

Un Omnipoliedro

**para el Monte Tossal
de Alicante**

José Antonio Mora

Un Omnipoliedro para el Monte Tossal de Alicante

José Antonio Mora



A Laura y Alicia



**Concejalía de Educación y Cultura
Ayuntamiento de Alicante**



**Societat d'Educació Matemàtica
Al-Khwarizmi**



© José Antonio Mora

© Excmo. Ayuntamiento de Alicante. Concejalía de Educación y Cultura.

Diseño e impresión. Bañuls Impresores S.L. San Agatángelo, 12. Alicante

I.S.B.N. 84-699-3731-6

Depósito Legal: 0000

Con la proclamación del año 2000 como Año Mundial de las Matemáticas, la Concejalía de Educación y Cultura del Excmo. Ayuntamiento de Alicante tenía la ocasión de participar en los actos que internacionalmente se estaban programando por parte de la Comunidad científica, al tiempo que cumplía con una aspiración largamente deseada, cubrir una faceta tan importante de la educación y que tan escasa se encontraba de nuestro apoyo institucional como son las matemáticas.

La oportunidad se nos planteó con la propuesta de la Sociedad de Educación Matemática de la Comunidad Valenciana Al-Khwarizmi, cuando solicitó nuestro apoyo para la instalación de un omnipoliedro en un espacio público de nuestra ciudad. La doble faceta de este elemento como instrumento educativo y estético nos agradó inmediatamente, colaborando estrechamente con ellos para hacer realidad su iniciativa. Fruto de esta cooperación es la estructura matemática que hoy pueden ver y disfrutar los alicantinos en el Parque del Monte Tossal.

El aspecto estético del omnipoliedro quedaba cubierto con su instalación, pero debíamos aprovechar las posibilidades educativas que dicha estructura tiene. El ofrecimiento de la Sociedad de Educación Matemática Al-Khwarizmi para desarrollar el potencial educativo de la estructura nos animó a incluir su estudio dentro de la programación de actividades escolares para el curso 2000-2001, surgiendo además la necesidad de contar con un soporte pedagógico adecuado que diese a conocer y divulgara los contenidos matemáticos. Creemos que la presente publicación, de alto contenido científico, servirá, no sólo para cubrir nuestra oferta educativa, sino que podrá satisfacer las ansias de conocimiento de los más exigentes.

Las personas aprenden matemáticas a partir de sus experiencias, de las observaciones que realizan y de la reflexión acerca de su propia práctica. Además, la posibilidad de “ver” y “tocar” las ideas geométricas, les permite acercarse al conocimiento y a los orígenes de las matemáticas. Esta Concejalía quiere ofrecer a la Comunidad Educativa medios que complementen los de la enseñanza reglada. Con la cooperación plasmada en la instalación del omnipoliedro y la publicación de “Un Omnipoliedro para el Monte Tossal de Alicante” creemos estar en el buen camino por ofrecer a nuestros jóvenes los medios adecuados para su formación.

PEDRO ROMERO PONCE.
CONCEJAL DELEGADO DE EDUCACIÓN Y CULTURA.

Índice

Introducción	9
1. Los cinco sólidos platónicos	13
1.1. Descripción y medidas	13
1.2. En la naturaleza y en la ciencia	15
1.3. En el arte	17
1.4. En la representación del universo	21
1.5. El cubo	23
1.6. Materiales para construir poliedros	25
2. Los poliedros la ciudad de Alicante	29
3. El proceso de construcción	35
3.1. El montaje	35
3.2. Dimensiones	39
3.3. Longitudes y peso	40
3.4. Varillas - las aristas	41
3.5. Conexiones - los vértices	41
3.6. La imaginación - las caras	42
3.7. El color	43
3.8. La pintura	43
3.9. Otras estructuras con varillas	45
4. Problemas y actividades	49
5. Bibliografía	65
Anexo I: Las proporciones en el omnipoliedro	71
Anexo II: Soluciones a los problemas	78



Personas y entidades colaboradoras.

La realización del omnipoliedro para un espacio público de la ciudad de Alicante ha implicado a muchas personas y entidades en una tarea que comenzó hace 10 años con los primeros modelos en madera para el Centre de Professors d'Alacant y que ha continuado con el que se ha colocado en el Parque Temático del Monte Tossal.

Las instituciones que han colaborado:

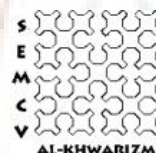
El excmo. Ayuntamiento de Alicante, por medio de su Concejalía de Educación y Cultura, que ha financiado la construcción del omnipoliedro, ha editado esta guía didáctica y lo ha incorporado a la programación de actividades educativas del Monte Tossal.



El I.E.S. Leonardo da Vinci. El diseño se ha realizado en el departamento de Matemáticas, algunas fases del montaje en el departamento de Tecnología y la pintura de las barras de aluminio en los talleres de Automoción. Ha sido un proyecto en el que se ha implicado todo el instituto: estudiantes, profesorado, personal no docente y equipo directivo del centro.



La Sociedad de Profesores de Matemáticas de la Comunidad Valenciana Al Khwarizmi, en especial, la Asamblea de Alicante que apoyado desde un principio el proyecto y ha puesto todos los medios para su realización.



La Comisión en Alicante para la celebración del año 2000 como Año Internacional de las Matemáticas, por su apoyo institucional.



También han colaborado en este proyecto las siguientes personas:

Plácido Gutiérrez, profesor del I.E.S. Leonardo da Vinci (Alicante), ha dirigido las tareas de pintura de las barras de aluminio en los talleres de Chapa y Pintura del departamento de Automoción.

Carmen Jorques, profesora del I.E.S. Virgen del Remedio (Alicante), ha intervenido en la adecuada elección de colores.

Julio Rodrigo, profesor de matemáticas del I.E.S. de Cheste (Valencia), ha colaborado en el estudio de proporciones.

Fernando Juan, profesor en el I.E.S. Sanchís Guarner de Bellreguard (Valencia), ha realizado los estudios del cubo animado realizados con el programa informático Cabri Géomètre II.

Los profesores María Teresa Gómez, Francisco Jesús García, Alfred Llópez, Jesús Marín, Juan Carlos Moreno, José Ángel Bolea, Salvador Caballero, Floreal Gracia, Fernando Juan, Alfred Mollà Onofre Monzó, Pascual Pérez, Julio Rodrigo y Tomás Queralt. que han leído borradores y han realizado aportaciones a la guía didáctica.

Los estudiantes del I.E.S. Leonardo da Vinci que han realizado los trabajos de construcción del modelo.

Se han realizado tres modelos del omnipoliedro: el más grande se ha colocado al aire libre en el Parque Temático del Monte Tossal. Paralelamente se han construido otros dos de menor tamaño, uno de ellos permanece en el I.E.S. Leonardo da Vinci –que aparece en la fotografía–, y el tercero se encuentra a disposición de los centros educativos que lo soliciten para realizar la construcción en el Parque del Monte Tossal.



Introducción

En el año 1992, la Unión Matemática Internacional reunida en Río de Janeiro solicitó a la UNESCO que el año 2000 fuese declarado "Año Mundial de las Matemáticas". Esta celebración ha sido respaldada por importantes instituciones y entidades, entre ellas el Congreso de los Diputados y las Cortes Valencianas. La declaración de Río de Janeiro establece tres metas: en primer lugar la ayuda que pueden proporcionar las Matemáticas para afrontar los grandes desafíos del siglo XXI, en segundo su aportación al desarrollo de los países y, por último, intentar mejorar su imagen ante la sociedad.

Con estos objetivos se pretende que las ideas matemáticas alcancen una mayor presencia en el conjunto de la sociedad, y se propone el hacer un esfuerzo para divulgarlas, dar a conocer sus aplicaciones, desvelar su presencia continua en la vida cotidiana y elevar el nivel matemático de la población en general.

Dentro de los actos conmemorativos de este año, la Sociedad de Educación Matemática de la Comunidad Valenciana Al Khwarizmi y la Comisión para la celebración del 2000 como Año Mundial de las Matemáticas en Alicante, han programado la construcción de una estructura de alto contenido matemático para que pueda ser utilizada por estudiantes, profesores y ciudadanos como motivo de reflexión sobre las cualidades estéticas de las ideas matemáticas.

El omnipoliedro se ha instalado en el Parque Temático del Monte Tosal de Alicante de modo que pueda ser observado por los ciudadanos. Una de las características interesantes del omnipoliedro es que puede ser desmontado para volverlo a construir por un profesor con un grupo de estudiantes en cualquier momento. Basta con cortar las bridas de plástico que realizan las uniones de los vértices, soltar las noventa barras y realizar unas nuevas ataduras. De esta forma, la construcción se convierte en un diseño interactivo, término muy de moda en todo lo que envuelve a las nuevas tecnologías, y que aquí cobra especial relevancia al permitir la manipulación del omnipoliedro para desarrollar la imaginación y servir de vehículo para plantear preguntas e intentar encontrar las respuestas. Todos estos aspectos son fundamentales en la comprensión de las ideas y los métodos de las matemáticas.

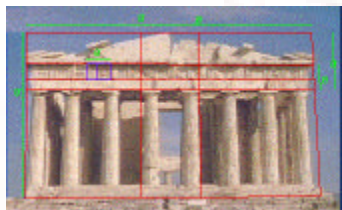


Omnipoliedro significa “todos los poliedros”. Es una composición realizada con los armazones de los cinco sólidos platónicos o poliedros regulares, conocidos y utilizados desde hace más de 4000 años. La construcción se realiza de forma que los cinco están inscritos uno dentro de otro. En el interior se encuentra el Octaedro (amarillo), sus vértices se sitúan en el centro de las aristas del Tetraedro (rojo). Los cuatro vértices del tetraedro coinciden con otros tantos del Cubo (verde). Las aristas del cubo se encuentran sobre las caras del Dodecaedro (morado). Y por último, el Icosaedro (azul) proporciona rigidez al Dodecaedro cuando las aristas de ambos se cortan en los puntos medios. De esta forma conseguimos que resalten tanto las relaciones numéricas (número de caras, aristas y vértices) como las geométricas (planos de simetría, centros y ejes de rotación), que se establecen entre los cinco poliedros.



Las medidas para que estas inclusiones sean posibles se han tomado de los estudios de Pedro Puig Adam, que en su libro *Didáctica de la Matemática Moderna* describe el proceso de construcción de esta estructura y aporta los datos necesarios. El propio profesor Puig Adam construyó un gran icosaedro en el patio de su instituto.

Algunos de los cálculos para que cada poliedro encaje en el siguiente no son complicados: aplicar el teorema de Pitágoras o caer en la cuenta de alguna relación geométrica son suficientes para el octaedro, el tetraedro y el cubo. Para los dos poliedros exteriores: el dodecaedro y el icosaedro, hay que aplicar la proporción áurea, concepto bastante más complicado aunque muy interesante y que ha sido utilizado por científicos y artistas de todas las épocas. La proporción áurea es una de las ideas que están en el fondo de construcciones como la Pirámide de Keops en Egipto, el Partenón de Atenas, San Marcos en Venecia, Nôtre Dame en Paris o el edificio de las Naciones Unidas en Nueva York.



Hace unos diez años ya se construyó una estructura de este tipo, realizada en madera para el Centro de Profesores de Alicante en el marco de los cursos de Formación del Profesorado de Matemáticas de la Comunidad Valenciana. En diciembre de 1999, el Claustro de Profesores del I.E.S. Leonardo da Vinci acordó la realización de una estructura de aluminio con la que conmemorar el Año de las Matemáticas por el significado que tienen para el centro los estudios que realizó Leonardo sobre los poliedros, en especial sus diseños de poliedros huecos para *La Divina Proporción* de Luca Pacioli.



COSAS DE AQUI / TIRSO MARÍN

El Instituto Leonardo da Vinci construye un omnipoliedro en el Año Mundial de las Matemáticas

La Concejalía de Educación y Cultura del Ayuntamiento de Alicante, mediante un convenio con la SEMCV Al-Khwarizmi, ha financiado la construcción de dos estructuras metálicas para el Parque Temático del Monte Tossal, que se han realizado en el I.E.S. Leonardo da Vinci. La más grande, de 3.20 m de diámetro, se ha colocado al aire libre, es el resultado de tomar como medida para la arista del cubo 1.67 m, que es aproximadamente la media de estaturas de la población adulta española. El Parque dispone de otro juego de 90 varillas para montar un omnipoliedro algo más pequeño -la arista del cubo es 1 m y el diámetro se aproxima a los 2 m-, que está preparado para que un profesor con sus estudiantes realicen la construcción con bridas. Este es uno de los principales atractivos de la propuesta, el hecho de que la ciudad pueda disponer de una obra que aúna tradición, ciencia y arte, pero no como algo estático sólo para ser contemplado, ya que en cualquier momento puede ser construida por un grupo de personas.



Utilización de la guía

El **capítulo 1. Los cinco sólidos platónicos**, se dedica a la presencia de los poliedros regulares a lo largo de la historia e intenta abarcar aspectos tan amplios como la tradición, la ciencia o el arte. En seis capítulos se intenta mostrar cómo han utilizado los sólidos platónicos las distintas culturas para reflejar su forma de entender el mundo, lo cual ha tenido su reflejo en las manifestaciones artísticas, especialmente en los pintores del Renacimiento que los incorporaron a sus obras con una doble finalidad: para dar armonía a sus composiciones y para demostrar su dominio de la perspectiva. También el arte moderno ha centrado su atención en estos diseños con la utilización de nuevos materiales y los ordenadores.

En el **capítulo 2. Los sólidos platónicos en la ciudad de Alicante**, se realiza un recorrido por las obras de la ciudad de Alicante que utilizan los poliedros, empezamos con la escultura *Como una estrella* de Eusebio Sempere y pasamos después por construcciones, calles y plazas donde están presentes los poliedros regulares.



El **capítulo 3. El proceso de construcción**, se relata el procedimiento para armar el omnipoliedro, y los problemas que pueden surgir, incluye una secuencia de imágenes de ordenador y otra fotográfica y también las indicaciones para facilitar el trabajo. Por si algún centro se anima a construir un omnipoliedro, se incluyen los detalles del proceso que se ha seguido desde el principio: dimensiones de las barras, forma de unirlos, selección de los materiales, colores y la forma en que se ha pintado.

El **capítulo 4. Problemas y actividades**, recoge una colección de diez situaciones geométricas que pueden ser utilizadas para preparar previamente la visita o para rentabilizarla posteriormente. Estos problemas sirven de introducción al estudio de los poliedros y conectan la geometría del plano con la del espacio.




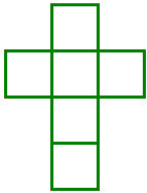

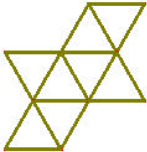
En el **capítulo 5** encontramos la bibliografía y una selección de 22 lugares de Internet que se dedican total o parcialmente al estudio de los poliedros y que pueden servir de punto de partida a las personas interesadas en profundizar en estos temas, en ellos encontraremos nuevos enlaces que nos lleven a otros lugares.




Se han incluido dos **anexos**, uno dedicado a la obtención de las proporciones en el omnipoliedro y en el otro se presentan las soluciones a los problemas propuestos en el capítulo 4.

1. Los cinco sólidos platónicos

1.1 Descripción y medidas

Las características de los cinco poliedros regulares son las siguientes:

Poliedro	Esqueleto	Desarrollo plano	Caras en un vértice	Núm. de caras	Núm. vértices	Núm. de aristas	Ángulo diedro
Tetraedro			3	4	4	6	70° 32'
Cubo			3	6	8	12	90°
Octaedro			4	8	6	12	109° 28'

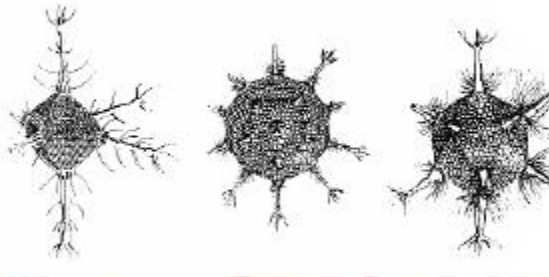
Poliedro	Esqueleto	Desarrollo plano	Caras en un vértice	Número de caras	Núm. vértices	Número de aristas	Ángulo diedro
Icosaedro			5	20	12	30	$138^{\circ} 11'$
Dodecaedro			3	12	20	30	$116^{\circ} 34'$

Los dibujos son fragmentos de la obra "Universo Poliedro" de Maurits Cornelius Escher. El color de los desarrollos planos corresponde al de las varillas de aluminio, excepto el del octaedro que se ha variado del amarillo original a otro color que produzca mayor contraste con el papel.

