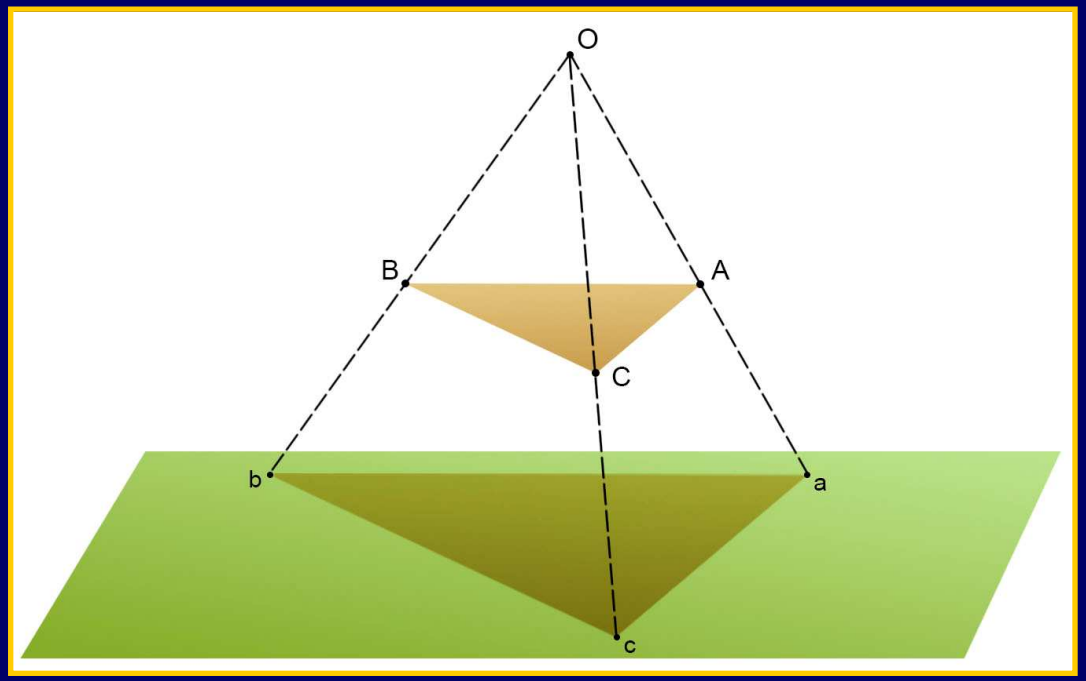
Homología y Afinidad

IES BELLAVISTA

Proyectividad

La **proyectividad** es una transformación geométrica que transforma unos elementos geométricos en otros (puntos, rectas, haces de rectas, formas planas, etc.) mediante dos operaciones básicas: la **proyección** y la **sección**.



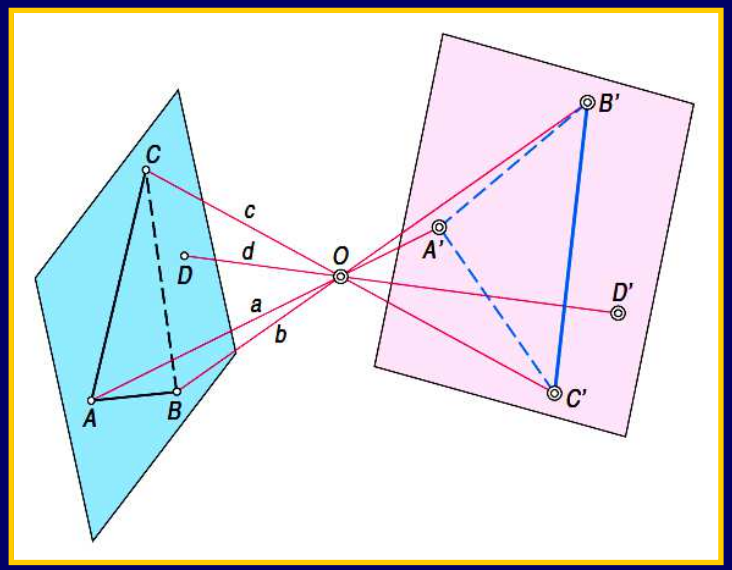
Por ejemplo, la proyección de un punto desde otro da lugar a una recta; la proyección de una recta desde un punto da lugar a un plano; la sección de un plano por otro da lugar a una recta; la sección de una recta por un plano u otra recta da lugar a un punto.

