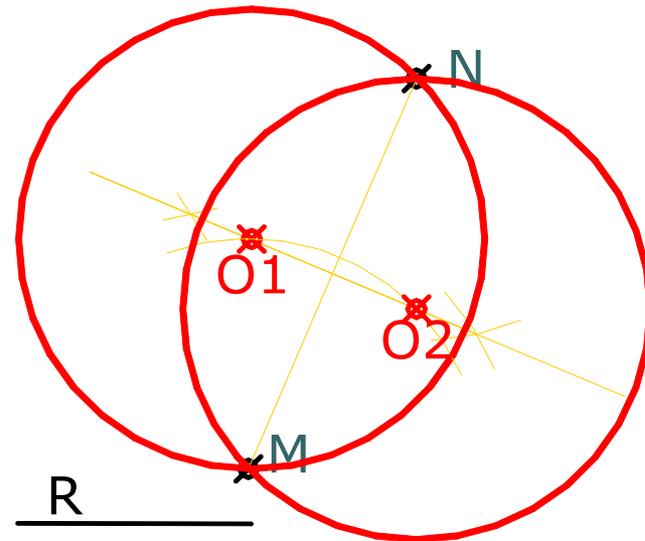


CIRCUNFERENCIAS QUE PASAN POR DOS PUNTOS (R_{pp})

Este no es un caso propiamente de tangencias; no obstante, se incluye aquí por seguir una cierta sistematización en el trazado de las mismas.

Dados los puntos M y N , Y el radio R de la circunferencia:

1 Con centro en el punto M y radio R se trazan dos arcos de circunferencia.



2 Con centro en M y radio R se trazan otros dos arcos de circunferencia que se cortan con los anteriores en los puntos O_1 y O_2 , centros de las circunferencias solución.



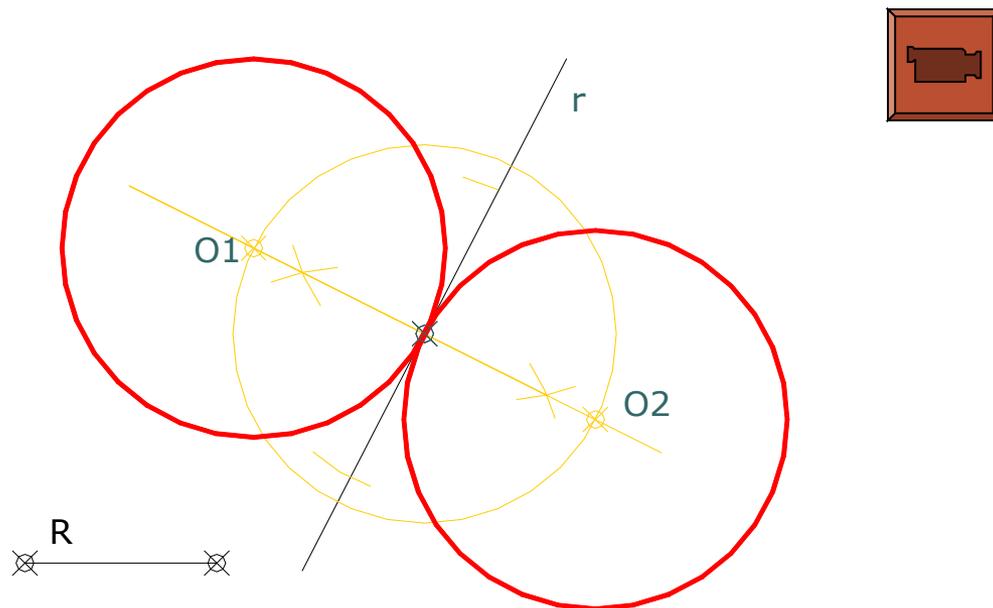
CIRCUNFERENCIAS QUE PASAN POR UN PUNTO Y SON TANGENTES A UNA RECTA

El punto está en la recta

(Rpr)

Sean la recta r , el punto M de ella y el radio R de la circunferencia:

- 1 Por el punto M se traza la perpendicular a la recta r .
- 2 Sobre la perpendicular, y a partir del punto M , se llevan en ambos sentidos las distancias $MO1$ y $MO2$ iguales al radio R dado.



- 3 Los puntos $O1$ y $O2$ son los centros de las soluciones y M el punto de tangencia común.



CIRCUNFERENCIAS QUE PASAN POR UN PUNTO Y SON TANGENTES A UNA RECTA

El punto es exterior

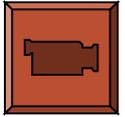
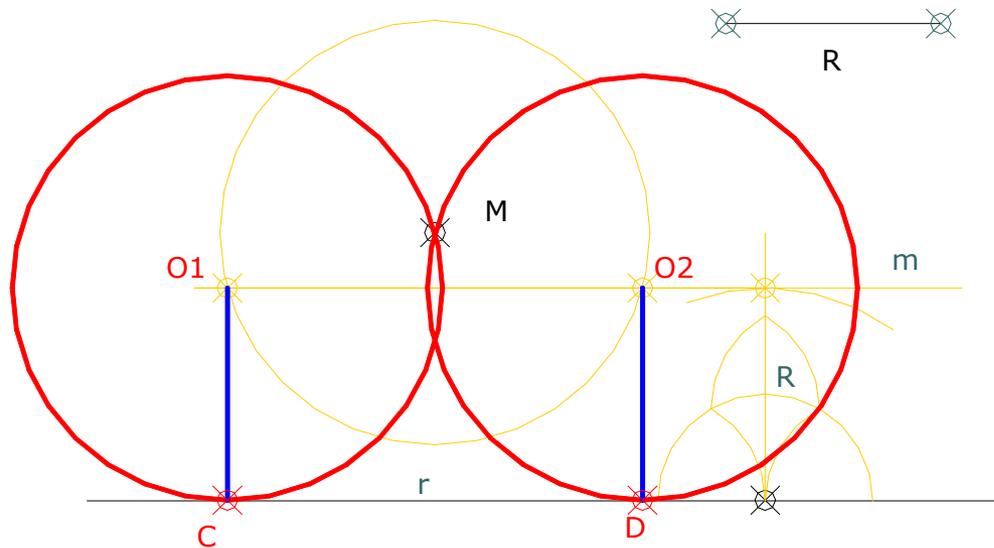
(Rpr)

Sean la recta r , el punto M y el radio R de la circunferencia:

1 Por un punto A cualquiera de la recta r se traza la perpendicular a esta y sobre ella se transporta un segmento AB igual al radio R ; a continuación, por el punto B se traza la recta m paralela a r .

2 Con centro en el punto M y radio R se trazan dos arcos de circunferencia que cortan a la recta m en los puntos $O1$ y $O2$, centros de las dos soluciones.

3 Por $O1$ y $O2$ se trazan las perpendiculares a la recta r , obteniendo los puntos C y D de tangencia.



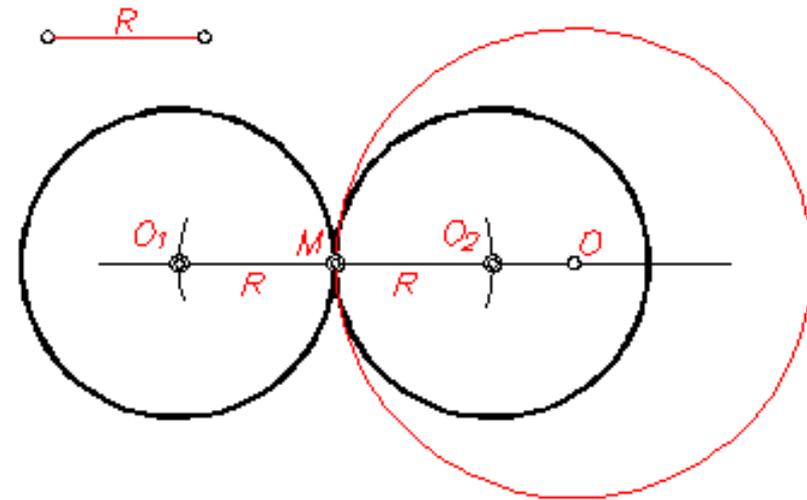
CIRCUNFERENCIAS QUE PASAN POR UN PUNTO Y SON TANGENTES A UNA CIRCUNFERENCIA

El punto está en la circunferencia

(R_{pc})

Sean la circunferencia de centro **O**, el punto **M** de ella y el radio **R** de las soluciones:

- 1 Se une el centro **O** con el punto **M**.
- 2 Sobre la recta anterior y a partir del punto **M** se lleva en ambos sentidos las distancias **MO1** y **MO2** iguales al radio **R** dado.