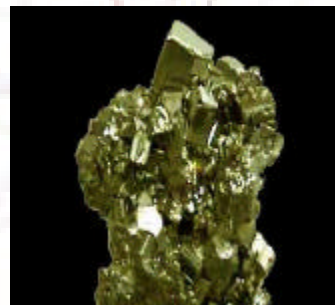
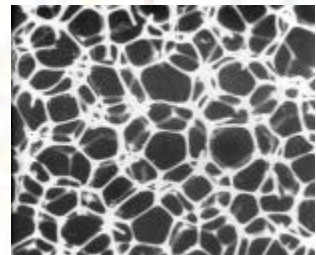
1.2. Los sólidos platónicos en la naturaleza

El atractivo que los poliedros regulares han ejercido sobre personas de todas las épocas y culturas puede deberse a que vivimos rodeados de figuras geométricas: nuestras baldosas tienen forma de cuadrado, nuestras habitaciones, armarios y cajas son prismas rectos de base rectangular y las abejas utilizan el prisma de base hexagonal para construir las celdas de sus panales.

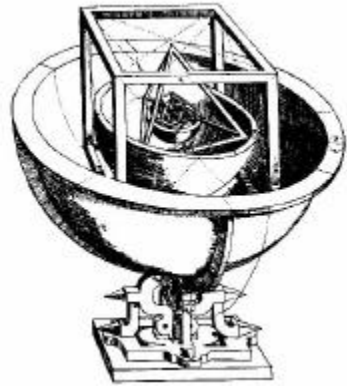
Uno de los casos más llamativos de la utilización de los sólidos platónicos por los seres vivos, lo constituye la forma de algunos animales microscópicos como los radiolarios, que tienen esqueleto con forma de octaedro, dodecaedro e icosaedro (D'Arcy Thompson, 1980).



Los poliedros aparecen en muchas estructuras de la naturaleza, construcciones que surgen de la repetición de fórmulas semejantes en contacto entre sí, como ocurre en este fragmento de espuma sintética tomado de Bruno Munari (1976) y en los dos cristales de abajo, uno tiene forma cúbica, la galena, y otro dodecaédrica, la pirita.



Los científicos han utilizado los sólidos platónicos para ilustrar sus ideas. En sus modelos del sistema solar, Kepler intentó ajustar las distancias entre los planetas a distancias entre poliedros regulares que se inscriben y circunscriben en esferas. Cada planeta determina una esfera que contiene su órbita. Entre cada dos esferas, Kepler inscribe un poliedro regular de forma que sus vértices descansan en la esfera exterior y sus caras tocan el interior de dicha esfera. De esta forma, coloca el octaedro ente Mercurio y Venus, el icosaedro entre Venus y la Tierra, el dodecaedro entre la Tierra y Marte, el tetraedro entre Marte y Júpiter, y el cubo entre Júpiter y Saturno. Las distancias interplanetarias que predijo con este modelo no fueron suficientemente exactas a pesar de su gran belleza.



En esta otra ilustración podemos ver los planetas interiores: Mercurio, Venus, Tierra y Marte. Este modelo servía como explicación en su momento de por qué sólo había seis planetas, a partir de la demostración de Euclides de que sólo podía haber cinco sólidos platónicos para separarlos. Hay que decir que en la época de Kepler no se conocían los tres planetas exteriores: Urano, Neptuno y Plutón descubiertos respectivamente en 1781, 1846 y 1930.



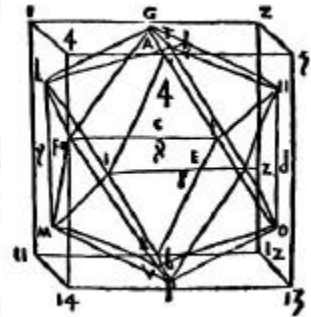
1.3 Los sólidos platónicos en el arte

A lo largo de la historia, los poliedros regulares han estado muy relacionados con distintas manifestaciones artísticas; unas veces como símbolos religiosos, otras como una forma de representar verdades filosóficas y también para establecer relaciones científicas.

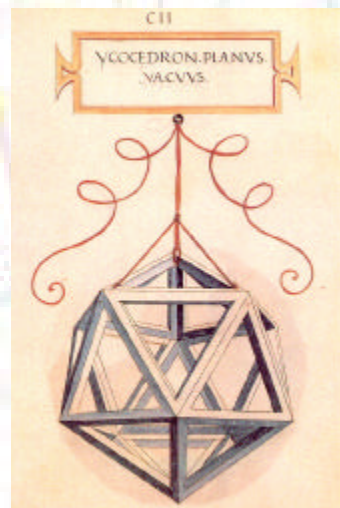
Encontramos las primeras noticias de la utilización de poliedros regulares en unas esferas de piedra talladas encontradas en Escocia. Estas piedras están fechadas en el año 2000 antes de Cristo y no se conoce la utilidad que podían tener. La imagen nos muestra dos de ellas que tienen forma de dodecaedro e icosaedro regulares.



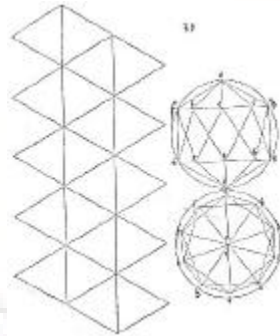
Para muchos artistas del Renacimiento, la representación de poliedros se convirtió en un ejercicio con el objetivo de dominar la perspectiva y también como una forma de proporcionar armonía en sus composiciones. Tenemos un exponente en Piero della Francesca (1410 - 1492) artista, matemático y pintor que desarrolló nuevos métodos de perspectiva. Aquí tenemos uno de sus diseños en el que ilustra una nueva forma de inscribir un icosaedro en un cubo.



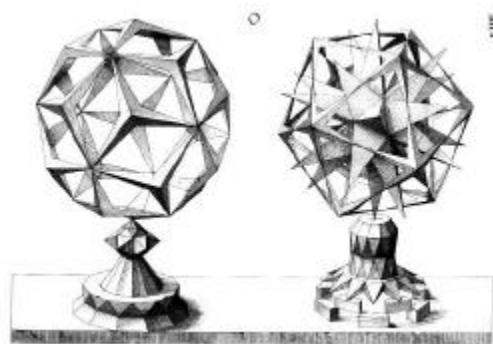
Leonardo da Vinci (1452-1519) es el hombre del Renacimiento por antonomasia: artista, matemático, científico e ingeniero. Realizó una serie de dibujos de poliedros para el libro del fraile Luca Pacioli (1445 – 1514) *La divina proporción*, que tuvo gran influencia en su época. Los diseños más novedosos para su época son los que llamó *abscisus vacuus*, para señalar que no tenían caras. Es muy original esta forma de representar los poliedros porque nos permite ver en ellos tanto el frente como la parte de atrás a través de sus caras transparentes.



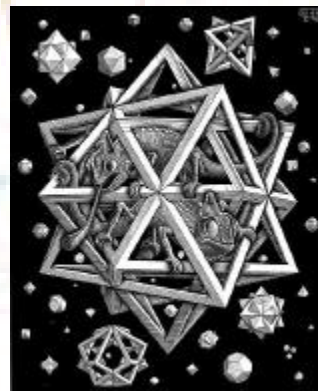
Alberto Durero (1471-1528), pintor alemán que hizo importantes contribuciones al estudio de los poliedros en su libro *El manual del pintor* escrito en 1525 para explicar los métodos de la perspectiva y presenta los primeros desarrollos planos de los poliedros como el del icosaedro de la figura.



El orfebre alemán Wentzel Jamnitzer (1508-1585) realizó una serie de ilustraciones para su libro *Perspectiva Corporum Regularium* en 1568, con diseños al estilo de Leonardo da Vinci como el icosido-decaedro de la izquierda y otros completamente originales como el icosaedro de la derecha que contiene un icosaedro estrellado en su interior.



Ya en el siglo XX, el grabador holandés Maurits Cornelius Escher (1898-1972) realizó interesantes estudios sobre los poliedros. A la izquierda *Cristal*, una mediatinta de 1947, refleja un interesante estudio de la perspectiva en la transparencia de las caras. A la derecha *Estrellas*, xilografía de 1948, propone un universo de poliedros regulares que en el centro contiene una composición de tres octaedros regulares a modo de jaula para camaleones.



En estas tres litografías Escher realiza estudios sobre mundos imposibles: *Reptiles* (1943) en el que un dodecaedro es lugar de paso en el recorrido de unos animales que surgen de un papel y que terminan por volver a él después de haber dado un paseo por el espacio. En el centro un fragmento de *Bellvedere* (1958), el personaje sostiene una estructura de un cubo en el que las aristas se cruzan de forma que sólo lo pueden hacer en un dibujo, no en la realidad. A la derecha, en *Cascada* (1961) el agua corre por un canal, descendiendo y se aleja hasta caer, pero en ese momento el punto que está más lejano se convierte en el más cercano para volver a seguir el curso del agua en un proceso infinito.



Salvador Dalí fue un apasionado estudioso de *la Divina Proporción* de Luca Pacioli para lo que contó con la ayuda del matemático rumano Matila C. Ghika, fruto de esta colaboración es su obra *Crucifixión o Corpus Hypercubicum* (1954) en el que la cruz se ha convertido en una composición de ocho cubos adosados por sus caras que componen el desarrollo en tres dimensiones de lo que sería el cuerpo equivalente al cubo en la cuarta dimensión.



Dalí utiliza otro sólido platónico en otra de sus obras, en el óleo *La última cena* (1955) en el que un dodecaedro regular preside la escena -doce son los apóstoles-, y es el lugar por donde se introduce la luz que invade todo el cuadro.



En literatura también tenemos algunas muestras de la utilización de los poliedros, como en este soneto de Rafael Alberti en el que recoge de forma poética la proporción áurea existente en las dimensiones del pentágono regular y el dodecaedro.

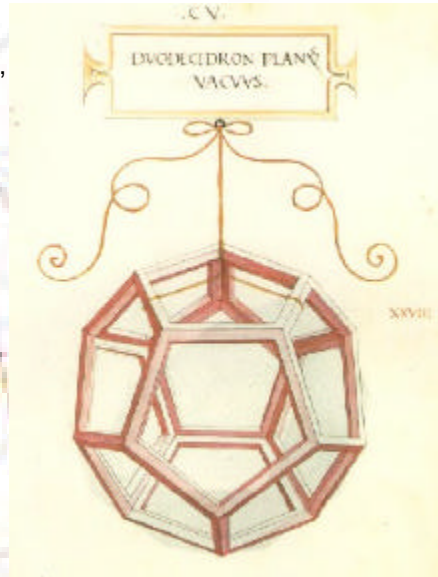
A ti, maravillosa disciplina,
media, extrema razón de la hermosura,
que claramente acata la clausura
viva en la malla de tu ley divina.

A ti, cárcel feliz de la retina,
áurea sección, celeste cuadratura,
misteriosa fontana de medida
que el Universo armónico origina.

A ti, mar de los sueños, angulares,
flor de las cinco formas regulares,
dodecaedro azul, arco sonoro.

Luces por alas un compás ardiente
Tu canto es una esfera transparente.

A ti, divina proporción de oro.



1.4. Los sólidos platónicos en la tradición

Los científicos y los filósofos griegos realizaron una descripción geométrica de la estructura del universo, asociaron los cuatro poliedros regulares conocidos en un principio, a cada uno de los cuatro elementos básicos por los que consideraban que estaba formada la materia: el fuego, la tierra, el aire y el agua.

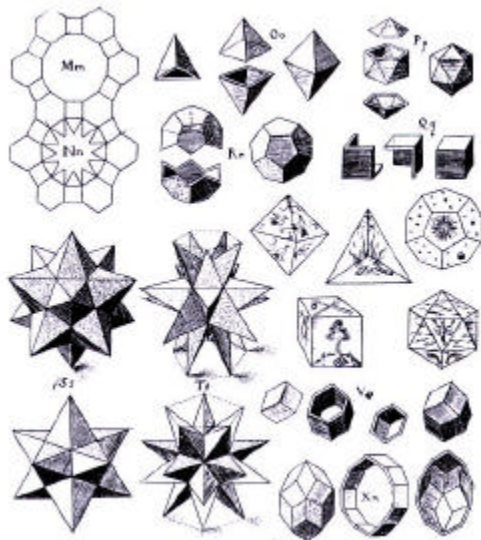
Platón (s.V a.c.) describió esta asignación de los poliedros en su obra *Timeo*:

El fuego tiene la forma del tetraedro, pues el fuego es el elemento más pequeño, ligero, móvil y agudo. La tierra debe tener la forma del cubo, el sólido más estable de los cinco, mientras que el agua, el más móvil y fluido de los elementos, debe tener como forma propia o "semilla" el icosaedro, el sólido más cercano a la esfera y, por tanto, el que con mayor facilidad puede rodar. El aire, de tamaño, peso y fluidez, en cierto modo intermedios, se compone de octaedros.






Como ya tenía asignados los cuatro elementos, dejaba sin pareja al dodecaedro. De forma un tanto forzada lo relacionó con el Universo como conjunción de los otros cuatro:

La forma del dodecaedro es la que los dioses emplean para disponer las constelaciones en los cielos.

Veinte siglos después, Johannes Kepler (s.XV d.c.) realizó una aproximación lógica a los poliedros regulares, pero no quedó fuera del misticismo de la época, como lo muestra la ilustración que realizó en 1619 para su libro *Harmonice Mundi*, en la que cada poliedro regular queda representado con la simbología clásica que se había asignado en la antigüedad.



De la ilustración de J. Kepler se han extraído algunos fragmentos para completar la columna central de la siguiente tabla:

Sólido	<i>Harmonice Mundi</i>	Elemento
Tetraedro		Fuego
Cubo		Tierra
Octaedro		Aire
Icosaedro		Agua
Dodecaedro		El Universo

1.5. El cubo

De los cinco poliedros regulares, el cubo es el más utilizado en las construcciones humanas, ya que es el único que, con suficientes copias, puede rellenar el espacio sin dejar huecos. El resto necesitan combinarse con otros poliedros para conseguirlo.

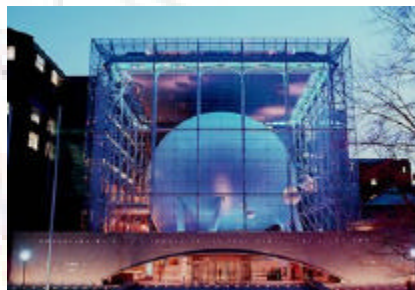
La arquitectura ha utilizado el cubo para construcciones tan distantes en el tiempo y el espacio como el mausoleo de Gol Gumbaz en la ciudad india de Bijapur en el estado de Mysore sobre el que se sustenta una de las cúpulas más grandes del mundo de 43 m de diámetro. La Kaaba, que es también una estructura de piedra con forma de cubo situado en la Gran Mezquita de la Meca.



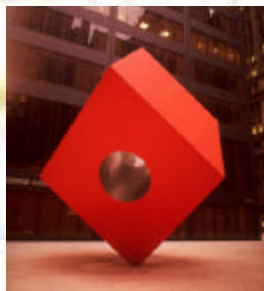
La arquitectura moderna también hace uso de los poliedros regulares; a la izquierda un edificio de oficinas en Vancouver (Canadá), tiene forma de cubo que queda suspendido con tirantes alrededor de un bloque central que contiene los ascensores. A la derecha vemos el pabellón de España en la Exposición Universal de Sevilla 92, uno de los edificios tiene la forma de un gran cubo y fue obra del arquitecto Julio Cano Lasso.



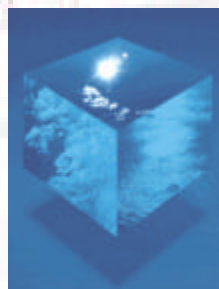
Aún tenemos dos muestras más de la utilización de grandes cubos, en este caso de cristal, para realizar construcciones en las que la luz juega un papel relevante. Son edificios de gran personalidad que investigan la utilización de nuevos materiales: a la izquierda el Museo de Arte de Bregenz (Austria), del arquitecto suizo Peter Zumthor. A la derecha el recientemente inaugurado Planetario de Nueva York, junto a Central Park, obra de J. R. Polshek y T. H. Schliemann. Un gran cubo de cristal de 29 m de arista contiene una esfera blanca de 27 m de diámetro en cuyo interior se han representado el centro de la Tierra y el Espacio.



La escultura y las artes decorativas han hecho un uso propio de los poliedros. A la izquierda la *Caja metafísica* de Jorge Oteiza. A la derecha *Red Cube*, una gran escultura de Isamu Noguchi en la ciudad de Nueva York.



A la izquierda *Cubo modular abierto 9x9x9* en madera del escultor minimalista americano Sol Lewitt. A la derecha diseño publicitario tomado de internet.



1.6. Materiales para construir poliedros

Los poliedros regulares se han construido a lo largo de la historia con diversos materiales: barro, cemento, madera, metal, cristal, papel o bytes de ordenador, dependiendo de la utilización para la que fueron creados y las ideas que pretenden mostrar con ellos.

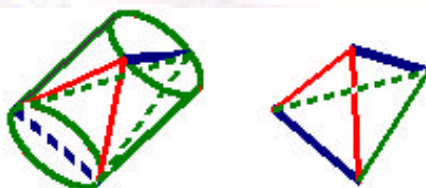
En metal podemos ver la composición *Octetra* de Isamo Noguchi que utiliza tetraedros truncados –tetraedros a los que se cortan las esquinas justo a $\frac{1}{3}$ del vértice, sus caras son cuatro hexágonos regulares y cuatro triángulos equiláteros-. Aunque sorprenda la utilización de formas tan extrañas para edificaciones, los arquitectos han investigado estos poliedros para crear espacios como los pabellones construidos para la Expo de Montreal en 1967.



