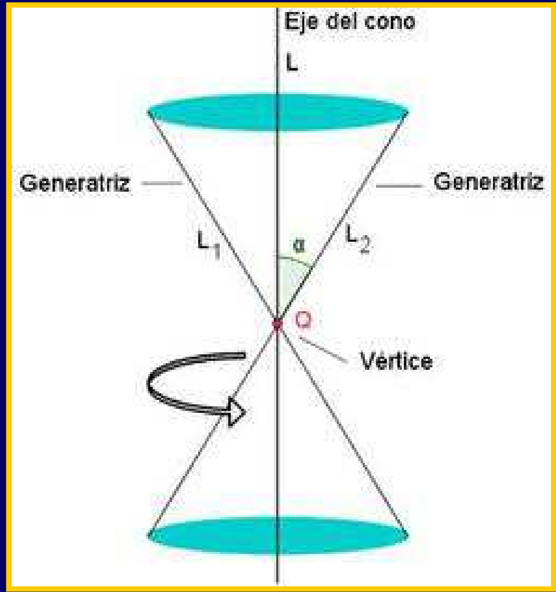
Curvas Cónicas

IES BELLAVISTA

Curvas cónicas

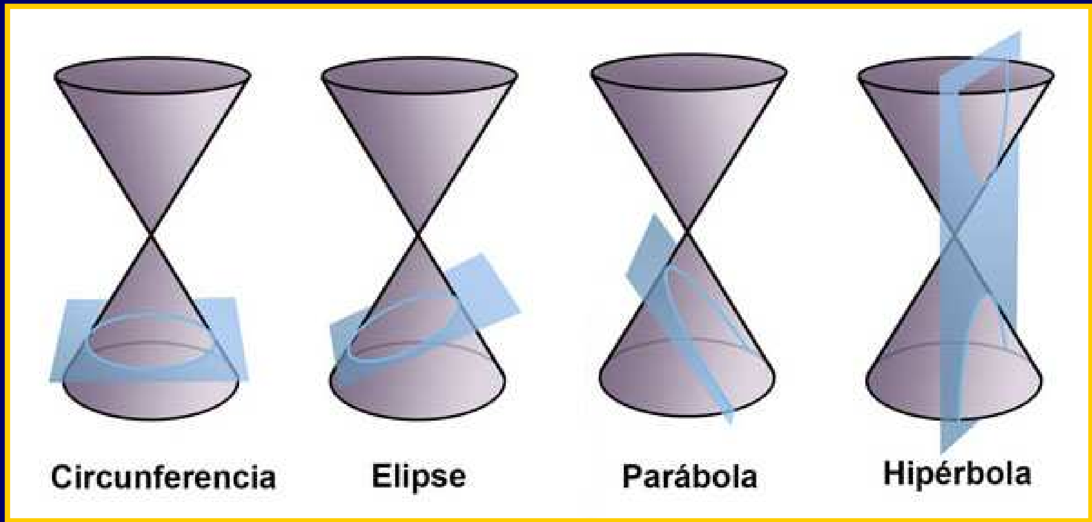
Una **superficie cónica de revolución** está engendrada por una recta, llamada **generatriz**, que gira alrededor de otra a la que corta llamada **eje**. El punto de intersección de ambas se llama **vértice**.



Al seccionar una superficie cónica de revolución por un plano se obtienen unas curvas que llamamos **curvas cónicas**.

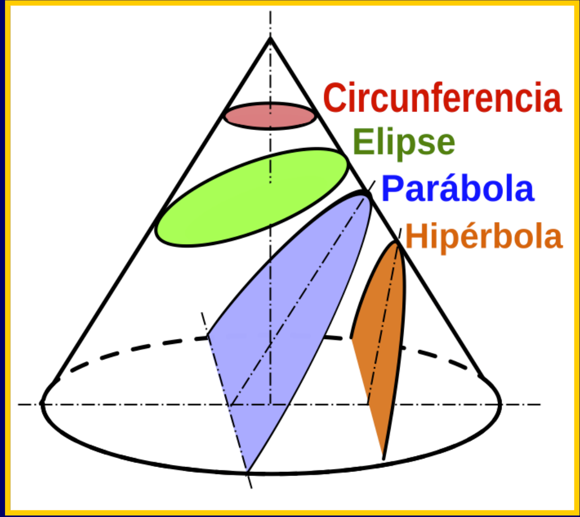
Existen cuatro tipos de curvas cónicas:

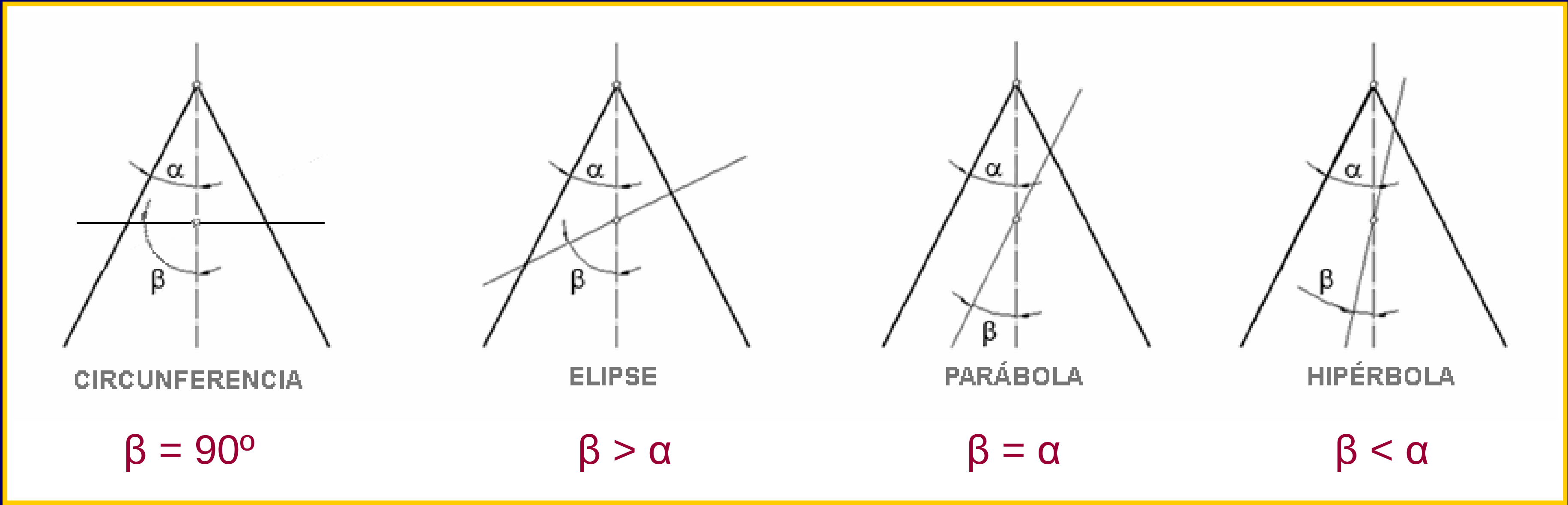
- Circunferencia
- Elipse
- Parábola
- Hipérbola



Curvas cónicas

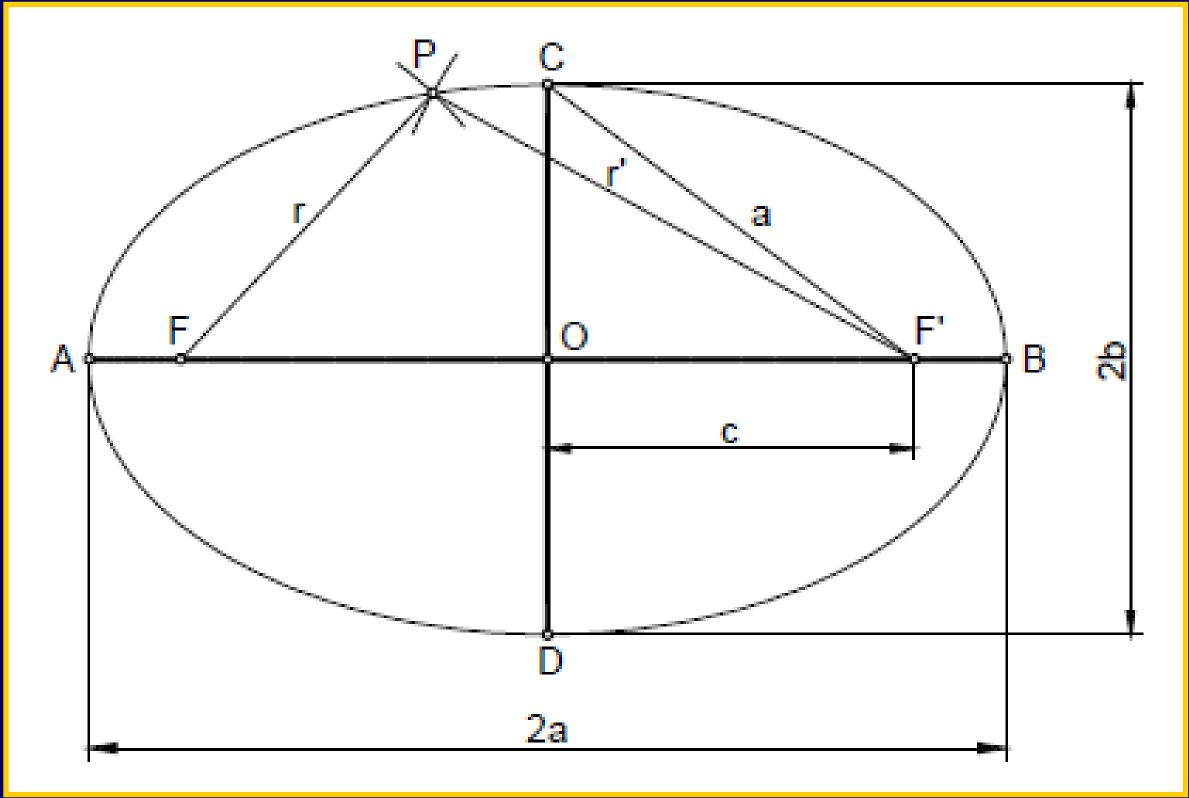
El **tipo de curva cónica** producida por el corte del plano depende de la relación entre el ángulo que forman el plano de corte con el eje (**ángulo β**) y el ángulo formado por la generatriz de la superficie cónica con el eje de la misma (**ángulo α**).





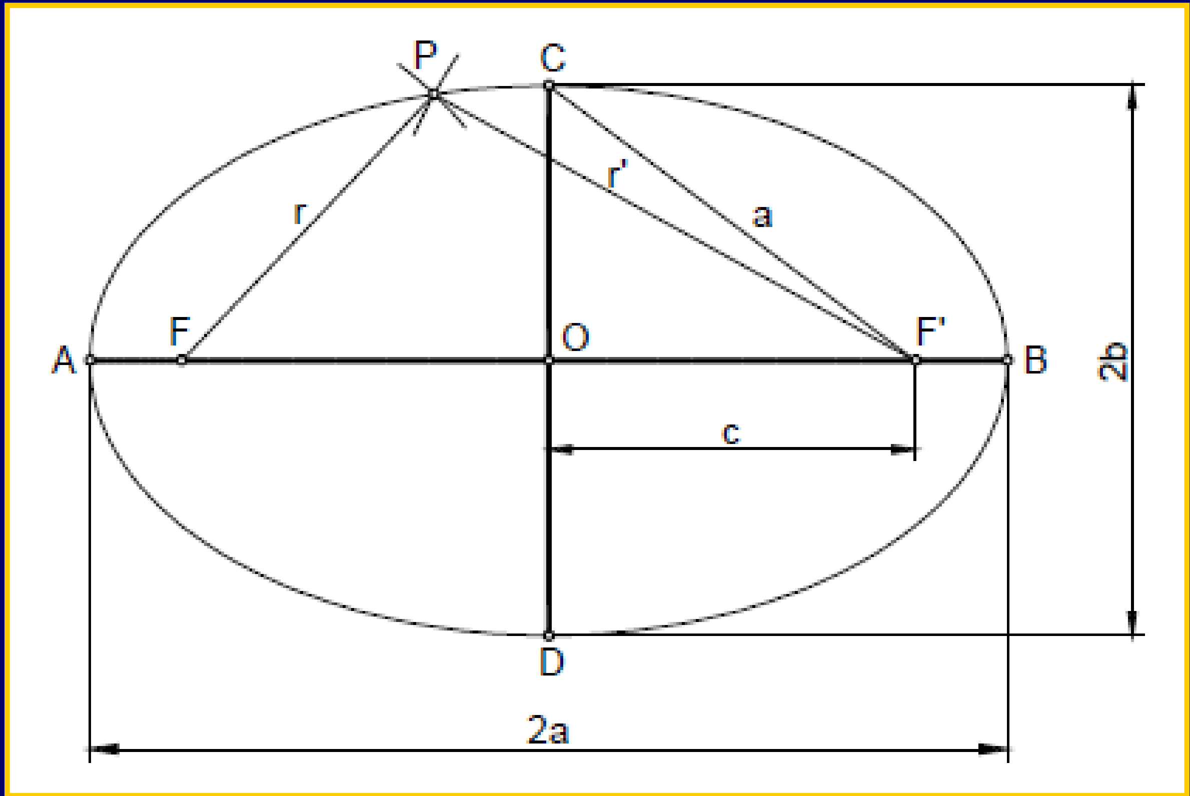
La elipse

La **elipse** es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a otros dos puntos fijos, F y F’, llamados **focos**, es constante e igual a la longitud del **eje mayor** de la elipse (**2a**). Los segmentos, **r** y **r’**, que unen un punto cualquiera P de la curva con los focos se llaman **radios vectores**. Por definición se cumple: **r + r’ = 2a**.



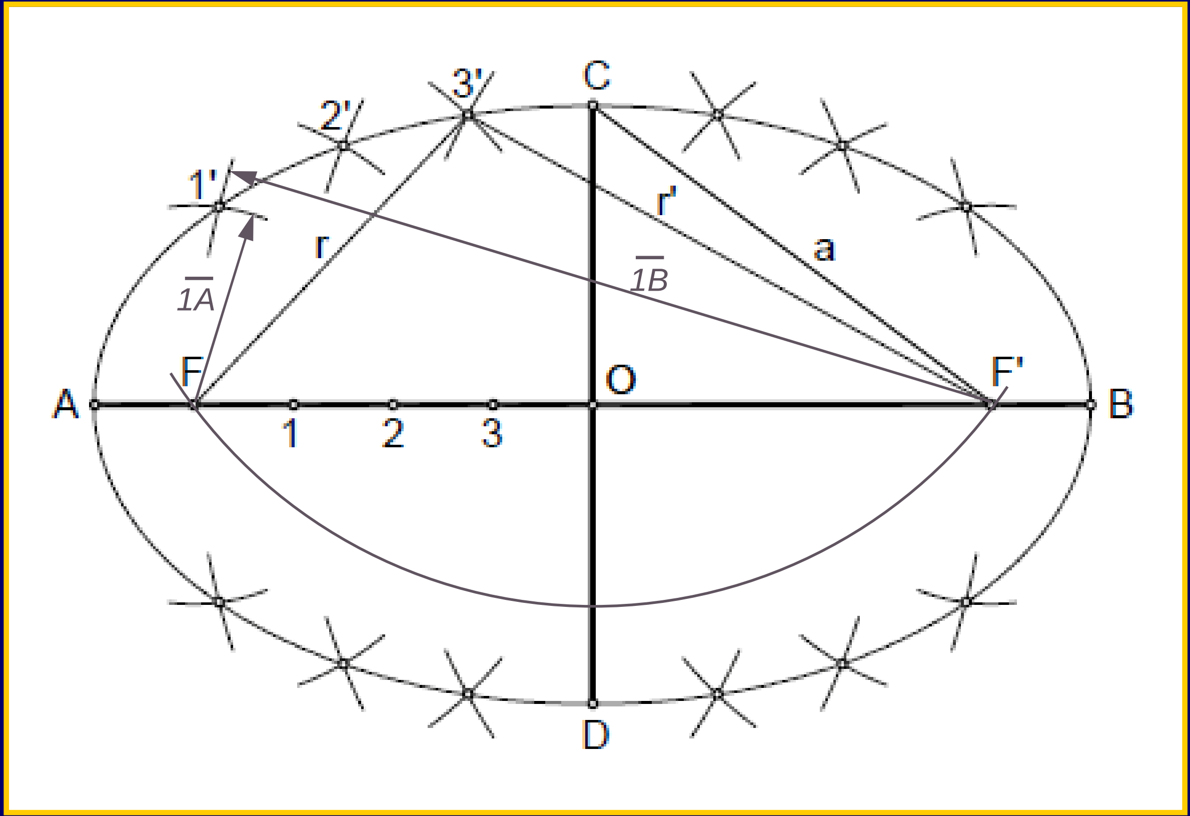
La elipse

La elipse tiene dos ejes perpendiculares que se cortan en el punto medio (**O**). Es simétrica con respecto a ambos ejes. El **eje mayor AB**, también llamado eje real, se representa por **2a**. El **eje menor**, CD, se representa por **2b**. Los focos están en el eje real. La **distancia focal**, **FF’**, se representa por **2c**. Se cumple que: $a^2 = b^2 + c^2$.