*COLOR ROJO PARA LOS DATOS

- 3 Los puntos **O1** y **O2** son los centros de las soluciones y **M** el punto de tangencia común.



CIRCUNFERENCIAS QUE PASAN POR UN PUNTO Y SON TANGENTES A UNA CIRCUNFERENCIA

El punto es exterior

(Rpc)

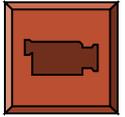
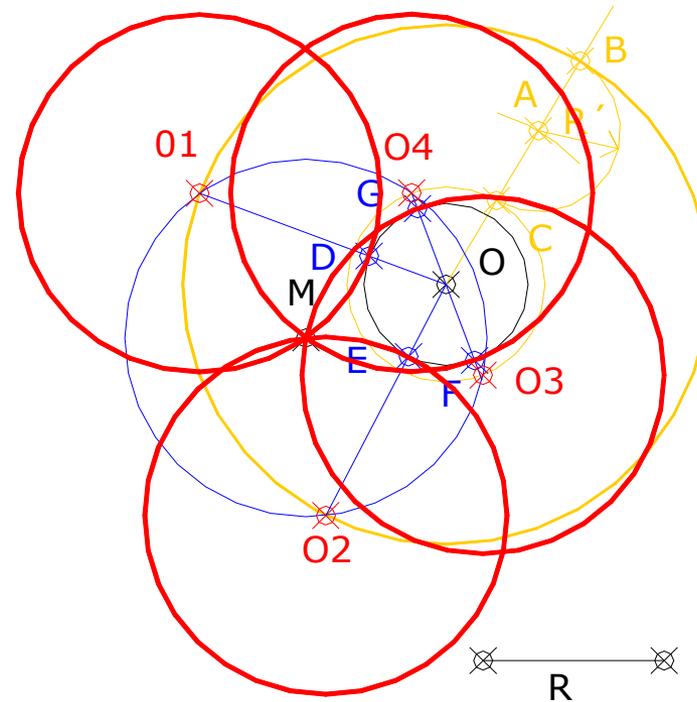
Sean la circunferencia de centro **O**, el punto **M** y el radio **R** de las circunferencias solución:

1 A partir del centro **O** se traza una recta cualquiera y sobre ella se transporta el segmento **OA = R**; en dicha recta se determinan también los puntos **B** y **C** de forma que **AB = AC = R'**, siendo **R'** el radio de la circunferencia dada de centro **O**.

2 Con centro en **O** y radios **OB = R + R'** y **OC = R - R'** se trazan sendas circunferencias.

3 Con centro en el punto **M** y radio **R** se traza la circunferencia que corta a las anteriores en los puntos **O1**, **O2**, **O3** y **O4**, centros de las circunferencias solución.

4 Los puntos de intersección de la circunferencia dada con los segmentos **OO1**, **OO2**, **OO3** y **OO4** determinan los puntos **D**, **E**, **F** y **G** de tangencia.

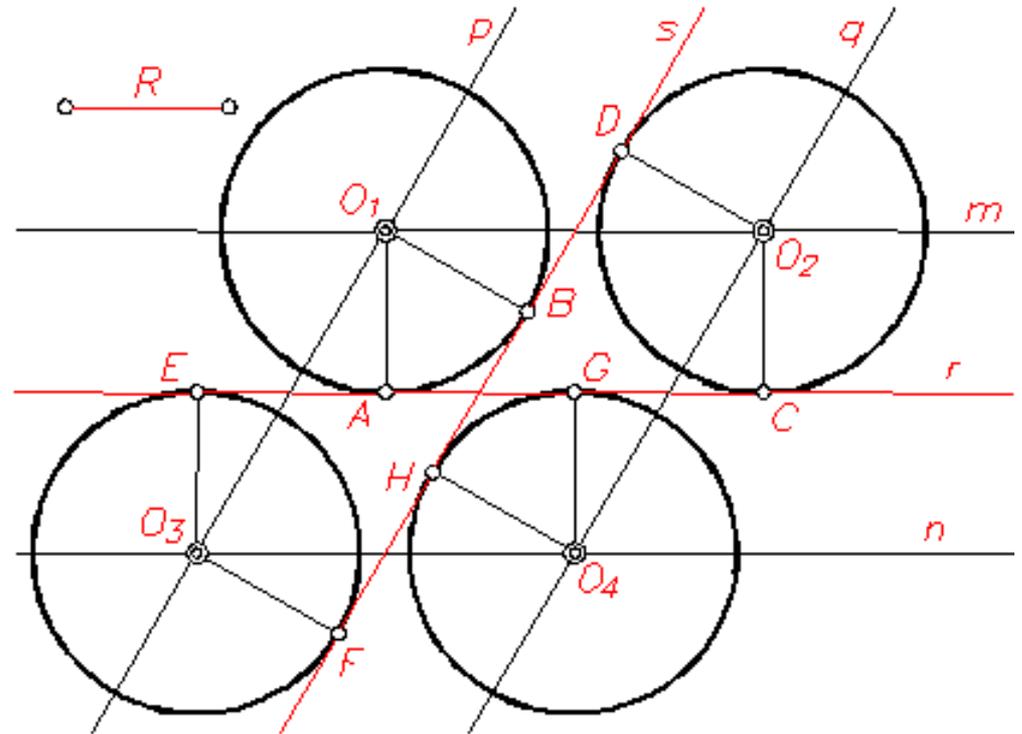


CIRCUNFERENCIAS TANGENTES A DOS RECTAS QUE SE CORTAN (**Rrr**)

Sean las rectas r y s , y el radio R :

1 Se trazan dos rectas m y n , paralelas a r , a una distancia R y otras dos rectas p y q , paralelas a s , a una misma distancia R .

2 Donde las cuatro rectas m , n , p y q se cortan se obtienen los centros O_1 , O_2 , O_3 Y O_4 de las soluciones.



*COLOR ROJO PARA LOS DATOS

3 Los puntos de tangencia A , B , C , etc., se hallan trazando por los centros O_1 , O_2 , O_3 Y O_4 las perpendiculares a las rectas r y s .

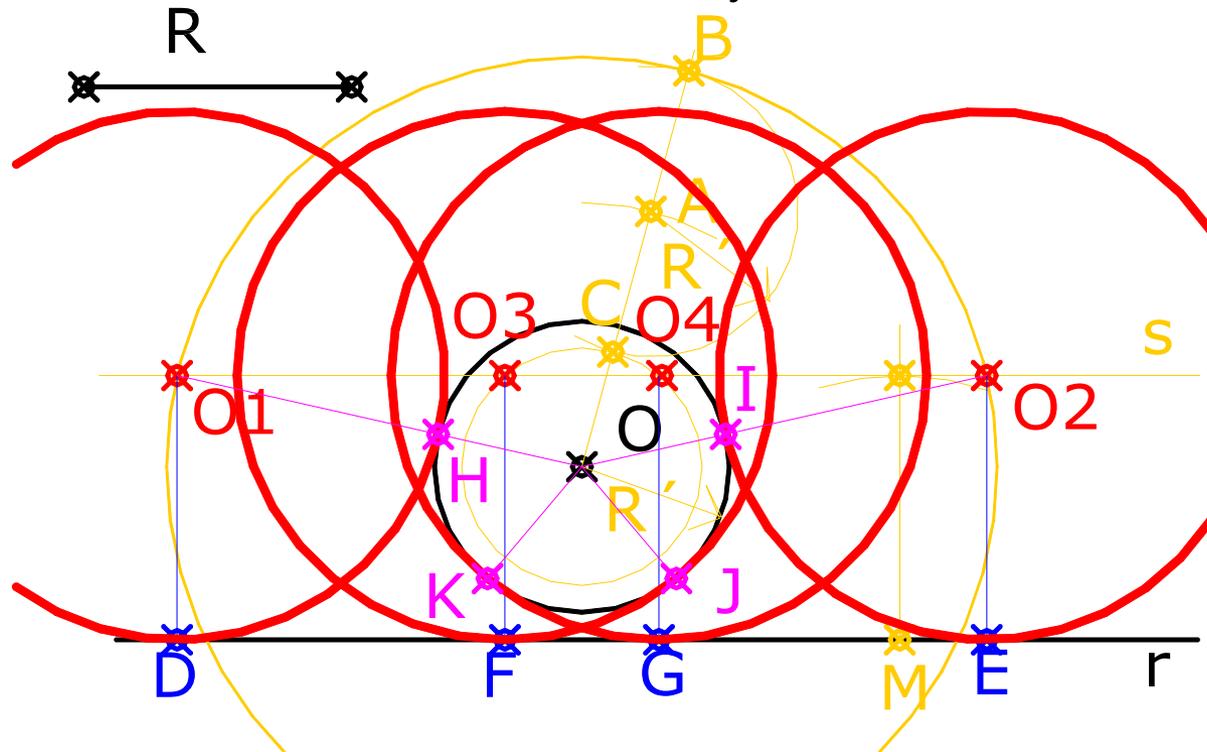


CIRCUNFERENCIAS TANGENTES A UNA RECTA Y A UNA CIRCUNFERENCIA (Rrc)

La circunferencia y la recta son exteriores

Dadas la recta r , la circunferencia de centro O y el radio R :

4 La recta s corta a las circunferencias anteriores en los puntos $O1$, $O2$, $O3$ y $O4$.



5 Los puntos de tangencia H , I , J Y K con la circunferencia se hallan uniendo los puntos $O1$, $O2$, $O3$ Y $O4$ con O , y los puntos de tangencia D , E , F y G con la recta r , trazando las perpendiculares a esta desde los centros anteriores.



