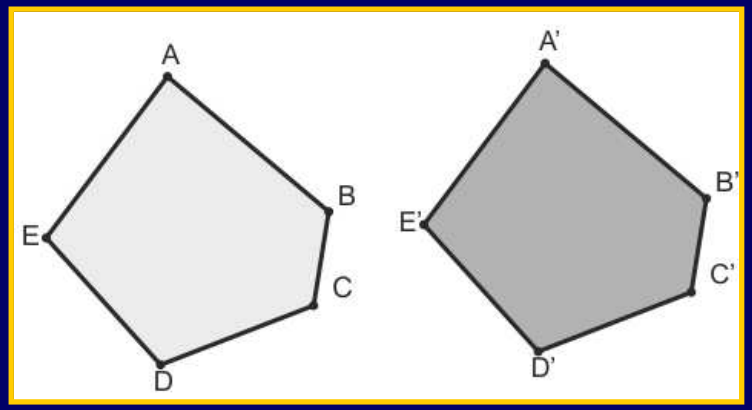
Relaciones geométricas

IES BELLAVISTA

Igualdad y semejanza

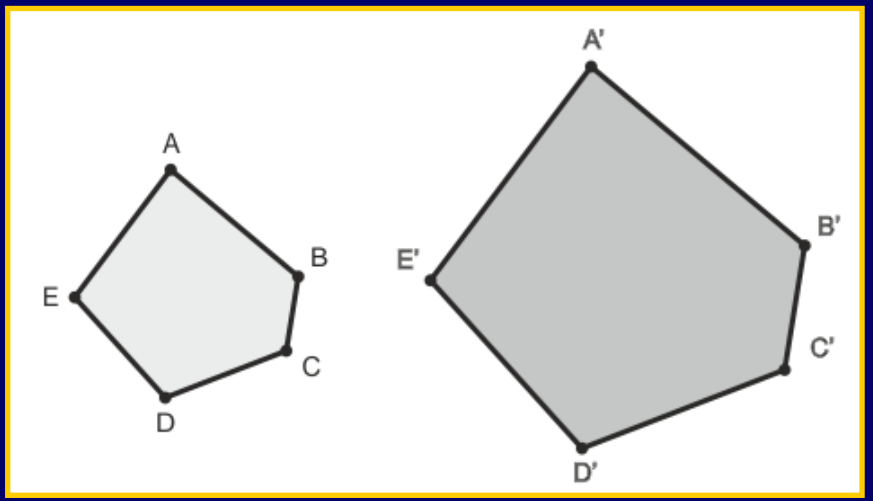
Dos figuras son **iguales** cuando sus lados y sus ángulos son iguales y están igualmente dispuestos.



Dos figuras son **semejantes** cuando sus ángulos son iguales y los lados homólogos son proporcionales.

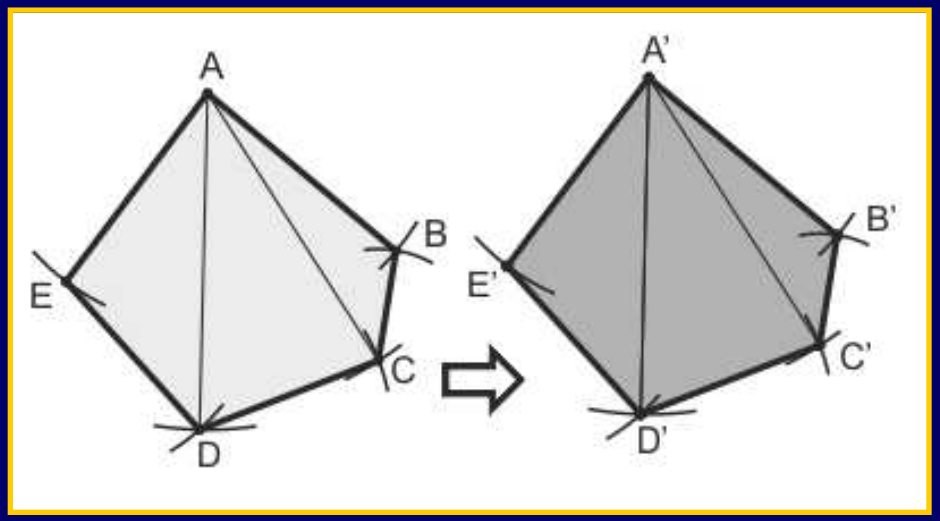
La relación de proporcionalidad entre dos lados homólogos es una constante llamada **razón de semejanza** (k).

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = k$$

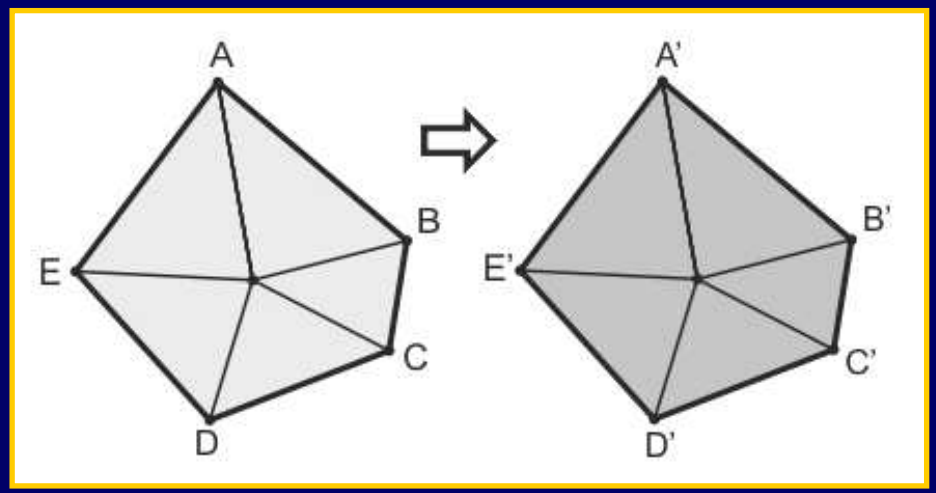


Procedimientos para trazar figuras iguales

Por **triangulación a partir de un vértice**: se descompone en triángulos mediante diagonales que parten de un mismo vértice. Se van construyendo los triángulos, de los que conocemos los tres lados.

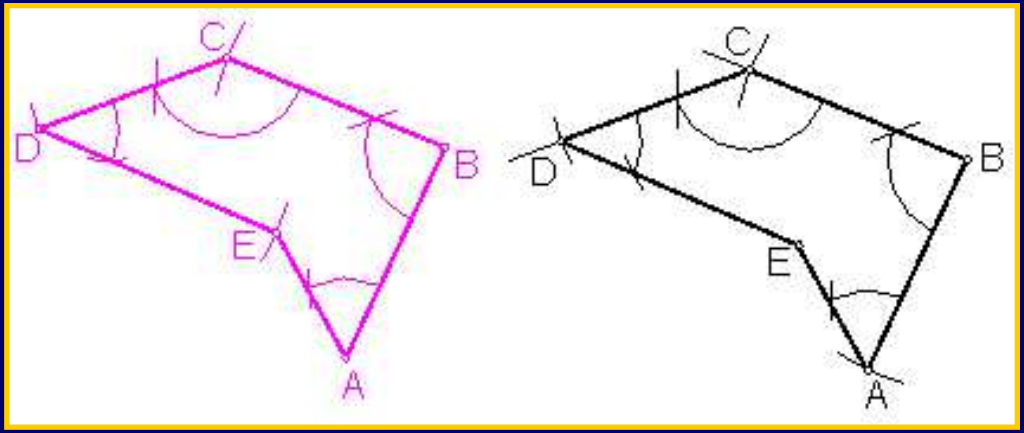


Por **radiación**: el polígono se descompone en triángulos con un punto interior como vértice común. Se reconstruyen los triángulos, de los que conocemos los tres lados.