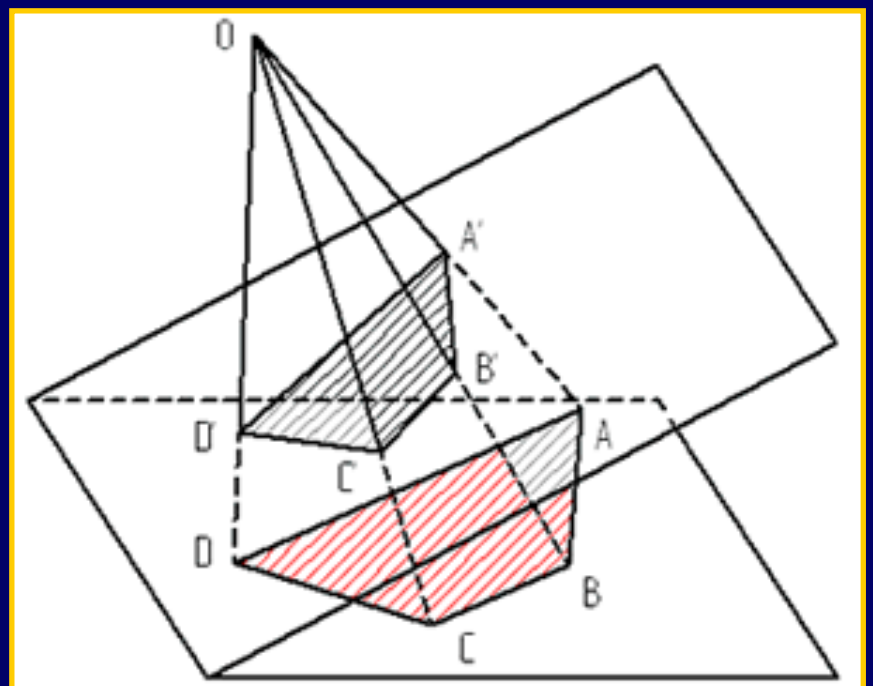
Para poder representar objetos del espacio sobre una superficie plana empleamos una proyección de sus puntos y aristas, desde un punto llamado **centro de proyección**, dando lugar a rectas y planos respectivamente; a continuación se seccionan estos elementos mediante un plano (*plano de proyección*), dando lugar nuevamente a puntos y rectas, pero contenidos ahora en dicho plano.

Homografía

Una **homografía** es una transformación proyectiva que determina una correspondencia entre dos figuras geométricas planas, de forma que a cada uno de los puntos y rectas de una de ellas le corresponden, respectivamente, un punto y una recta de la otra. Es decir, se conserva la naturaleza de los elementos transformados.

Dos secciones planas de una misma radiación de centro O, son homográficas.