Con otros materiales encontramos el icosaedro realizado en cristal de Henry Chasey. En el centro, *Leonardo Project* de G.W. Hart que realiza en madera la estructura del icosaedro truncado al estilo de los diseños de Leonardo da Vinci.

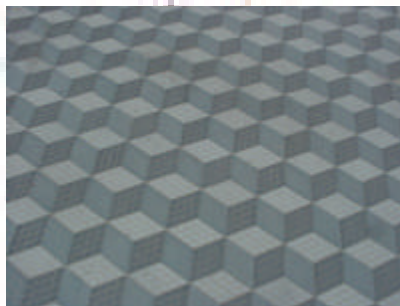


El cartón con una cara metalizada o plastificada se utiliza para envases, normalmente son prismas rectos, que reciben el nombre de tetrabrik. A pesar de utilizar el prefijo tetra (cuatro), los recipientes son prismas rectos de base rectangular con seis caras. El nombre proviene de un recipiente creado en los años setenta que se llamó tetrapack y que realmente tenía cuatro caras. Era casi un tetraedro construido a partir de un cilindro al que se cierran las dos bases según líneas que resultan perpendiculares. Se utilizó para envasar leche pero duró poco por los problemas de almacenamiento. El tetrapack se obtiene a partir de un cilindro, se presan las bases según dos direcciones perpendiculares como se muestra en el dibujo.



A la derecha, construcciones de origami, el arte de plegado del papel por Meenakshi Mukhopadhyay.

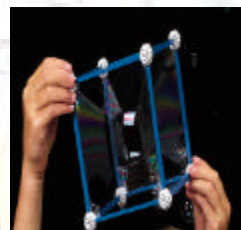
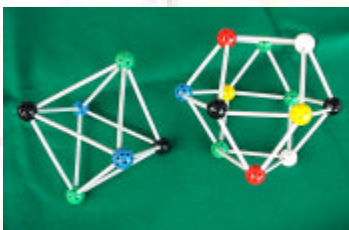
Las artes decorativas han utilizado la representación de los poliedros en innumerables ocasiones: a la izquierda un pequeño dodecaedro estrellado de Paolo Ucello diseñado en mármol para los mosaicos que cubren el suelo de la basílica de San Marcos en Venecia. A la derecha un fragmento de mosaico muestra cómo los romanos rellenaban el plano con figuras rómbicas, en las que cada grupo de tres baldosas, una de cada color, forman un hexágono regular, de manera que el conjunto provoca el efecto de relieve en forma de apilamiento de cubos. La fotografía se ha tomado del Paseo de Gomis, en la playa del Postiguet de Alicante.



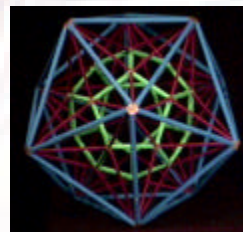
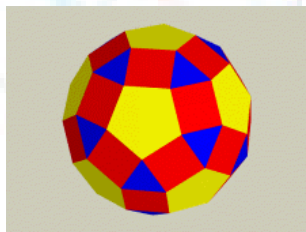
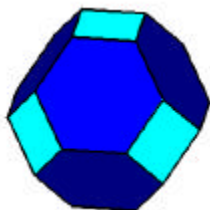
El aprendizaje de las matemáticas ha utilizado formas y figuras geométricas con fines didácticos. Diversos materiales han intentado acercar la geometría a los estudiantes: a la izquierda *polydron*, figuras poligonales de plástico engarzable, en el centro *cartulina troquelada* que se une con gomas elásticas para construir poliedros y a la derecha *policubos*, cubitos de plástico de colores para formar combinaciones con cubos adosados por las caras. Todos ellos se utilizan para favorecer la adquisición de diversos contenidos matemáticos.



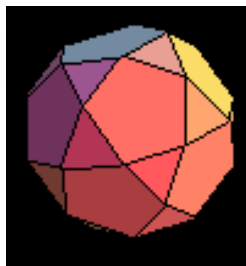
También se han comercializado materiales basados en varillas para construir las estructuras de los poliedros: *Math-Orbite* de Nathan (a la izquierda), *Kugeli* (al centro) o el más reciente *Zome System* (a la derecha).



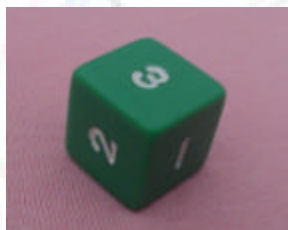
El ordenador es una excelente herramienta para diseñar modelos de poliedros. Aquí tenemos algunos: a la izquierda un diseño del octaedro truncado o Sólido de Kelvin realizado por Fernando Juan y José A. Mora en Cabri Géomètre II (este diseño permite la rotación de la figura en la pantalla del ordenador). En el centro tenemos el rombicidodecaedro de Tom Gettys, y a la derecha una composición con las estructuras de varios sólidos platónicos de Johathan Quintin.



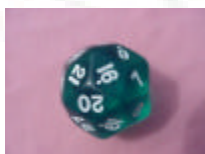
Tres diseños realizados con programas informáticos recogidos de páginas de internet: a la izquierda el icosidodecaedro realizado por Ha Le en *Maple*, al centro el dodecaedro truncado por R. Maeder en *Matemática*, y a la derecha composición de tres cubos de Sam Gratix en *POV-ray*.



Las seis caras del dado cúbico han sido uno de los primeros contactos que hemos tenido con los poliedros regulares. En algunos juegos podemos encontrar dados con las formas de los cinco sólidos platónicos:



Y también de otros poliedros: el de 10 caras -con forma de cometa-, de 30 caras -con forma de rombo-, y de 100 caras, aunque en este último caso es una esfera a la que se han realizado 100 huecos espaciados regularmente. Para acabar, no podemos olvidarnos del más clásico y menos poliédrico de los dados: la taba.



2. Los sólidos platónicos en la ciudad de Alicante

La construcción del omnipoliedro para un espacio público de la ciudad de Alicante trata de ser una continuación de la utilización que los artistas alicantinos han hecho de las ideas geométricas en sus obras.

Una de las más bellas es la escultura de Eusebio Sempere *Como una Estrella*, aunque también es conocida con el nombre de *Estrella varada*, situada en la rotonda que une las avenidas Óscar Esplá y Maisonnave. Utiliza un dodecaedro regular del que salen varillas de acero cromado de 3 cm de diámetro, siendo las de la cara superior más largas. El conjunto está situado sobre un eje giratorio que coincide con uno de los ejes de rotación que atraviesan el dodecaedro por los centros de dos caras opuestas. La escultura fue realizada en acero cromado en 1978.



Tenemos otras esculturas de Eusebio Sempere de claro diseño geométrico, a la derecha *Colgante Octaedro*, un móvil que utiliza barras de acero cromado unidas a un eje central de forma cilíndrica. Las distintas longitudes de las barras horizontales conforman el octaedro. Esta obra pertenece a la colección del Ayuntamiento de Alicante..



En la avenida de Denia encontramos *Seccions Àurees*, una réplica del *Icosaedro en el Aire* de Buckminster Fuller de 12 metros de altura con el título *Seccions Aurees*. Consiste en una estructura formada por seis barras rígidas que forman los doce vértices del icosaedro según los planos de simetría del sólido. Estas seis barras se unen unas a otras con tirantes de acero que conectan sus extremos con un resultado realmente espectacular, porque la estructura sólo se mantiene como la vemos bajo tensión, de hecho tres de las barras están en el aire. La obra fue construida en 1982 por los arquitectos Juan S. Pérez i Parra y José L. Frías Wamra con la colaboración de Florentino Regalado. Las vigas son de hierro con sección hexagonal. En el capítulo 3 se dan más detalles de la construcción de un modelo del *Icosaedro en el Aire* con varillas.



En la fotografía de la derecha se ha construido un *Icosaedro en el Aire* en el que han sustituido cada par de varillas por planchas rectangulares y se han unido los vértices de estos tres rectángulos tal como se hacía en la figura anterior. Este modelo se realizó para la exposición de Fotografía Matemática realizada por la S.E.M.C.V. Al-Khwarizmi en la Casa del Ingeniero de Alicante en 1997.



En la plaza de San Blas hay dos fuentes de claro diseño geométrico. La situada en la parte superior del parque fue realizada por Miguel Ángel Cano en 1982. Tiene una estructura con forma de pirámide de base octogonal, formada por unos triángulos metálicos de color rojo apoyados en un cono truncado central de cemento.



En la parte inferior de la plaza de San Blas hay otra fuente en cuyo centro se ha colocado una escultura de Adrián Carrillo García, diseñada en 1978. Es una estructura de tubos de acero inoxidable engarzados por un extremo sobre una semicircunferencia y su diámetro y, por el otro, sobre una curva formando una espiral helicoidal.



En el cruce de la Gran Vía con la calle México se encuentra el conjunto de Ismael Ferrer Domingo, de 1996. Está integrado por tubos cilíndricos metálicos, pintados en una gama de azules y una semicircunferencia de color naranja. Las diferentes inclinaciones de los tubos y la progresión de sus longitudes hacen que se asemeje a una vela. El conjunto representa un barco que atraviesa el arco iris.



El recientemente creado Museo de la Universidad de Alicante tiene un diseño geométrico con forma de gran caja edificada. Es un prisma con el exterior formado por paneles de madera que parece surgir del agua.



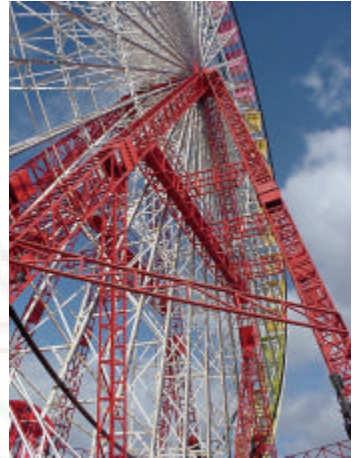
El triángulo y los poliedros con caras triangulares se utilizan en las construcciones para aumentar su rigidez y soportar grandes pesos, como ocurre con la estructura de pirámides que sustenta el puente Rojo de la Gran Vía sobre las vías del tren.



También podemos ver estructuras triangulares en una gran construcción del Monte Tossal: la cubierta del Pabellón de Tecnificación, obra del arquitecto Enric Miralles.



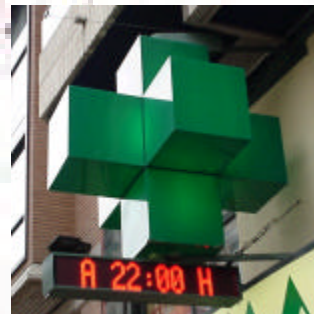
Los triángulos están presentes en la estructura de algunas construcciones como los pilares del Museo de la Universidad de Alicante o la noria de la Feria de Navidad.



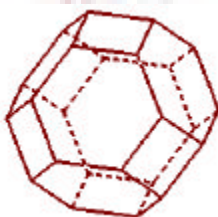
Hay otras muestras de la utilización del cubo en la arquitectura de la ciudad de Alicante: la moderna iglesia de Santiago en la playa de la Albufereta está diseñada como un cubo –la iglesia-, situado en el interior de otro cubo más grande formado por la cubierta y los pilares-aristas, la estructura metálica de triángulos de los cuatro pilares queda a la vista por ser exterior al edificio. Por otra parte, en la plaza situada en el cruce de las calles de Onil y Albufera, en el barrio de San Agustín, hay una fuente sobre la que se ha colocado el armazón en cemento de un cubo de 5 metros de arista.



La posibilidad de adosar cubos por las caras es aprovechada por una farmacia de la calle Maisonave que, en lugar de la típica cruz verde, está señalizada con una composición de cubos adosados por las caras que gira alrededor de uno de los ejes de rotación que atraviesan a los cubos por los centros de las caras. Podemos comparar esta construcción con uno de los cuadros de Salvador Dalí presentado en el capítulo anterior, tan sólo falta añadir un cubo en la parte inferior.



En los juegos infantiles de algunos parques de la ciudad también encontramos poliedros cuyas caras son polígonos regulares. En la plaza Florida Babel, junto a la Gran Vía, hay una estructura compuesta por cuerdas tensadas que parten de lo alto de un mástil hacia los vértices de un cuadrado dibujado en el suelo. En la playa de Muchavista las cuerdas surgen de los vértices de la estructura metálica de un poliedro de caras triangulares. Podemos observar que el poliedro básico que forman las cuerdas en el interior es el *Sólido de Kelvin* u *octaedro truncado* cuyas caras son cuadrados y hexágonos regulares, y proviene de un octaedro al que se le han cortado los ocho vértices de forma que las aristas quedan divididas en tres trozos iguales.



En el Museo de la Asegurada encontramos la Colección de Arte del Siglo XX, donación a la ciudad de Alicante de Eusebio Sempere. Una de sus exposiciones, *Las Geometrías* constituye una de las muestras más importantes de arte geométrico o constructivista, movimiento artístico que se centra en la investigación de las formas simples y la interrelación de volúmenes, de espacios y líneas. Hay esculturas de Vasarely, Chillida, Julio González, Alfaro o el propio Sempere. Para estos artistas la escultura es considerada como un elemento móvil, dinámico y cambiante, que invita al espectador a participar, algo que también ocurre con la geometría clásica del omnipoliedro. En la entrada al museo encontramos *Venecia* de Eusebio Sempere (izquierda), escultura móvil en acero cromado que provoca interesantes efectos visuales al girar. En la exposición Geometrías encontramos *Kroa B* de Víctor Vasarely (centro) y *Generatriu 4* de Andreu Alfaro (derecha), que juega con las distintas inclinaciones de las barras para construir una curva espacial.



3. El proceso de construcción

3.1 El montaje

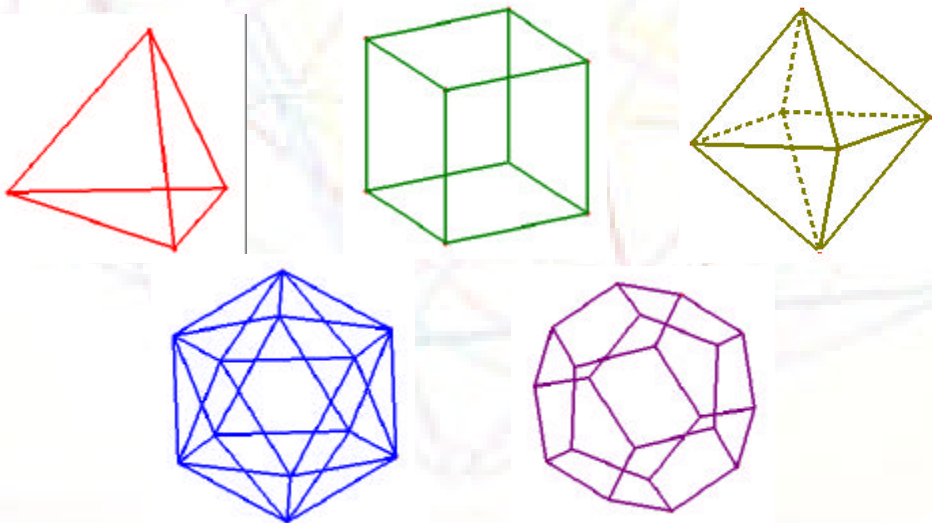
Para la construcción se necesitan las varillas que se han preparado. Las uniones se realizan con bridas (las tiras de plástico que se utilizan en electricidad para recoger cables). A la derecha tenemos las 90 varillas de colores extendidas en el suelo para iniciar el montaje.



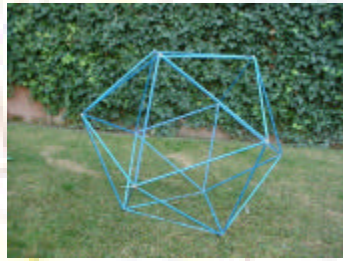
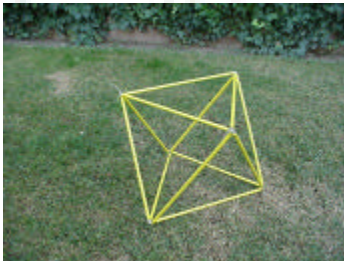
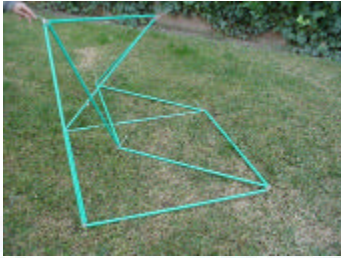
Antes de empezar, es conveniente fijarse bien en el modelo ya construido y revisar cómo están hechas las conexiones con el fin de reproducirlas después.

La construcción del omnipoliedro es una de esas tareas en las que un grupo de personas puede pasar un buen rato. Es conveniente que el grupo se organice, ya que la estructura tiene unas dimensiones que no hacen sencillo el que uno trabaje mientras los demás miran. Además, mientras se monta uno de los poliedros, es conveniente que otros participantes estén preparando las barras del siguiente.