CIRCUNFERENCIAS TANGENTES A UNA RECTA Y A UNA

La circunferencia y la recta son
tangentes

CIRCUNFERENCIA (Rrc)

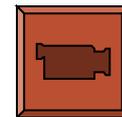
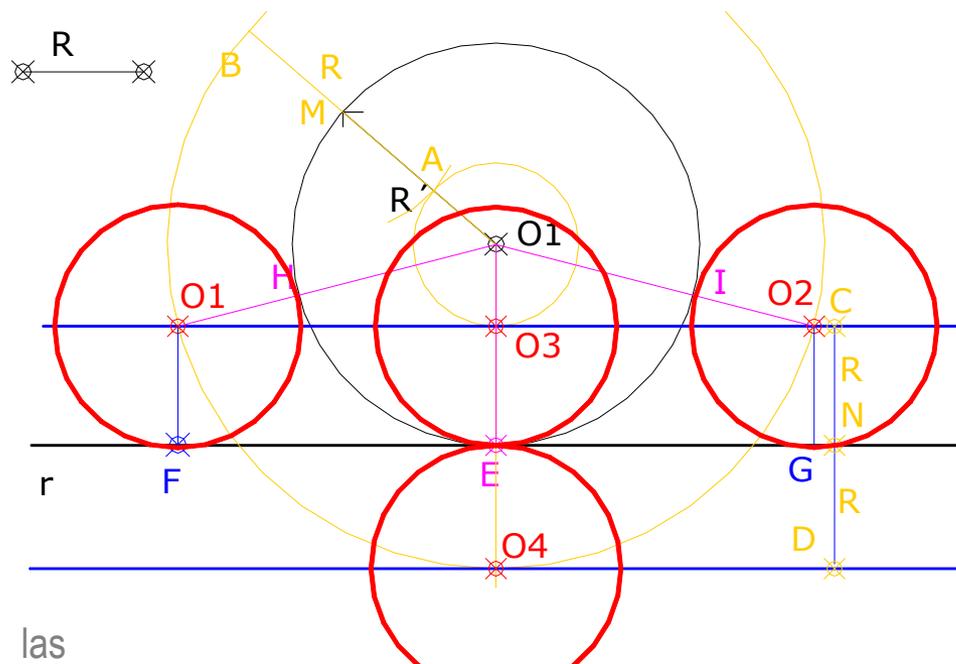
Dadas la recta r , la circunferencia de centro O y el radio R :

1 Con centro en O y radios $OA = R' - R$ Y $OB = R' + R$ se trazan dos circunferencias. siendo R' el radio de la circunferencia dada de centro O .

2 Por un punto N cualquiera de la recta r se traza una perpendicular a esta; sobre ella se transportan los segmentos $NC = ND = R$ y por los puntos C y D se trazan las rectas paralelas a r .

3 Las rectas paralelas cortan a las circunferencias anteriores (o son tangentes) en los puntos $O1$, $O2$, $O3$ Y $O4$. centros de las circunferencias solución.

4 Los puntos de tangencia se determinan como en los casos anteriores.



CIRCUNFERENCIAS TANGENTES A UNA RECTA Y A UNA CIRCUNFERENCIA (Rrc)

La circunferencia y la recta son secantes

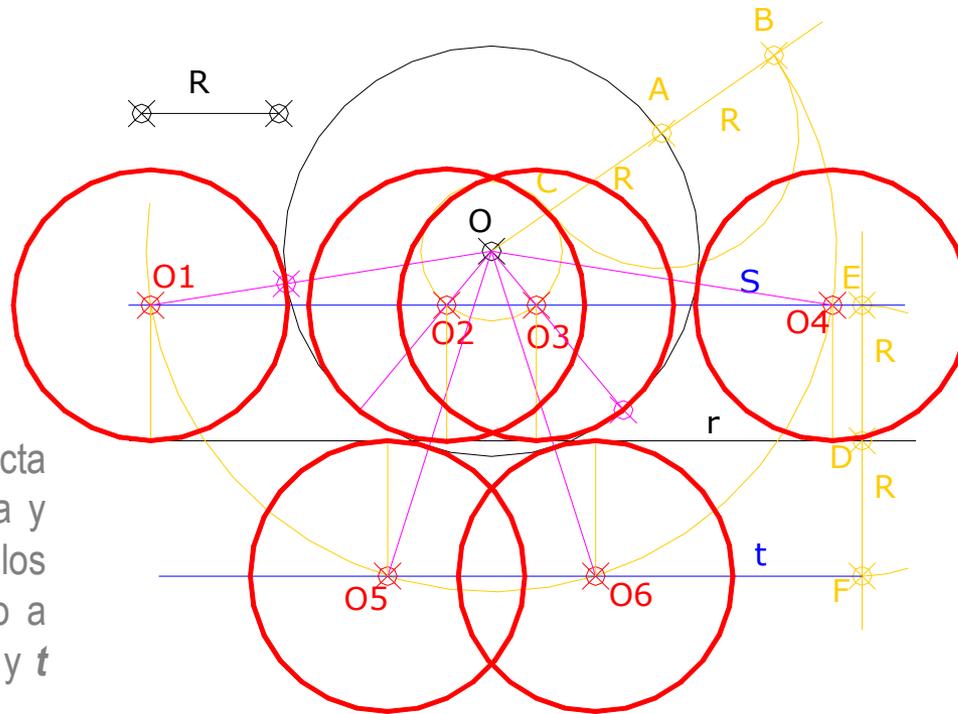
Dadas la recta r , la circunferencia de centro O y el radio R :

1 Desde el centro O se traza un radio OA arbitrario, llevando a partir del punto A , y en ambos sentidos, los segmentos $AB = AG = R$. Y trazando a continuación dos arcos de centro O y radios OB y OC .

2 Por un punto O cualquiera de la recta r se traza una perpendicular a esta y sobre ella se transportan los segmentos $DE = DF = R$, trazando a continuación por E y F las rectas s y t paralelas a r .

3 Los puntos de intersección $O1$, $O2$, $O3$, $O4$, $O5$ Y $O6$ de las rectas s y t con los arcos de circunferencia trazados anteriormente son los centros de las circunferencias solución.

4 Los puntos de tangencia se determinan como en casos anteriores.



CIRCUNFERENCIAS TANGENTES A DOS CIRCUNFERENCIAS {Rcc}

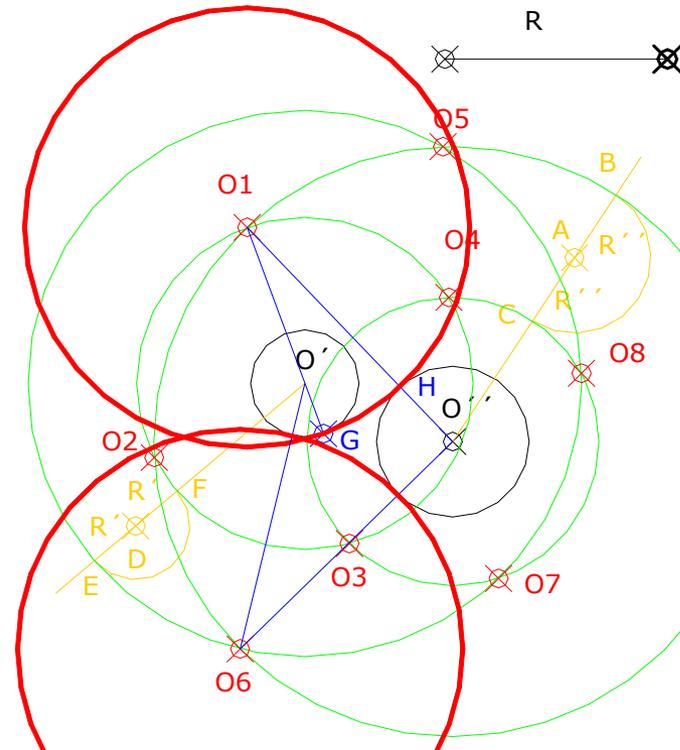
Las circunferencias son exteriores

Dadas las circunferencias de centros O' y O'' y el radio R :

1 A partir del centro O' se traza una recta cualquiera y sobre ella se transporta el segmento $O'D = R$; en dicha recta se determinan también los puntos E y F de forma que $DE = DF = R'$, siendo R' el radio de la circunferencia dada de centro O' .