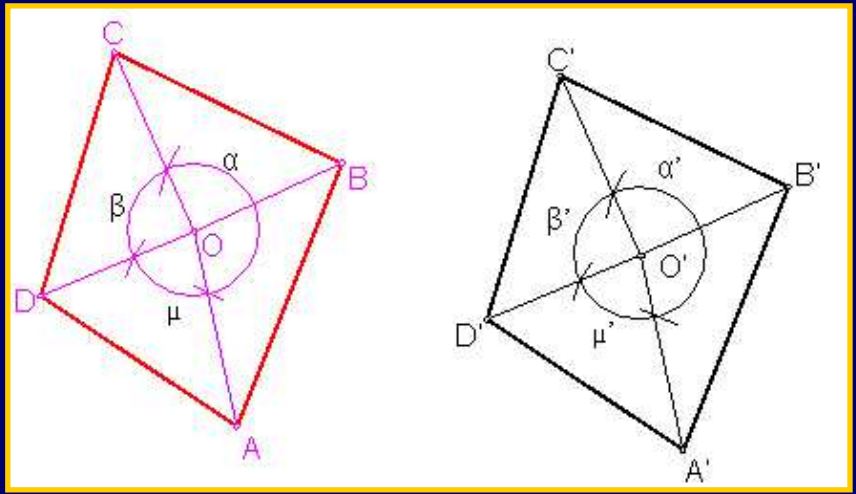


Procedimientos para trazar figuras iguales

Por **copia de ángulos interiores**: se transportan los ángulos y los segmentos que forman los lados del polígono de forma consecutiva hasta cerrar el polígono.

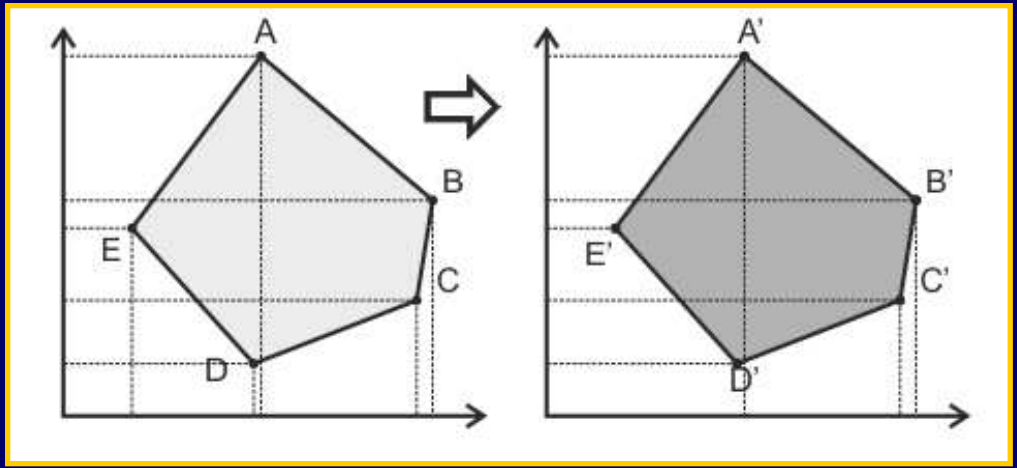


Por **copia de ángulos centrales**: se descompone en triángulos a partir de un punto interior de la poligonal (O). Se trasladan los ángulos en torno a O de la figura inicial a otro punto (O'). Sobre cada ángulo se transportan las distancias de O a los vértices.

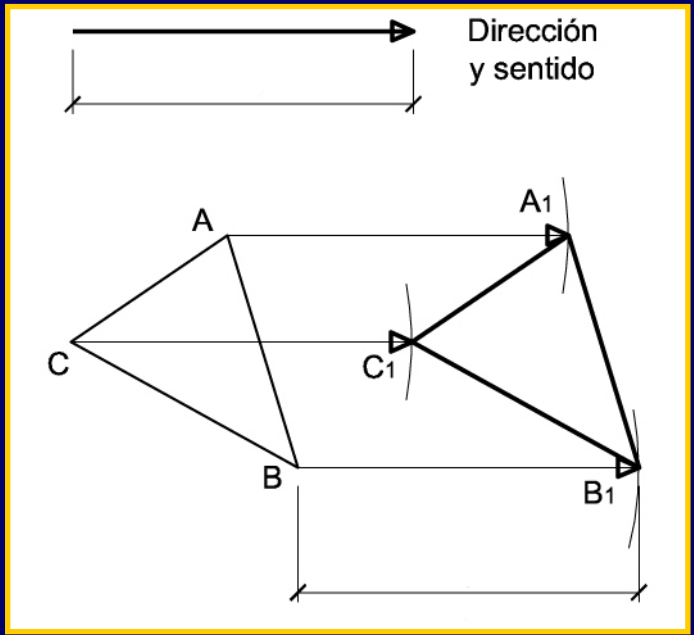


Procedimientos para trazar figuras iguales

Por **coordenadas**: sobre dos rectas perpendiculares (harán de ejes coordenados) se proyectan los vértices. Después se reproducen las distancias.

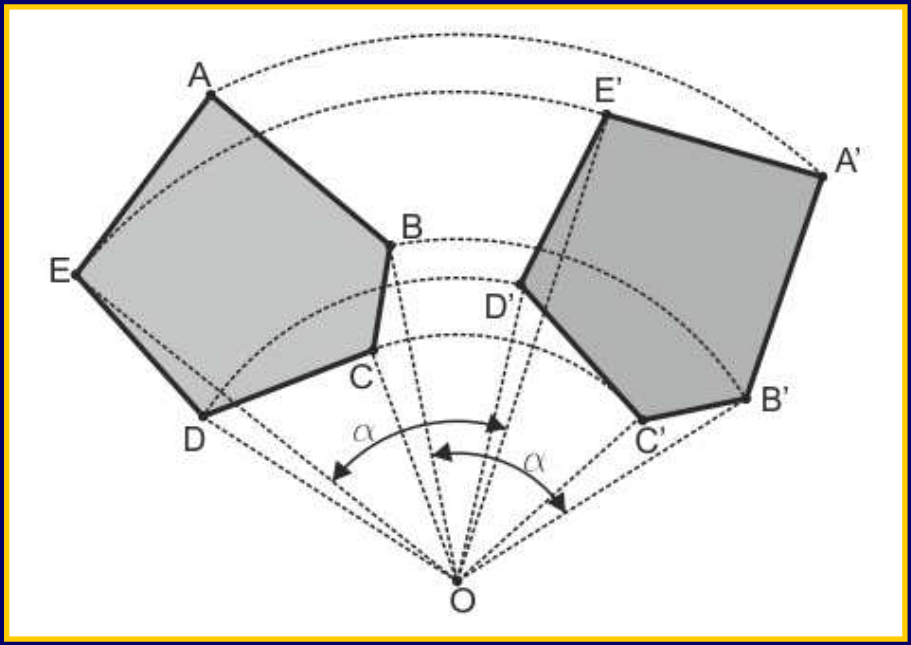


Por **traslación**: se trazan paralelas por los vértices. A lo largo de cada una de estas rectas paralelas se transporta una misma distancia en el mismo sentido, obteniendo una figura igual a la primera.