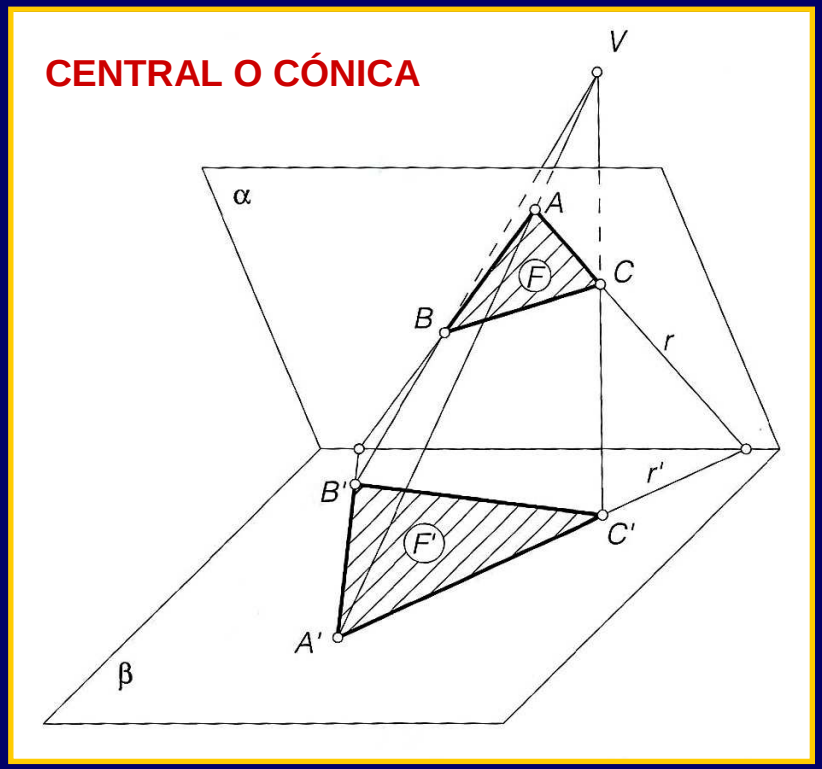


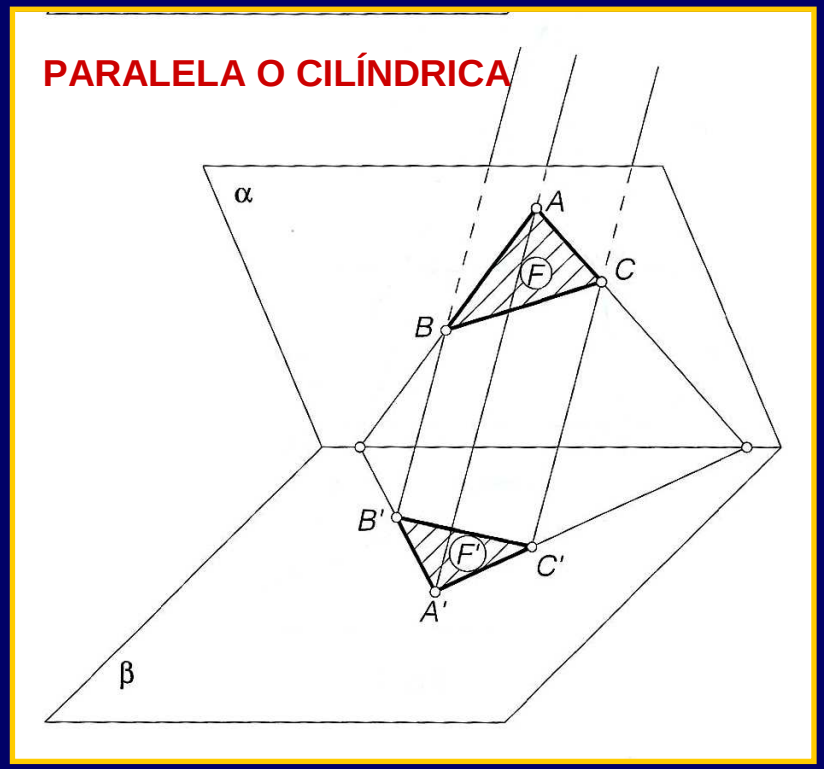
Homografía espacial

Tipos de proyección

Si el centro de proyección es un punto propio, los rayos proyectantes parten de él y la proyección se denomina **proyección central** o **cónica**.

Si el centro de proyección es un punto del infinito (punto impropio) todos los rayos proyectantes son paralelos, en una dirección determinada, dando lugar a una **proyección paralela** o **cilíndrica**.