Para empezar, se intenta construir cada poliedro por separado:

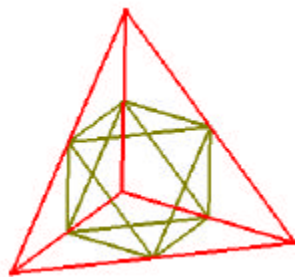


Lo primero que sorprende al realizar la construcción es que algunos de los sólidos platónicos se mantienen rígidos mientras otros se deforman. Los rígidos son los que tienen caras triangulares: el tetraedro, el octaedro y el icosaedro, mientras que el cubo y el dodecaedro no se mantienen en pie.

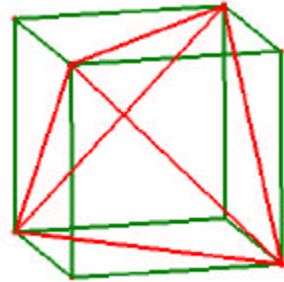


Aprovecharemos la inclusión de unos en otros para que los tres poliedros de caras triangulares aporten su rigidez a los otros dos que se deforman: el cubo y el dodecaedro.

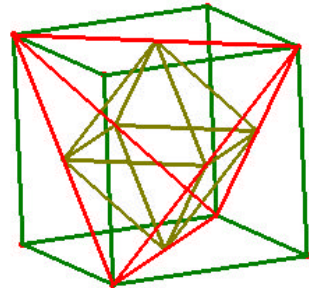
- Construimos un tetraedro e introducimos un octaedro en su interior de forma que cada vértice del octaedro vaya al punto medio de la arista del tetraedro.



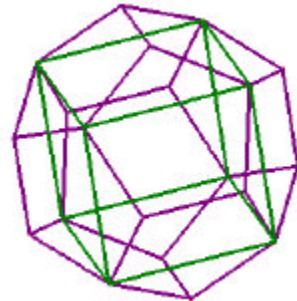
- Montamos el cubo alrededor del tetraedro, de forma que los vértices de éste último sean vértices alternos del cubo. De esta forma, cada cara cuadrada del cubo se ve cruzada por una arista del tetraedro que es su diagonal. Cada cara cuadrada que antes era deformable se ha convertido ahora dos triángulos rígidos.



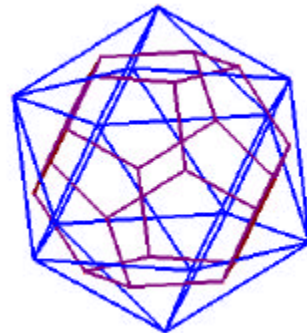
- Ya tenemos los tres primeros poliedros encajados, de dentro a fuera: el octaedro, el tetraedro y el cubo. Como se ve, los vértices del octaedro se sitúan en el centro de las caras del cubo



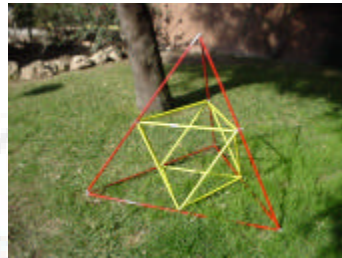
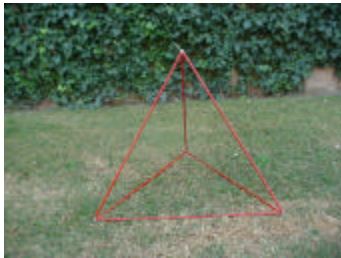
- Después construimos el dodecaedro a partir del cubo, de forma que en cada vértice del cubo concurren tres vértices del dodecaedro. Algunos de estos vértices tenían ya seis varillas y añadimos tres más intercalando las barras entre las ya colocadas. Al mismo tiempo vamos formando los doce pentágonos del dodecaedro, uniendo las varillas anteriores de tres en tres con cuidado de que se formen los pentágonos regulares. Intentaremos que estas últimas conexiones tengan una cierta holgura para que después las barras del icosaedro puedan ir por el interior. Ya nos ocuparemos al final de ajustar las ataduras.



- Por último, el icosaedro es el que da rigidez al dodecaedro introduciendo las barras azules por el interior de las moradas. Cada uno de los vértices del primero está en el centro de cada cara del segundo y las aristas de ambos se unen en los puntos medios.



La secuencia anterior con las varillas:

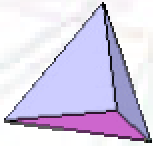

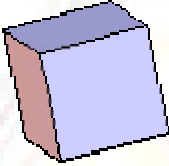

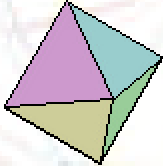
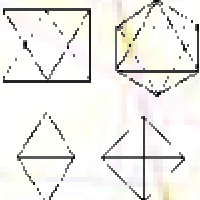
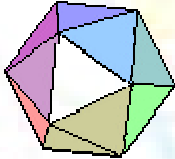
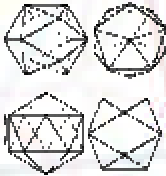

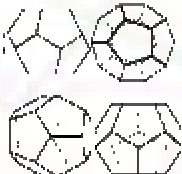


El omnipoliedro completo:



3.2. Dimensiones

Dada una determinada medida para la arista del cubo, tenemos la siguiente proporción entre las aristas de los poliedros tomada del libro de P. Puig Adam *Didáctica de la matemática recreativa* (1956). El anexo "Las proporciones en el omnipoliedro" se dedica a la obtención de estas relaciones.

Poliedro	Perspectiva	Vistas	Núm. barras	Longitud
Tetraedro			6	$x \cdot \sqrt{2}$
Cubo			12	x
Octaedro			12	$x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$
Icosaedro			30	x
Dodecaedro			30	$x \cdot \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

3.3. Longitudes y peso

Se ha pretendido que el omnipoliedro tenga dimensiones "humanas", para ello se ha adoptado como arista del cubo 1.67 m, que viene a ser aproximadamente el promedio de las estaturas de la población adulta española.

La envergadura de la construcción viene dada por el diámetro de la esfera circunscrita al poliedro más exterior, el icosaedro, que es aproximadamente de 3.20 m mientras que la que circunscribe al cubo será de 2.90 m.

Para el cálculo de las longitudes de las barras de aluminio es necesario contar con que las hembrillas que se colocan en los extremos incrementan en 4 cm la longitud. A esto hay que añadir que el grosor de la barra de aluminio es de 16 mm, lo que obliga a que las barras de los poliedros que van por el interior hayan de ser ligeramente más cortas que las que se sitúan por el exterior. Esto ocurre con el octaedro cuyos vértices van a los puntos medios de las aristas del tetraedro, pero el caso más importante es el del icosaedro cuyas aristas se cruzan con las del dodecaedro.



La cantidad de barras y sus dimensiones para esta construcción:

Poliedro	Número de barras	Longitud de la arista	Long. barra Aluminio	Total
Tetraedro	6	2.36	2.32	13.92
Cubo	12	1.67	1.62	20.04
Octaedro	12	1.18	1.12	13.44
Icosaedro	30	1.67	1.615	48.45
Dodecaedro	30	1.03	0.99	29.70
Total				125.55

3.4. Varillas - Las aristas

Las primeras pruebas del omnipoliedro se realizaron con varillas de madera de haya por ser un material fácilmente manipulable. Como este modelo queda expuesto a la intemperie, se han realizado experiencias con materiales más resistentes sin que el peso sobrepase ciertos límites.

Las pruebas nos han llevado al tubo hueco de aluminio de 16 mm de diámetro con 1.3 mm de espesor. El aluminio tiene una densidad de 2.7gramos por centímetro cúbico, que hace que una barra de un metro de longitud pese aproximadamente 160 gramos.

El peso de esta construcción está próximo a los 22 Kg, mientras que las dimensiones permiten que se pueda montar con cierta facilidad en un espacio al aire libre. El cálculo de los pesos es el siguiente:

	Cantidad	Peso	Peso
Varillas	125.55 m	160 g/m	20.1 Kg
Uniones (taco + hembrilla)	180	10 g/unid	1.8 Kg
Total			21.9 Kg

Para una arista del cubo de 2 m de longitud el peso no sería mucho mayor que el anterior, alrededor de 28 Kg. Las dificultades las encontraremos cuando intentemos construir poliedros con aristas próximas a los 3 m, mientras que la distancia entre dos vértices opuestos del icosaedro rondaría los 4 m.

3.5. Conexiones - Los vértices

Cada barra lleva dos hembrillas cerradas que servirán para unir unas a otras por sus extremos formando los vértices de los poliedros. En la figura vemos una de las uniones de seis barras en un vértice (tres del cubo y tres del dodecaedro)



Para colocar las hembrillas en los extremos de las barras se ha encontrado una solución con tacos de plástico de 12 mm. Al enroscar en ellos las hembrillas de 10x21 mm, se consigue que el taco quede firmemente ajustado al tubo. Por el interior de las hembrillas pasaremos las bridas de plástico. En la imagen uno de los cuatro vértices al que llegan nueve barras.



El mínimo número de varillas que concurren a un vértice es tres (algunos de los vértices del dodecaedro), y el máximo nueve: hay cuatro vértices a los que concurren tres barras del cubo, tres del tetraedro y tres del dodecaedro.

Aristas / Vértice	Poliedro
3	Dodecaedro
4	Octaedro
5	Icosaedro
6	Cubo (3) Dodecaedro (3)
9	Tetraedro (3) Cubo (3) Dodecaedro (3)

3.6. La imaginación - Las caras

Tenemos material para las aristas: el aluminio pintado para los vértices, el acero de los cáncamos, el plástico de los tacos y las bridas para unir unas varillas con otras. Sin embargo no tenemos material para cubrir las caras de los poliedros, es la imaginación de las personas la que ha de colocar las caras sobre cada poliedro para después quitarlas y seguir “viendo” los demás sólidos platónicos.

Es esta posibilidad de ver el interior de los poliedros la que hace que podamos analizar nuevas relaciones entre ellos tanto numéricas como geométricas.

3.7. El color

El color es otro de los aspectos importantes de esta construcción. Ha de servir para distinguir el armazón de cada poliedro de los otros cuatro. De esta forma resaltarán las propiedades específicas de cada poliedro a la vez que se ponen de manifiesto las relaciones con los demás: planos de simetría, ejes de rotación, dualidad, etc.

Para la elección de los colores se han tenido en cuenta dos factores. En primer lugar la simbología clásica de los poliedros reseñada en el capítulo 1, ya desde la Grecia Clásica se relacionaban los poliedros con los elementos de la materia: el fuego, la tierra, el aire y el mar, junto con el universo.

En segundo lugar se ha atendido a la distinta luminosidad de los colores, que depende la estructura espectral de la luz reflejada por el pigmento. La idea básica es compensar los colores que menos van a aparecer con la elección de un color de mayor luminosidad que los haga resaltar. Se ha estudiado el porcentaje que suponen las barras de cada poliedro respecto del total de la composición. Para los cálculos se ha tomado la arista del cubo de 1 m de longitud aunque los resultados son válidos para cualquier tamaño.

Poliedro	Barras	Porcentaje	Luminosidad	Color
Octaedro	12 x 0.7	11%	8	Yellow
Tetraedro	6 x 1.4	11%	6	Red
Cubo	12 x 1	15%	6	Cyan
Icosaedro	30 x 1	40%	4	Blue
Dodecaedro	30 x .6	25%	4	Magenta

3.8. La pintura

Aunque se comercializa el aluminio pintado en muchos colores, es difícil de conseguir en fábrica ya que la cantidad que necesitamos no es suficiente para que nos lo proporcionen en cinco colores distintos. Se ha optado por la solución de dar color a las barras con técnicas de pintura de automóviles.

En los Talleres de Chapa y Pintura del I.E.S. Leonardo da Vinci se han estudiado distintas alternativas para el pintado del tubo de aluminio. Por las características de este material, se planteó el problema de la adherencia de la pintura a la superficie, es necesario aislar el material para que la pintura no salte a capas.



Después de varias pruebas se encontró una imprimación de dos componentes denominada Wash Primer. Está compuesta por dos resinas Epoxi (la imprimación con un catalizador). La primera prueba que se realizó se hizo a pistola, pero se desperdiciaba mucho producto, por lo que se pasó al rodillo de esmaltar.



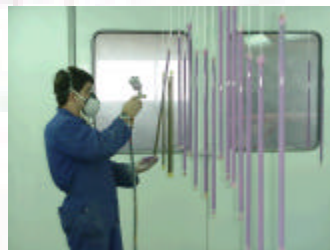
Solucionado el problema de la adherencia de las barras de aluminio, se procedió a la elección de la pintura a aplicar. Se optó por una pintura de la familia de las resinas de poliuretano, ya que la relación calidad-precio es la adecuada para el ambiente y uso que se le va a dar. Dicha pintura es de secado químico por polimerización.



La imprimación se deja evaporar durante 10 minutos, después se pinta con el poliuretano en relación 3:1 (tres partes de pintura base por una de catalizador, con la adición de diluyente cuya proporción depende de la temperatura y humedad a la que vayamos a trabajar). Se dejan evaporar los disolventes 10 minutos y se pinta una segunda mano que será la que aporte el brillo y la dureza requerida a la pintura una vez seca. Algunos colores como el amarillo y el rojo tienen menor poder recubridor y necesitan más manos de pintura hasta cubrir los tubos.

La aplicación de la pintura se realizó con una pistola aerográfica de tamaño pequeño para no desperdiciar pintura. El proceso de secado se realizó en cabina a 60° durante 30 minutos.

Los trabajos se han realizado en el Taller de Carrocería por la promoción 1998-2000 de alumnos del Ciclo Formativo de Carrocería del I.E.S. Leonardo da Vinci de Alicante, dirigidos por el profesor Plácido Gutiérrez Casanova que aparece con máscara en la fotografía.



3.9. Otras estructuras con varillas

El Icosaedro en el Aire

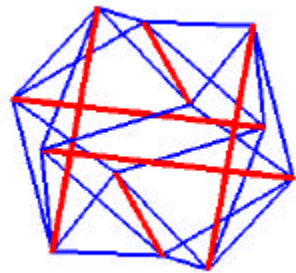
El *Icosaedro en el Aire* de Buckminster Fuller está formado por seis varillas que se unen con seis tensores. Es la figura que ha servido de base para la obra *Secciones Aureas*, citada anteriormente en el capítulo 2 dedicado a los poliedros en la ciudad de Alicante. Este diseño utiliza el concepto de *Tensegridad* (del inglés, *tensegrity*) adoptado por el inventor B. Fuller y el escultor Kenneth Snelson como una contracción de dos ideas: integridad-tensional, y es un principio según el cual la forma estructural está garantizada por la tensión entre las partes que la componen.

La *tensegridad* utiliza la compresión discontinua en las varillas y la tensión continua en los cables que unen los extremos de las varillas. Las varillas no se tocan entre sí, pero proporcionan rigidez en una estructura de cables tensados.

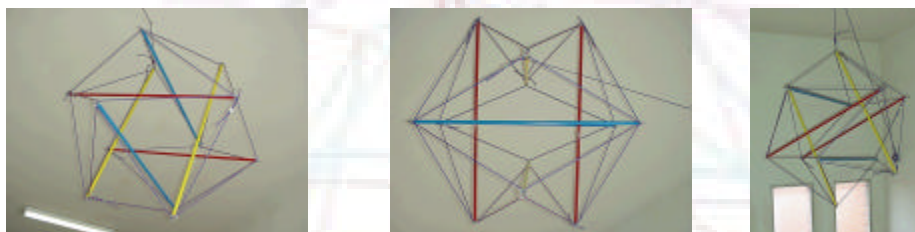
Para construirlo se necesitan seis varillas cuya longitud viene determinada por las diagonales espaciales del icosaedro que se sitúan sobre los lados mayores de tres rectángulos que están en su interior.

En la imagen derecha tenemos estos tres rectángulos en colores distintos: cada uno de los rectángulos tiene sus vértices sobre cuatro vértices del icosaedro de manera que se formen rectángulos que sean planos de simetría del poliedro. Las barras son los lados mayores de cuadriláteros que tienen la característica de ser rectángulos áureos.

La proporción entre la longitud de la varilla y la de los tensores es 1:2.4. Aquí tenemos fotografías del montaje realizado en el I.E.S. Leonardo Da Vinci.

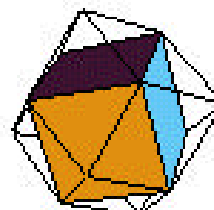
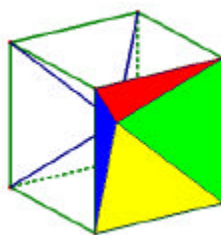
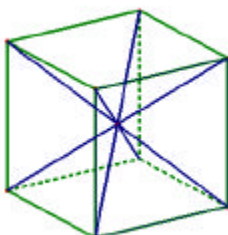
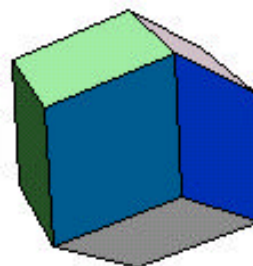


Para el icosaedro en el aire se han utilizado barras de aluminio pintadas con los tres colores básicos. En los extremos se ha utilizado la misma solución que para el omnipoliedro, hembrillas cerradas de 10x21mm que se introducen en tacos de 12 mm. Como tensor se ha buscado una cuerda que no sea elástica para que la estructura no pierda la tensión. Se ha elegido la cuerda de nylon de 6 mm de grosor, de las utilizadas para la escalada. Cada bucle se pasa por el interior de las hembrillas situadas en cuatro extremos de las varillas. Para evitar deslizamientos, los dos cabos que salen de cada hembrilla se ajustan con una brida de plástico y la unión de los extremos de las cuerdas se hace con un enlace de cables utilizado en ferretería.