Procedimientos para trazar figuras iguales

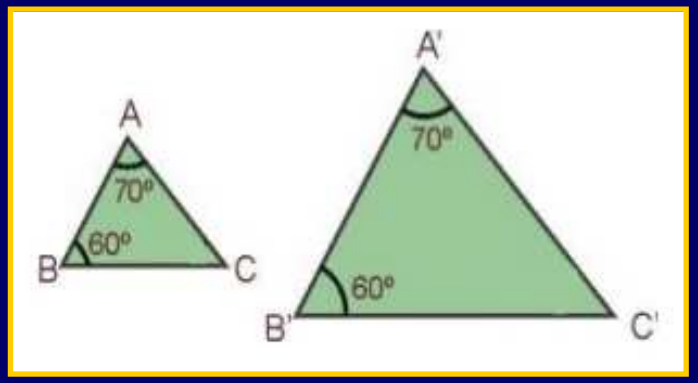
Por **giro** o **rotación**: se hace corresponder a cada punto del plano otro punto mediante un movimiento de rotación respecto a un punto llamado **centro de giro**.



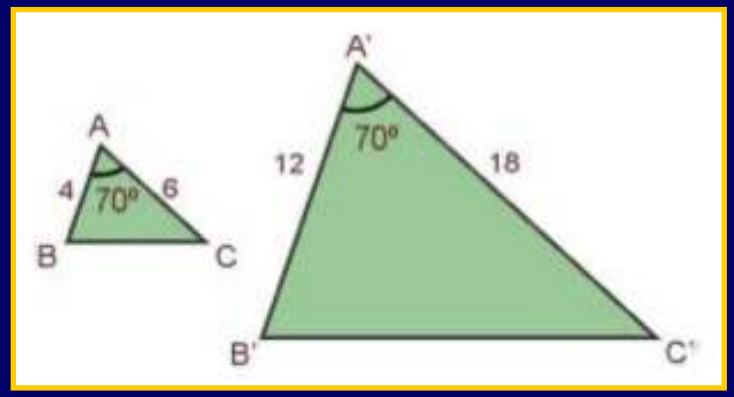
Un giro queda definido por el centro de giro, el ángulo y el sentido (positivo en el sentido contrario a las agujas del reloj).

Un giro también queda definido cuando se conocen los homólogos de dos puntos: El centro de giro es el punto de intersección de las mediatrices de los segmentos que unen cada punto con su homólogo. El ángulo también queda determinado.

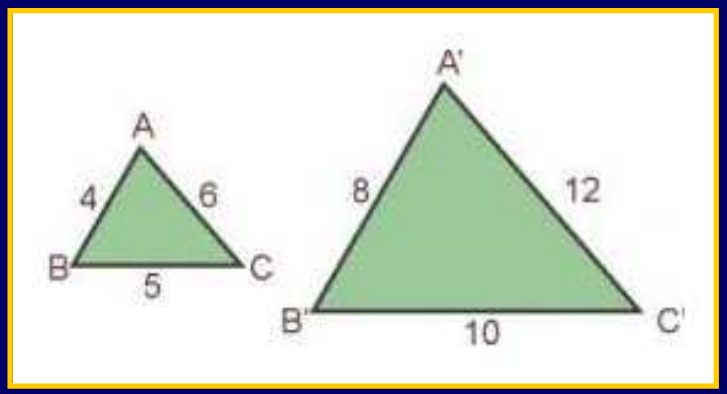
Criterios de semejanza entre triángulos



- Cuando tienen dos ángulos iguales (con lo cual el tercero también lo será).



- Cuando tienen un ángulo igual y los lados de éste son proporcionales.



- Cuando tienen los tres lados proporcionales.

Procedimiento para trazar figuras semejantes

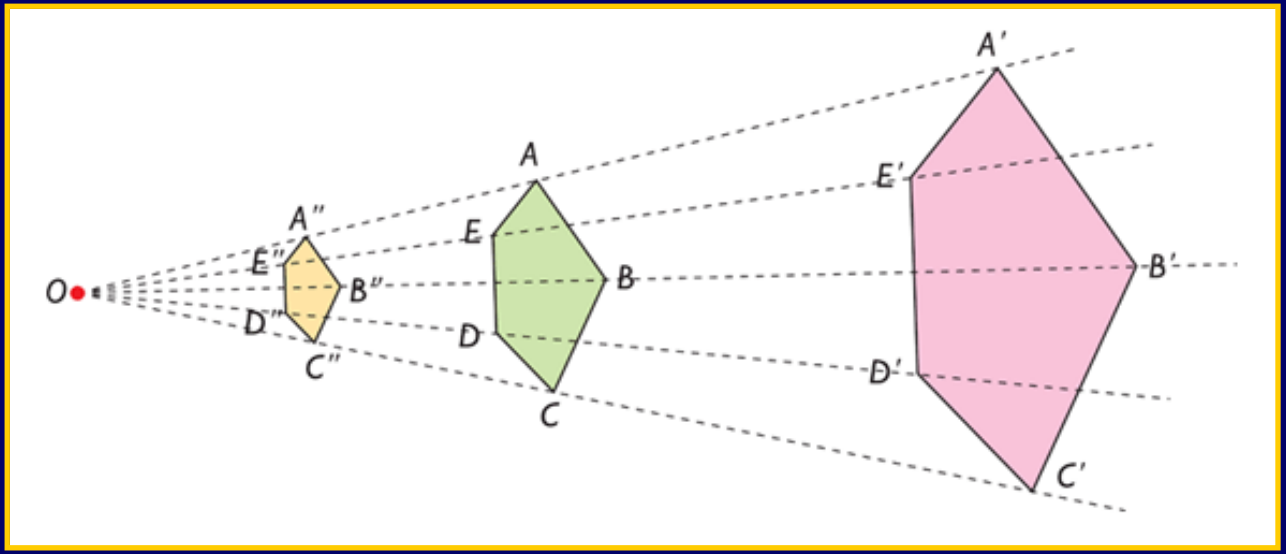
Por homotecia: se toma un punto cualquiera (O). Se une con los vértices del polígono. Sobre una de las rectas (o su prolongación) se fija el punto homólogo de una de los vértices de forma que se cumpla la razón de semejanza (K). Una vez obtenido el primer punto homólogo, se hallan los demás mediante paralelas a los lados del polígono.