2 Desde O'' se traza otra recta, llevando sobre ella el segmento $O''A = R$ y determinando los puntos B y C de forma que $AB = AC = R''$, siendo R'' el radio de la circunferencia dada de centro O'' .

3 Con centro en O' y radios $O'E = R + R'$ y $O'F = R - R'$ y con centro en O'' y radios $O''B = R + R''$ y $O''C = R - R''$ se trazan cuatro circunferencias que se cortan en los puntos $O_1, O_2, O_3, \dots, O_8$, centros de las circunferencias solución.



4 Los puntos de tangencia se determinan al unir los centros de las circunferencias de que se trate. En la figura se han dibujado solo las circunferencias de centros O_1 y O_6 para mayor claridad.º



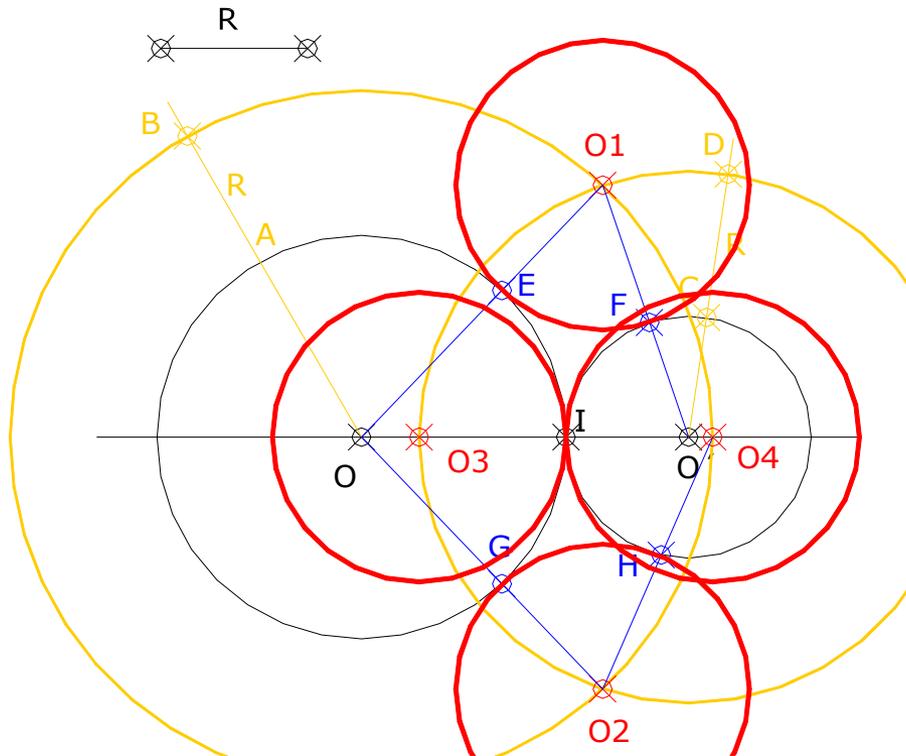
CIRCUNFERENCIAS TANGENTES A DOS CIRCUNFERENCIAS {Rcc}

Las circunferencias son tangentes

Dadas las circunferencias de centro O y O' y el radio R :

1 Con centro en O y radio $OB = DA + R$ y con centro en O' y radio $O'D = O'C + R$ se trazan dos circunferencias.

2 Las dos circunferencias anteriores se cortan entre sí en los puntos $O1$ y $O2$ que, junto con los puntos $O3$ y $O4$ de intersección con la recta OO' , determinan los centros de las soluciones.



3 Los puntos de tangencia se determinan como en casos anteriores.



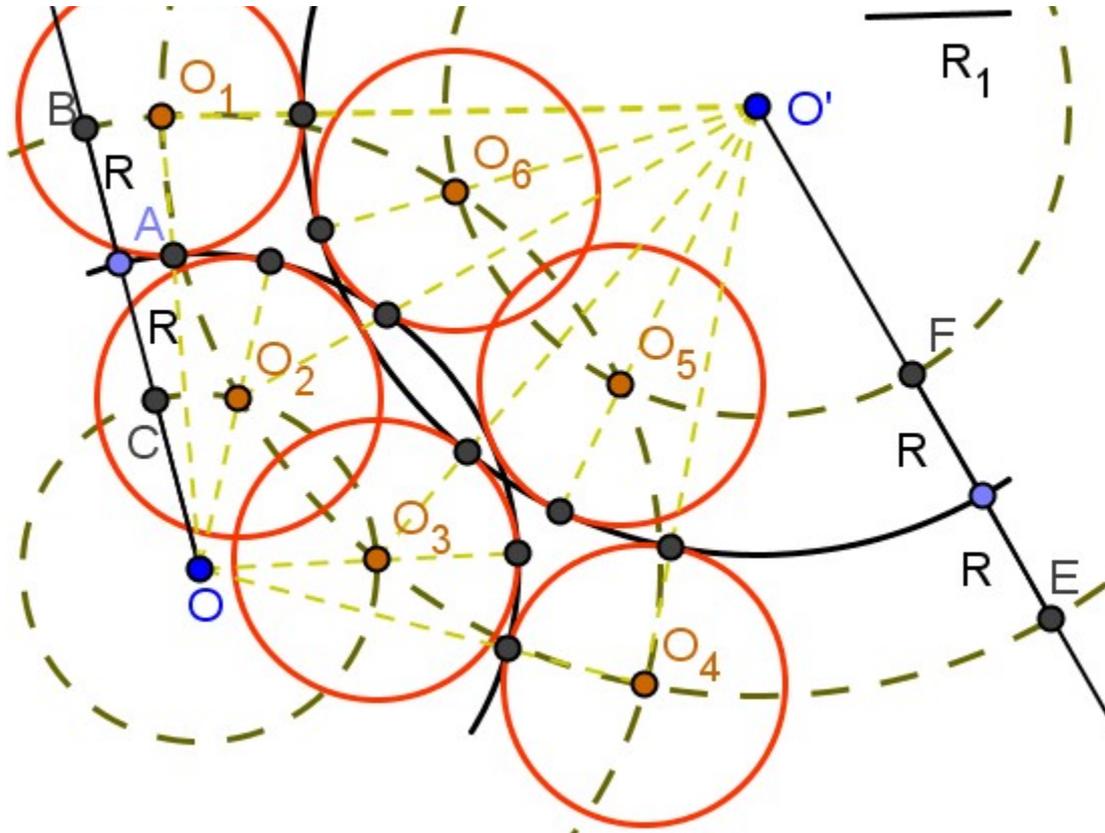
CIRCUNFERENCIAS TANGENTES A DOS CIRCUNFERENCIAS {Rcc}

Las circunferencias son secantes

Dadas las circunferencias de centro O y O' Y el radio R :

1 Con centro en O y radios $OB = DA + R$ y $OC = DA - R$ se trazan dos circunferencias.

2 Con centro en O' y radios $OE = OD + R$ y $OF = OD - R$ se dibujan otras dos circunferencias.



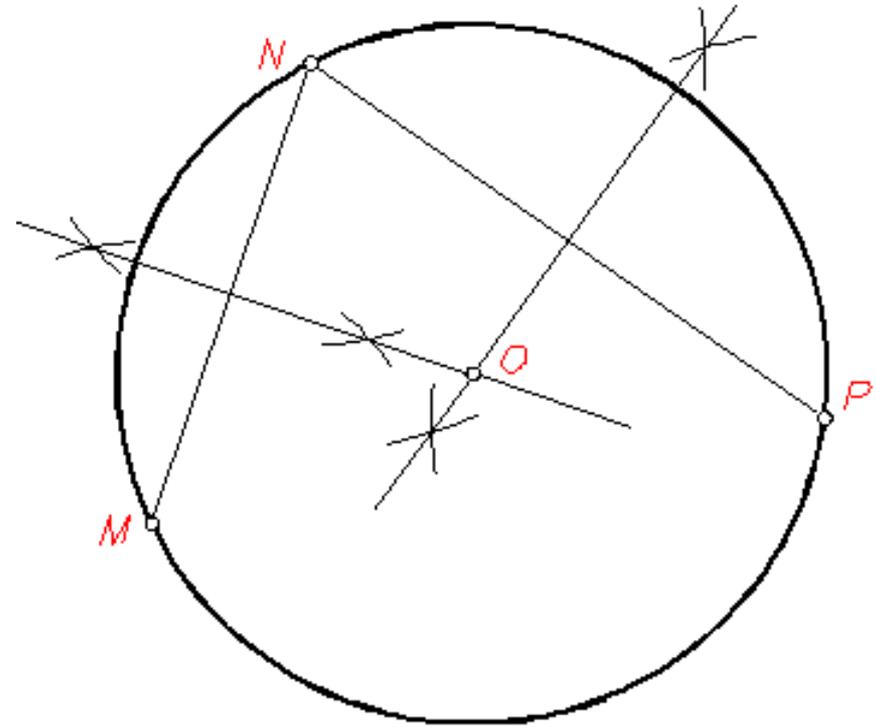
3 Las circunferencias anteriores se cortan en los puntos O_1, O_2, \dots, O_6 , centros de las soluciones.