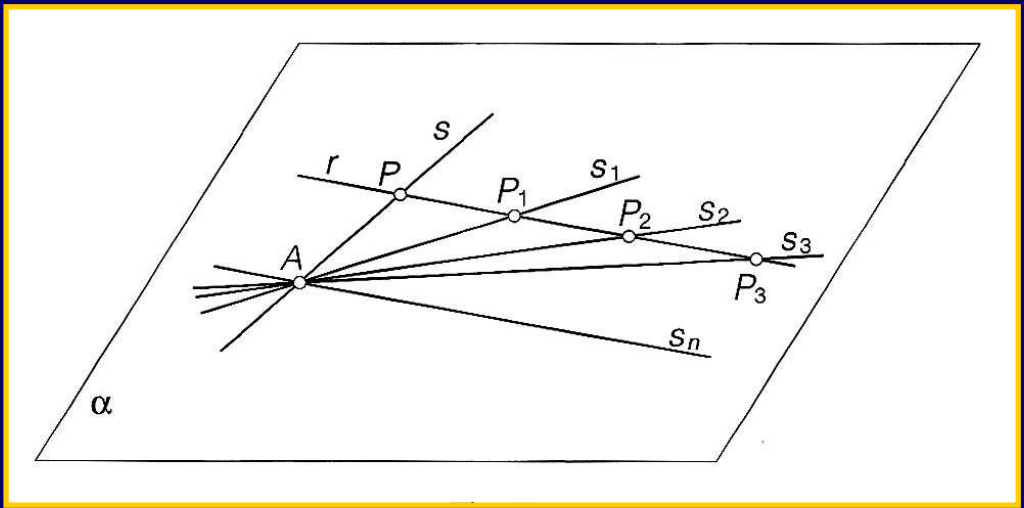




Elementos impropios

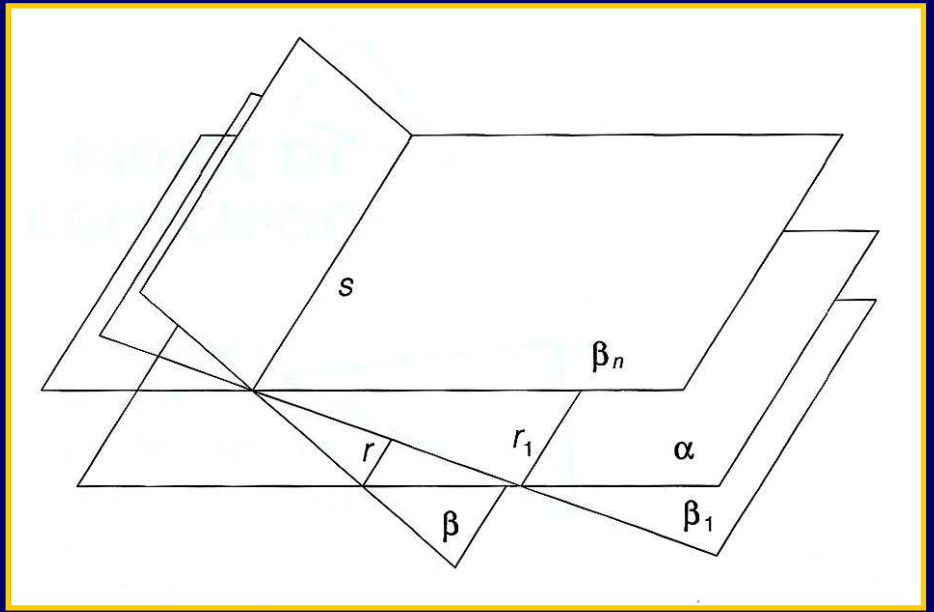
- **Punto impropio**: es un punto ideal, situado en el infinito, donde se cortan todas las rectas paralelas entre sí.

Sean las rectas **r** y **s** que se cortan en **P**. Al ir girando **s** en torno al punto **A**, el punto de corte **P** se va alejando. Cuando **s** se hace paralela a **r**, el punto de corte estará en el infinito.



- **Recta impropia**: es una recta ideal, situada en el infinito, donde se cortan todos los planos paralelos entre sí.

Sean los planos **α** y **β** que se cortan en **r**. Al ir girando **β** en torno a la recta **s** (paralela a **r**) la recta de intersección **r** se va alejando. Cuando **β** se hace paralelo a **α**, la recta de intersección estará en el infinito.