Ejemplo: k = 2

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = 2$$

Ejemplo: k = ½

$$\frac{OA''}{OA} = \frac{OB''}{OB} = 0{,}5$$



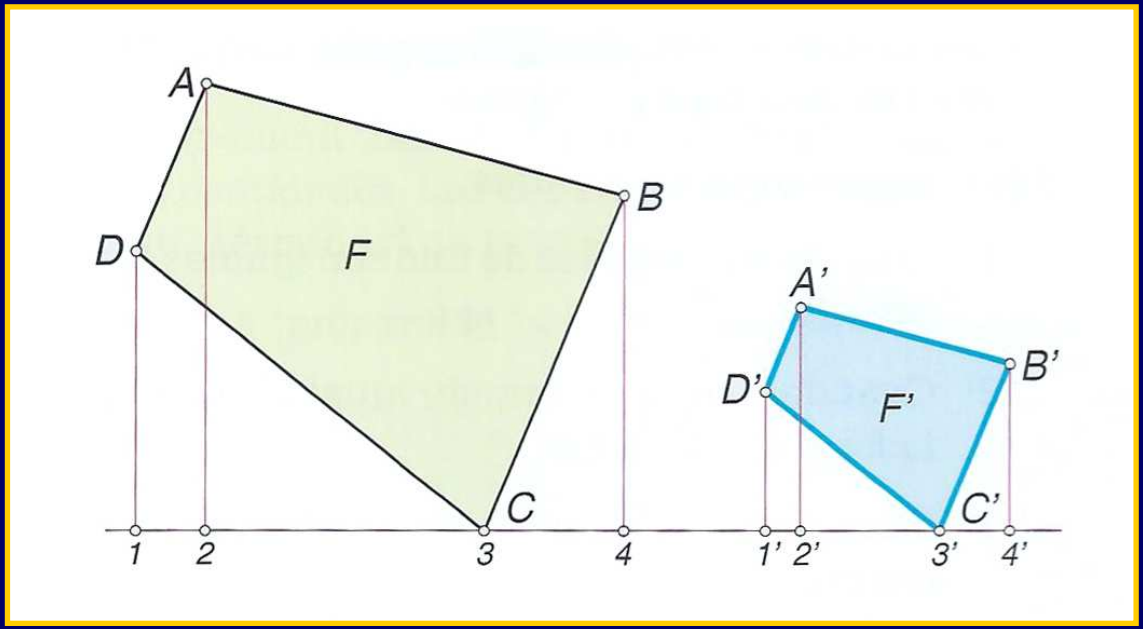
Procedimiento para trazar figuras semejantes

Por coordenadas: se proyectan los vértices sobre una recta horizontal, obteniendo los puntos 1, 2, 3 y 4. Si la razón de semejanza es k, se trazan los puntos 1', 2', 3', y 4' de forma que 1'2'/12 = 1'3'/13 = … = k.

Sobre las verticales en 1', 2', 3' y 4', se trazan los vértices A', B', C' y D' de forma que 1'D'/1D = 2'A'/2A = … = k.

Ejemplo: k = ½ = 0,5

$$\frac{1'2'}{12} = \frac{1'D'}{1D} = 0{,}5$$



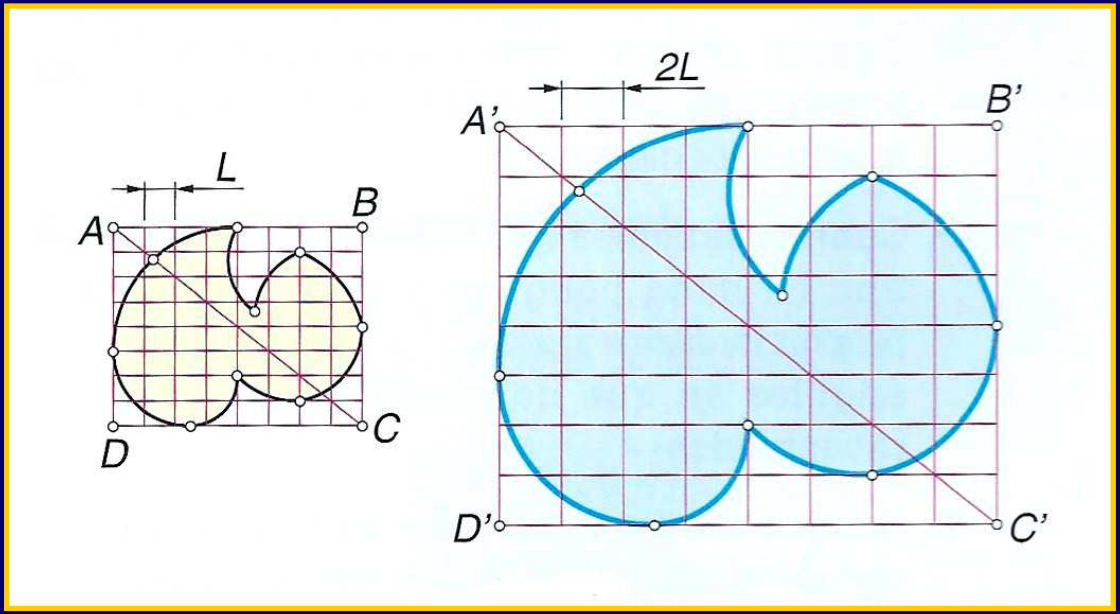
Procedimiento para trazar figuras semejantes

Mediante cuadrícula: Se construye sobre la figura una cuadrícula ABCD que la abarque. Sea L el lado de la cuadrícula. Se construye una segunda cuadrícula A'B'C'D' cuyo tamaño esté relacionada con la primera por la razón de semejanza (k). El lado de esta cuadrícula será k·L.

Se marcan los puntos necesarios y se trasladan de una cuadrícula a la otra.

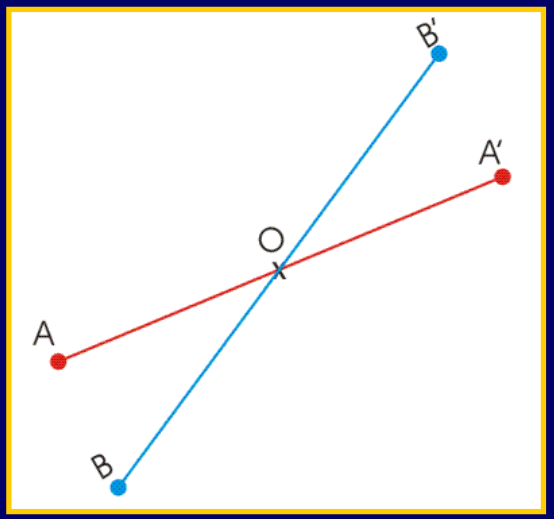
Ejemplo: k = 2

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'D'}{AD} = 2$$

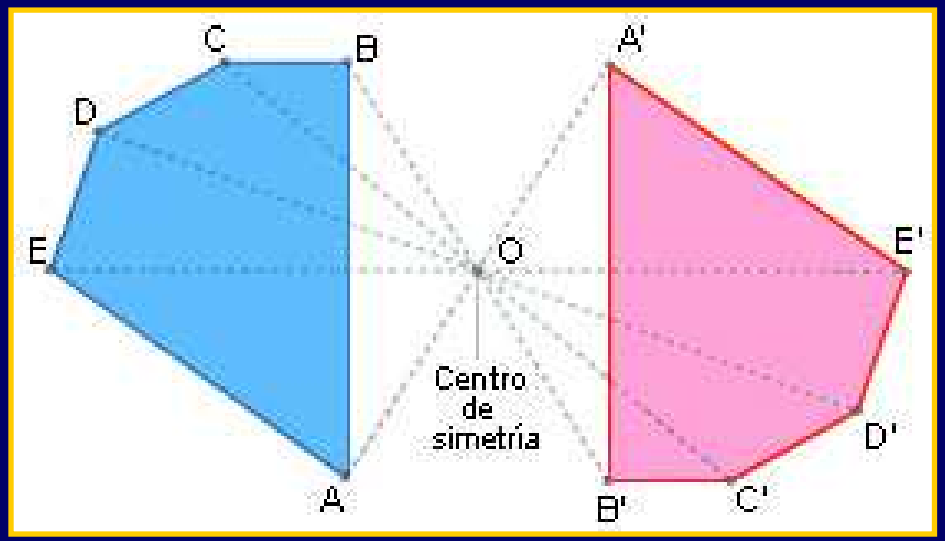


Simetría central (respecto a un punto)

Se dice que dos puntos son simétricos con respecto a un tercero, llamado **centro de simetría**, cuando estando contenidos en una recta que pasa por dicho centro, sus distancias al mismo son iguales.