4 Los puntos de tangencia se determinan, como en casos anteriores, uniendo centros.



CIRCUNFERENCIA QUE PASA POR TRES PUNTOS

1. Se halla la mediatriz del segmento MN
2. Se halla la mediatriz del segmento NP
3. El punto O es el centro de la circunferencia



N



M

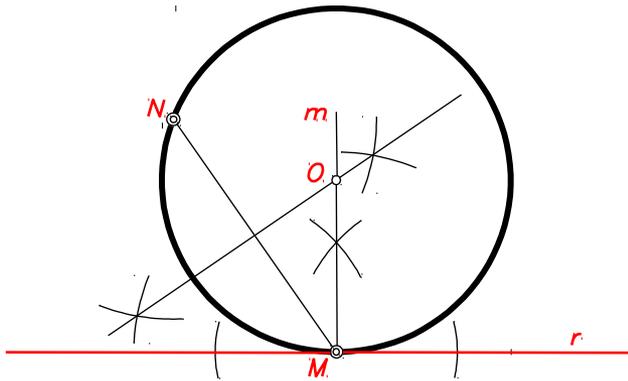


P



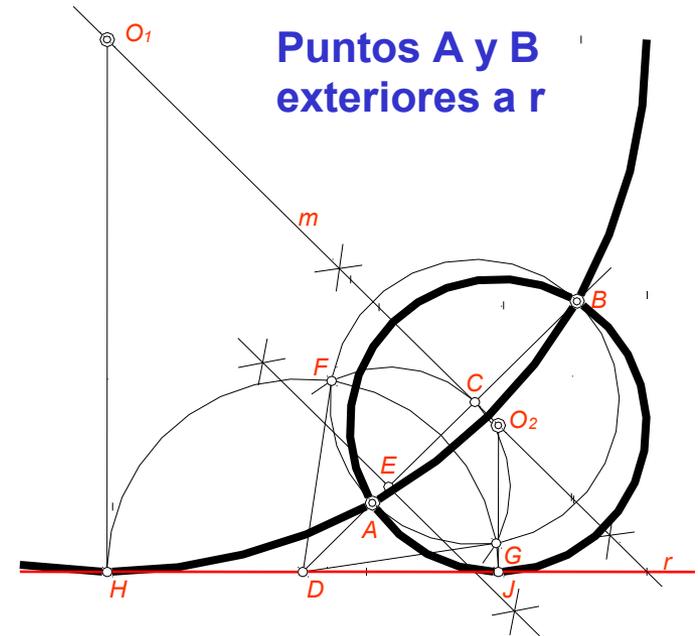
Circunferencias que pasan por un punto y son tangentes a una recta por un punto dado (ppr)

Un punto M sobre r



1. Por M se traza la perpendicular a la recta
2. Se traza la mediatriz del segmento MN
3. El punto O es el centro de la circunferencia

Circunferencias que pasan por dos puntos y son tangente a una recta (ppr)



1. Se traza circunferencia de diámetro AB
2. Se halla el punto D de intersección de la recta AB con r
3. Se trazan tangentes desde D a la circunferencia obteniendo F y G
4. Los puntos de tangencia con r H y J cumplen que la distancia $FD=GD=HD=JD$

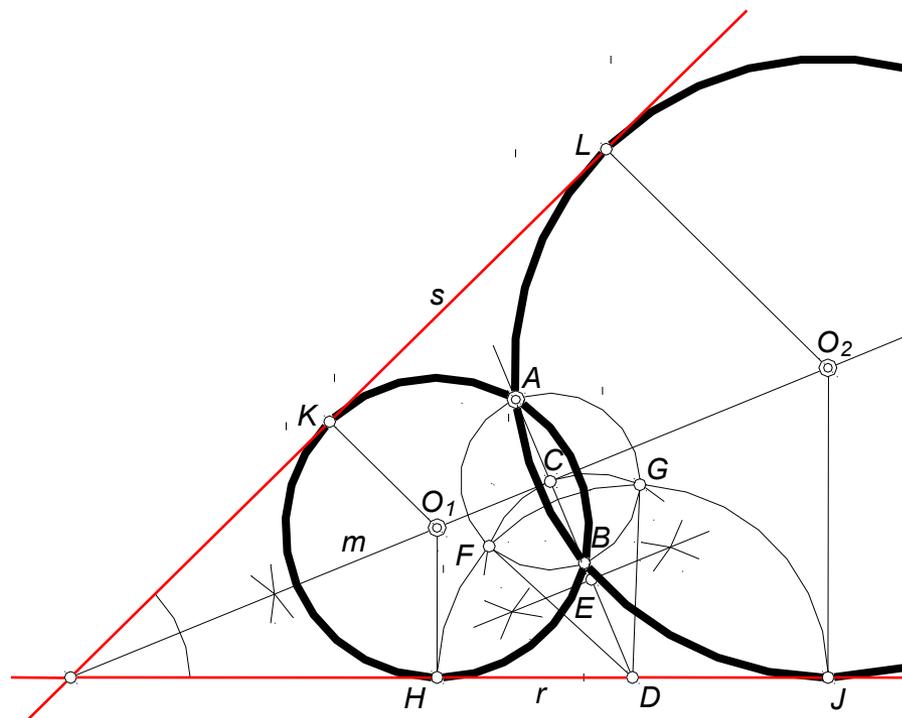
incluido en los anexos de apuntes



Circunferencias que pasan por un punto tangentes a dos rectas (prr)

Punto A exterior a las rectas

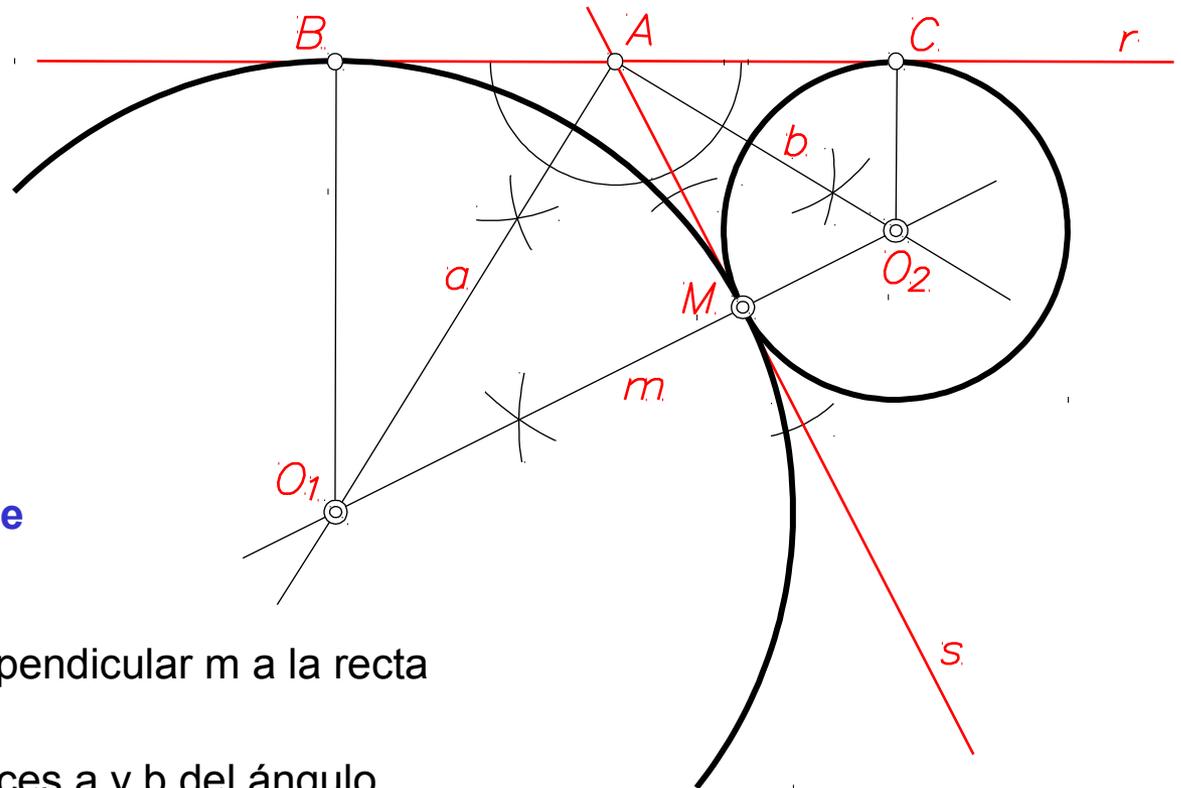
1. Se traza m , bisectriz de r y s
2. Hallamos B , simétrico de A respecto de la bisectriz m
3. Se traza circunferencia de diámetro AB
4. Se halla el punto D de intersección de la recta AB con r
5. Se trazan tangentes desde D a la circunferencia obteniendo F y G
6. Los puntos de tangencia con r H y J cumplen que la distancia $FD=GD=HD=JD$