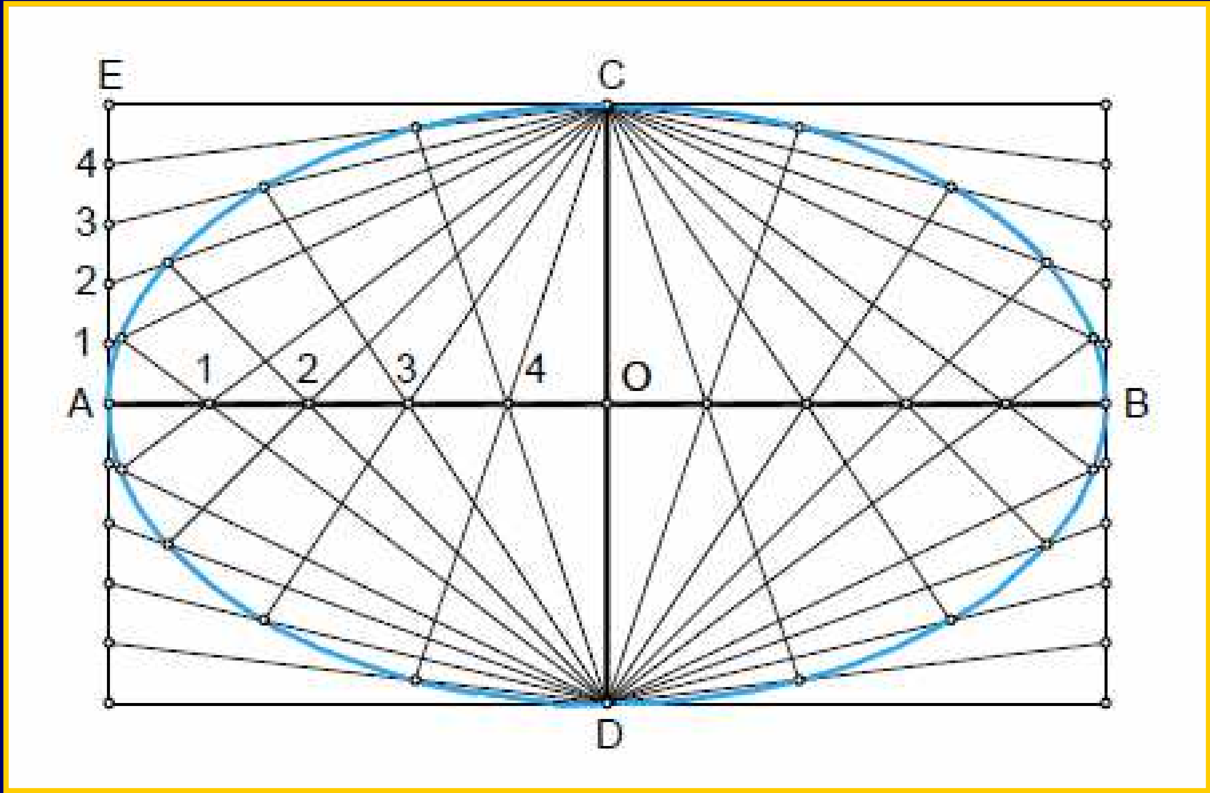
Trazado de la elipse por radios vectores

Se conocen los ejes AB y CD. Con centro en **C** o **D** y radio a, se traza arco que determina los focos **F** y **F'** en el eje real. Se toman puntos en el eje real (**1**, **2**, **3**,…). Con centro en **F** y radio **1A** se traza arco. Con centro en **F'** y radio **1B** se traza arco. Donde se cortan estos arcos (**1'**) es un punto de la elipse.



Trazado de la elipse por haces proyectivos

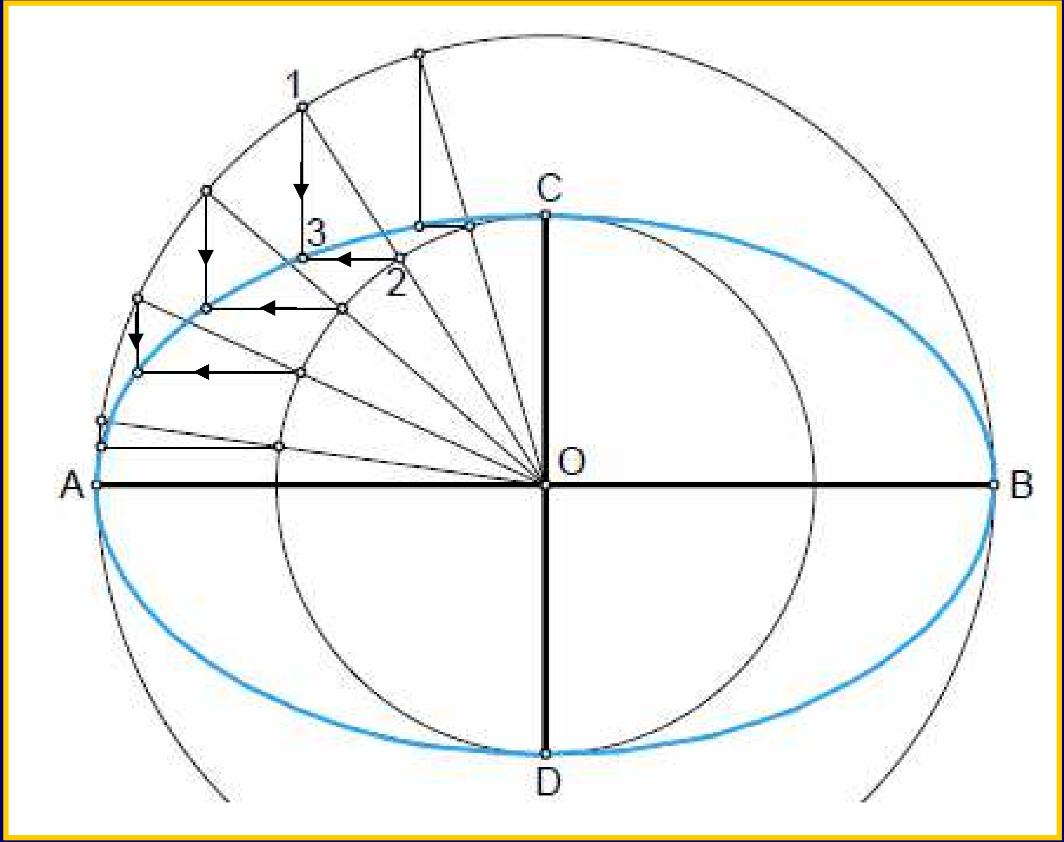
Se conocen los ejes AB y CD. Se construye el rectángulo **OAEC**. Se dividen los segmetnos **OA** y A**E** en el mismo número de partes iguales. Las intersecciones de los rayos **C1**, **C2**, **C3** y **C4** con los rayos **D1**, **D2**, **D3** y **D4** respectivamente son puntos de la elipse. Se hace lo mismo para los otros tres rectángulos.



Trazado de la elipse por circunferencias afines

Se conocen los ejes AB y CD. Existe una afinidad entre la elipse y la circunferencia de centro **O** y diámetro **AB** (circunferencia principal) de eje de afinidad **AB**. También existe una afinidad entre la elipse y la circunferencia de centro **O** y diámetro **CD**, de eje de afinidad **CD**.

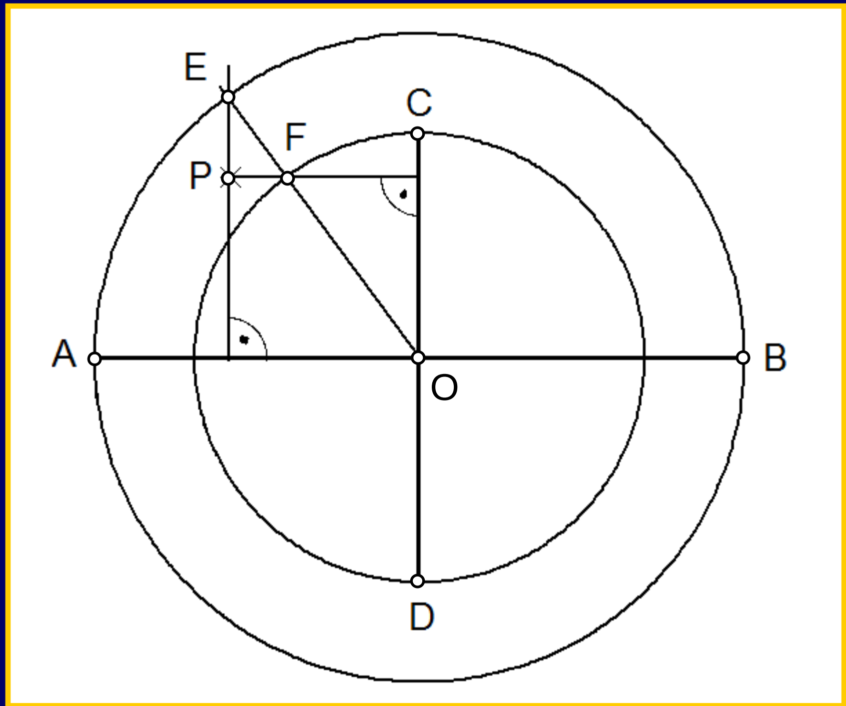
Aprovechando lo anterior, se procede de la siguiente forma: se construyen las circunferencias de diámetros los ejes. Se traza un radio cualquiera que corta a las dos circunferencias. Se trazan por los puntos de corte paralelas a los ejes. Los puntos de intersección de estas paralelas son puntos de la elipse.



Trazado de la elipse conocido un eje y un punto

Si conocemos el eje AB y el punto P. Se traza con centro en **O** la circunferencia de diámetro **AB**. Por P se traza una perpendicular a **AB** que corta a la circunferencia en **E**. Se traza el segmento **EO**. Se traza una paralela a **AB** por **P**, que corta a **EO** en **F**. La distancia **OF** es el semieje menor. Con centro en **O** y radio **OF** obtenemos **C** y **D** sobre una perpendicular a **AB** por **O**.

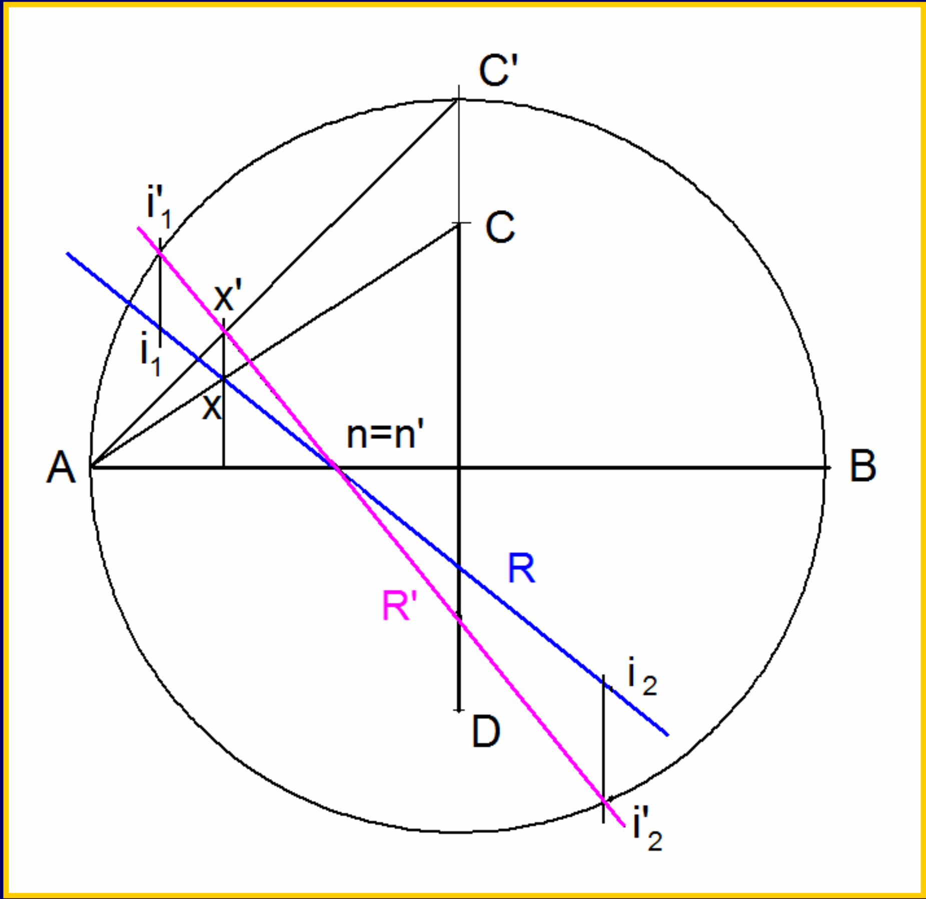
En caso de que el eje conocido sea el **CD**, el trazado es similar, salvo que primero se obtiene el punto **F** y luego el **E**.



Intersección de una recta con una elipse

Conocemos los ejes principales de la elipse (A**B** y **CD**) y la recta **R**. Sabemos que la elipse y la circunferencia principal son afines, siendo el eje de afinidad **AB**.

Trazamos una cuerda que corte a la recta, como la **AC**. Trazamos su afín **AC'**. Al punto de intersección, **X**, de la recta **R** con **AC** le hallamos su afín, **X'**, sobre **AC'**. La unión de **X'** con **n=n'** nos da la recta afín **R'**. Hallamos los puntos de intersección, **i'_1** e **i'_2** , de **R'** con la circunferencia principal. Los afines de estos puntos, **i_1** e **i_2**, que están en **R**, son los puntos buscados.