En cualquier momento podemos desmontar el omnipoliedro para formar nuevas combinaciones de poliedros. En los casos siguientes reutilizamos parte del material del omnipoliedro, y en algunos casos hay que confeccionar nuevas barras para realizar otras construcciones.

El dodecaedro rómbico es el poliedro que tiene doce caras de la misma forma y tamaño: el rombo. Se puede obtener del cubo si levantamos sobre cada cara una pirámide que sería la misma que podemos encontrar desde la cara hacia el centro del cubo. Las dos imágenes de la derecha están tomadas de las páginas de E. Weisstein en Internet.

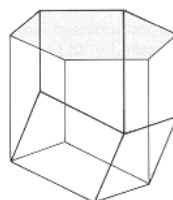


Al elevar las pirámides, deberíamos obtener un poliedro con 24 caras triangulares, pero cada par de triángulos están en un mismo plano, formando 12 rombos.

La construcción con las varillas utiliza las doce del cubo, junto al tetraedro que le da rigidez, y necesita 24 nuevas varillas de longitud $\frac{\sqrt{3}}{2}$ que es la distancia desde cada vértice hasta el centro del cubo (la mitad de la diagonal espacial).



Una de las características importantes del dodecaedro rómbico es que es uno de los pocos poliedros que rellena el espacio, propiedad que es aprovechada por las abejas para utilizarlo en la construcción de sus panales para realizar las terminaciones de sus celdillas (prismas de base hexagonal) y unir las unas a otras.



Algunas de las fotografías de esta sección se tomaron en la exposición que la Sociedad de Educación Matemática de la Comunidad Valenciana Al Khwarizmi organizó en 1997 en la Casa del Ingeniero de Alicante con motivo del II Concurso de Fotografía Matemática.

El tetraedro estrellado, formado por un tetraedro interior al que se añaden otros cuatro tetraedros que se elevan sobre cada cara.

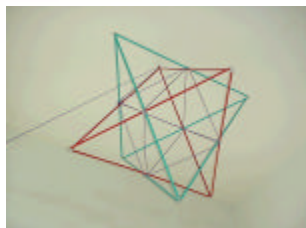
Se pueden utilizar seis de las barras del cubo para el tetraedro y doce barras del icosaedro para la elevación realizada sobre las caras.



La estella octángula, formada por dos tetraedros invertidos uno respecto de otro que se cortan en los puntos medios de las aristas, cuya intersección se convierte en un octaedro. Los ocho vértices resultantes se sitúan sobre los vértices de un cubo y la intersección de los dos tetraedros forma un octaedro. Aquí tenemos la fotografía de un rompecabezas que utiliza la forma de este compuesto de poliedros.

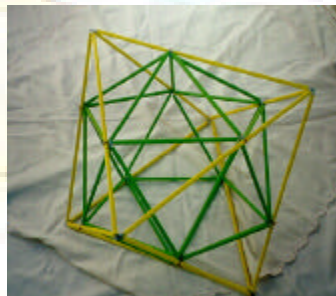


El material necesario para construir la estella octángula son doce varillas de la misma medida, a ser posible de dos colores distintos. El octaedro se puede conseguir con una cuerda que se pasa por los puntos de intersección de las aristas de los tetraedros.

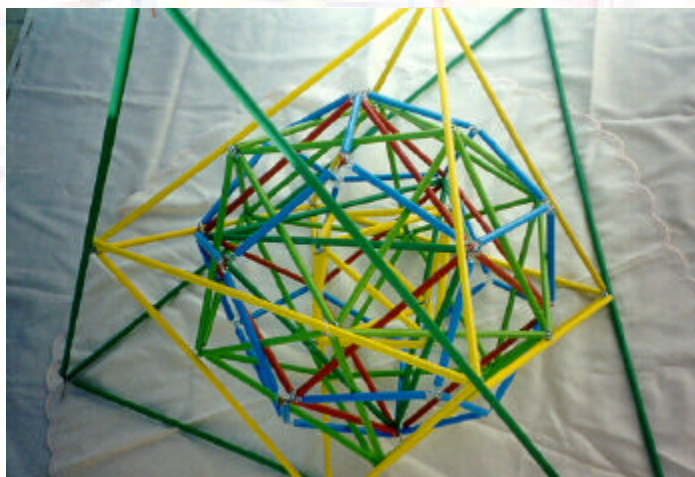


El omnipoliedro puede crecer.

Un icosaedro se puede inscribir dentro de un octaedro de forma que coincidan las simetrías de estas dos figuras. Para ello los vértices del icosaedro se colocan en las aristas del octaedro de forma que cada vértice divida a la arista en la proporción áurea ($1/\phi$).



Esto lleva a una nueva posibilidad de crecimiento infinito, el nuevo octaedro puede inscribirse en otro tetraedro mayor con los vértices del octaedro en el centro de cada arista del tetraedro. El tetraedro en un nuevo cubo, y así sucesivamente.



4. Problemas y actividades

Se presentan diez problemas para realizar antes, durante o después de la construcción con el fin de que el trabajo de montaje del omnipoliedro se pueda enmarcar dentro del estudio de las matemáticas escolares.

Con estas situaciones se pretende el desarrollo de los diferentes contenidos geométricos y matemáticos: la medida, el cálculo, el álgebra, la intuición espacial, el apreciar la belleza de las formas y muchos otros.

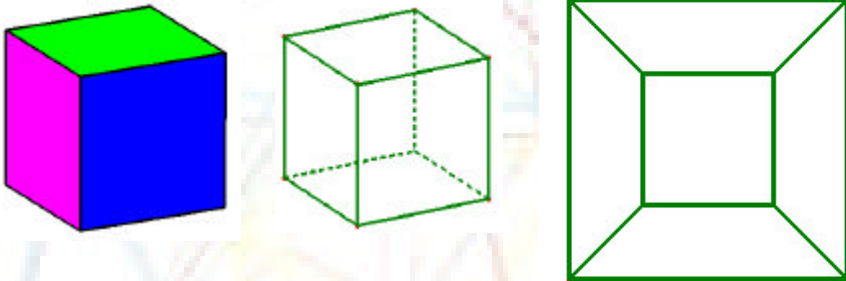
Se ha seleccionado una colección de diez situaciones matemáticas que pueden ser utilizadas para Educación Secundaria Obligatoria y en el Bachillerato, dependiendo del nivel de dificultad con que se aborden los problemas planteados. En general, todas intentan combinar el pensamiento espacial con la representación plana de los cuerpos espaciales:

1. El diagrama de Schlegel. Un dibujo en el plano para los cuerpos espaciales.
2. Relaciones numéricas. La relación entre los números de caras, vértices y aristas: la fórmula de Euler.
3. El símbolo de Schläfi. Un código numérico para nombrar a los poliedros.
4. Desarrollos planos de los cuerpos espaciales. Otra forma de relacionar el plano y el espacio en la que los polígonos no pierden la forma.
5. Sólo hay cinco poliedros regulares. Los ángulos de los polígonos regulares y los vértices de los poliedros.
6. Secciones planas del cubo y de otros poliedros. Los cortes a los poliedros y los polígonos que originan.
7. Poliedros truncados. Poliedros obtenidos al dar cortes en todas las esquinas.
8. Dualidad, qué ocurre cuando cambiamos caras por vértices y viceversa.
9. Las simetrías en el cubo: planos de simetría y ejes de rotación.
10. Rompecabezas: la cola de milano (dos piezas), el cubo soma (siete) y el cubo de Steinhauss (seis).

4.1 El diagrama de Schlegel

El diagrama de Schlegel de un poliedro es una representación que lleva las aristas de un poliedro a un diseño en el plano. Es como si un objeto tridimensional se aplanara. Sería el resultado de plasmar en un papel lo que vemos cuando miramos el armazón del poliedro construido con varillas (como los del omnipoliedro). Pero hay que acercarse mucho, de forma que veremos un polígono grande y otros más pequeños en su interior.

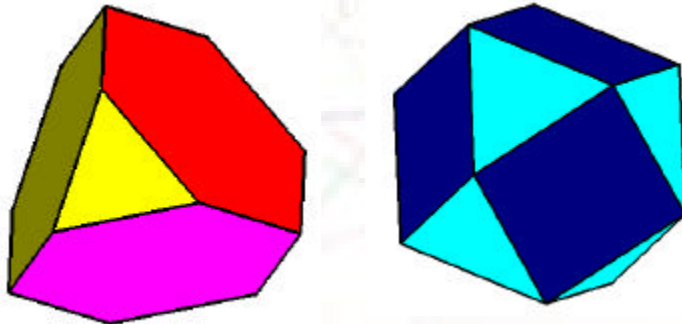
El diagrama de Schlegel del cubo es la figura poligonal de la derecha:



Es interesante ver que en este diagrama una cara contiene las imágenes del resto de vértices, aristas y caras aunque sus tamaños y formas se distorsionen.

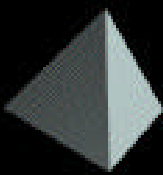





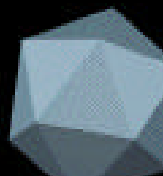



Dibuja los diagramas de Schlegel de los otros sólidos platónicos.

Inténtalo con algún otro de los que han aparecido anteriormente como el tetraedro truncado y el cuboctaedro:



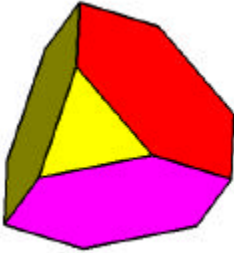
4.2 Relaciones numéricas.

Relaciones numéricas entre los sólidos platónicos. Fórmula de Euler.

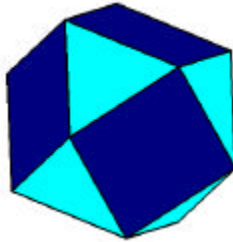
Poliedro		Cara	Núm políg. a vert.	Núm caras C	Núm arist. A	Núm vert. V	C+V-A
Tetraedro			3	4	6	4	
Octaedro							
Cubo							
Icosaedro							
Dodecaedro							

La relación que se obtiene en la columna de la derecha recibe el nombre de *Fórmula de Euler*, y la cumplen muchos otros poliedros.

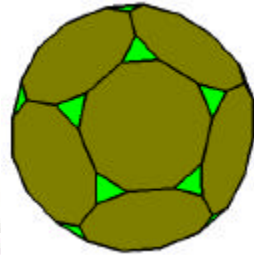
Investiga si estos otros poliedros cumplen la fórmula de Euler:



Tetraedro truncado



Cuboctaedro



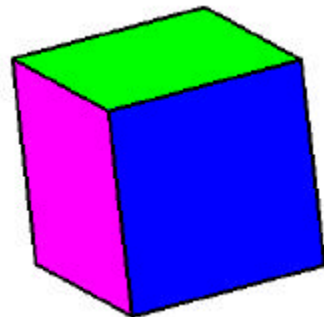
Dodecaedro truncado

¿Ocurrirá también con el balón de fútbol, también llamado *icosaedro truncado*?

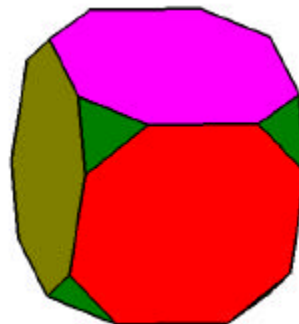


4.3 El símbolo de Schläfi

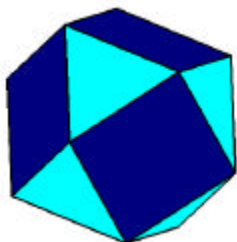
El símbolo de Schläfi de un poliedro indica los polígonos que concurren a cada vértice y cuántos de cada clase. Por ejemplo, para el cubo tendríamos que a cada vértice concurren 3 cuadrados (polígonos de 4 lados) y lo representamos por 4^3 . Los matemáticos han utilizado la escritura de las potencias para esta nueva situación geométrica. Aquí la base del símbolo de Schläfi indica el número de lados del polígono y el exponente nos da la cantidad de polígonos de ese tipo que concurren en cada vértice.



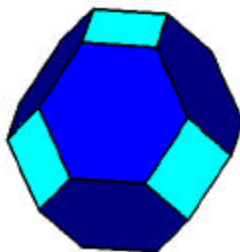
En el cubo truncado de la derecha, a cada vértice concurren dos octógonos (8^2) y un triángulo (3), por lo que su símbolo de Schläfi es $8^2.3$.



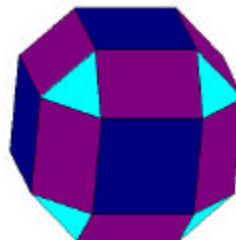
Da el símbolo de Schläfi de los cinco sólidos platónicos y de estos otros:



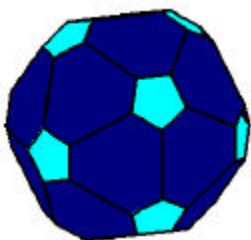
Cuboctaedro



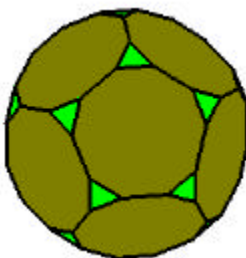
Sólido de Kelvin



Rombicuboctaedro



Icosaedro truncado



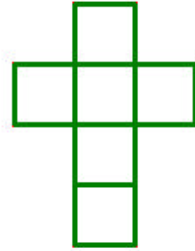
Dodecaedro truncado



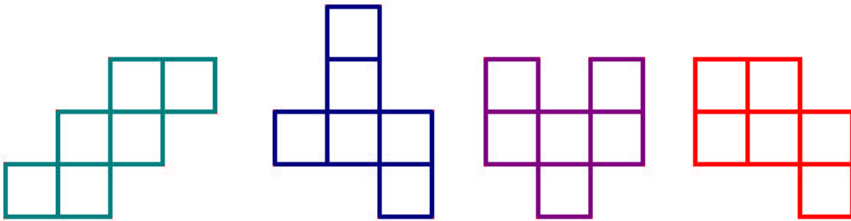
Icosidodecaedro

4.4 Desarrollos planos

Una forma de construir un cubo o hexaedro consiste en dibujar en cartulina el desarrollo plano, es decir, seis cuadrados adosados de forma que cada dos tienen un lado común, añadir las lengüetas, recortar, plegar y pegar las aristas. El diseño típico es el de la derecha



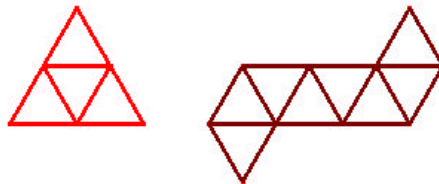
Aquí tienes otros desarrollos planos. Estudia si se podrá formar con ellos un cubo mediante plegado.



Una investigación más avanzada será obtener todos los posibles desarrollos planos de un cubo. Para conseguirlo es necesario ser muy sistemático. Primero debes conseguir todas las formas de colocar seis cuadrados adosados por el lado y ver con cuáles de ellas se puede plegar para conseguir el cubo. Las siguientes ideas te pueden servir como ayuda:

- Sólo hay una forma de colocar dos cuadrados adosados por un lado: recibe el nombre de *dominó*.
- Consigue todas las formas posibles de colocar tres cuadrados adosados por un lado (*triminós*).
- Consigue todos los *tetraminós* y *pentaminós* e intenta que no se te olvide ninguno.
- Cuando tengas todos los *hexaminós*, estudia cuáles de ellos se pueden plegar formando un cubo.

Aquí tienes un desarrollo del tetraedro y otro del octaedro, Investiga otros.



Dibuja el desarrollo plano de una caja de zapatos, del tetraedro truncado que aparece a la izquierda y también el de un balón de fútbol.

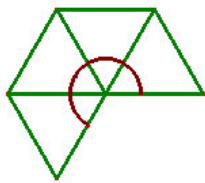
4.5 Sólo cinco poliedros regulares

Para que un poliedro sea regular, todas sus caras han de ser el mismo polígono regular y los ángulos han de ser iguales también. Podemos estudiar si puede haber un sexto poliedro regular.

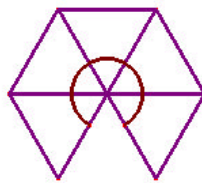
Empezaremos por los triángulos, como su ángulo interior es de 60° . Podemos agrupar 3, 4 ó 5 triángulos equiláteros alrededor de un vértice.