incluido en los **anexos** de los apuntes



Circunferencias que pasan por un punto y son tangentes a dos rectas (prr) (II)

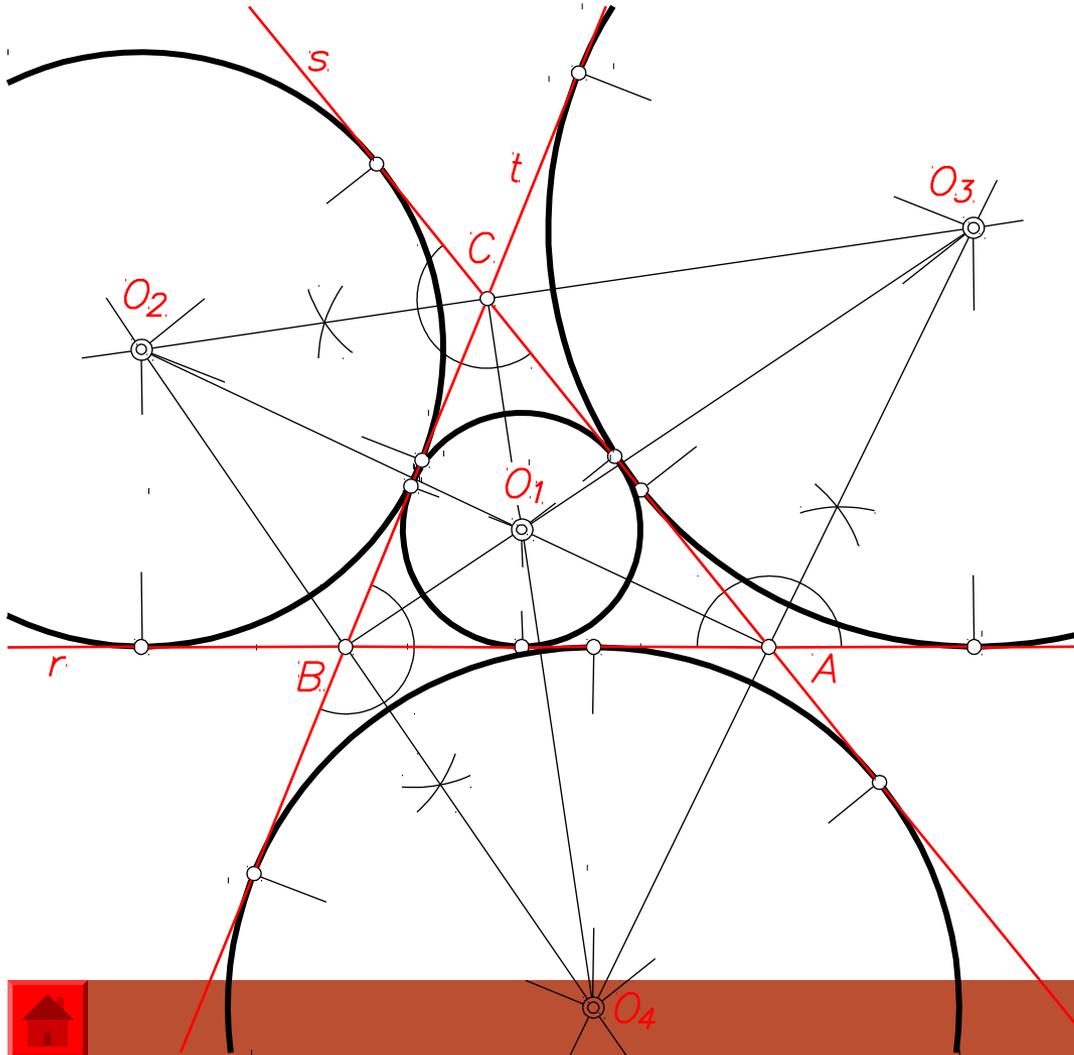


Punto M sobre una de las rectas

1. Por M se traza la perpendicular m a la recta s
2. Se trazan las bisectrices a y b del ángulo que forman las rectas r y s
3. Los puntos O_1 y O_2 son los centros de las circunferencias



6 Circunferencias tangentes a tres rectas (rrr)



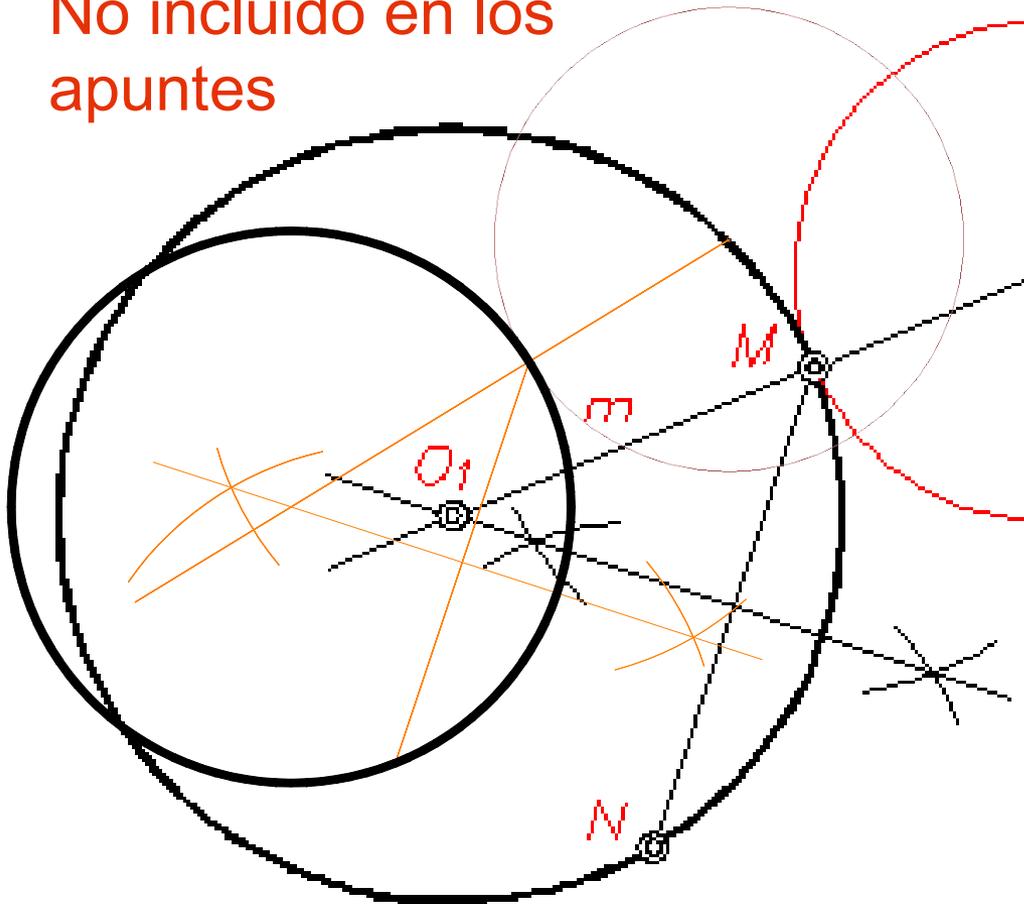
1. Se trazan las bisectrices interiores y exteriores de los tres ángulos
2. Las bisectrices interiores se cortan en el punto O_1
3. Las bisectrices exteriores se cortan en los puntos O_2 , O_3 y O_4

incluido en los **anexos** de los apuntes



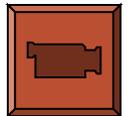
CIRCUNFERENCIA QUE PASA POR UN PUNTO Y ES TANGENTE A UNA CIRCUNFERENCIA POR UN PUNTO (ppc)