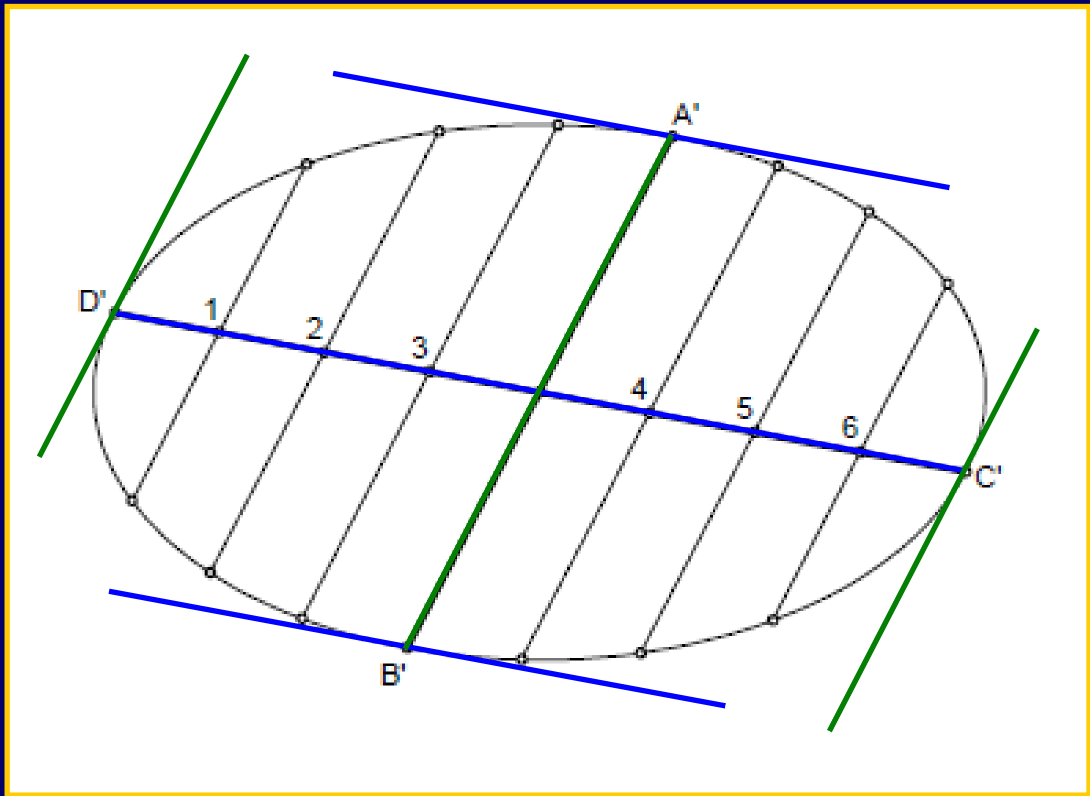


Diámetros conjugados

Dado un diámetro cualquiera de la elipse (cuerda que pasa por su centro) como el **A'B'**, se denomina **diámetro conjugado** con él al lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas paralelas a dicho diámetro. Dichos puntos (**1**, **2**, **3**, ….) determinan el diámetro **C'D'**, conjugado del **A'B'**.

Los ejes real e imaginario vistos antes son los únicos diámetros conjugados que son perpendiculares entre sí. Además son los de mayor y menor longitud respectivamente.

Propiedad: las tangentes a una elipse por los extremos de un diámetro son paralelas a su diámetro conjugado.

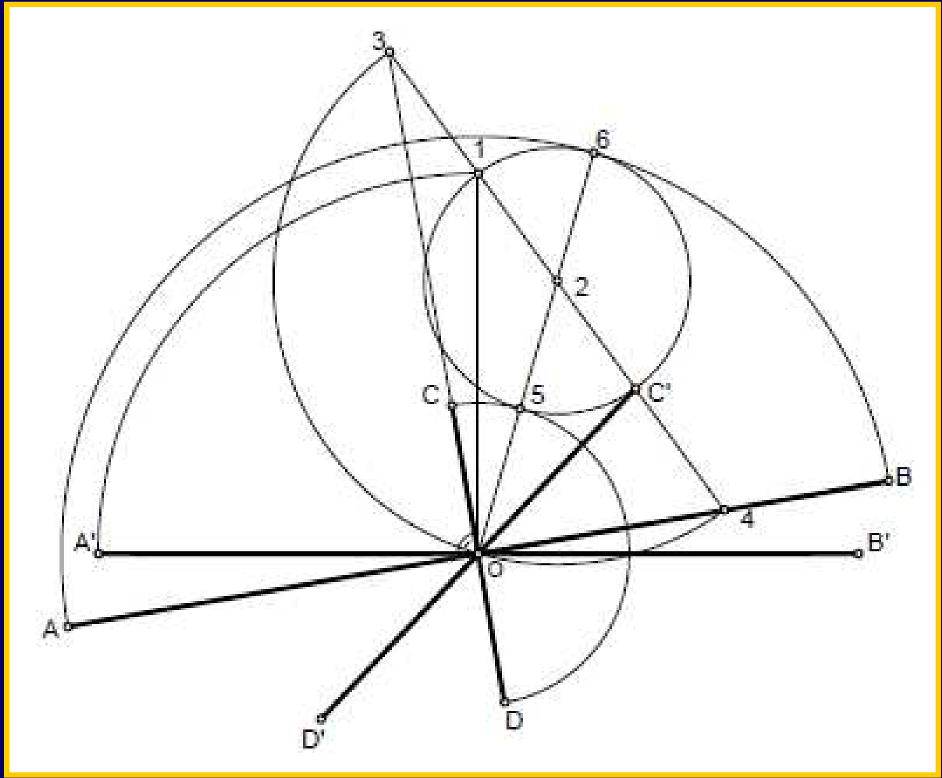


Hallar ejes principales a partir de dos diámetros conjugados

Sean **A'B' y C'D' dos diámetros conjugados**. Por **O** se traza una perpendicular a **A'B'**. Se traza un arco de centro **O** y radio **OA'** que corta a dicha perpendicular en **1**. Unimos **1** y C**'** y por su punto medio (**2**) se traza circunferencia de radio **2C'**. Se traza un arco con centro en **2** y radio 2**O** que corta en los puntos **3** y **4** a la prolongación del segmento **1C'**. Las direcciones de los segmentos **O3** y **O4** son las de los ejes principales.

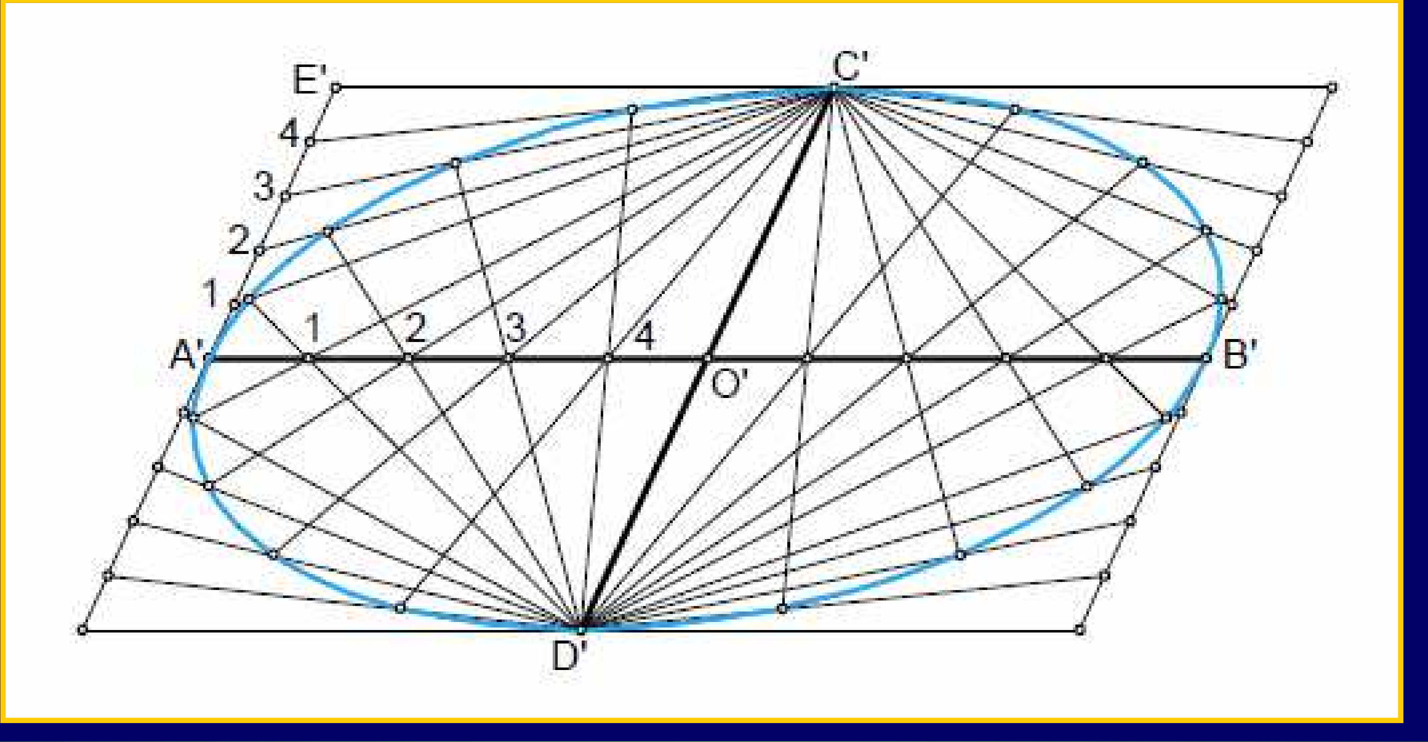
Se traza una recta que pase por **O** y **2** cortando a la circunferencia de diámetro **1C'** en los puntos **5** y **6**. Las distancias **O5** y **O6** son las magnitudes de los semiejes.

Trazando con centro en **O** arcos de radio **O5** y **O6** hallamos sobre las direcciones de los ejes los puntos **A**, **B**, **C** y **D**, extremos de los ejes principales.



Trazado de la elipse por haces proyectivos

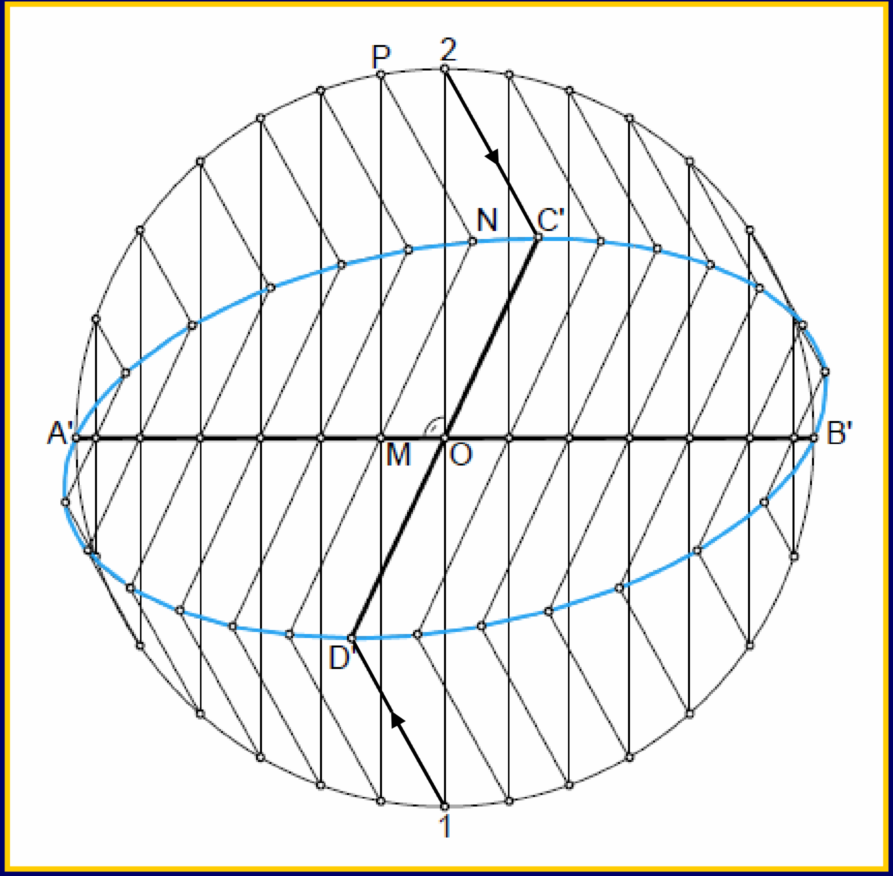
Se conocen dos diámetros conjugados A’B’ y C’D’. Se construye el romboide **O’A’E’C’** mediante paralelas a los ejes conjugados por **A’** y **C’**. Se dividen los segmetnos **O’A’** y **A’E’** en el mismo número de partes iguales. Las intersecciones de los rayos **C’1**, **C’2**, **C’3**, **C’4** con los rayos **D’1**, **D’2**, **D’3**, **D’4** respectivamente son puntos de la elipse. Se hace lo mismo para los otros tres romboides.



Trazado de la elipse por triángulos semejantes afines

Se conocen dos diámetros conjugados A’B’ y C’D’. Se construye la circunferencia de radio **A’B’**. Se traza la perpendicular por **O** a **A’B’**, obteniendo los puntos **1** y **2** sobre dicha circunferencia. Se traza los segmentos **1D’** y **2C’**.

Mediante paralelas se construyen triángulos semejantes al **O2C’** y al **O1D’**, tales como **MPN**; el punto **N** pertenece a la elipse.



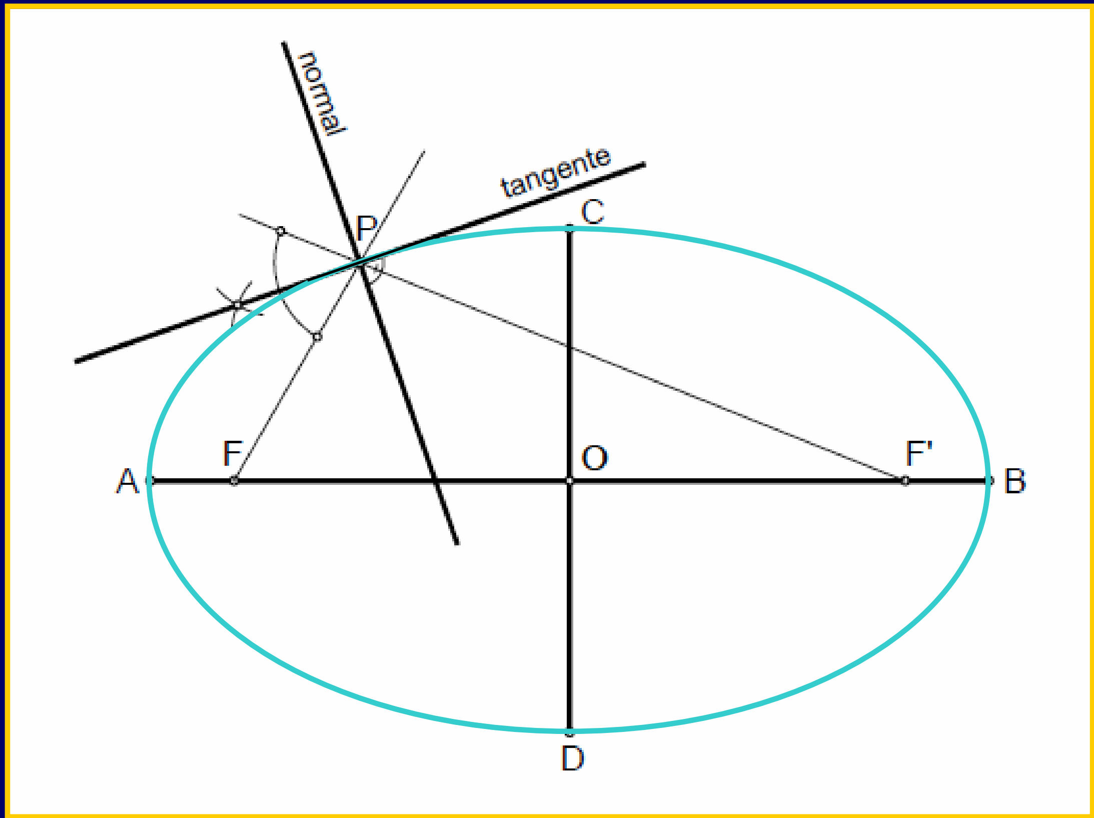
Tangente a una elipse por un punto de la misma

Primer procedimiento

Se conocen o se hallan los focos de la elipse. Por el punto **P** dado se trazan los radios vectores (rectas que unen **P** con los focos).