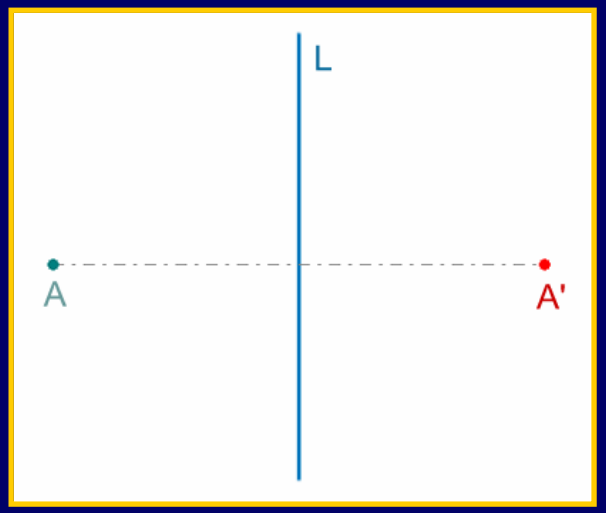
Dos figuras son simétricas respecto a un centro de simetría cuando todos los vértices de una son simétricos de los vértices de la otra.



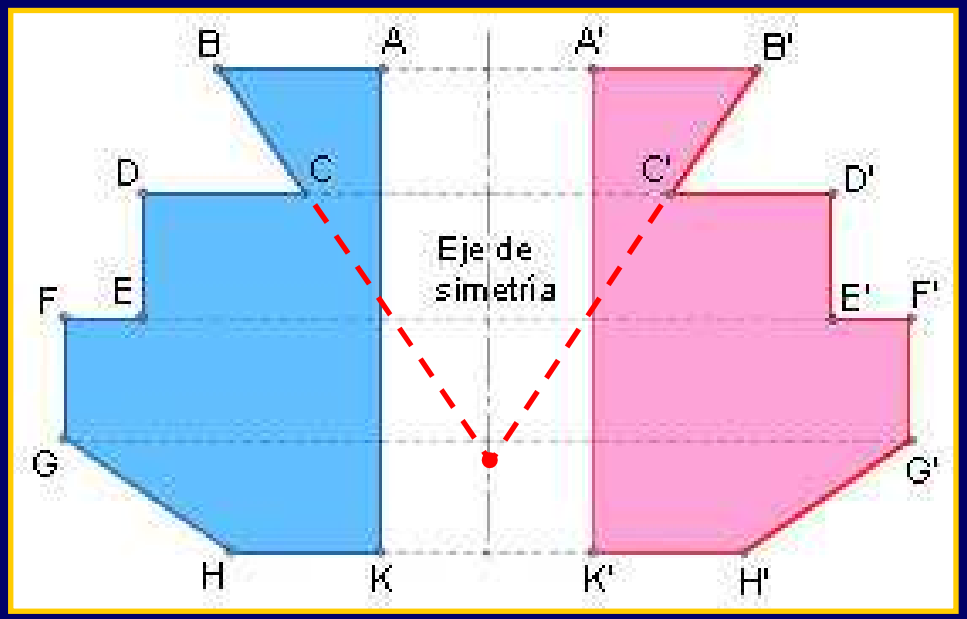
En la simetría central, los segmentos simétricos son paralelos.

Simetría axial (respecto a un eje)

Se dice que dos puntos son simétricos con respecto a eje, llamado **eje de simetría**, cuando estando contenidos en la misma perpendicular al eje, los dos puntos equidistan del mismo.



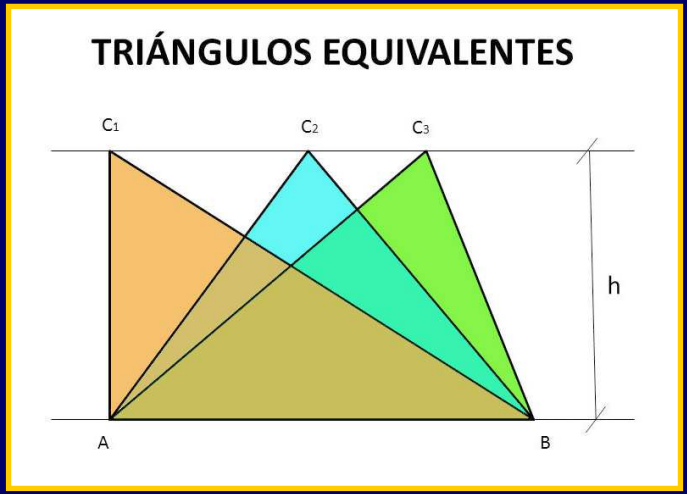
Dos figuras son simétricas respecto a un eje de simetría cuando todos los vértices de una son simétricos de los vértices de la otra.

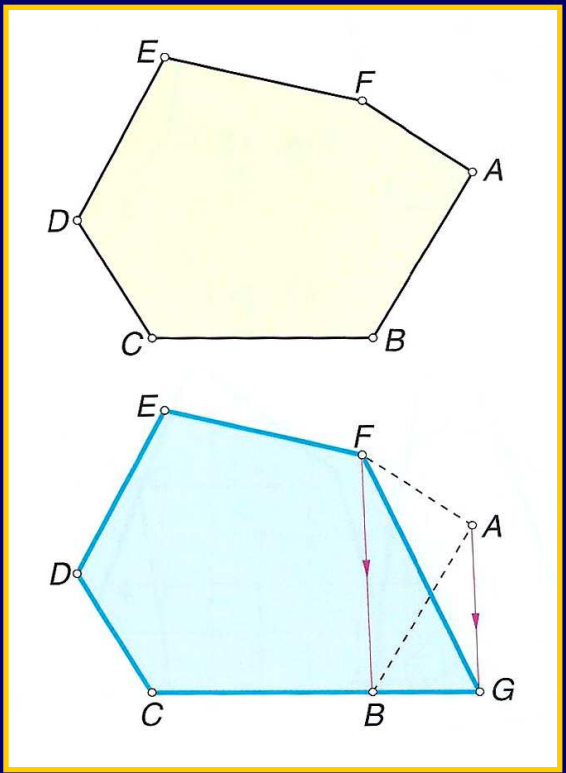


En la simetría axial, las parejas de rectas simétricas se cortan en el eje de simetría (salvo que sean paralelas a dicho eje).

Equivalencia

Se dice que dos figuras son equivalentes cuando, teniendo distinta forma, tienen la misma área. Los triángulos de la figura, al tener la misma base (AB) y la misma altura (h) son equivalente.





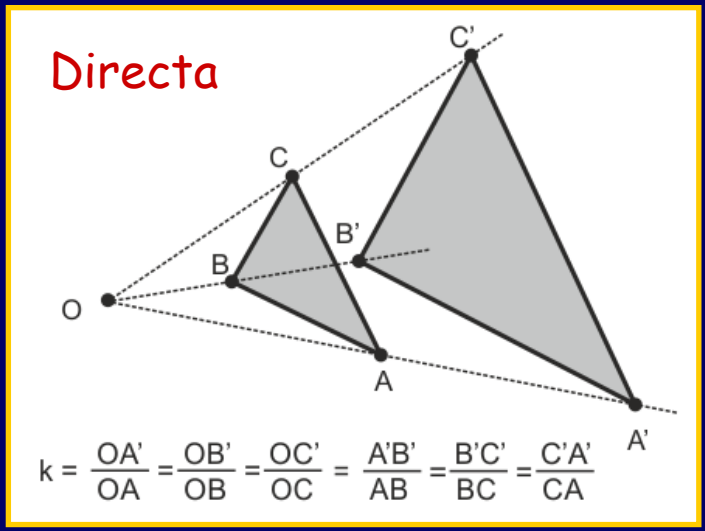
Construcción de un polígono equivalente a otro con un lado menos.