No incluido en los apuntes



rafa:

Si los dos puntos son exteriores, ver Pág. 59 libro 2º bachillerato Editorial SM



1. Se traza la recta m que une O y M
2. Se traza la mediatriz del segmento MN
3. El punto O_1 es el centro de la circunferencia

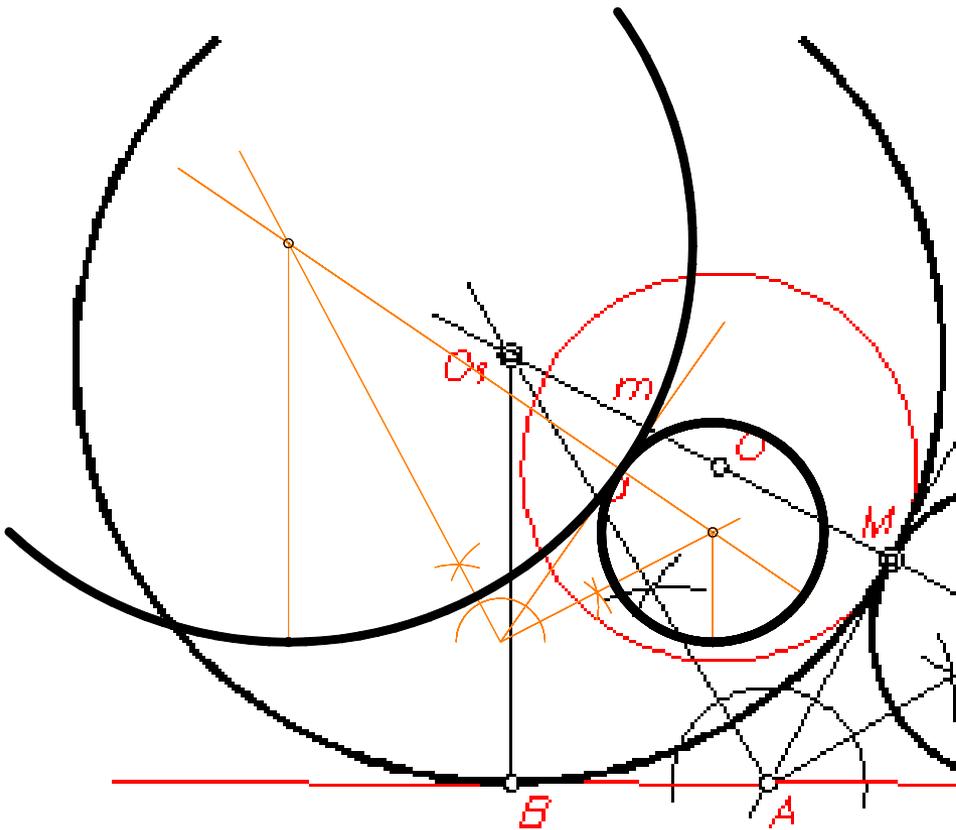
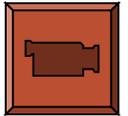


CIRCUNFERENCIA TANGENTES A UNA RECTA Y A UNA CIRCUNFERENCIA CONOCIENDO UN PUNTO DE TANGENCIA (prc)

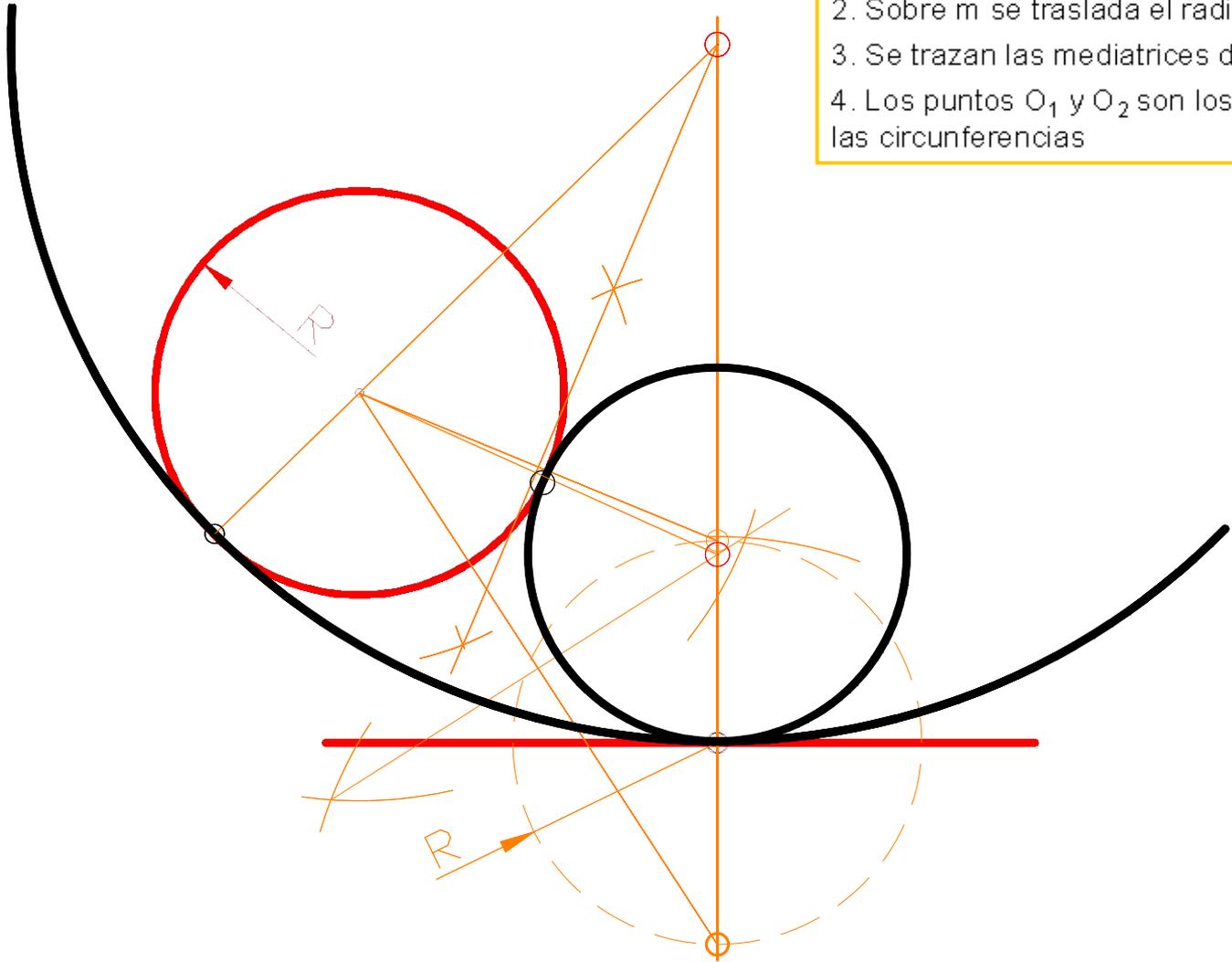
Ejercicio de selectividad año 2004

El punto está en la circunferencia

1. Se traza la recta OM y la tangente en M
2. Se trazan las bisectrices del ángulo A
3. Los puntos O_1 y O_2 son los centros de las circunferencias