La bisectriz del ángulo exterior de los radios vectores es la tangente a la elipse en **P**. La perpendicular a la tangente es la normal.

Nota: si no se conocen los focos pueden hallarse a partir de los ejes real e imaginario, trazando un arco de radio **OA** con centro en **C** hasta que corte a **AB**.



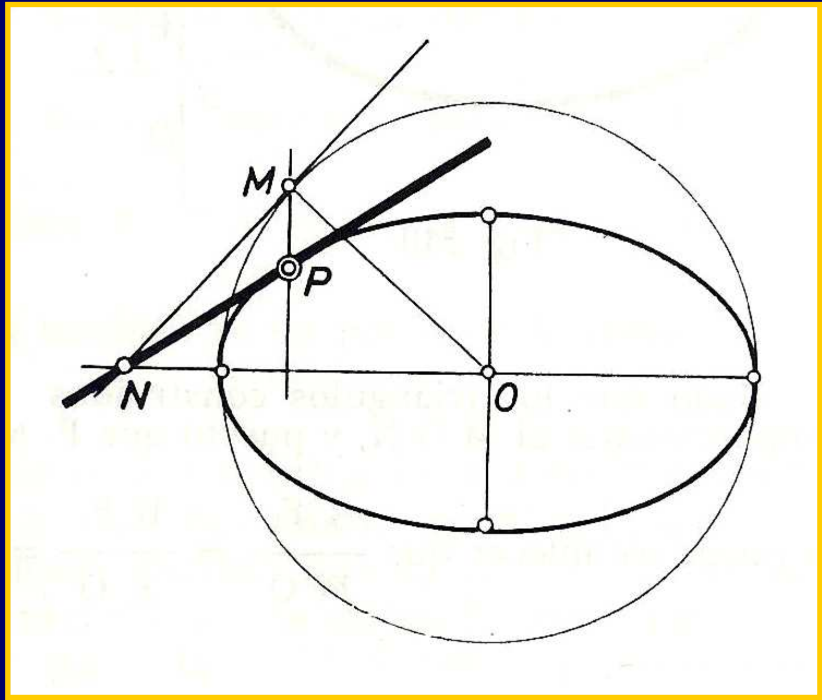
Tangente a una elipse por un punto de la misma

Segundo procedimiento

Se conoce el eje mayor. Se traza la circunferencia principal. Por el punto **P** dado se traza una perpendicular al eje mayor hasta cortar a la circunferencia principal en **M**.

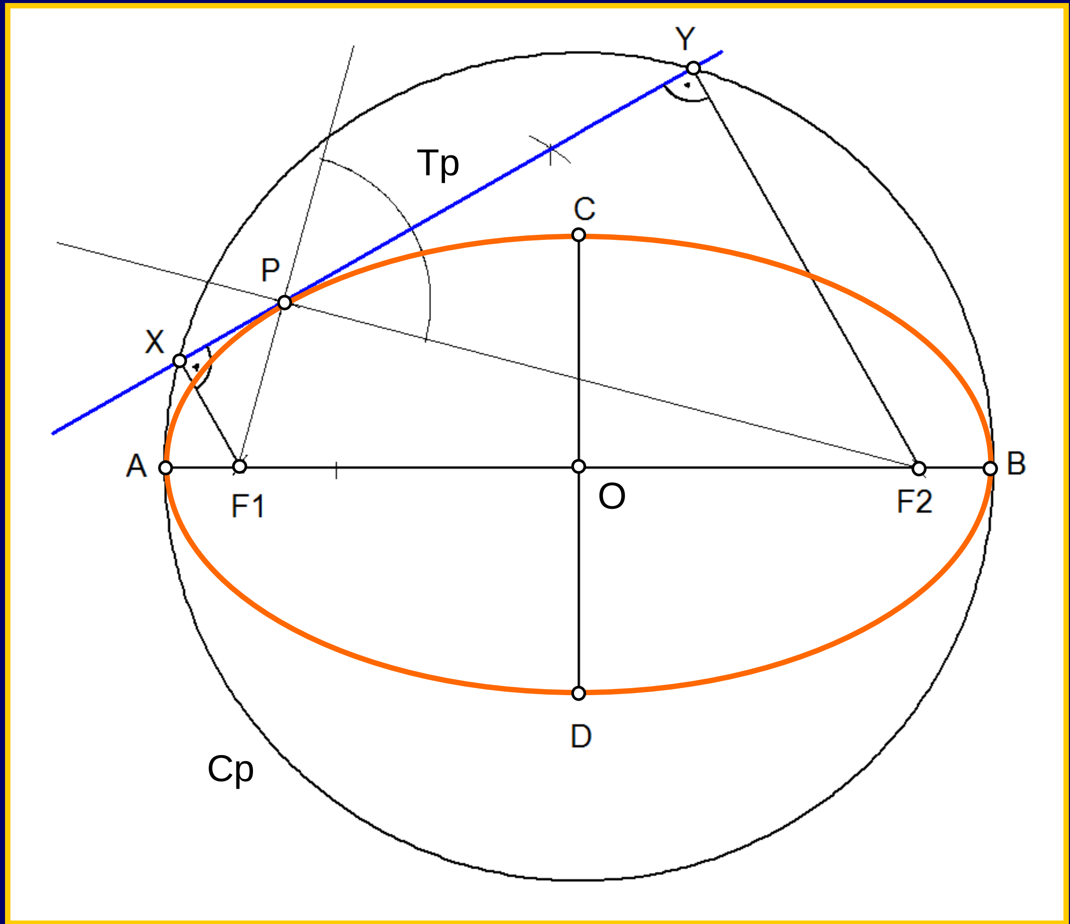
La recta tangente a la circunferencia principal por el punto **M** corta a la prolongación del eje mayor en el punto **N**. La recta que une **N** y **P** es la tangente pedida.

Nota: este procedimiento se fundamenta en que la elipse y la circunferencia principal son afines, con eje de afinidad el eje mayor. Así, los puntos **M** y **P** son afines.



La circunferencia principal y las tangentes

La **circunferencia principal** de la elipse, que es la que tiene por centro el centro de la elipse (**O**) y diámetro el eje mayor, se puede definir como el lugar geométrico de los pies de las perpendiculares trazadas por los focos a las rectas tangentes a la elipse.

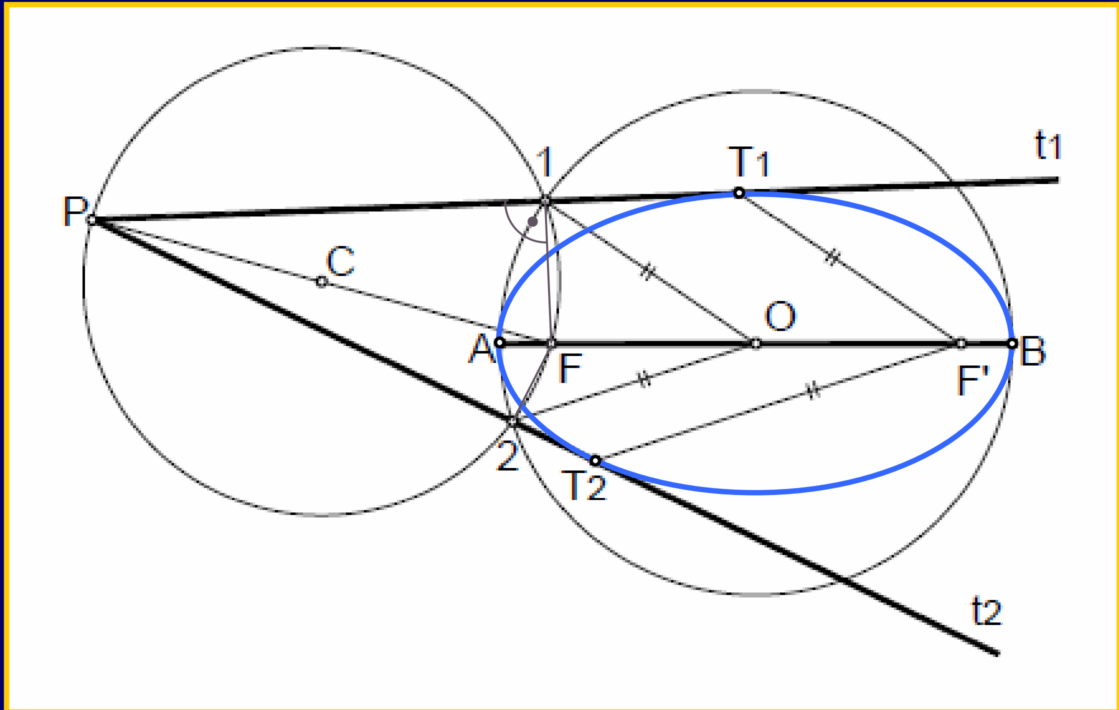


De este modo, los puntos **X** e **Y**, pies de las perpendiculares trazadas por los focos **F1** y **F2** a la tangente **Tp**, pertenecen a la circunferencia principal **Cp**.

Tangente a una elipse por un punto exterior

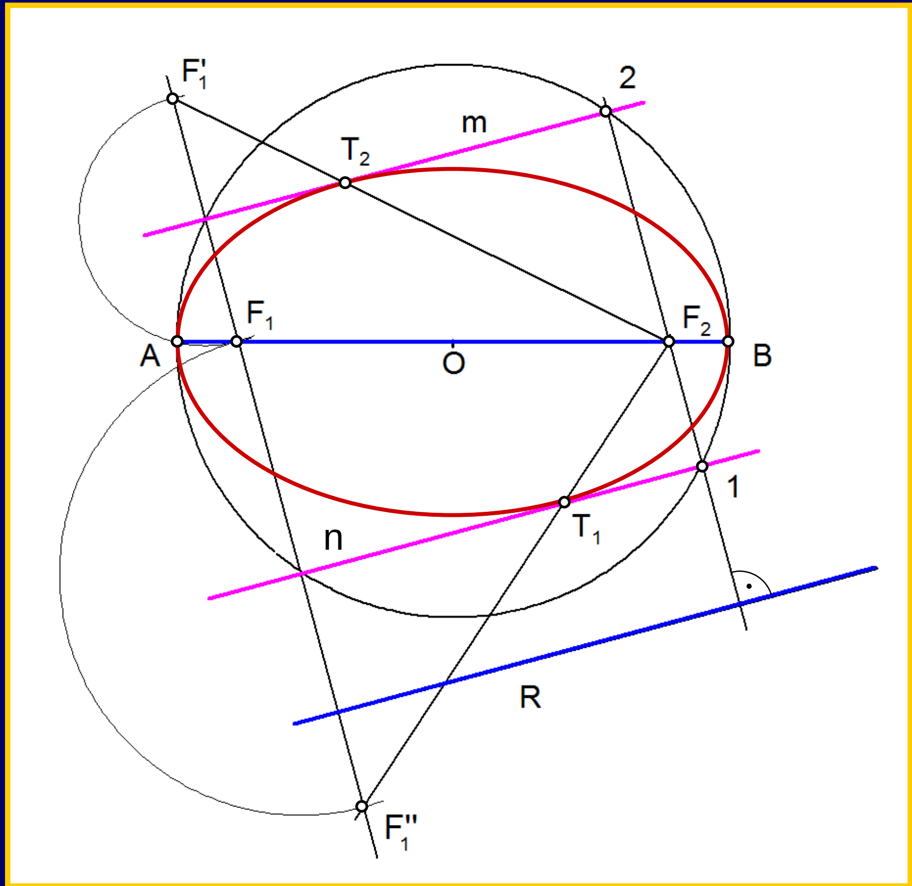
Primer procedimiento: Se conocen los focos de la elipse. Se traza la circunferencia principal (centro **O** y radio **OA**). Se halla el punto **C**, punto medio del segmento **PF** que une el punto exterior, **P**, con uno de los focos de la elipse. Se traza un arco capaz de 90º de centro **C** y radio **CF**, que corta a la circunferencia principal en **1** y **2**. Los ángulos **P1F** y **P2F** son de 90º. Las rectas **P1** y **P2** (**t1** y **t2** de la figura) son tangentes a la elipse.

Para hallar los **puntos de tangencia**, se trazan paralelas a **O1** y **O2** por el otro foco, las cuales determinan, en la intersección con las tangentes, los puntos de tangencia **T1** y **T2**.



Tangentes a una elipse paralelas a una dirección dada

Primer procedimiento: Se conocen el eje mayor **AB**, los focos y la recta **R** en la dirección dada. Se traza la circunferencia principal de centro **O** y diámetro **AB**. Se traza una perpendicular a **R** por uno de los focos (**F_2**) obteniendo sobre la circunferencia principal los puntos de corte **1** y **2**. Las paralelas, **m** y **n**, a **R** por estos puntos son tangentes a la elipse.



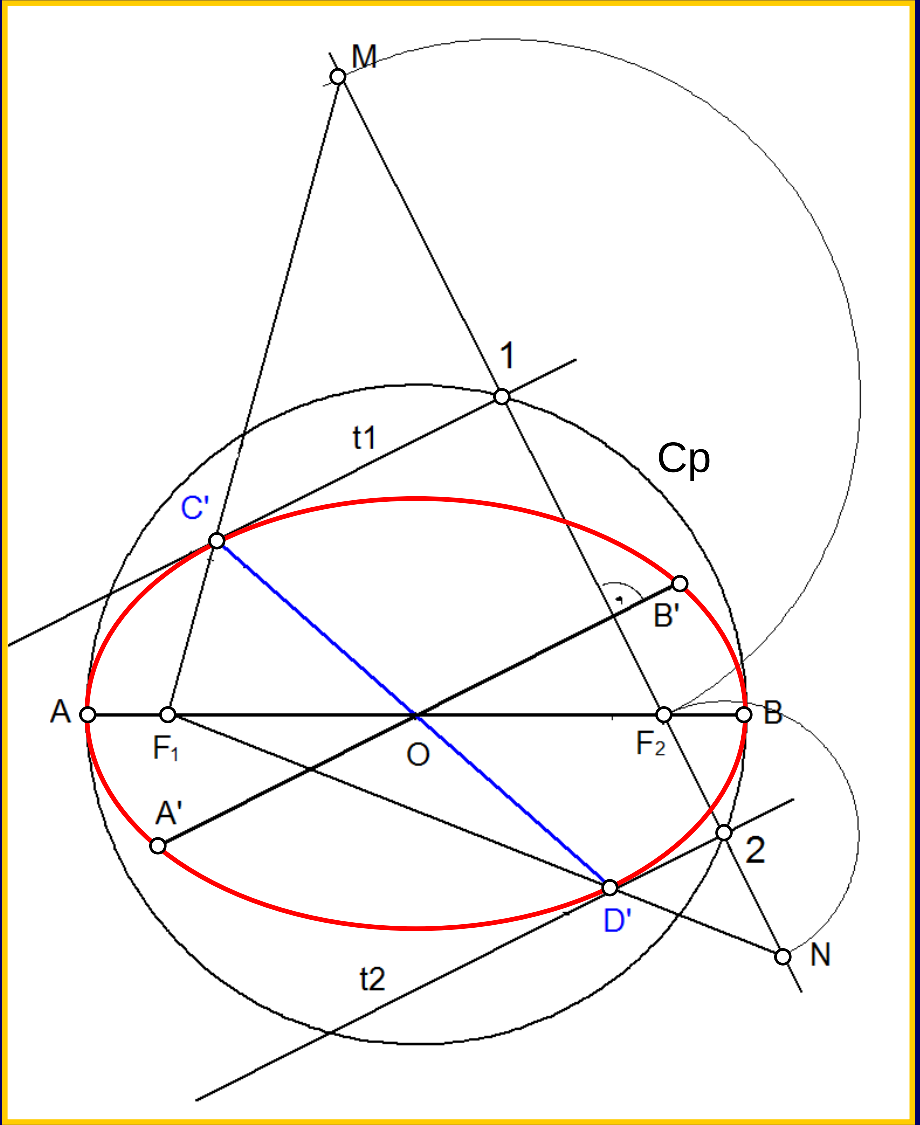
Para hallar los **puntos de tangencia**, se trazan los puntos simétricos de un foco con respecto a las rectas tangentes (**F'_1** y **F''_1**) y se unen con el otro foco (**F_2**). Los puntos de corte, **T_1** y **T_2**, con las rectas tangentes son los puntos de tangencia.