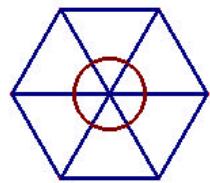
$$3 \times 60 = 180$$



$$4 \times 60 = 240$$

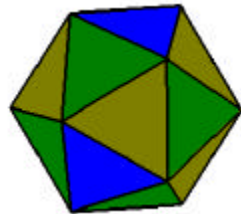
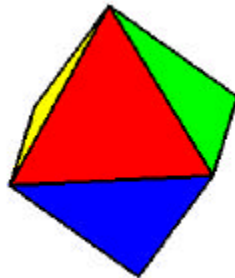
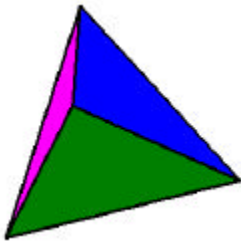


$$5 \times 60 = 300$$



$$6 \times 60 = 360$$

De esta forma obtenemos el tetraedro, el octaedro y el icosaedro. En el caso de la derecha, el ángulo que forman es de 360° , una circunferencia completa, y no podremos formar poliedro.



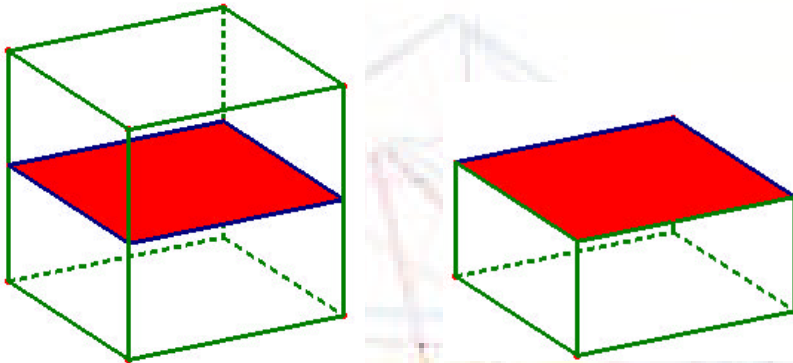
Investiga con cuadrados. Hay que tener en cuenta que para formar un ángulo poliedro siempre debe haber un mínimo de tres polígonos.

Investiga con pentágonos.

¿Por qué no puede haber poliedros regulares con hexágonos?. ¿Y con otros polígonos?.

4.6 Secciones planas del cubo

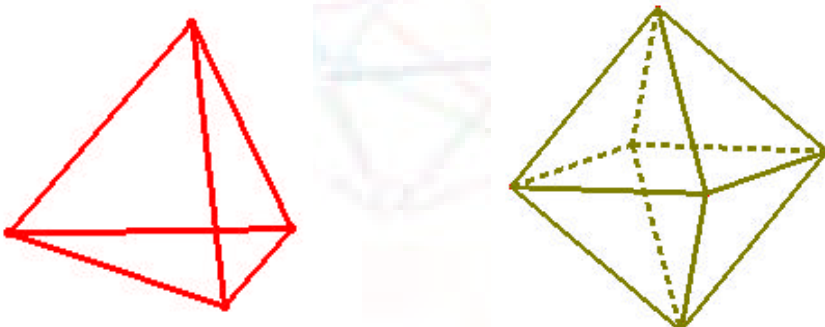
Si realizamos un corte plano a un cubo con un plano que sea paralelo a una de las caras, la figura que obtenemos será un cuadrado.



Vamos a estudiar los cortes producidos por secciones planas en un cubo. Para ello has de imaginar un cubo y le vas dando cortes en tu mente:

- Corta una pequeña porción de una esquina, ¿cómo es la sección que imaginas?
- Intenta que la sección sea un triángulo equilátero, ¿cómo ha de ser el corte?.
- Corta un poco más para que el triángulo sea un poco mayor.
- ¿Qué ocurre si seguimos cortando?.
- ¿Cuándo se llega al mayor de los triángulos equiláteros?.
- ¿Qué ocurre si aún cortas un poco más?.
- ¿Qué ocurre si sigues dando cortes paralelos hasta llegar al vértice opuesto al que habías empezado?.

Repite el proceso anterior de cortes sucesivos para el tetraedro y el octaedro

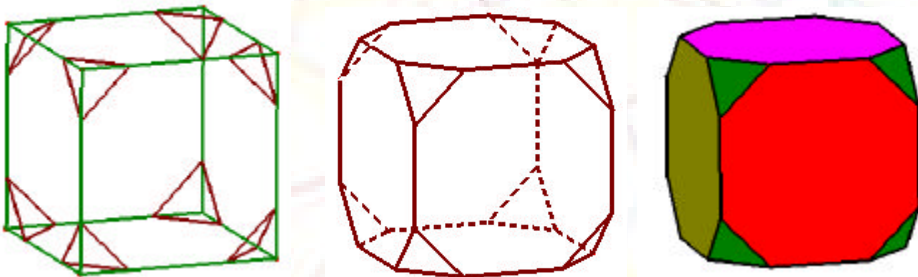


¿Qué otros polígonos puedes conseguir con las secciones planas del cubo?. Investiga si puedes conseguir:

- Otros cuadriláteros.
- Triángulos isósceles, rectángulos, escalenos.
- Hexágonos, pentágonos, heptágonos, octógonos, ...

4.7 Poliedros truncados

Ahora vamos a coger un cubo y cortaremos en todas las esquinas una pequeña porción de forma que la sección sea un triángulo equilátero.

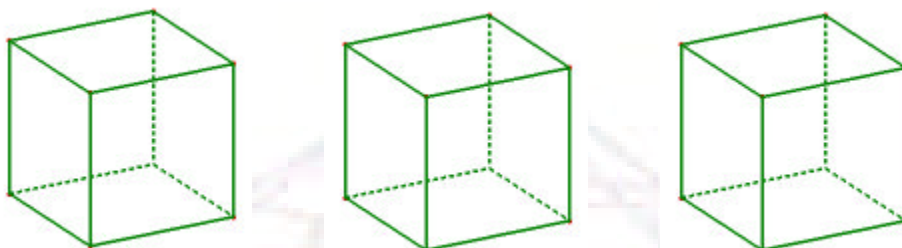


El poliedro resultante es el cubo truncado que tiene catorce caras, ocho son los triángulos equiláteros que han surgido de los vértices, y las otras seis son octógonos que provienen de las caras del cubo a las que se han quitado los triángulos de las esquinas.

El corte se ha dado a $\frac{1}{4}$ de cada arista, de forma que el lado grande del octógono es más grande que el pequeño. ¿Cómo habrá que dar el corte para que todos los lados tengan la misma longitud?. Utiliza uno de los tres cubos de abajo para hacer pruebas.

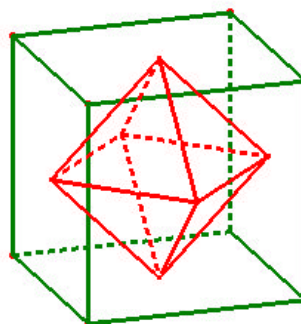
Si los cortes que hemos dado al cubo llegan hasta el centro de cada arista, el poliedro que obtendremos será distinto, seguirá teniendo triángulos, pero los octógonos se convierten en otro polígono. Utiliza el segundo cubo para hacer un boceto del nuevo poliedro.

Aún podemos dar cortes más profundos en todas las caras y obtener nuevos poliedros truncados. Si los cortes pasan del centro de las aristas, los triángulos se convierten en otros polígonos. Estudia esta nueva situación.

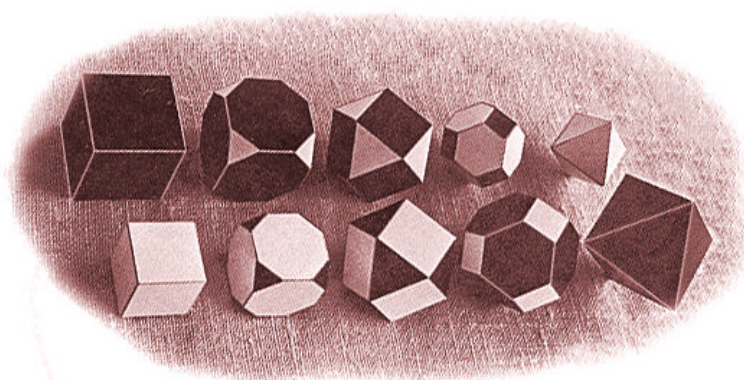


Los cortes podrían llegar hasta el centro de las caras. En ese momento los truncamientos nos habrán llevado a otro de los sólidos platónicos: el octaedro.

Realiza el proceso anterior partiendo del octaedro. Comienza con pequeños cortes en los vértices y hazlos más profundos poco a poco. Estudia los poliedros truncados que salen.



La relación entre el cubo y el octaedro es de ida y vuelta, podemos pasar de uno a otro mediante truncamientos, como lo muestran las páginas de internet del equipo *Computation, Vision, and Geometry*, en las que vemos las dos secuencias de cortes sucesivos:

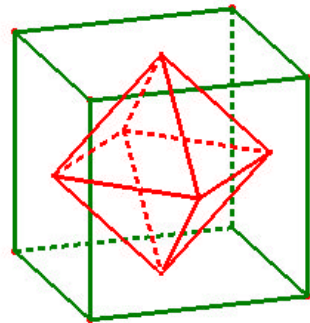


4.8 Dualidad.

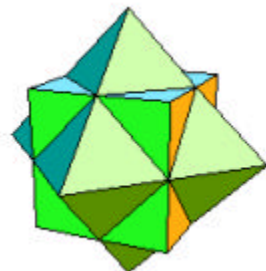
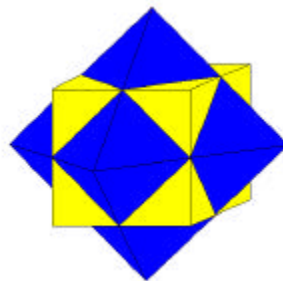
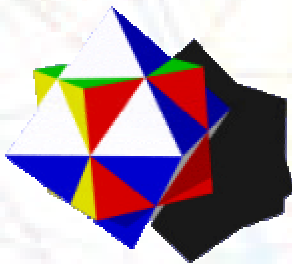
Al revisar los datos numéricos del cubo y el octaedro:

	Caras	Aristas	Vértices
Cubo	6	12	8
Octaedro	8	12	6

Los dos poliedros tienen el mismo número de aristas y los números de las caras y los vértices están intercambiados. En el omnipoliedro están colocados de forma que los vértices de uno se sitúen en el centro de las caras del otro como en la figura.



Aquí tienes varios diseños que nos acercan a la visión de la dualidad de entre el cubo y el octaedro. Están tomados de páginas de Internet, de izquierda a derecha y de arriba a abajo: Tom Gettys, Steve Dutch, Ha Le y Hubert Martineau:



Hay una figura que tiene mucho que ver con las ideas de dualidad, es la *stella octángula*, formada por dos tetraedros que están en posición invertida uno respecto del otro. El modelo de la fotografía se ha construido en el I.E.S. Leonardo da Vinci.



En la imagen también se puede apreciar otra relación entre los dos tetraedros, como las aristas de los dos poliedros se cortan en los puntos medios, se han unido estos puntos de intersección con una cuerda azul gruesa, con lo que se ha formado un octaedro en su interior. Podemos decir que el octaedro es la intersección de los dos tetraedros-

¿Con qué otros poliedros se produce algo parecido?.

Sugerencia:

En el omnipoliedro podemos encontrar respuestas a algunas de estas preguntas.

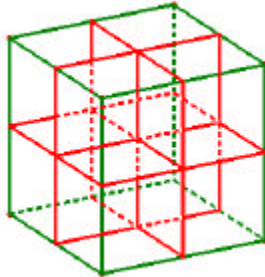
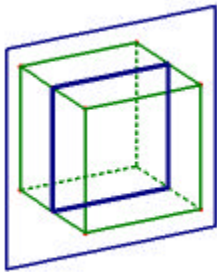


4.9 Las simetrías en el cubo.

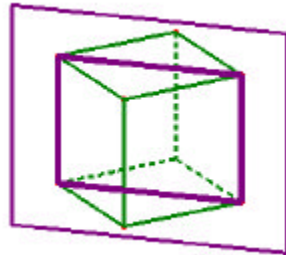
Estudiaremos los elementos de simetría del cubo y, a partir de ellos, buscaremos los de los otros cuatro sólidos platónicos.

Para simplificar, un **plano de simetría** de un poliedro podría ser considerado como un espejo colocado en un corte del cubo, de forma que entre lo que queda del cubo y su imagen especular, podamos reconstruir el cubo completo.

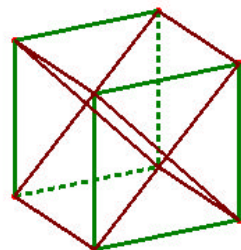
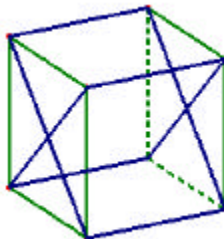
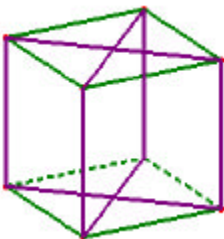
Uno de los planos de simetría es paralelo a dos caras opuestas y corta al cubo por los puntos medios de las aristas. Hay tres planos de simetría como éste:



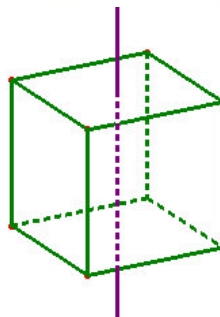
Hay otro tipo de planos de simetría que cortan al cubo por las diagonales de las caras y por cada par de aristas opuestas:



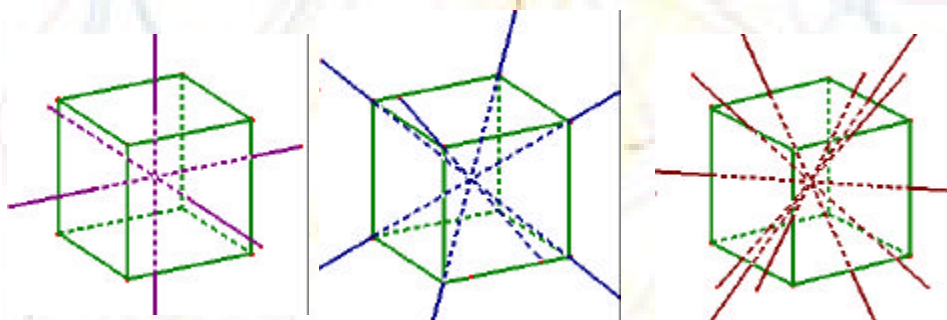
Hay seis planos de simetría que van por las diagonales:



Un **eje de rotación** es una recta que atraviesa el poliedro y que, si el cuerpo gira alrededor de ella, vuelve a coincidir consigo mismo antes de dar una vuelta completa. El orden de rotación de un eje es el número de veces que coincide el cuerpo consigo mismo hasta dar la vuelta completa. Por ejemplo este eje del cubo es de orden 4 porque cada giro de 90° hace que el cubo coincida con su posición inicial.



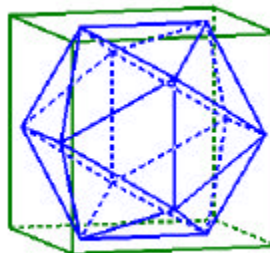
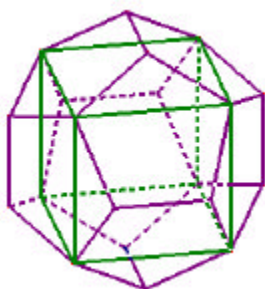
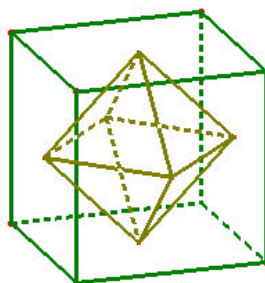
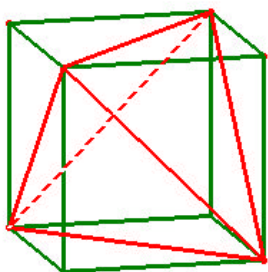
Hay tres tipos de ejes de rotación: los tres que atraviesan el cubo por el centro de las caras, los cuatro que unen vértices opuestos por la diagonal espacial del cubo y los seis que pasan por los puntos medios de aristas opuestas y que son paralelos a las diagonales de las caras.



Una vez tenemos los elementos de simetría del cubo, el omnipoliedro puede ser de gran utilidad para encontrar los de los otros cuatro sólidos platónicos, los encajes de unos en otros tienen mucho que ver con los planos de simetría y ejes de rotación comunes.



Los siguientes esquemas pueden servir de ayuda para encontrar planos de simetría y ejes de rotación del tetraedro, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro:



4.10 Rompecabezas

Un puzzle en dos piezas. La cola de milano

La fotografía muestra un cubo macizo de madera compuesto por dos partes que encajan perfectamente sin dejar huecos en su interior. Las cuatro caras laterales muestran exactamente la misma forma que vemos en las dos de la fotografía, es un tipo de unión llamado *cola de milano* muy utilizada por los carpinteros porque da mucha rigidez a las uniones.

Estas dos piezas se pueden separar y volver a unir cuando se desee. ¿Cómo es esto posible?.