Se traza la diagonal FB y por A una paralela a ella hasta cortar en G a la prolongación del lado CB.

Los polígonos ABCDEF y GCDEF son equivalentes pues se ha sustituido el triángulo FAB por el FGB, ambos con la misma base y la misma altura.

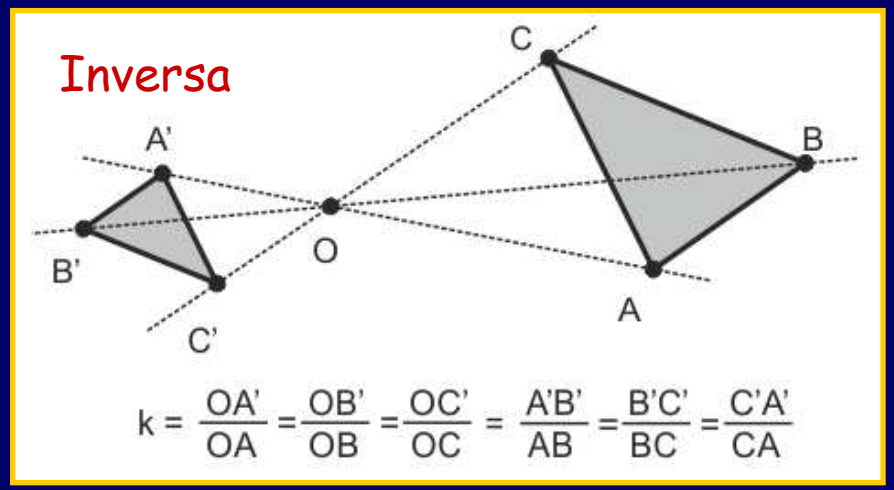
Homotecia

Se dice que dos figuras son homotéticas cuando sus puntos homólogos están en línea recta con un punto fijo llamado **centro de homotecia** y las parejas de rectas homólogas son paralelas entre sí.



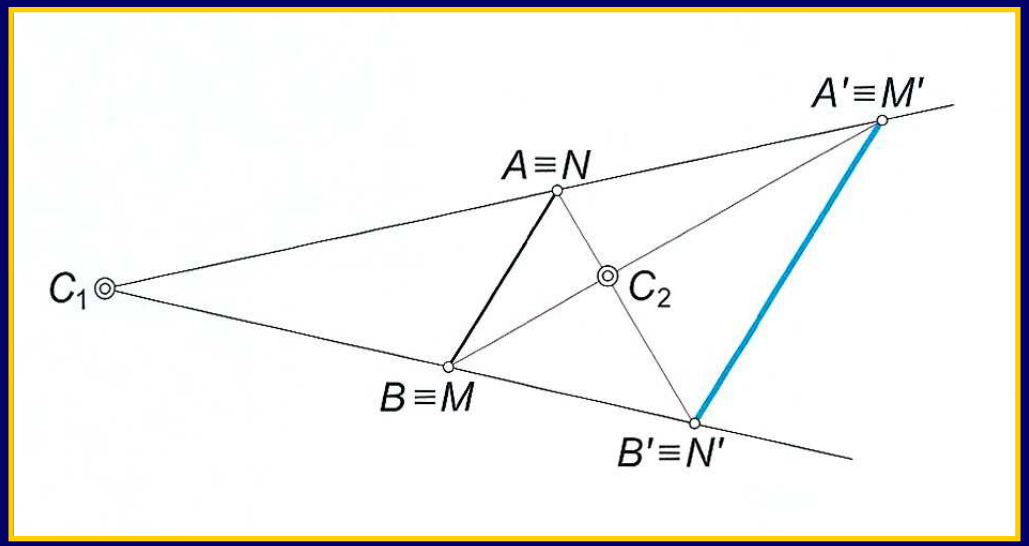
La relación entre las distancias de los puntos homólogos al centro de homotecia se denomina **razón de homotecia** (k).

Cuando los puntos homólogos están al mismo lado del centro de homotecia, ésta se llama **homotecia directa** y cuando están uno a cada lado se llama **homotecia inversa** (la razón de homotecia es entonces negativa).



Homotecia entre dos segmentos paralelos

Dos segmentos paralelos cualesquiera son siempre homotéticos con respecto a dos centros. Respecto a uno con una homotecia directa y respecto al otro con una homotecia inversa.



Además, ambas homotecias tienen la misma razón de homotecia (k) salvo con distinto signo.

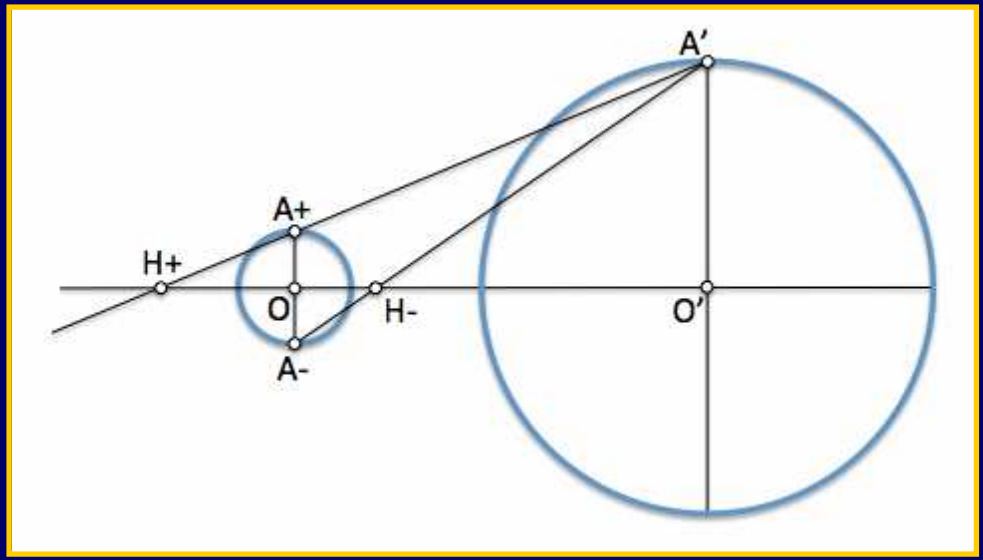
Homotecia entre dos circunferencias

Entre dos circunferencias cualesquiera podemos establecer una relación de homotecia directa y otra inversa. Los centros de las circunferencias (O y O') son homólogos entre sí, por lo que los centros de homotecia estarán en la recta que los une.

Trazamos dos diámetros paralelos en las circunferencias (son homólogos). La recta que une A' con A+ me proporciona en H+ el centro de homotecia directa. La recta A'A- me proporciona en H- el centro de homotecia inversa.