Hallar el diámetro conjugado de uno dado

1er Procedimiento: Se conocen los focos, el eje mayor **AB** y el diámetro **A'B'**. Se traza la circunferencia principal (**Cp**). Se traza una perpendicular por **F_2** al eje **A'B'**, que corta en **1** y **2** a la circunferencia principal.

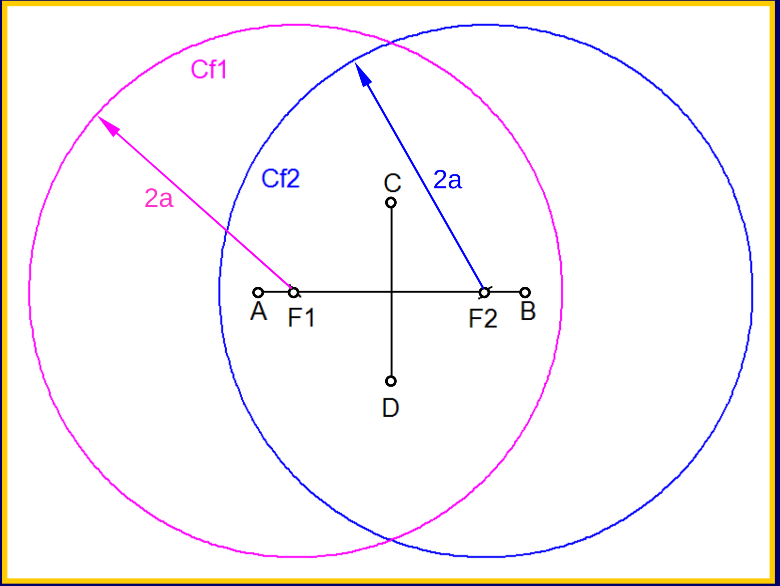
Las paralelas a **A'B'** por **1** y **2** son las tangentes, **t1** y **t2**, a la elipse en los extremos del eje conjugado.

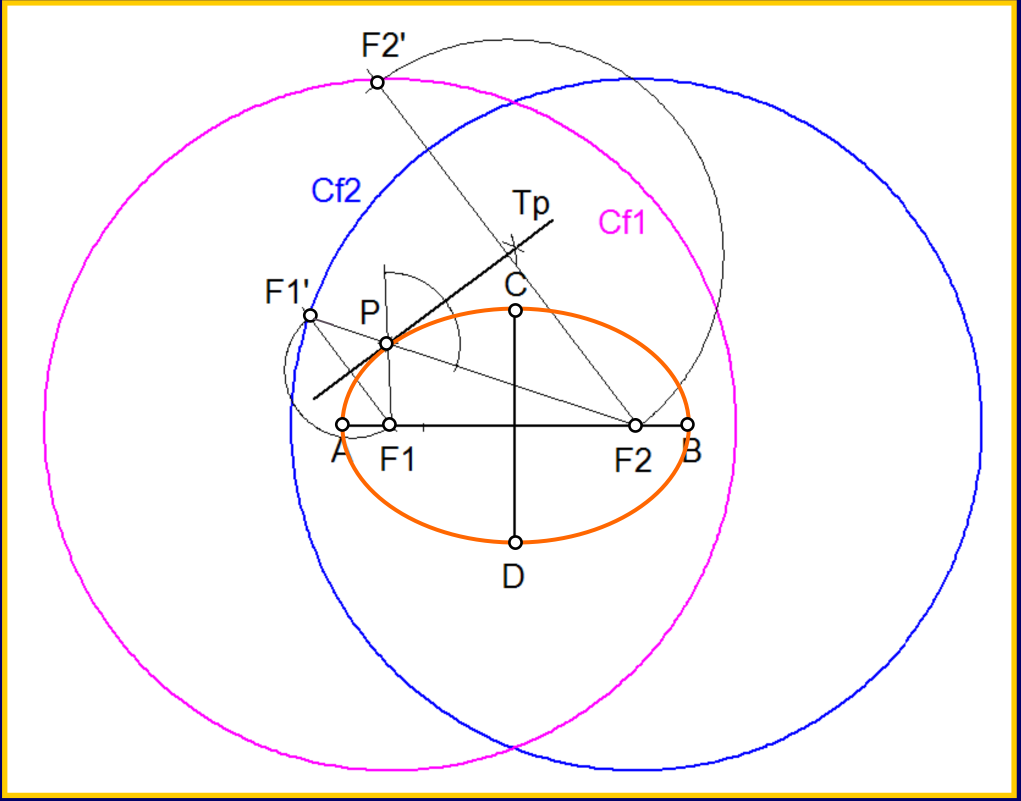
Hallamos los puntos simétricos (**M** y **N**) de uno de los focos (**F_2**) respecto a las tangentes. Unimos **M** y **N** con el otro foco (**F_1**). Los puntos de corte con las tangentes serán los extremos del diámetro conjugado, **C'D'**, del diámetro dado **A'B'**.



Las circunferencias focales y las tangentes

Las **circunferencias focales** de una elipse, son las que tienen por centros los focos de la elipse y su radio es **2a**, es decir, la magnitud del eje mayor.



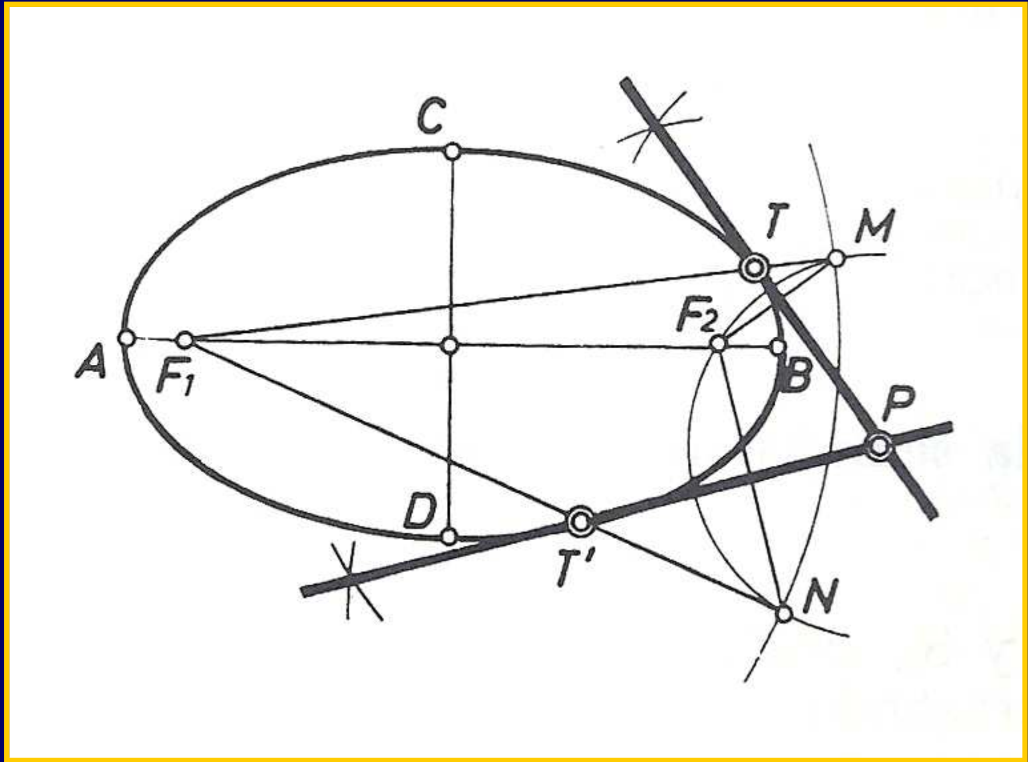


Propiedad: los puntos simétricos de un foco de la elipse respecto a cualquier recta tangente a la misma se encuentran situados en la circunferencia focal del otro foco.

Tangente a una elipse por un punto exterior

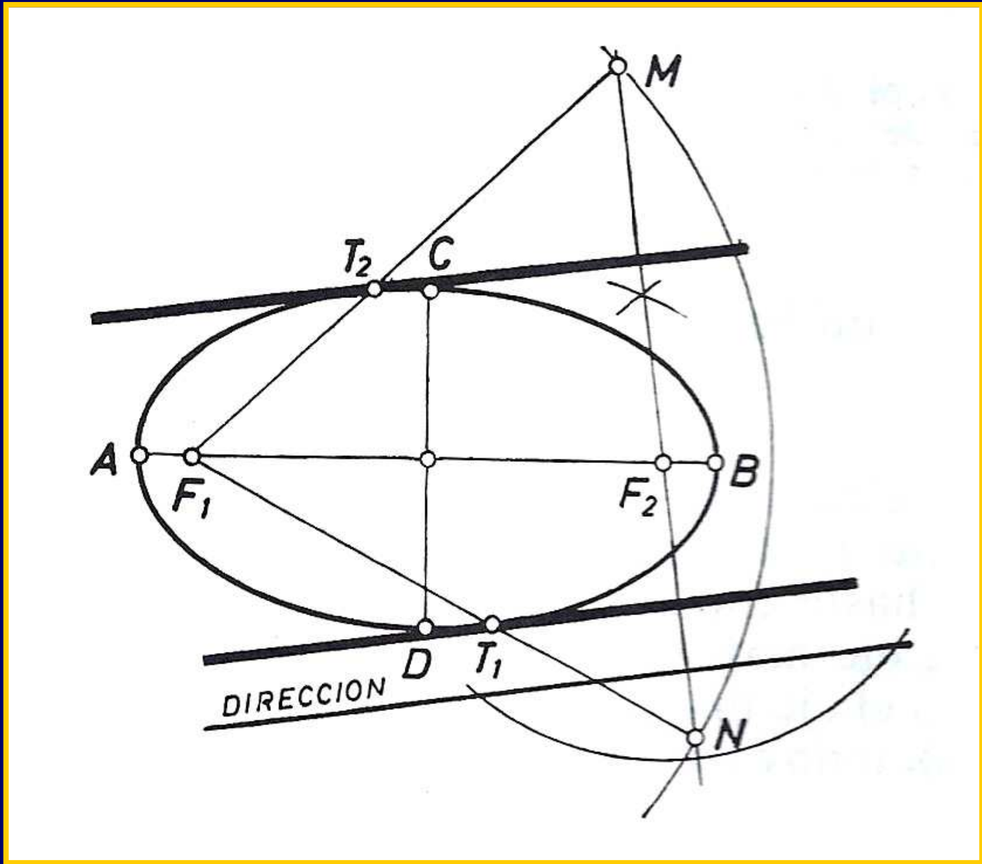
Segundo procedimiento: Se conocen los focos de la elipse. Se traza la circunferencia focal del foco **F_1** (o un tramo adecuado de la misma). Se traza una circunferencia de centro **P** y radio **PF_2**, que corta a la anterior en **M** y **N**. Las mediatrices de los segmentos **F_2M** y **F_2N** son las tangentes a la elipse por el punto exterior **P**.

Para hallar los **puntos de tangencia**, se unen los puntos **M** y **N** con el foco **F_1**, obteniéndose los puntos de tangencia **T** y **T '**.



Tangentes a una elipse paralelas a una dirección dada

Segundo procedimiento: Se traza la circunferencia focal con centro en **F_1**. Por **F_2** se traza una perpendicular a la dirección dada, que corta en **N** y **M** a la circunferencia focal. Como estos puntos deben ser simétricos de **F_2** respecto a las tangentes, las mediatrices de los segmentos **F_2N** y **F_2M** son las tangentes a la elipse en la dirección dada.



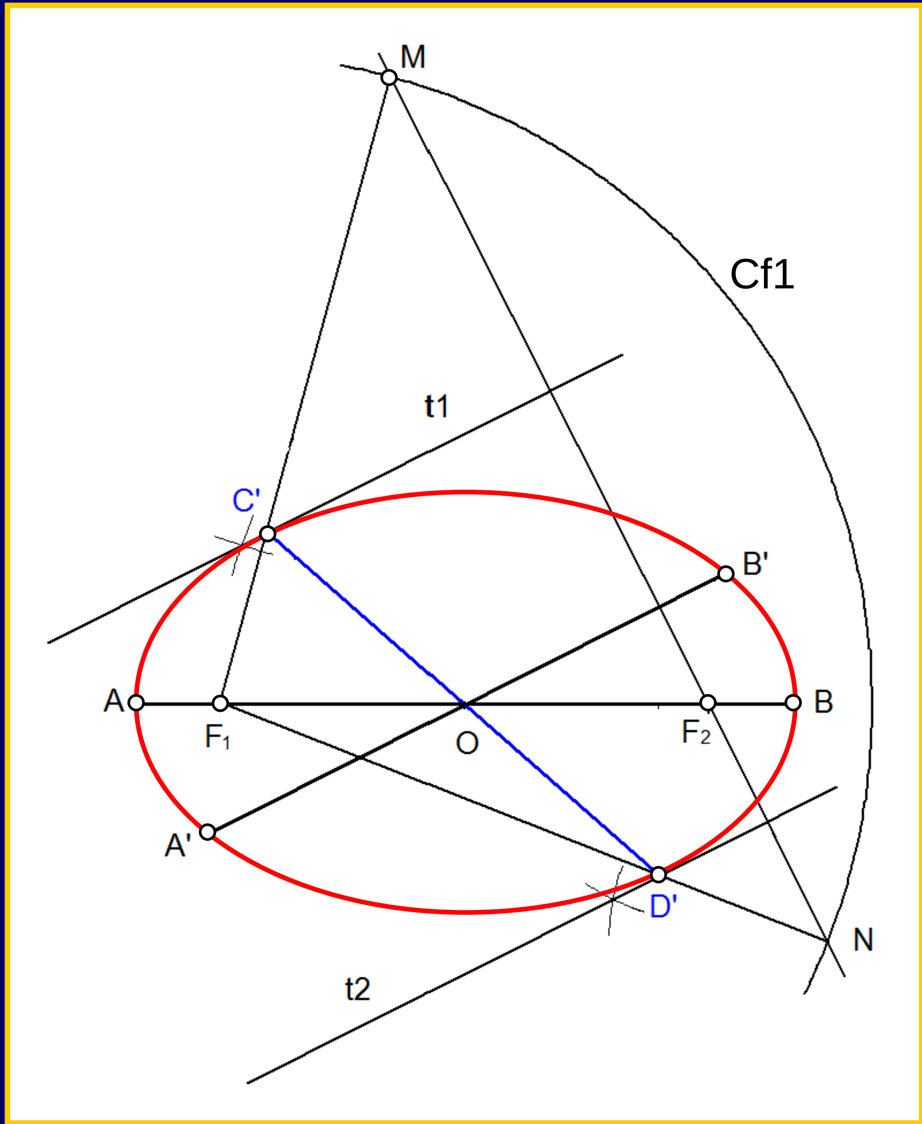
Los **puntos de tangencia** se hallan uniendo **N** y **M** con el otro foco (**F_1**) obteniéndose **T_1** y **T_2** respectivamente.