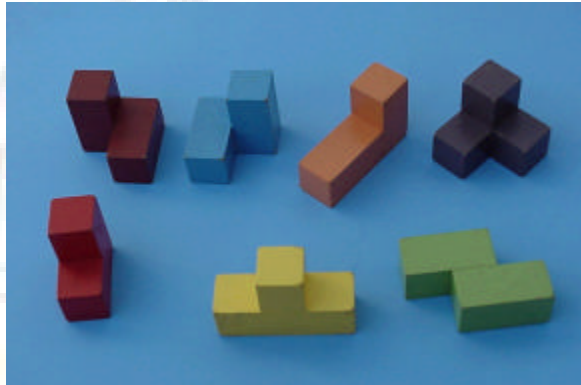


Con siete piezas: El cubo Soma.

Fue diseñado por Piet Hein, un poeta e inventor danés. Consiste en la descomposición de un cubo $3 \times 3 \times 3$ en siete piezas que son todas las figuras cóncavas que podemos formar con tres o cuatro cubos pequeños adosados por una cara: hay un *tricubo* y seis *tetracubos*.

El objetivo es formar con las siete piezas un cubo más grande $3 \times 3 \times 3$.

En Internet hay páginas dedicadas a este rompecabezas. Allí podemos encontrar las 240 soluciones.



El cubo de Steinhaus

Es muy parecido al Cubo Soma, pero está compuesto por seis piezas: cuatro *tetracubos* y dos *pentacubos*.

Es mucho más difícil ya que sólo tiene una solución.



No es complicado fabricar las piezas del Cubo Soma y del Cubo de Steinhaus. Podemos comprar en una carpintería cubos de madera de 2 ó 3 cm de arista y pegar los cubos con cola como se ve en las fotografías.

5. Bibliografía.

1. Castells, R. y López, J.A. Inventario municipal de escultura de la ciudad de Alicante. Ayuntamiento de Alicante. No publicado.
2. Coxeter, H. (1971). Fundamentos de Geometría. Limusa. México.
3. Cundy, H. et Rollet, A. (1978). Modèles Mathématiques. CEDIC. Paris.
4. D'Arcy Thompson (1980) Sobre el crecimiento y la forma. H. Blume. Madrid.
5. Darce, M. Et Pitou,, F. (1984). Polyedres dans l'espace. Dossiers du Plot. Orleans.
6. De Grandis, L. (1985) Teoría y uso del color. Cátedra. Madrid
7. Equipo de Reforma de la Comunidad Valenciana. (1989/91). Materiales de enseñanza. Generalitat Valenciana. Valencia.
8. Ernst, B. (1989). El espejo mágico de M. C. Escher. Taco. Berlín
9. Ferrer, J.L. (1999). Superficies poliédricas. Paraninfo. Madrid.
10. Ghyka, M.C. (1983). Estética de las proporciones en la naturaleza y en las artes. Poseidón. Barcelona.
11. Guillén, G. (1991). Poliedros. Síntesis. Madrid.
12. Huntley, H.E. (1970). The divine proportion. A study in mathematical beauty. Dover. New York.
13. Locher, J.L. ed. (1988). The world of M. C. Escher. Abrams. New York.
14. Mora, J.A. y Rodrigo, J. (1993). Mosaicos (2 vol.) Proyecto Sur. Granada.
15. Mora, J.A. (1997). Geometría de los mecanismos con Cabri Géomètre II. Texas Instruments. Madrid
16. Mora, J.A. (1999). Matemáticas con Cabri II. Proyecto Sur. Granada.
17. Munari, B. (1976) Diseño y comunicación visual. Gustavo Gili. Barcelona.
18. Munari, B. (1976). El triángulo. Gustavo Gili. Barcelona.
19. O'Daffer, P. G. y Clemens S. R. (1977). Geometry: an investigative approach. Addyson Wesley. California
20. Pacioli, L. (1987). La Divina proporción. Akal. Madrid

21. Puig Adam, P. (1956). Didáctica de la matemática moderna.
22. Ramírez, P. Ed. (1998). Sempere Sempere. Ayuntamiento de Alicante.
23. Rico, P. y Castells, R. (1999). Colección Arte Siglo XX. Museo de la Asegurada. Alicante.
24. Qural, T. y otros (1998). Estructuras Espaciales. Tandem. València
25. Stewart, I. y Golubitsky, M. (1995). ¿Es Dios un geómetra?. Crítica. Barcelona.
26. Weyl, H. (1991). La Simetría. Mc Graw Hill. Madrid.

Los poliedros en Internet. Enlaces y direcciones de interés

1. Symmetry, Crystals and Polyhedra en Natural and Applied Sciences, de Steve Dutch.

<http://gbms01.uwgb.edu/~dutchs/symmetry/symmetry.htm>

Interesante catálogo de poliedros, con todos los datos y explicaciones necesarias.



2. Polyhedra and Art, de George W. Hart.

<http://www.georgehart.com/virtual-polyhedra/art.html>

Recorrido histórico por la utilización de los poliedros en el arte, desde las piedras del neolítico hasta M.C. Escher con imágenes de las obras.



3. The Pavilion of Polyhedrality, de George W. Hart.

<http://www.georgehart.com/pavilion.html>

Es una de las más completas selecciones de enlaces a sitios de Internet que se dedican al estudio de los poliedros.



4. Zome System

<http://store.yahoo.com/zomesystem/zomekits.html>

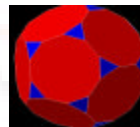
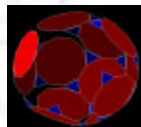
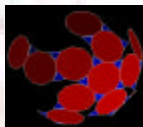
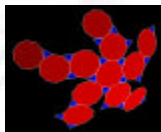
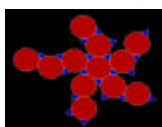
Material para la construcción de poliedros con varillas de plástico de colores para las aristas y conexiones para los vértices.



5. Versión demo del programa Poly. Pedagogy Software.

<http://www.peda.com>

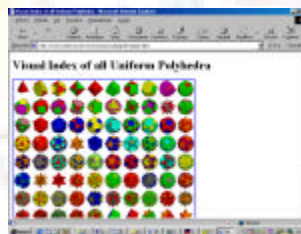
Magnífico programa que permite “ver” 147 poliedros convexos en su desarrollo plano y en perspectiva. Admite movimiento y el paso progresivo del plano al espacio.



6. The Uniform Polyhedra, de MathConsult de Roman E. Maeder.

<http://www.mathconsult.ch/showroom/unipoly/unipoly.html#Introduction>

Guía visual de los 80 poliedros uniformes con imágenes y datos de cada uno.



7. SHAPES and SPACES, de Association for the Promotion and Advancement of Science Education.

<http://www.swift.com/apase/charlotte/@Ess.html>

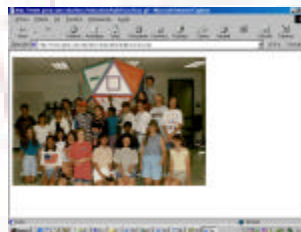
Estudio de los poliedros desde el punto de vista de la arquitectura. Trata temas como la forma, la proporción, la escala o el espacio.



8. Building the Icosahedron as a Class Project, de Frederick J. Wicklin.

<http://www.geom.umn.edu/docs/education/build-icos/Icosahedron.html>

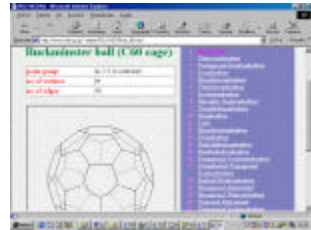
Construcción en clase de un icosaedro de gran tamaño como proyecto escolar.



9. Crystallographic Polyhedra with Java, de Steffen Weber.

http://www.nirim.go.jp/~weber/POLYHEDRA/p_00.html

Animaciones java de 29 poliedros que podemos mover con el ratón del ordenador.



10. Platonic dice, de John Greschak.

<http://www.greschak.com/platdice.htm>

Animaciones de los dados construidos con los cinco sólidos platónicos.



11. Prácticas de Poliedros, de Luis Pérez Bernal.

<http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd97/UnidadesDidacticas/11-2-o-poliedros.html>

Colección de actividades con polígonos y poliedros preparados para llevar a la clase de matemáticas presentados por Luis Pérez Bernal a partir de los trabajos realizados en el Proyecto Taller de Matemáticas que se realizó en Málaga de 1989 a 1992.



12. Polyhedra Hyperpages. Polyhedral Solids, de Tom Gettys.

<http://www.teleport.com/~tpgettys/poly.shtml>

Diseños en POV-ray de gran cantidad de poliedros clasificados.



13. Polyhedra, del equipo Computation, Vision, and Geometry Group.

<http://www.cms.wisc.edu/~cvg/course/491/modules/polyhedra/intro.shtml>

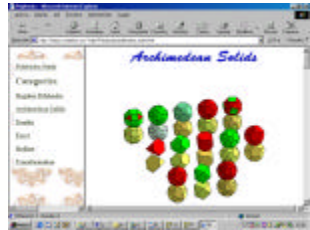
Estudio de los poliedros que conecta con otros campos científicos. Interesantes imágenes y animaciones java.



14. The study of polyhedra, de Ha Le.

http://daisy.uwaterloo.ca/~hgle/Polyhedra/polyhedra_main.html

Diseños de poliedros con Maple y VRML.



15. El mundo de las matemáticas, de Eric Weisstein

<http://mathworld.wolfram.com/>

Un lugar con gran cantidad de gráficos animados que hacen girar los poliedros. Ofrece muchos datos de los poliedros.



16. Piet Hein's Soma Cube.

<http://www.ctaz.com/~dmn1/soma.htm>

Problemas y soluciones con el rompecabezas del cubo Soma.



17. Geometry and the Imagination in Minneapolis.

Polyhedra, de J. Conway y otros.

<http://www.geom.umn.edu/docs/education/institute91/handouts/handouts.htm>

Colección de actividades de un curso de verano titulado Geometry and the Imagination, impartido por J. Conway, y otros en el Geometry Center en Minneapolis, 1991.



18. Origami - MM's Modular Mania, de Meenakshi Mukhopadhyay.

http://www.geocities.com/SoHo/Studios/8012/origami_i.html

Diseños de poliedros realizados con origami, el arte de plegado de papel que provoca interesantes problemas matemáticos.



19. Cabri-Géomètre

<http://www-cabri.imag.fr/>

Programa de geometría dinámica con el que se han realizado muchas de las ilustraciones de esta guía. Estas son las páginas del centro IMAG en Francia, en los que podemos encontrar recursos, libros, enlaces y versiones demo del programa.



20. Fibonacci Numbers and the Golden Section

<http://www.ee.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fib.html>

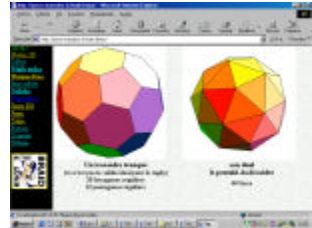
La sucesión de Fibonacci y la proporción áurea en aritmética, geometría, arte, arquitectura, música, juegos, magia, etc.



21. Les maths un jeu, de Hubert Martineau

<http://perso.wanadoo.fr/math.lemur/>

Numerosas páginas interactivas con animaciones de los poliedros con Livegraphics3D. Duales, truncamientos, composiciones de poliedros. De estas páginas se ha extraído la secuencia de imágenes del paso del cubo al octaedro mediante truncamientos sucesivos. Conectados a Internet lo podremos ver en animación



22. Geometría con Cabri Géomètre II, de José A. Mora

<http://www.terra.es/personal/joseantm/>

Materiales interactivos para el aprendizaje de la Geometría con la utilización del programa Cabri-Géomètre II. Contiene tres secciones: en *Mecanismos* se simula el funcionamiento de objetos mecánicos mediante animaciones, en *Coordenadas* se utiliza el Cabri para el estudio de funciones y en la tercera *Construcción del omnipoliedro* se incluye un resumen del trabajo realizado con esta estructura en el I.E.S. Leonardo da Vinci de Alicante.



Anexos

Anexo I. Las proporciones en el omnipoliedro

Esta puede ser la parte de más difícil comprensión por utilizar ciertos razonamientos de proporcionalidad, que no se usan con frecuencia.

Para hacer los cálculos más sencillos, partimos de la arista del cubo como unidad, es decir, suponemos que mide 1 m y seguimos los razonamientos para los otros cuatro poliedros regulares. Como estas argumentaciones se basan en razones y proporciones, si consideramos cubos mayores o más pequeños no tenemos más que multiplicar por la nueva medida de la arista los resultados que obtengamos.

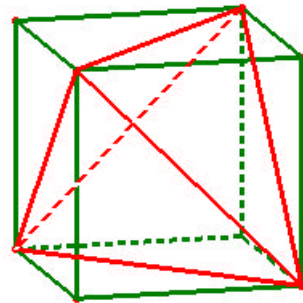
Las proporciones entre las medidas de las aristas de los sólidos platónicos surgen de las relaciones de inclusión de unos poliedros en otros.

El tetraedro en el cubo.

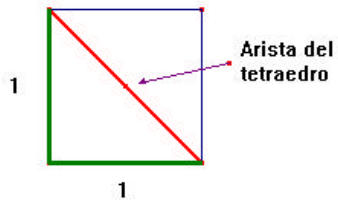
La arista del tetraedro es la diagonal de la cara del cubo, que es un cuadrado. Dos de las aristas del cubo y la del tetraedro forman un triángulo isósceles y rectángulo, cuyos catetos miden 1.

Utilizamos el teorema de Pitágoras para calcular la hipotenusa de este triángulo rectángulo e isósceles cuyos catetos miden la unidad:

$$\text{Arista del tetraedro} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

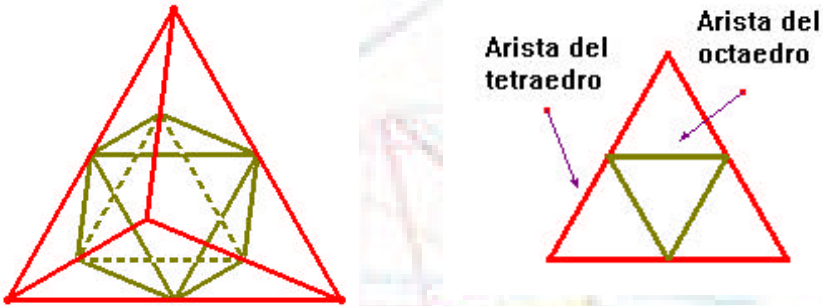


Arista del cubo



El octaedro en el tetraedro.

El octaedro tiene sus vértices en los puntos medios de las aristas del tetraedro, de forma que en cada cara se forman cuatro triángulos equiláteros:



La arista del octaedro será la mitad de la del tetraedro

$$\text{Arista del octaedro} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

La proporción áurea.

Para encontrar la medida de las aristas del dodecaedro en función de las del cubo, tenemos que introducirnos en una proporción muy utilizada a lo largo de la historia por los artistas. Ya era conocida por los egipcios, pero fue Euclides en su obra *Los Elementos* el que la definió:

Una recta está dividida en extrema y media razón cuando la recta es al segmento mayor lo que éste es al menor.

En otras palabras, de las infinitas formas en que puede dividirse un segmento en dos partes, hay una que cumple la proporción de Euclides:



El segmento AB está dividido en dos partes, AC es la sección áurea de AB si se cumple la condición: $\frac{AC}{AB} = \frac{CB}{AC}$. La proporción áurea divide a un segmento en dos partes de manera que el menor (CB) es al mayor (AC) como el mayor (AC) es al total (AB).

Si tomamos $AB = 1$ y $AC = x$, tendremos que $CB = 1 - x$, de aquí $\frac{x}{1} = \frac{1-x}{x}$. Esta es una ecuación que, si eliminamos los denominadores, se transforma en: $x^2 + x - 1 = 0$, ecuación de segundo grado que tiene dos soluciones, una ellas es negativa, la otra es positiva, el número irracional

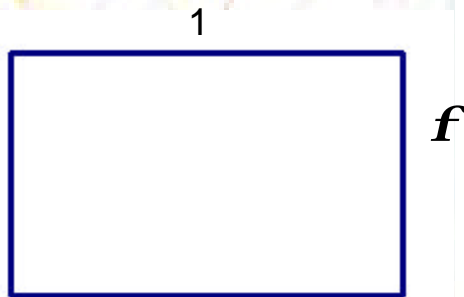
$$x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \mathbf{f} \approx 0.6180\dots \text{ llamado número áureo o número de oro.}$$

De esta forma tenemos $\frac{AC}{AB} = \frac{CB}{AC} = \mathbf{f}$.

El rectángulo y el triángulo de oro

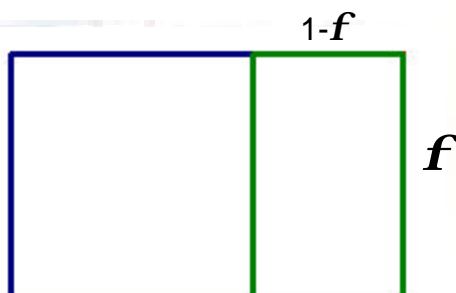
El rectángulo áureo tiene sus lados según la proporción áurea. Si nos fijamos, podemos encontrar rectángulos como éste en las modernas tarjetas de crédito y en otros objetos de uso cotidiano

Una de las características más interesantes de un rectángulo áureo es que, si quitamos un cuadrado de lado \mathbf{f} , el rectángulo que queda también es áureo.