Por semejanza de triángulos podemos deducir que la razón de homotecia es la relación entre los radios:

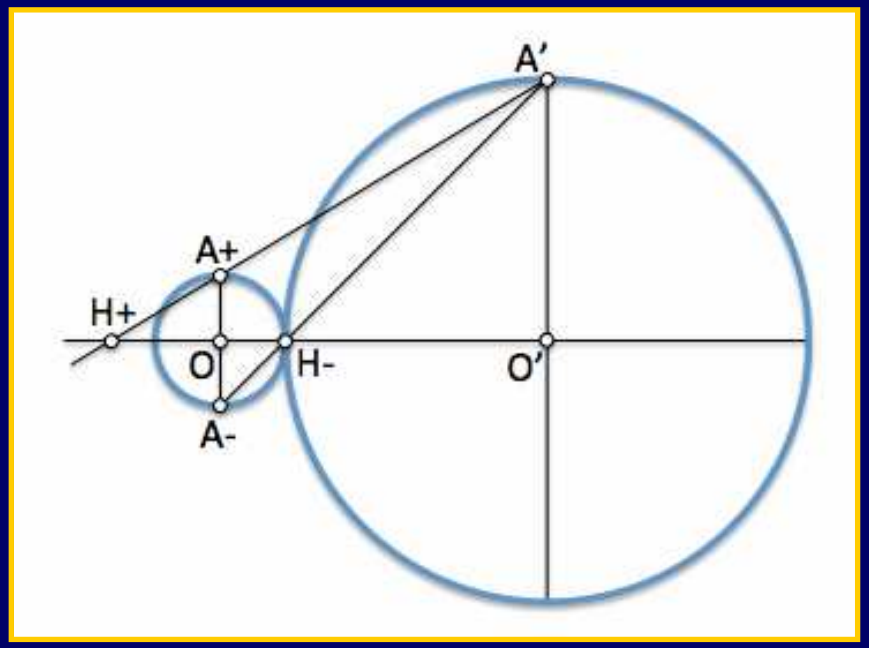
$$\frac{O'A'}{OA+} = k$$



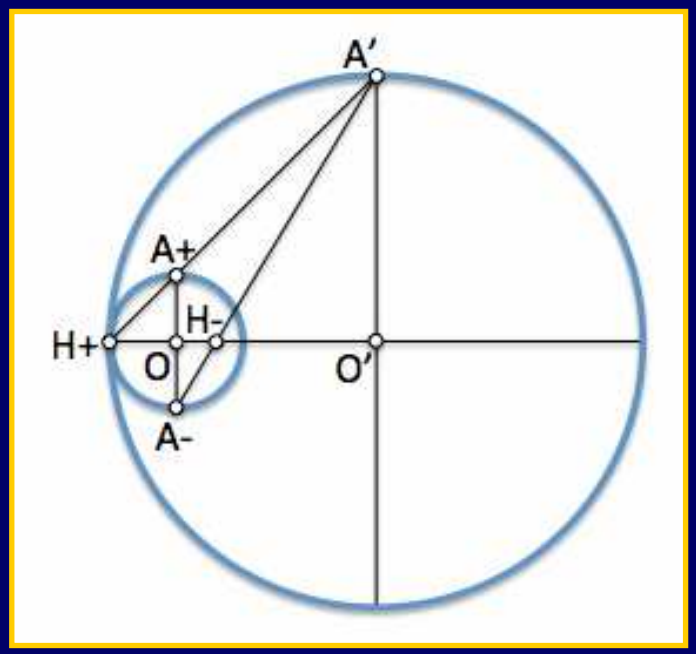
Homotecia entre dos circunferencias tangentes

Cuando dos circunferencias son tangentes, uno de los centros de homotecia es el punto de tangencia.

Homotecia entre dos circunferencias tangentes exteriores.



Homotecia entre dos circunferencias tangentes interiores.



Proporcionalidad

Proporcionalidad

Se denomina "**razón**" el resultado de la comparación de dos cantidades. A cada una de las cantidades comparadas se les llama "**términos**" de la razón.

Se denomina "**proporción**" a la igualdad de dos razones:

En la proporción siguiente, a, b, c y d son los términos. **a** y **d** son los términos extremos y **b** y **c** los términos medios.

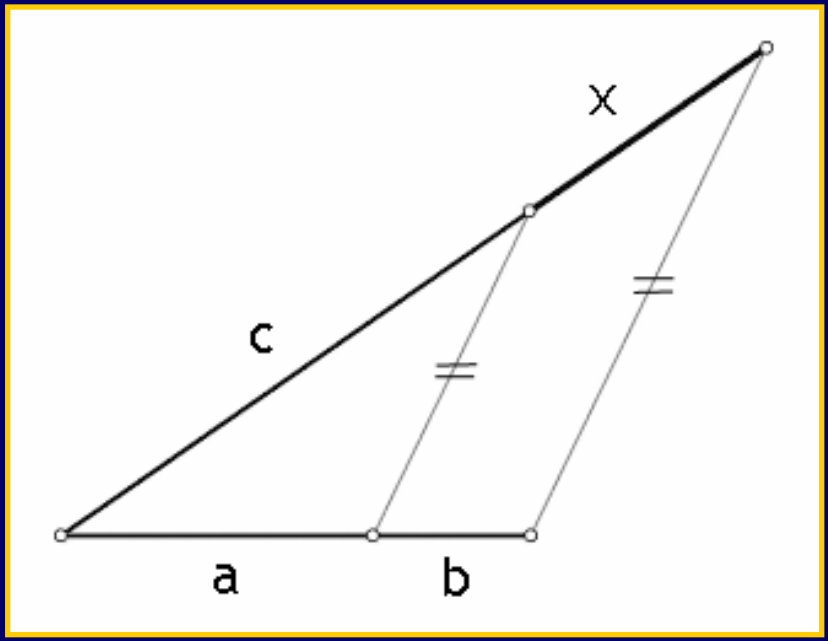
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Cuarto proporcional de tres segmentos

Denominamos cuarto proporcional de tres segmentos **a**, **b** y **c** al segmento **x** que cumple:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$$

La construcción se basa en el **teorema de Tales**: si dos rectas son cortadas por rectas paralelas, éstas determinan en las anteriores segmentos proporcionales