Hallar el diámetro conjugado de uno dado

2º Procedimiento: Se conocen los focos y el eje mayor **AB**. Nos dan el diámetro **A'B'**. Se traza la circunferencia focal del foco **F_1** (**Cf1**). Se traza una perpendicular por **F_2** al eje **A'B'**, que corta en **M** y **N** a la circunferencia focal.

Las mediatrices de los segmentos **F_2M** y **F_2N** son las tangentes, **t1** y **t2**, a la elipse en la dirección **A'B'**.

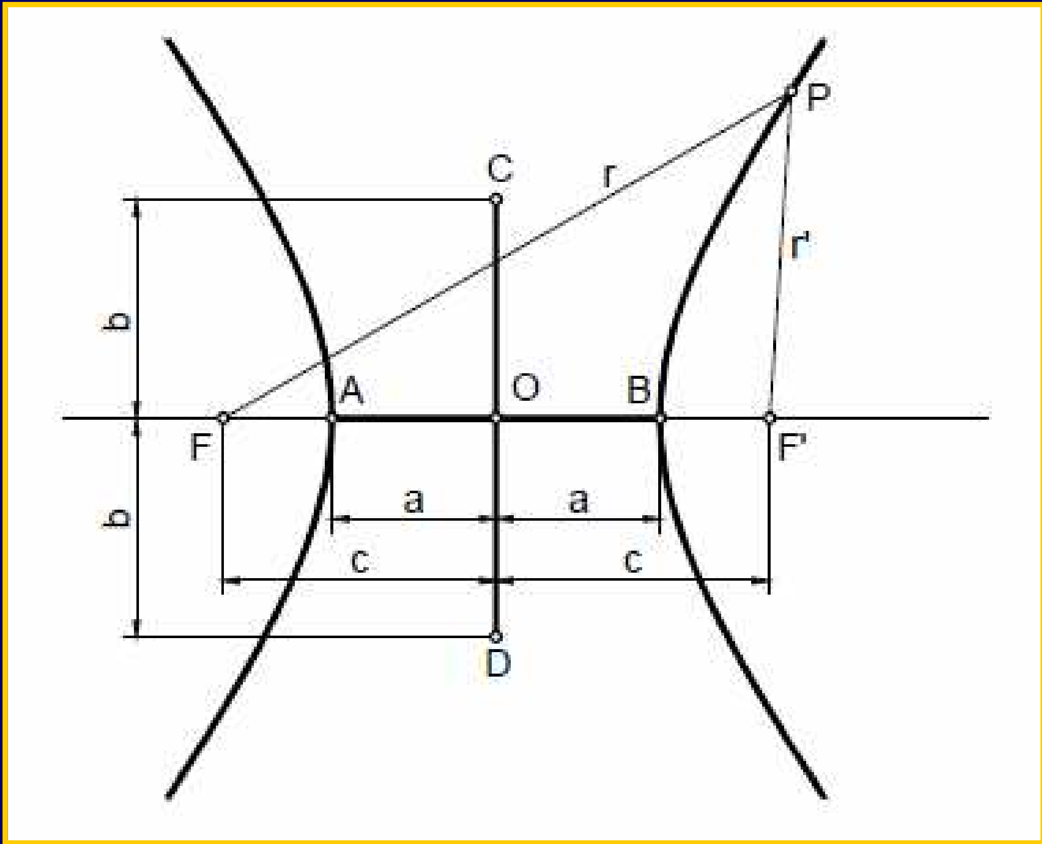
Hallamos los puntos de tangencia uniendo **M** y **N** con **F_1**. Estos puntos serán los extremos del diámetro conjungado **C'D'** del diámetro dado **A'B'**.



La hipérbola

La **hipérbola** es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a otros dos puntos fijos, F y F’, llamandos **focos** es constante e igual al eje real de la curva (2a).

Los segmentos, **r** y **r’**, que unen un punto cualquiera P de la curva con los focos se llaman **radios vectores**. Por definición se cumple: **r – r’ = 2a**.

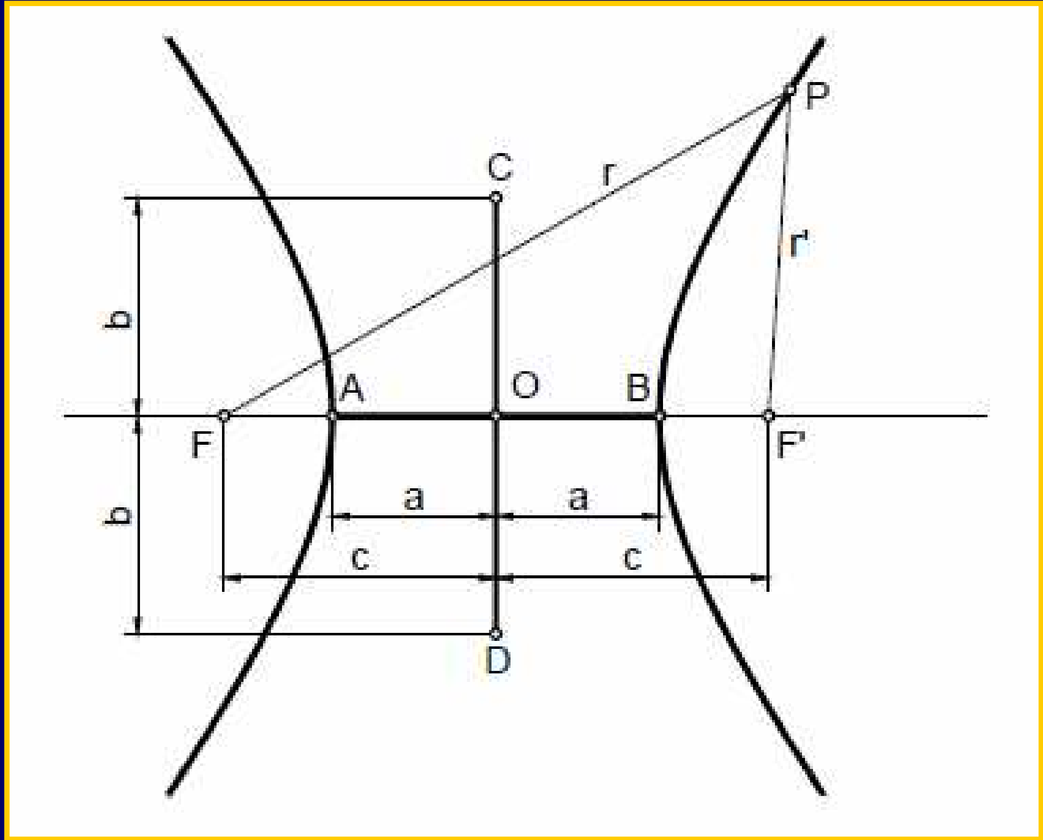


La hipérbola

La hipérbola tiene dos ejes perpendiculares que se cortan en el punto medio (O). El eje **AB** se llama **eje real** y se representa por **2a**. El eje **CD** se llama **eje imaginario** porque no tiene puntos comunes con la curva y se representa por **2b**. La hipérbola tiene dos ramas y es simétrica respecto a los dos ejes.

Los focos están en el eje real. La **distancia focal**, **FF'**, se representa por **2c**. Se cumple que:

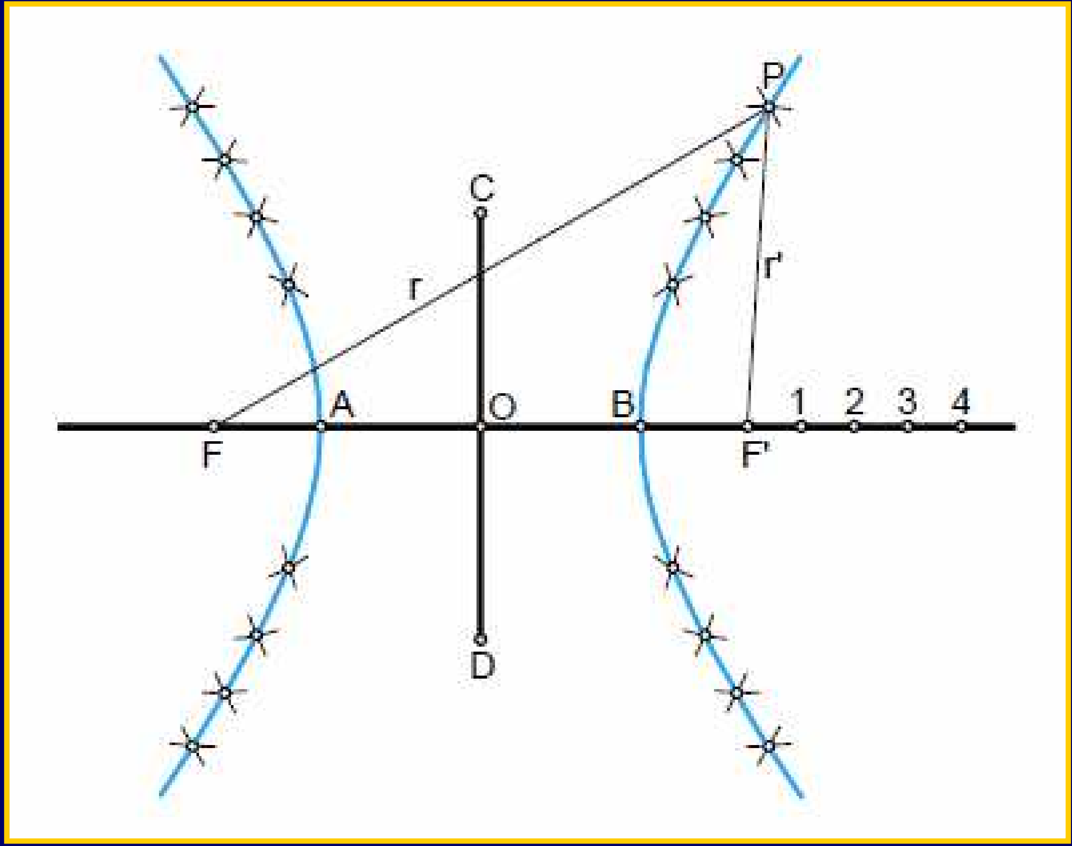
$$c^2 = a^2 + b^2$$



Trazado de la hipérbola mediante radios vectores

Se conoce el eje real y los focos de la hipérbola. Se tiene en cuenta la definición de la hipérbola: tomamos pares de radios vectores cuya diferencia sea **2a**. Para ello:

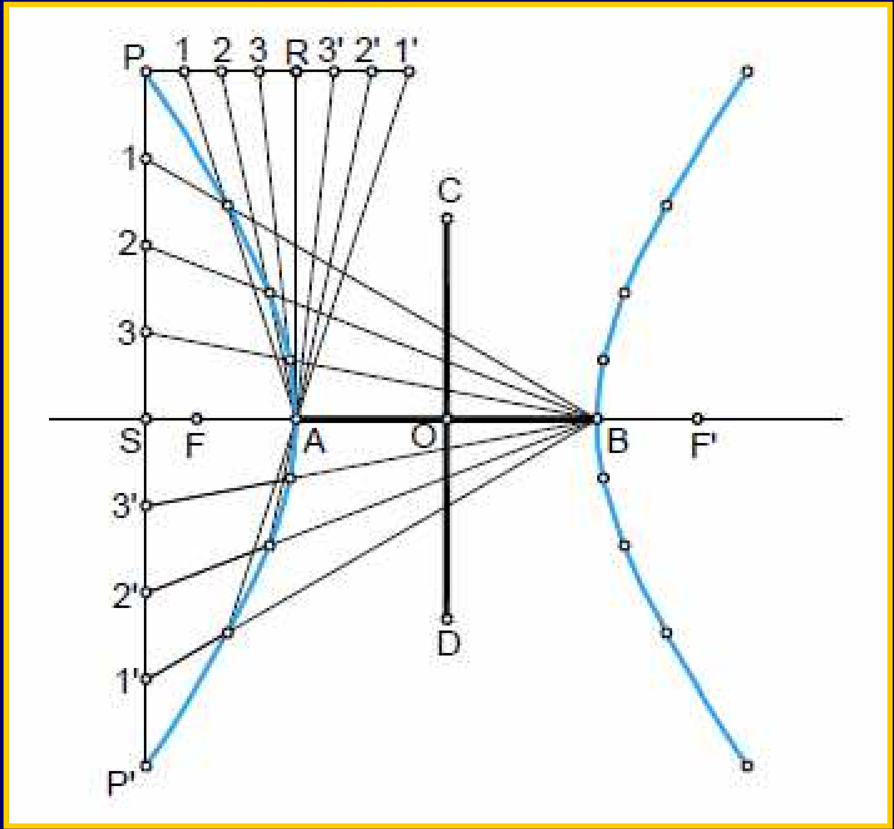
- Determinamos una serie de puntos sobre el eje real (**1**, **2**, **3**, **4**, …) y tomamos como parejas de radios vectores los segmentos **A1-B1**, **A2-B2**, **A3-B3**, etc.
- Con centros en **F** y **F'** y arcos los pares de radios vectores obtenemos cuatro puntos de la hipérbola por cada pareja, uno en cada cuadrante.



Trazado de la hipérbola por haces proyectivos

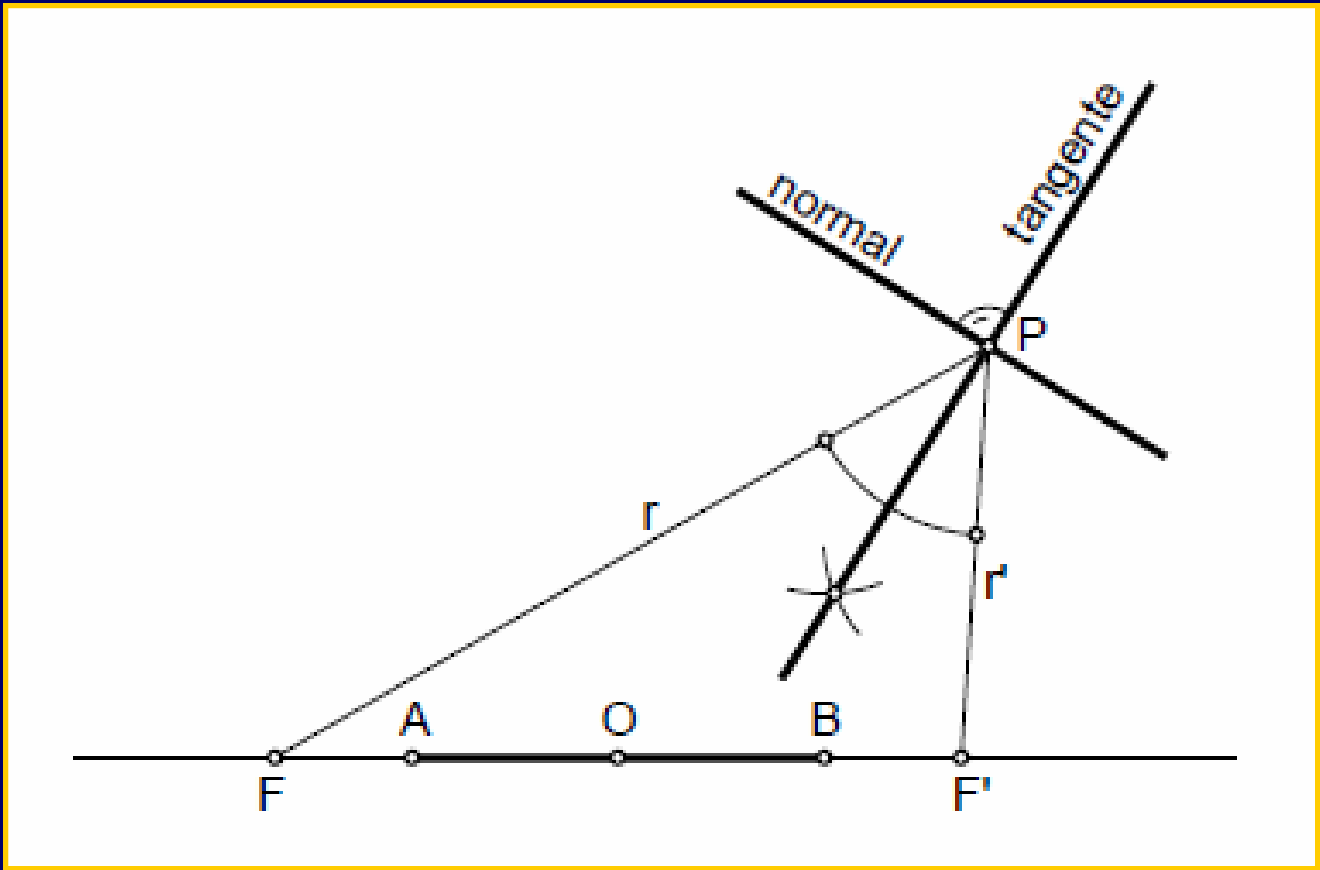
Se conoce el eje real y los focos de la hipérbola. Se empieza determinando un primer punto **P** mediante radios vectores.