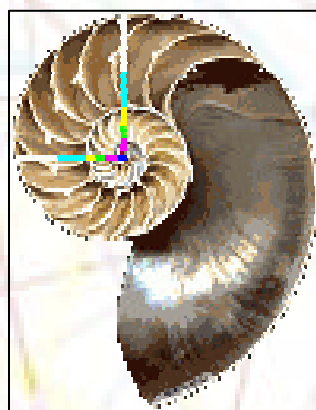
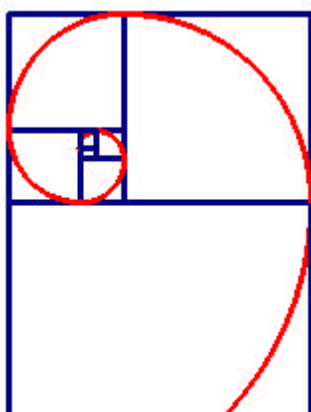
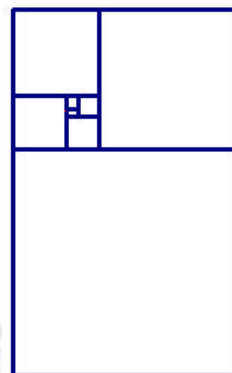


Como \mathbf{f} es solución de la ecuación $\mathbf{f}^2 + \mathbf{f} - 1 = 0$, se puede ver que la proporción entre los lados del nuevo rectángulo resultante también es el número áureo:

$$\frac{1-\mathbf{f}}{\mathbf{f}} = \mathbf{f}.$$

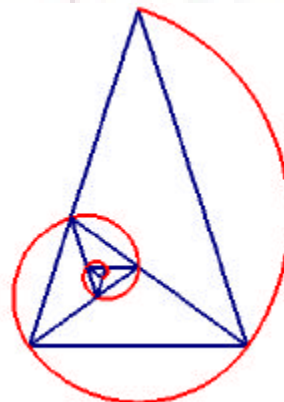
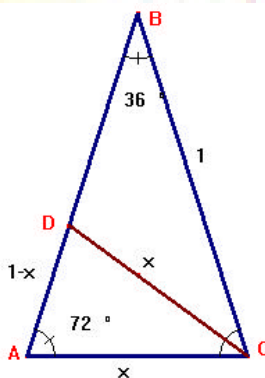


Esta última idea nos asegura que un rectángulo áureo contiene infinitos rectángulos áureos en su interior y nos da un procedimiento para encontrarlos: dibujamos un rectángulo áureo al que vamos quitando repetidamente cuadrados. En el dibujo central se han dibujado los arcos de circunferencia inscritos en cada uno de los cuadrados que se han eliminado para formar el siguiente rectángulo, dando lugar a una espiral en la que cada arco conserva la proporción áurea con el siguiente. Es la espiral equiangular o logarítmica. En la naturaleza aparece una curva similar en la concha del nautilus.



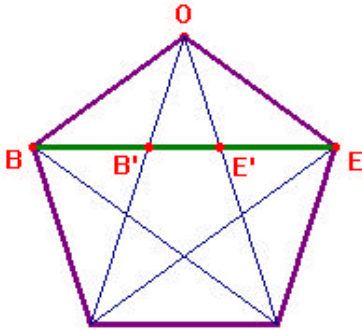
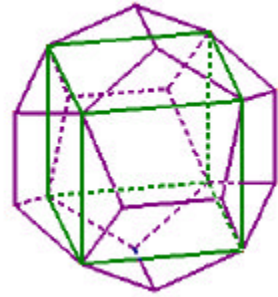
Otra figura relacionada con el número f es el triángulo isósceles de ángulos 36° , 72° y 72° , conocido como triángulo áureo. Si en el triángulo ABC trazamos la bisectriz en C y marcamos el punto D, el nuevo triángulo que se forma ACD será semejante al inicial y podemos calcular sus proporciones, con lo que obtenemos el número áureo:

$$\frac{x}{1} = \frac{1-x}{x} = f$$



El cubo en el dodecaedro.

La construcción del dodecaedro se realiza sobre la del cubo, de forma que la arista del cubo es la diagonal del pentágono regular.

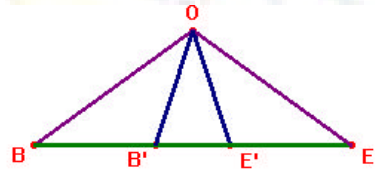


El "pentagrama" o estrella de cinco puntas inscrita en el pentágono regular fue el símbolo de la escuela pitagórica. Es la figura áurea por excelencia. En las proporciones entre los segmentos está siempre presente \mathbf{f} , el número áureo.

Utilizamos la semejanza en dos pares de triángulos:

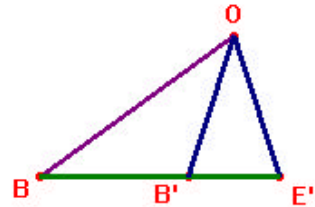
Por una parte $OBB' \approx OEB$, porque los dos son isósceles con ángulos de 36° , 36° y 108° :

$$\frac{BB'}{OB} = \frac{OB}{BE} = \mathbf{f} \quad \text{y} \quad OB = BE'$$



Por otra, tenemos dos triángulos áureos $OBE' \approx OB'E'$, porque los dos son isósceles con ángulos de 36° , 72° y 72° :

$$\frac{BB'}{OB} = \frac{B'E'}{BE} = \mathbf{f} \quad \text{y} \quad OE' = OB' = BB'$$



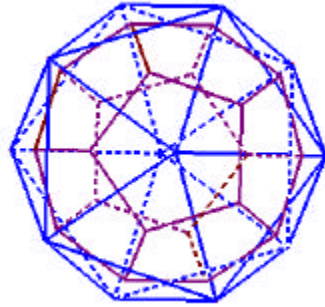
Si en las dos semejanzas anteriores tenemos en cuenta que OB es la arista del dodecaedro y BE es la arista del cubo, su cociente es:

$\frac{\text{arista}(\text{dodecaedro})}{\text{arista}(\text{cubo})} = \frac{OB}{BE} = \frac{BE'}{BE} = \frac{BB'}{BE'} = \frac{B'E'}{BB'} = \mathbf{f}$, y como la arista del cubo mide 1, resulta:

$$\text{arista}(\text{dodecaedro}) = \mathbf{f} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618\dots$$

El icosaedro y el dodecaedro.

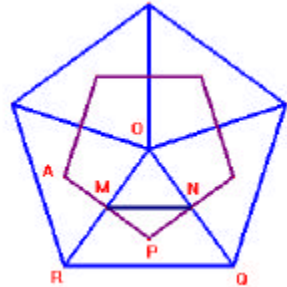
Veremos ahora la proporción entre la arista del icosaedro y la del cubo, basándonos en la relación entre el icosaedro y el dodecaedro. Estos poliedros son duales y en ellos podemos situar los vértices de cada uno en el centro de las caras del otro, mientras que las aristas de ambos se cortan en sus puntos medios.



Como hemos visto más arriba, si la arista del cubo mide 1, la del dodecaedro medirá la razón áurea \boldsymbol{f} (0.618...).

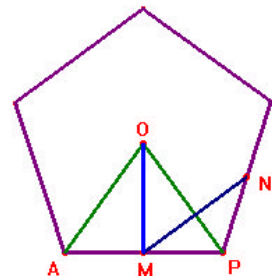
El dibujo siguiente habría que verlo con perspectiva: el punto O estaría ligeramente elevado del plano que marcan los otros cinco vértices del icosaedro que se han dibujado.

- AP es la arista del dodecaedro, su medida es \boldsymbol{f} y $MP = NP = \frac{AP}{2} = \frac{\boldsymbol{f}}{2}$
- RQ es la arista del icosaedro. Las aristas se cortan en los puntos medios (M, N). Como el triángulo ORQ es equilátero, OMN también lo será y $RQ = 2 * MN$



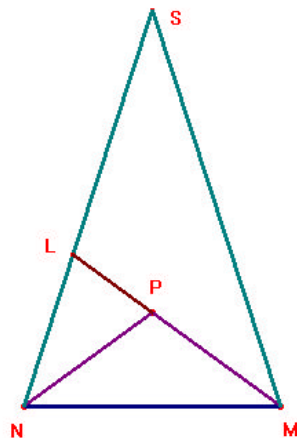
Giramos 36° la figura anterior y resaltamos ahora una parte:

- $\text{áng}(MPN) = 108^\circ$ por ser el ángulo interior de un pentágono regular.
- Como MPN es un triángulo isósceles, los ángulos miden:



- $\text{áng}(NMP) = \text{áng}(MNP) = \frac{180 - 108}{2} = 36^\circ$.

Ahora nos quedamos con una parte más reducida y giramos el dibujo para ver mejor el triángulo NMP de ángulos 36° , 36° y 108° . En el dibujo se ha trazado el triángulo SNM de forma que los ángulos en N y en M midan 72° , que es el triángulo áureo. Prolongamos MP y situamos L en el punto de intersección con NS.



Los triángulos NML y NMS son semejantes, luego $\frac{MN}{MS} = \frac{LN}{MN} = \mathbf{f}$ como $LN = MP$,

$$\frac{MP}{MN} = \mathbf{f}. \text{ De otra forma: } MN = \frac{MP}{\mathbf{f}}$$

Recordamos que la arista del cubo mide 1 y que $MP = \frac{\mathbf{f}}{2}$

$$RQ = 2 * MN = 2 \frac{MP}{\mathbf{f}} = 2 \frac{\mathbf{f}/2}{\mathbf{f}} = 1. \text{ Con lo que}$$

$$\text{arista (icosaedro)} = 1$$

Por lo que las aristas del icosaedro miden igual que las del cubo.

Anexo II. Soluciones a los problemas.

4.1. El diagrama de Schlegel es una forma de representar objetos tridimensionales en el plano. Lo importante son las aristas y los vértices mientras perdemos la forma de las caras, aunque se mantiene el número de lados de los polígonos. Los diagramas de Schlegel de los cinco sólidos platónicos son:

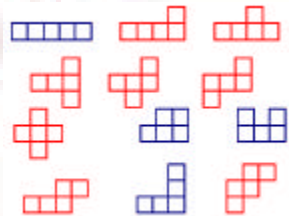


4.2. Relaciones numéricas. Los poliedros regulares y semiregulares verifican la fórmula de Euler. En la columna del número de caras se ha colocado la cantidad de polígonos y entre paréntesis se indica el número de lados del polígono, de esa forma 12(5) se lee “doce-pentágonos”.

Poliedro	Caras	A	V	C+V-A	Schläfi
Tetraedro	4(3)	6	4	2	3^3
Cubo	6(4)	12	8	2	4^3
Octaedro	8(3)	12	6	2	3^4
Dodecaedro	12(5)	30	20	2	5^3
Icosaedro	20(3)	30	12	2	3^5
Tetraedro Truncado	4(3) 4(6)	18	12	2	$3,6^2$
Cuboctaedro	8(3) 6(4)	24	12	2	$3,4,3,4$
Dodecaedro Truncado	20(3) 12(10)	90	60	2	$10^2,3$
Icosaedro Truncado	12(5) 20(6)	90	60	2	$6^2,5$
Rombicuboctaedro	8(3) 18(4)	48	24	2	$4^3,3$
Sólido de Kelvin	8(6) 6(4)	36	24	2	$6^2,4$
Icosidodecaedro	20(3) 12(5)	60	30	2	$3,5,3,5$

4.3. El símbolo de Schläfi nos lleva a una codificación numérica para cada poliedro. Este símbolo nos dice cuántos polígonos concurren a cada vértice y en qué orden, es muy útil para los poliedros cuyas caras son polígonos regulares porque con unos pocos números lo decimos todo acerca de ellos. El símbolo de Schläfi de los poliedros propuestos se ha colocado en la tabla anterior.

4.4 Desarrollos planos. Sólo hay un dominó, hay dos triminós, cuatro tetraminós, doce pentominós y treinta y cinco hexaminós. A la derecha tenemos los 12 pentominós, en color rojo los que permiten la construcción de una caja sin tapa mediante plegado.



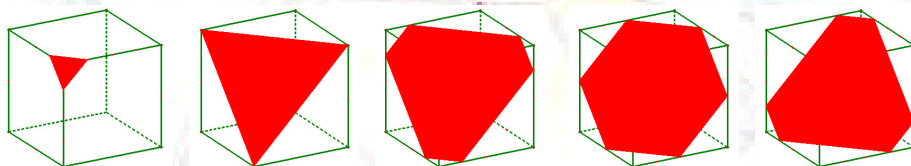
El desarrollo del tetraedro truncado está formado por los cuatro hexágonos que surgen de las caras y los cuatro triángulos que provienen de los cortes en los vértices.



4.5 Sólo cinco poliedros regulares. Para poder formar un ángulo poliedro, el número de polígonos que concurren a un vértice ha de ser mayor de tres (con menos no podemos formarlo), y a la vez menor de seis (6 triángulos equiláteros completan la circunferencia y se sitúan sobre el plano).

Con triángulos podemos colocar tres (tetraedro), cuatro (octaedro) o cinco (icosaedro). Con cuadrados sólo podemos colocar tres (cubo) y con pentágonos también tres (dodecaedro). Cuando colocamos tres hexágonos en un vértice los ángulos suman 360° .

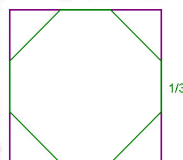
4.6 Secciones planas del cubo. La secuencia de cortes del cubo que empieza con un triángulo en una esquina es la siguiente:



También podemos encontrar otros polígonos a partir de las secciones planas del cubo: triángulos isósceles y escalenos, cuadrado, rectángulo, rombo, trapecio, trapecio isósceles, otros cuadriláteros, pentágono. Pero no podremos conseguir polígonos de más de seis lados, porque surgen de la salida del corte por cada cara del cubo, y éste sólo tiene seis caras.

4.7 Truncamientos. Este problema completa una situación de visualización que ya se ha iniciado en el problema anterior, la dificultad aumenta cuando hay que dar cortes en todos los vértices.

Cuando se pregunta a los estudiantes por la forma de dar el corte para que todos los lados del octógono sean iguales –para que el octógono sea regular–, normalmente los estudiantes responden que será a $1/3$ del vértice. Hay que hacerles ver que los lados inclinados del octógono serán mayores que los situados sobre las aristas, es el momento de reflexionar sobre el teorema de Pitágoras y sus aplicaciones.



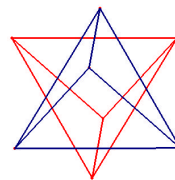
Los cortes que van al centro de las aristas dan lugar al cuboctaedro.



El recorrido de ida y vuelta entre el cubo y el octaedro mediante cortes en las aristas viene reflejado en la ilustración de la página 58.

4.8 Dualidad. Propone una primera aproximación a esta idea matemática utilizando la relación entre las características geométricas y numéricas de los poliedros, que podemos ver resaltadas en la construcción del omnipoliedro. Hay dos pares de poliedros (cubo-octaedro y dodecaedro-icosaedro) que mantienen el mismo número de aristas, pero invierten el número de caras por el de vértices.

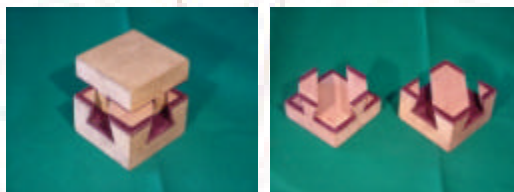
En el omnipoliedro, los vértices del dodecaedro están situados en los centros de las caras del icosaedro y al revés, mientras que las aristas de uno y otro se cortan en los puntos medios. Algo parecido ocurre con el cubo y el octaedro –los vértices del octaedro están situados en los centros de las caras del cubo-. El tetraedro es dual de sí mismo: podemos colocar dos tetraedros invertidos uno respecto y formaremos la estrella octángula estudiada en el capítulo 3.



7.9 Las simetrías en el cubo. Se centra en el estudio de los planos de simetría y los ejes de rotación. El omnipoliedro permite identificar los elementos de simetría que son comunes a dos o más poliedros, para ello es necesario “dar vueltas” a su alrededor hasta encontrar un plano que lo divida en dos partes iguales. A la izquierda podemos ver dos planos de simetría que pasan por las aristas del octaedro y por el centro de las caras del cubo. En la fotografía central el plano pasa por dos aristas opuestas del cubo y en la de la derecha un eje de rotación que pasa por dos vértices opuestos del cubo y del dodecaedro.



7.10 Rompecabezas. La cola de milano tiene una solución sorprendente con dos guías que unen caras contiguas como se muestra en las fotografías de la derecha.



El cubo Soma tiene muchas soluciones que podemos encontrar en páginas de Internet (ver bibliografía). En cambio, el cubo de Steinhaus es más difícil, sólo tiene dos soluciones -en realidad son la misma solución-, con los dos pentacubos y el tetracubo con forma de L, hay que formar una escalera y encajar después las otras tres piezas para formar el cubo 3x3x3.



**Societat d'Educació Matemàtica de la
Comunitat Valenciana Al-Khwarizmi**



**Concejalía de Educación y Cultura
Ayuntamiento de Alicante**