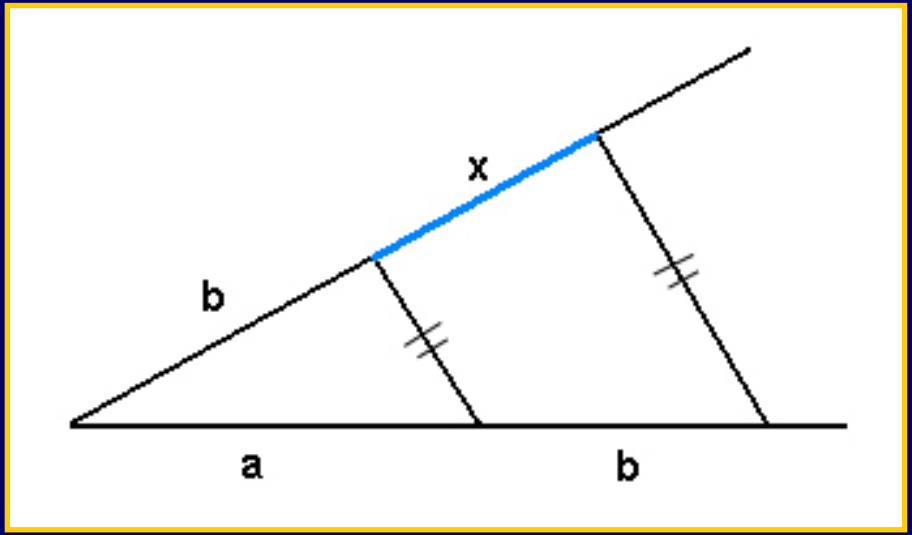


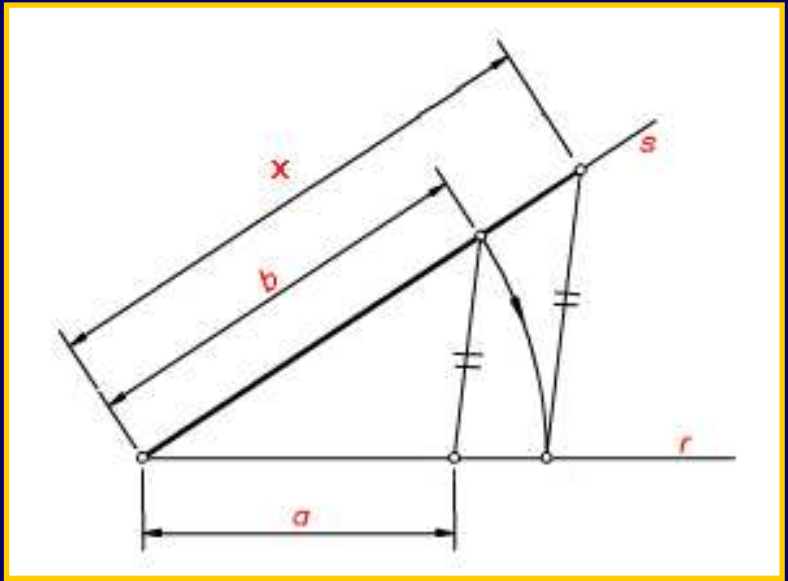
Tercero proporcional de dos segmentos

Denominamos tercero proporcional de dos segmentos **a** y **b** al segmento **x** que cumple:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{x}$$

La construcción se basa en el teorema de Tales.

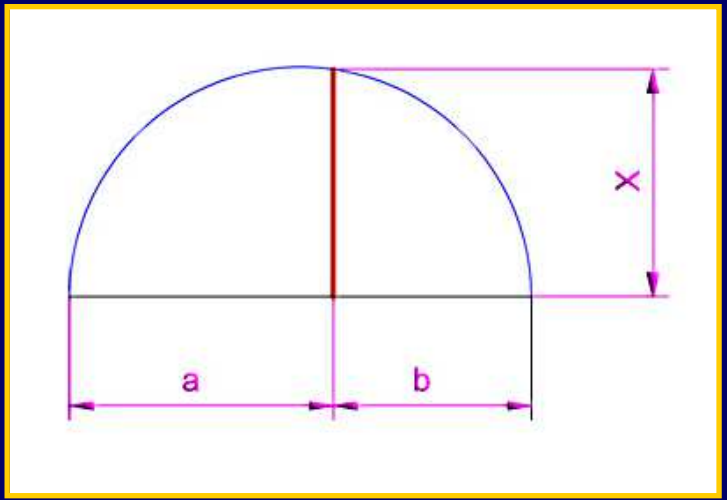




Medio proporcional de dos segmentos

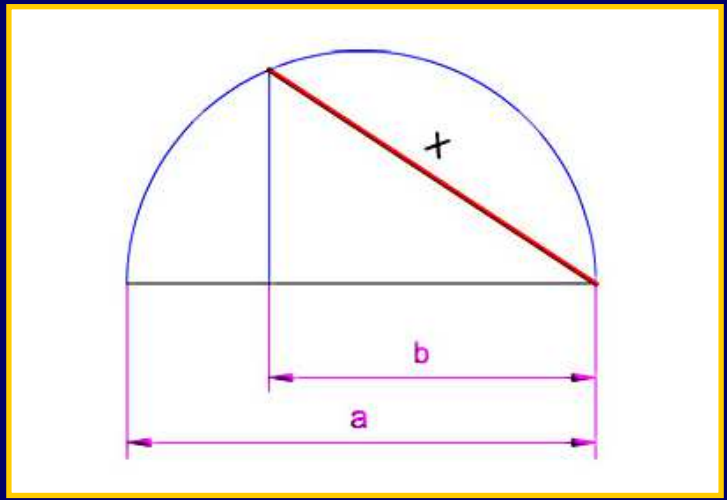
Denominamos medio proporcional de dos segmentos **a** y **b** al segmento **x** que cumple:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$$



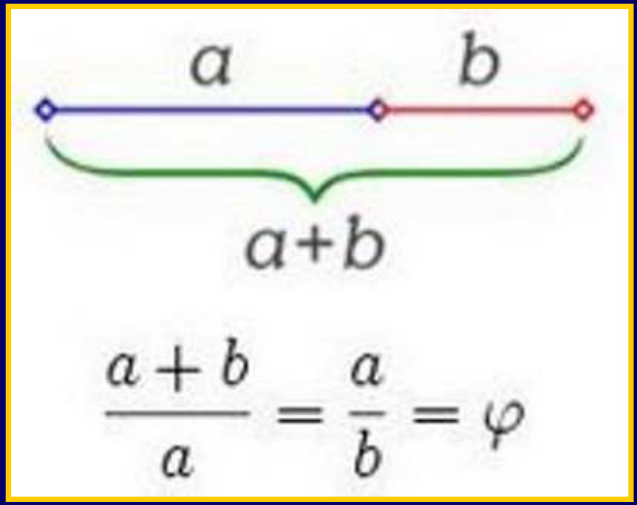
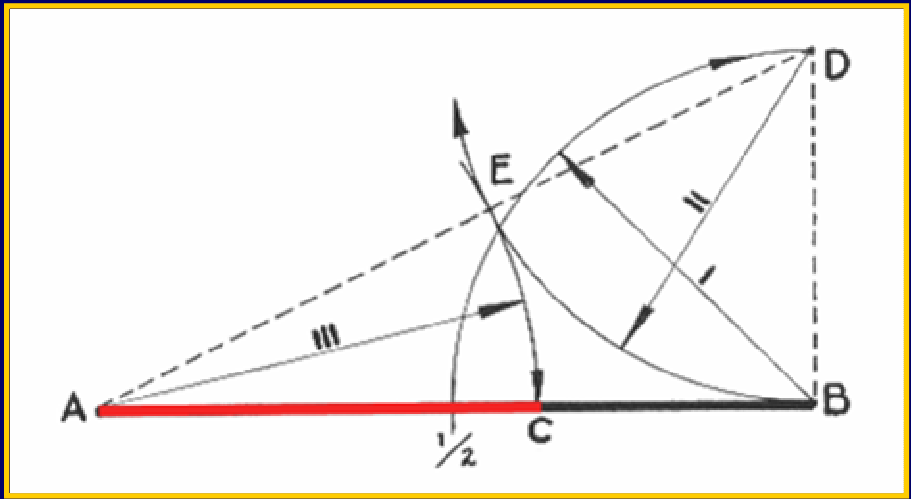
Teorema de la altura: en todo triángulo rectángulo la altura sobre la hipotenusa es media proporcional entre los segmentos en que queda dividida la hipotenusa.

Teorema del cateto: en todo triángulo rectángulo, un cateto es media proporcional entre la hipotenusa y la proyección de dicho cateto sobre ella.



Sección áurea de un segmento

Se denomina **sección áurea** de un segmento a la mayor de las dos partes en que un punto lo divide, de modo que dicha parte es medio proporcional entre la totalidad del segmento y la parte más pequeña. La razón es el número “fi” = 1,618033….



Con centro en B y radio la mitad de AB se halla D sobre la perpendicular a B. Con centro en D y radio DB se halla E sobre AD. Con centro en A y radio AE se halla C sobre AB. El segmento AC es la sección áurea del segmento AB.