- Se traza el rectángulo **ARPS** y se dividen los lados **RP** y **PS** en un mismo número de partes.
- Sobre la prolongación de **PR** y **PS** llevamos las mismas divisiones.
- Trazamos rectas que unan el vértice **A** con las divisiones de **PR** y su prolongación.
- Trazamos rectas que unan el vértice **B** con las divisiones de **PS** y su prolongación.
- Las intersecciones de las rectas respectivas determinan puntos pertenecientes a la hipérbola.



Tangente a la hipérbola por un punto de la misma

La tangente a la **hipérbola** por un punto **P** de la misma es la bisectriz del ángulo que forman los radios vectores (**PF** y **PF’**) en dicho punto. La normal será la perpendicular a la tangente en dicho punto.

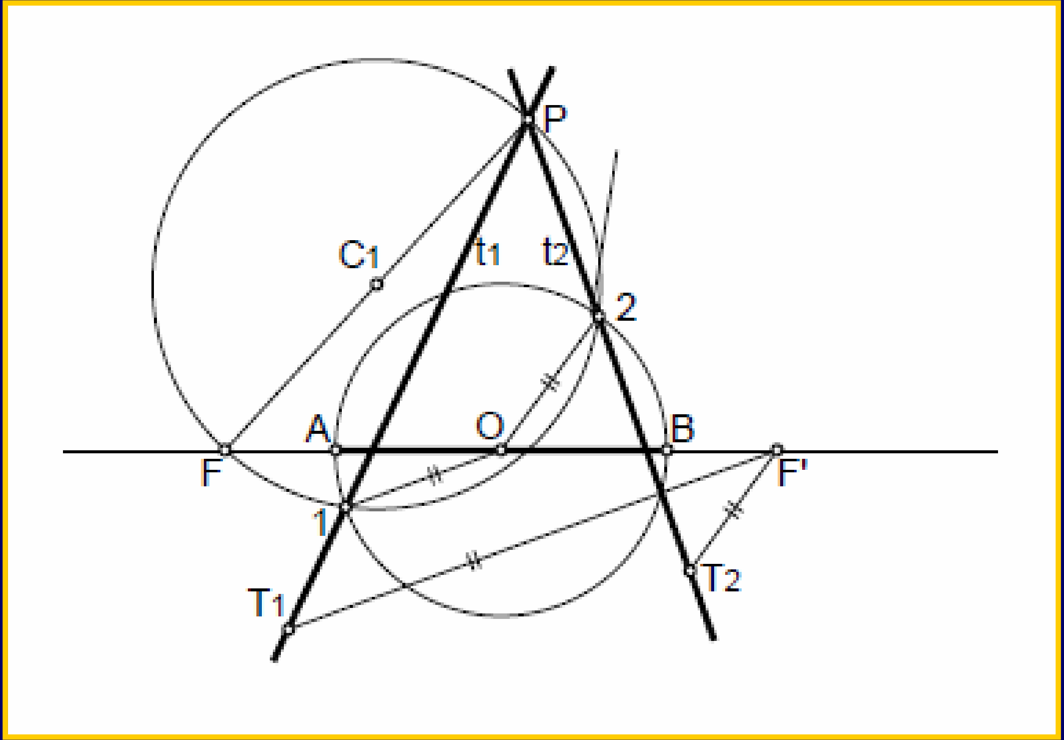


Tangente a la hipérbola por un punto P exterior

1er procedimiento: Se conocen los focos y el eje real de la hipérbola. Se traza la circunferencia principal (centro **O** y diámetro **AB**). Se traza un arco de centro **C_1** (punto medio del segmento **PF**) y radio **C_1F**, que corta a la circunferencia principal en **1** y **2**. Las rectas **P1** y **P2** son las tangentes de la hipérbola (**t_1** y **t_2**).

Para hallar los **puntos de tangencia**, se trazan las rectas **O1** y **O2**, y por el otro foco **F'**, se trazan paralelas a dischas rectas, que determinan en la intersección con las tangentes los puntos de tangencia **T_1** y **T_2**.

Nota: Observar la similitud con el método para la elipse.



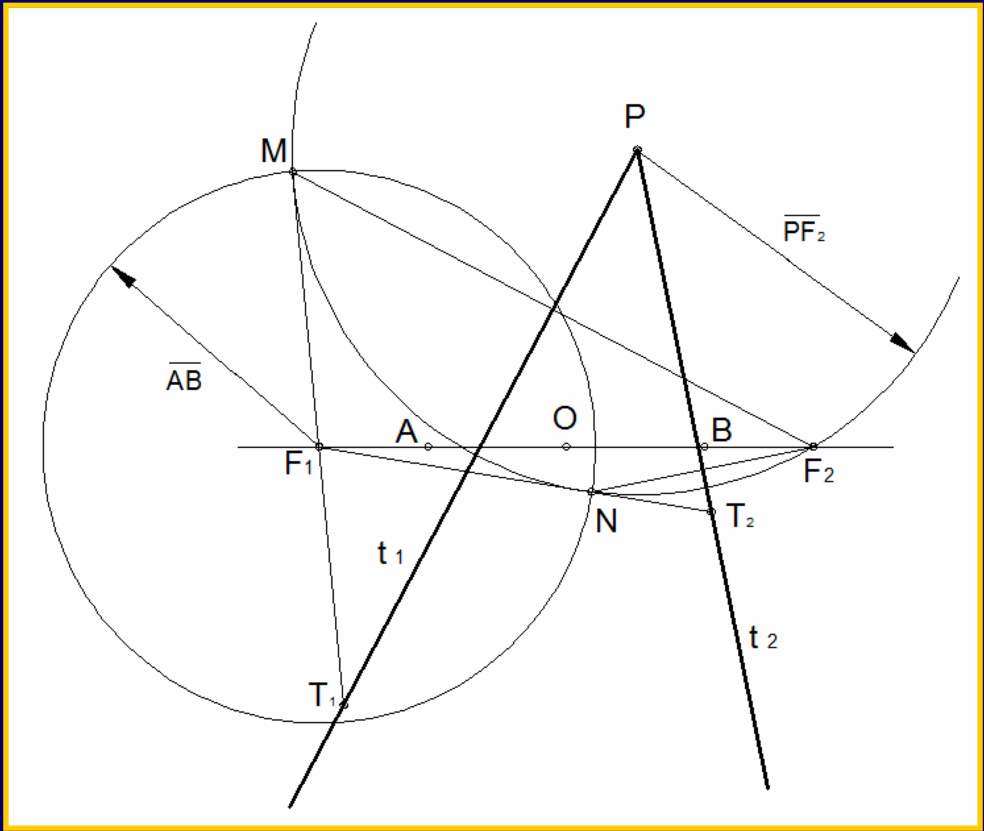
Tangente a la hipérbola por un punto P exterior

2º Procedimiento: Se conocen los focos y el eje real de la hipérbola.

Se traza la circunferencia focal de F_1 (centro F_1 y radio **AB**). Se traza arco de centro **P** y radio PF_2, que corta a la circunferencia focal en **M** y **N**. Las mediatrices de los segmentos MF_2 y NF_2 son las tangentes de la hipérbola (t_1 y t_2).

Para hallar los **puntos de tangencia**, se unen los puntos **M** y **N** con F_1 y se prolongan hasta cortar a las rectas tangentes en los puntos de tangencia **T1** y **T2**.

Nota: Observar la similitud con el método para la elipse.

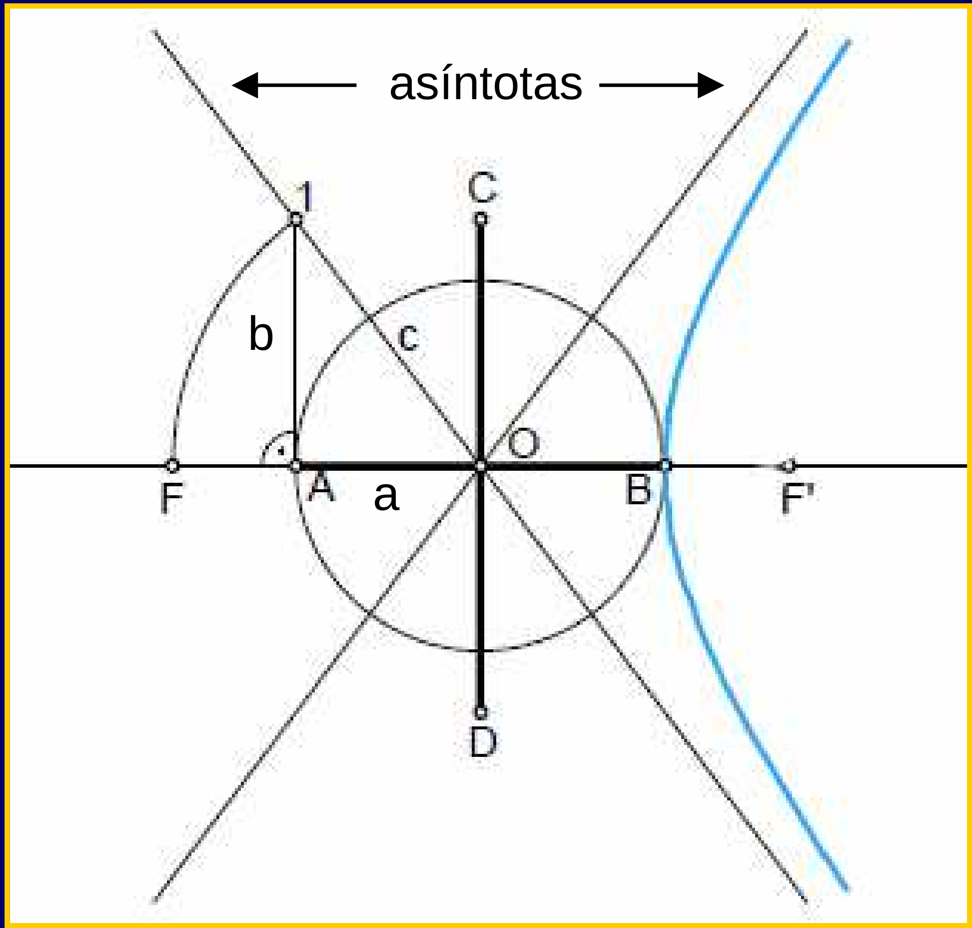


Asíntotas de una hipérbola

Las **asíntotas** de una hipérbola son las tangentes a ella en el infinito. Son simétricas con respecto a los ejes de la hipérbola.

Se traza el arco de centro en **O** y radio **OF**. Se levanta una perpendicular al eje real por el vértice **A**. La intersección de ambos, punto **1** de la figura, pertenece a la asíntota. Sólo resta unir dicho punto con el centro **O** de la hipérbola. La otra asíntota es simétrica.

En el triángulo **O1A**, se tiene que **O1** = **c**, **1A** = **b** y **OA** = **a**.



La parábola

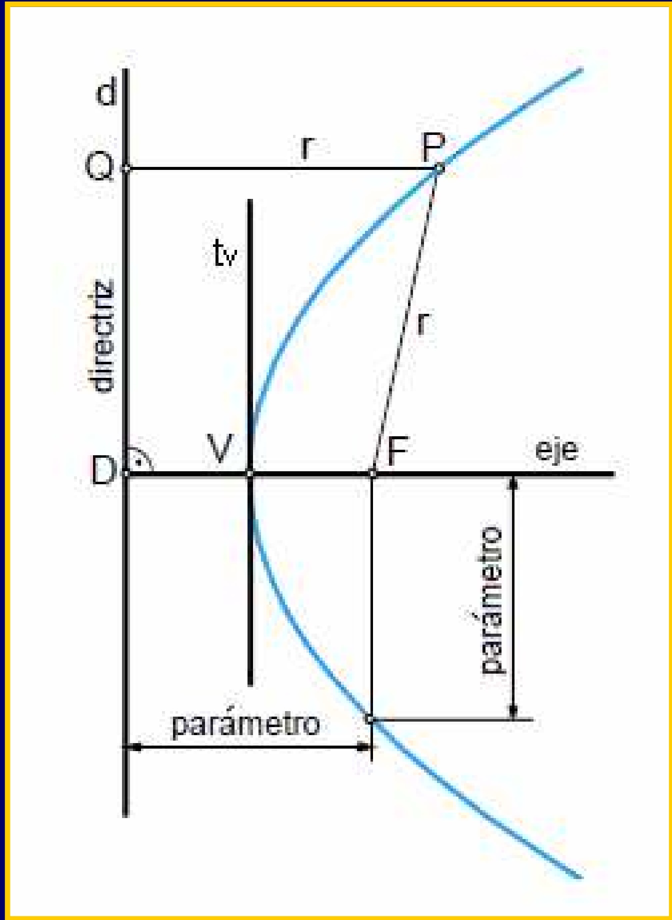
La **parábola** es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado **foco** (**F**) y de una recta fija llamada **directriz**. Tiene un **vértice** (**V**) y un **eje de simetría** que pasa por el vértice y por el foco y es perpendicular a la directriz.

Los segmentos que unen cada punto de la curva con el foco se llama **radios vectores**.

La tangente a la curva por el vértice es paralela a la directriz.

Se denomina **parámetro** de una parábola a la distancia del foco a la directriz, que también coincide con la longitud del segmento entre el foco y la curva paralelo a la directriz.