**CIRCUNFERENCIA TANGENTES A UNA RECTA Y A UNA CIRCUNFERENCIA
CONOCIENDO UN PUNTO DE TANGENCIA (prc)**



El punto está en la recta

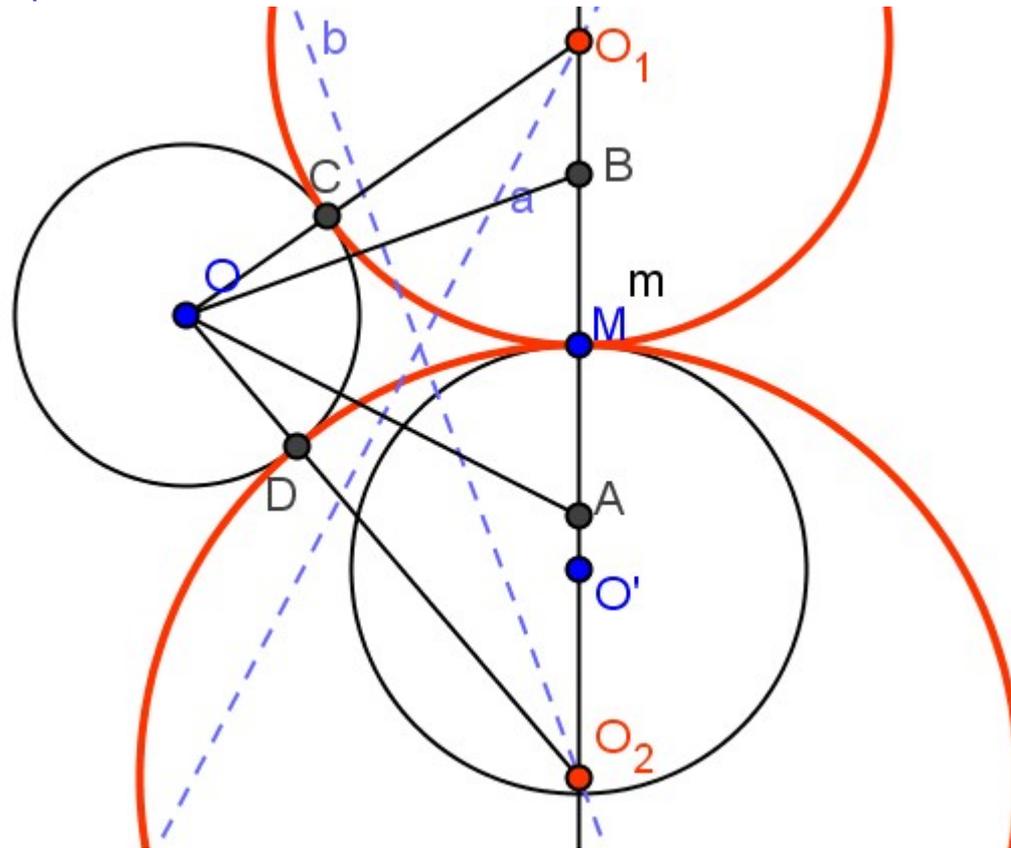
1. Se traza la perpendicular a r por M
2. Sobre m se traslada el radio de O
3. Se trazan las mediatrices de OA y OB
4. Los puntos O_1 y O_2 son los centros de las circunferencias

No incluido en los
apuntes

CIRCUNFERENCIAS TANGENTES A DOS CIRCUNFERENCIAS CONOCIENDO UN PUNTO DE TANGENCIA (pcc)

No entra en el examen de primero

No incluido en los apuntes



1. Se traza la recta m que une O' y M .
2. Sobre la recta m se traslada el radio de la otra circunferencia de centro O
3. Se trazan las mediatrices de OA y de OB .
4. Los puntos O_1 y O_2 son los centros de las circunferencias buscadas





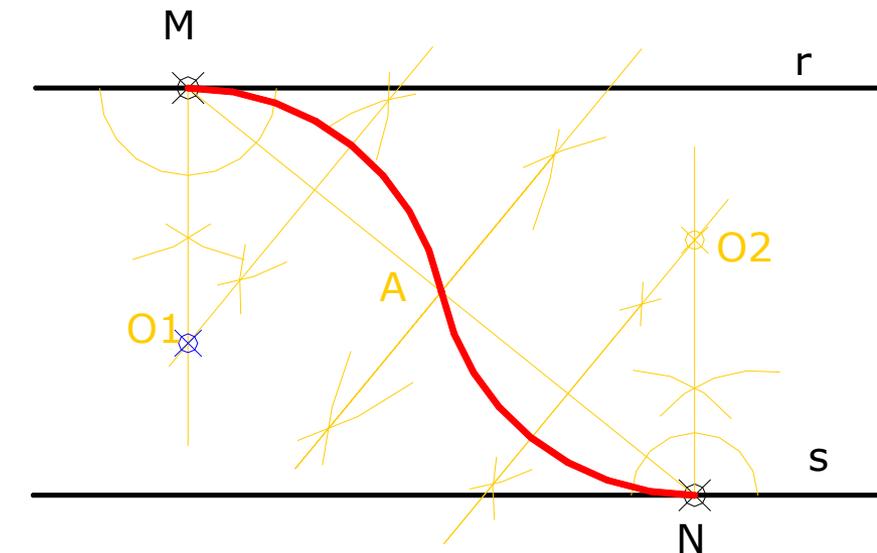
ENLAZAR DOS RECTAS PARALELAS MEDIANTE DOS ARCOS DE IGUAL RADIO, CONOCIENDO LOS PUNTOS DE TANGENCIA

Dadas las rectas r y s , y los puntos M y N :

1 Los centros de los arcos estarán en las perpendiculares trazadas por los puntos M y N a las rectas r y s .

2 Se halla el punto medio A del segmento MN .

3 Se trazan las mediatrices de los segmentos AM y AN .



4 Donde las mediatrices se cortan con las perpendiculares trazadas por M y N están los puntos $O1$ y $O2$, centros de los arcos solución, que son tangentes entre sí en el punto A .



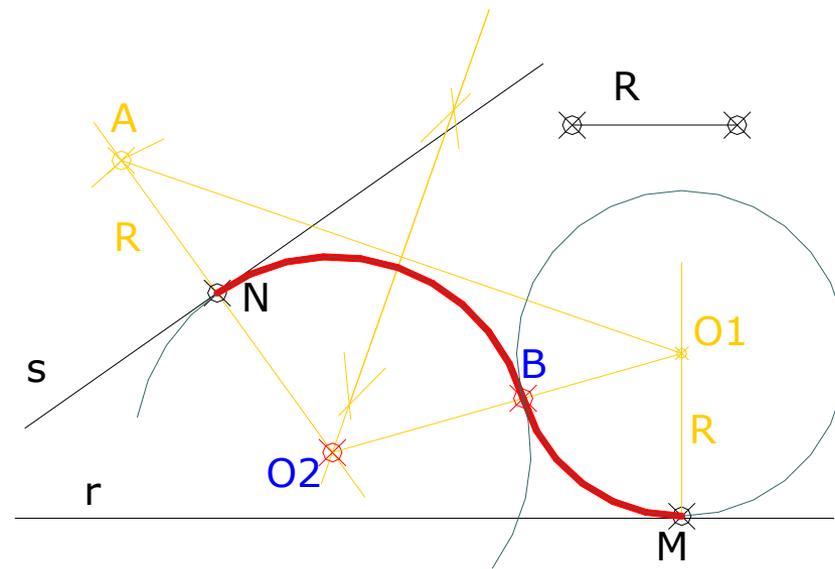
ENLAZAR DOS RECTAS CUALESQUIERA POR MEDIO DE DOS ARCOS, CONOCIENDO EL RADIO DE UNO DE ELLOS Y LOS PUNTOS DE TANGENCIA

Dadas las rectas r y s , los puntos de tangencia M y N , y el radio R :

1 Por los puntos M y N se trazan perpendiculares a las rectas r y s , respectivamente.

2 Sobre la perpendicular a r se traslada, hacia el interior del ángulo, el segmento $MO_1 = R$, y sobre la perpendicular a s , hacia el exterior, el segmento $NA = R$.

O_1 es el centro de uno de los arcos.



3 La mediatriz del segmento O_1A corta a la perpendicular a s en el punto O_2 , centro del segundo arco. El punto B de tangencia entre las dos circunferencias está en la recta O_1O_2 .

ENLAZAR VARIOS PUNTOS NO ALINEADOS, MEDIANTE ARCOS DE CIRCUNFERENCIA, CONOCIENDO EL RADIO DE UNO DE LOS ARCOS

Dados los puntos **A, B, C, D, E**, etc., y el radio **R** del arco **AB**:

1 Se unen los puntos **A** y **B**, trazando a continuación la mediatriz del segmento; con centro en el punto **A** y radio **R** se traza un arco que corta a la mediatriz en el punto **O1**. Con centro en el punto **O1** se traza el arco **AB**.

2 Se unen los puntos **B** y **C**, trazando la mediatriz del segmento, que corta a la recta **O1B** en el punto **O2**, Con centro en el punto **O2** se traza el arco **BC**, que es tangente al anterior en **B**.

3 Se unen los puntos **C** y **D**, trazando la mediatriz del segmento, que corta a la recta **O1C** en el punto **O3**, Con centro en **O3** se traza el arco **CD**, que es tangente al anterior en **C**, y así sucesivamente.