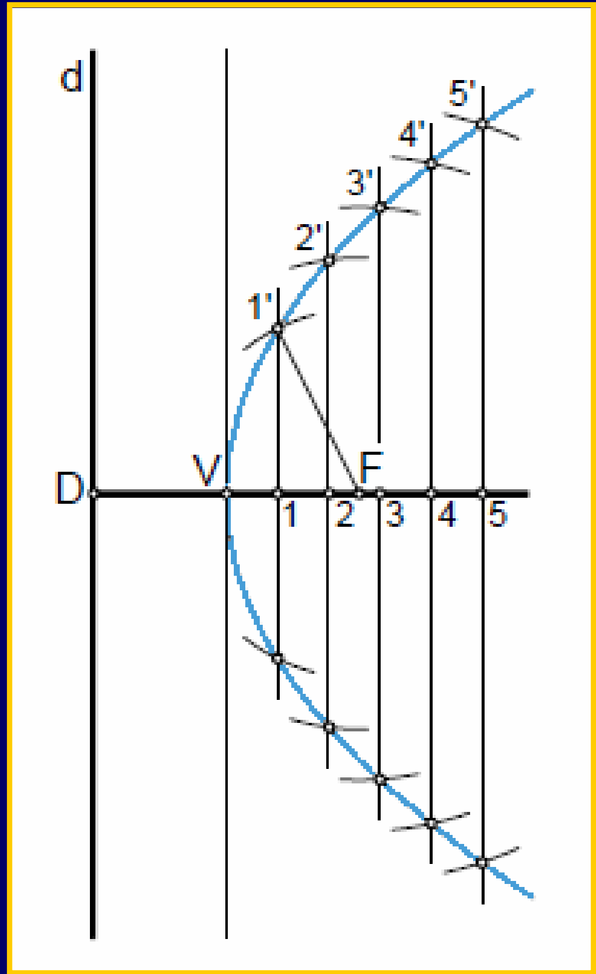
La distancia del vértice a la directriz es la misma que al foco (**VD** = **VF**).



Trazado de la parábola mediante radios vectores

Se conoce la directriz, el eje y el foco de la parábola. Se tiene en cuenta la definición de la parábola, buscándose puntos equidistantes del foco y de la directriz de la parábola.

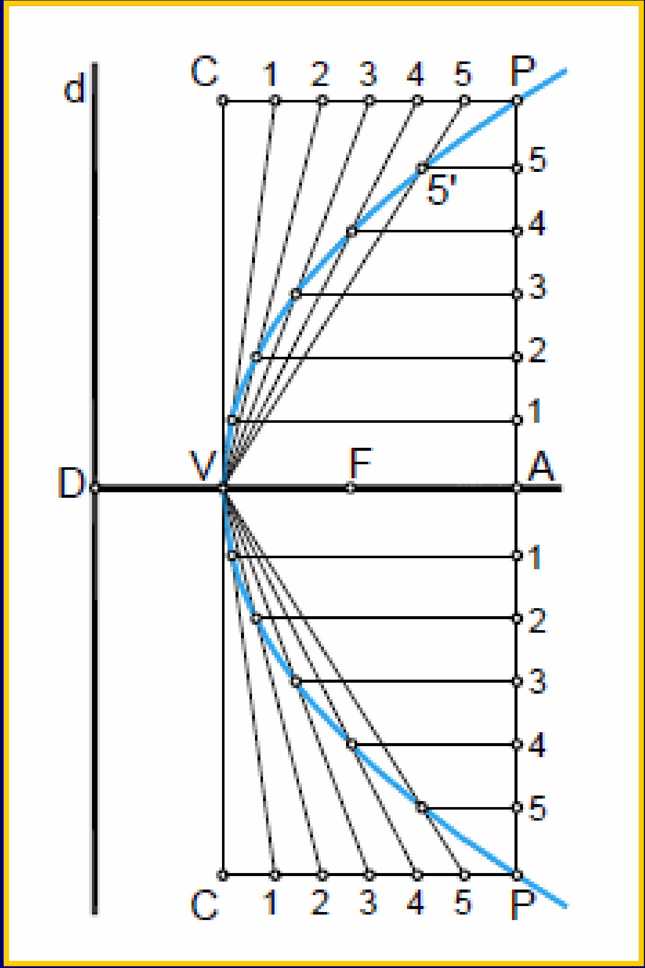
- El vértice es el punto medio del segmento **FD**, o sea, el segmento perpendicular por **F** a la recta directriz.
- Sobre el eje se toman una serie de puntos (**1**, **2**, **3**,…) por los que trazamos paralelas a la directriz.
- Se trazan arcos con centro en **F** y radios las distancias **D1**, **D2**, **D3**,…
- Se determinan sobre las correspondientes paralelas los puntos **1’**, **2’**, **3’**,… que pertenecen a la parábola.
- Los simétricos de estos puntos respecto al eje pertenecen a la otra rama de la parábola.



Trazado de la parábola mediante haces proyectivos

Se conoce la directriz, el eje y el foco de la parábola. Se empieza determinando un primer punto P mediante radios vectores.

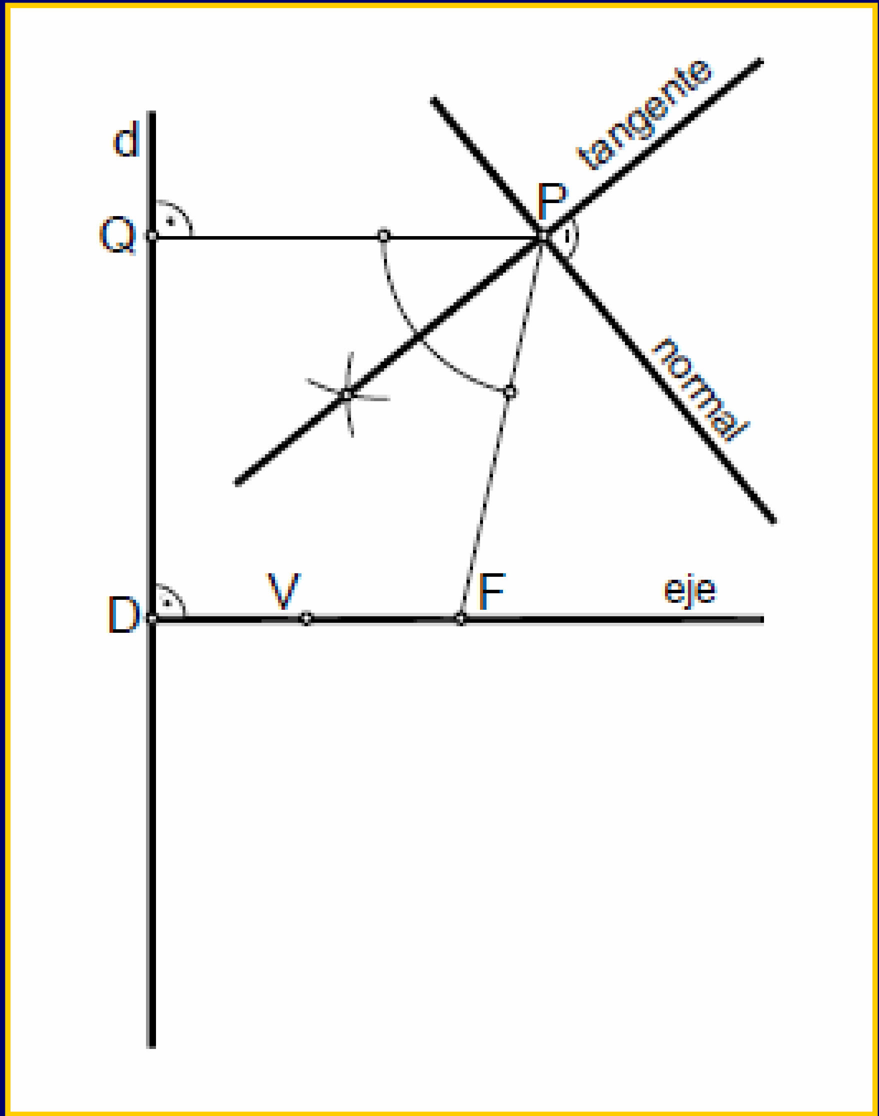
- El vértice **V** es el punto medio del segmento **FD**, o sea, el segmento perpendicular por **F** a la recta directriz.
- Se traza el rectángulo **APCV** y se dividen los lados **AP** y **PC** en un mismo número de partes.
- Por las divisiones de **AP** se trazan paralelas al eje de la parábola.
- Por las divisiones de **CP** se trazan rectas que pasan por el vértice de la parábola.
- Las intersecciones de las rectas respectivas (ver figura) determinan puntos pertenecientes a la parábola, como el **5’** de la figura.



Tangente a la parábola por un punto de la misma

La tangente a la **parábola** por un punto P de la misma es la bisectriz del ángulo que forman los radios vectores (**PF** y **PQ**) en dicho punto. La normal será la perpendicular a la tangente.

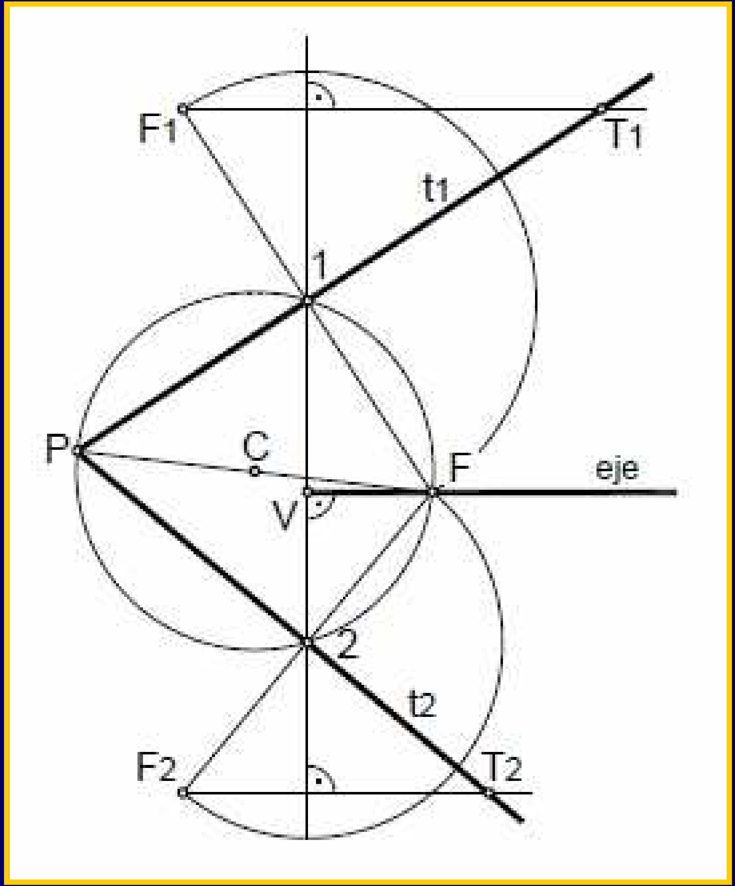
Nota: si se tiene en cuenta que una parábola es una elipse cuyo segundo foco se encuentra en el infinito, se observará la similitud entre esta construcción y la que se hizo para la tangente a la elipse.



Tangente a la parábola por un punto exterior. Método 1

Se conoce el foco y el vértice de la parábola. Se traza la perpendicular al eje por el vértice (esta recta es realmente la circunferencia principal). Se halla el punto **C**, punto medio del segmento **PF** que une el punto exterior, **P**, con el foco, **F**, de la parábola.

Se traza un arco de centro **C** y radio **CF**, que corta a la perpendicular anterior en **1** y **2**. Las rectas **P1** y **P2** (**t1** y **t2** de la figura) son tangentes a la parábola.



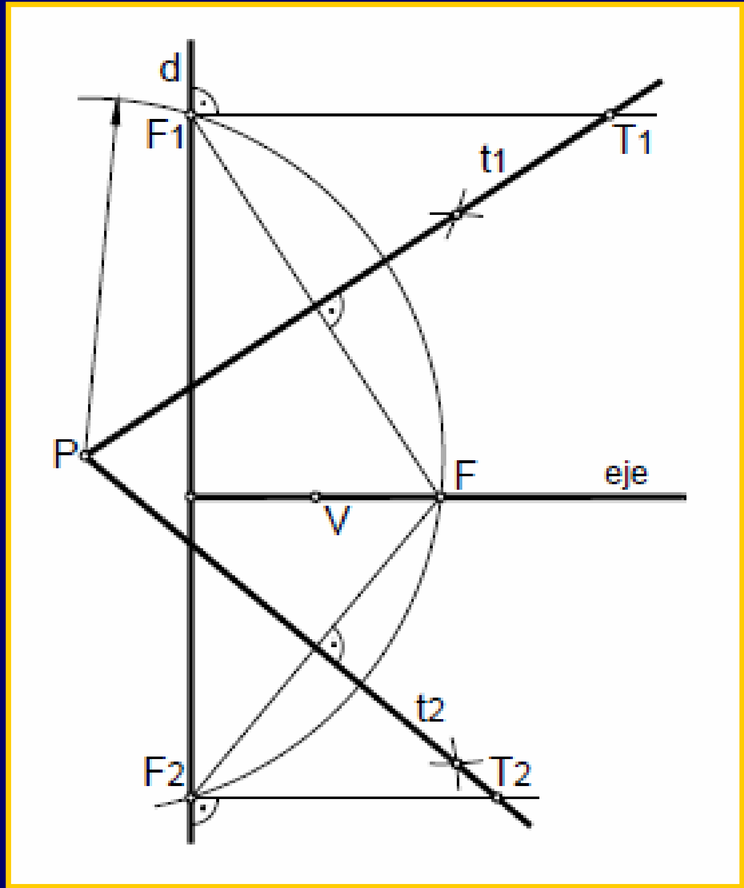
Para hallar los **puntos de tangencia**, se hallan los puntos **F1** y **F2** tales que **1F1**=**1F** y **2F2**= **2F** (o sea, **F1** y **F2** son los simétricos del foco **F** con respecto a las tangentes). Por estos puntos se trazan paralelas al eje de la parábola, las cuales determinan, en la intersección con las tangentes, los puntos de tangencia **T1** y **T2**.

Tangente a la parábola por un punto exterior. Método 2

Se conoce o se hallan el foco y la directriz de la parábola. Se traza un arco de centro **P** y radio **PF**, que corta a la directriz en **F_1** y **F_2**. Se trazan los segmentos **F_1F** y **F_2F**. Las mediatrices de estos segmentos son las tangentes a la parábola (**t_1** y **t_2**).

Para hallar los **puntos de tangencia**, se trazan perpendiculares a la directriz de la parábola por **F_1** y **F_2**, las cuales determinan, en la intersección con las tangentes, los puntos de tangencia **T_1** y **T_2**.

Nota: si se tiene en cuenta que la directriz de una parábola es equivalente a la circunferencia focal del foco de una elipse que estuviera situado en el infinito, se observará la similitud de esta construcción con respecto a la que hicimos para trazar la tangente a la elipse por un punto exterior (2º procedimiento).



Intersección de una recta con una parábola

Para resolver este problema es necesario conocer los conceptos de **potencia** y **eje radical**, que se tratan en otro tema.

Supongamos que nos dan la directriz (**d**) y el foco (**F**) de la parábola y la recta (**r**). Cada punto en los que la recta corta a la parábola debe cumplir que su distancia al foco y a la directriz debe ser la misma, por lo que unas circunferencias con centro en ellos y radio hasta el foco deben ser tangentes a la recta directriz.

Todas las circunferencias con centro en la recta y que pasan por el foco tendrán como eje radical una perpendicular a la recta por el foco. Trazamos dicha perpendicular y obtenemos su punto de corte (**P**) con la directriz. Al pertenecer **P** al eje radical debe tener la misma potencia para cualquiera de las circunferencias anteriores; trazamos una cualquiera (la de centro **c**) y le trazamos la tangente desde **P**. Con centro en **P** y radio hasta el punto de tangencia (**T**) trazamos arco hasta cortar a la directriz en dos puntos (**A** y **B**). Trazamos perpendiculares a la directriz por **A** y **B** hasta cortar a la recta en **I1** e **I2**. Estos son los puntos de intersección de recta y parábola.