Propiedades de las homografías

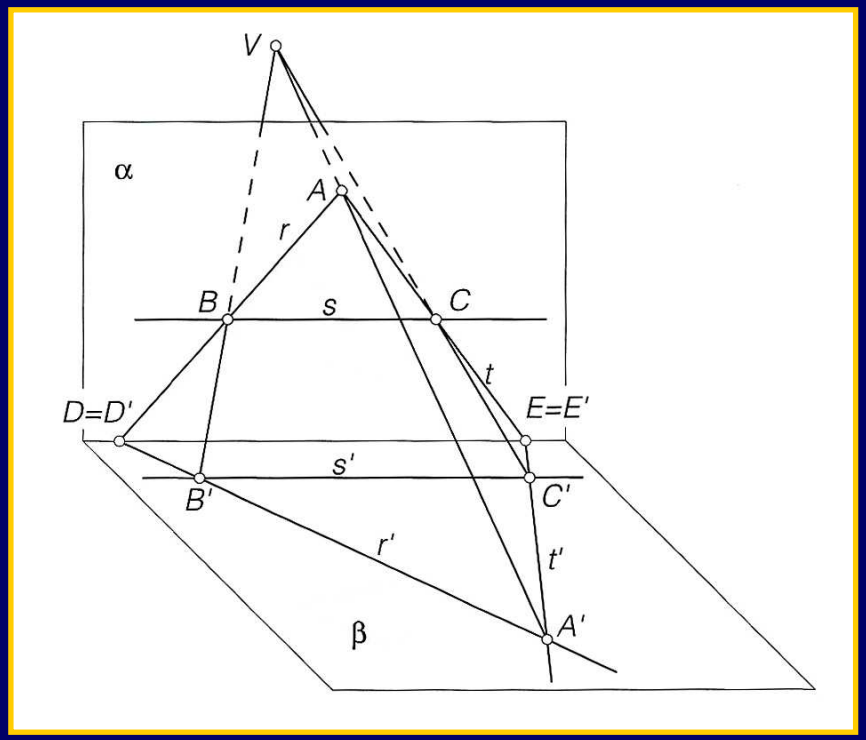
Dados dos planos secantes α y **β** y una proyección central de centro **V** de los elementos de α sobre **β**. Se cumple:

- A cada punto, A, B, etc. de α le corresponde un punto imagen A', B', etc., en **β** estando éstos alineados. Si la recta que une el punto de α con **V** es paralela al plano **β** el punto imagen es impropio.

- A cada recta de α le corresponde una recta imagen en **β**, teniendo ambas un punto común (**D=D'**) en la intersección de ambos planos. Las rectas paralelas a la intersección de α y **β** tienen imágenes paralelas a ellas.

- A dos rectas concurrentes de α le corresponden imágenes concurrentes en **β**, siendo los puntos de concurrencia imagen el uno del otro.

- Las medidas lineales y angulares varían, en general, en la proyección.

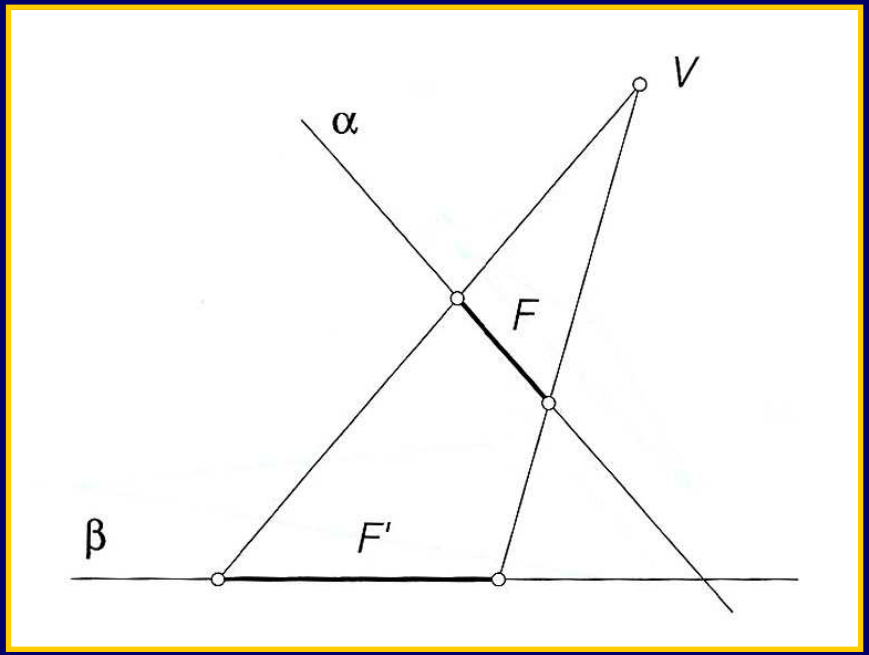


Tipos de homografías

Según el tipo de proyección (central o paralela) y la posición de los planos que contienen a las figuras (secantes o paralelos) se pueden presentar los siguientes casos:

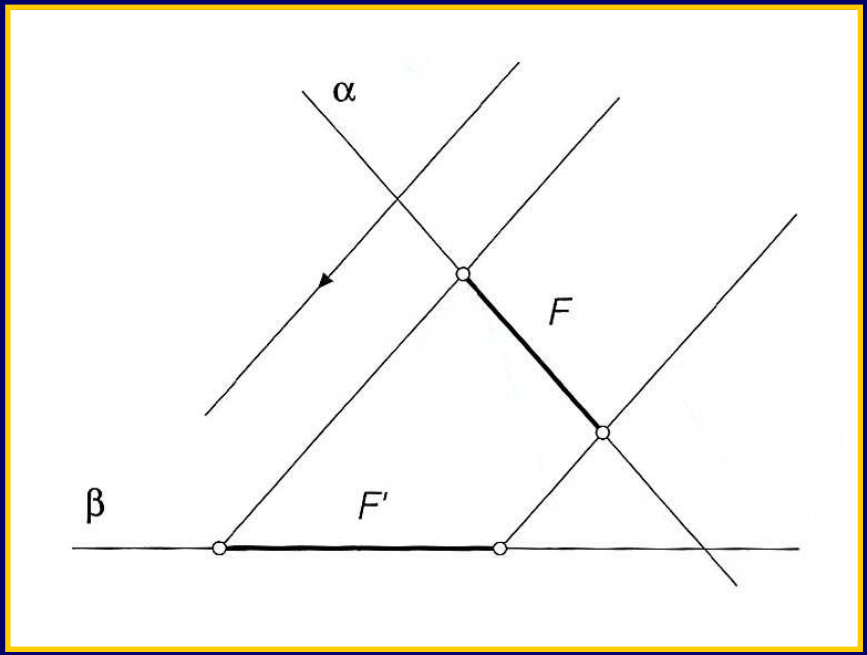
Homología

Proyección central – Planos secantes.



Afinidad

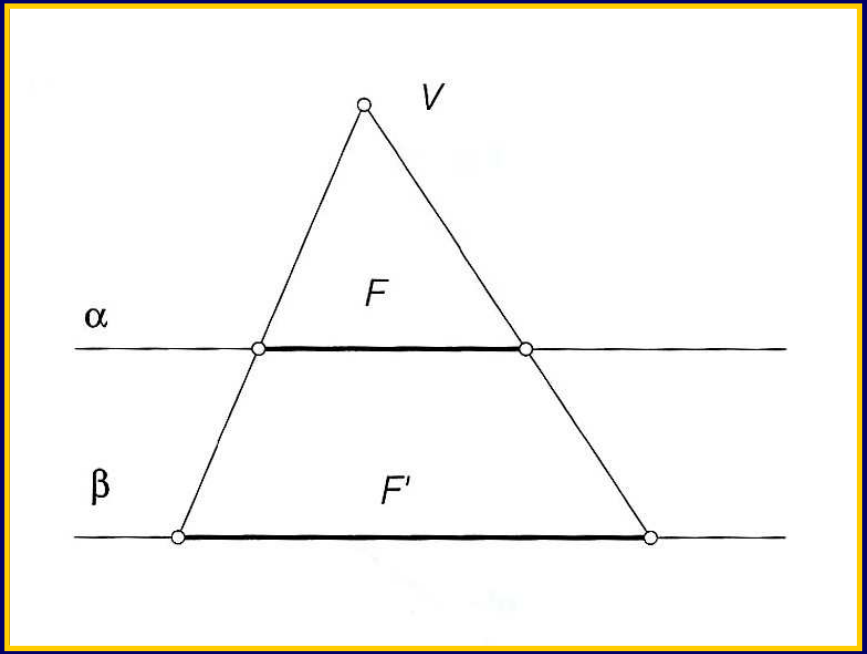
Proyección paralela – Planos secantes.



Tipos de homografías

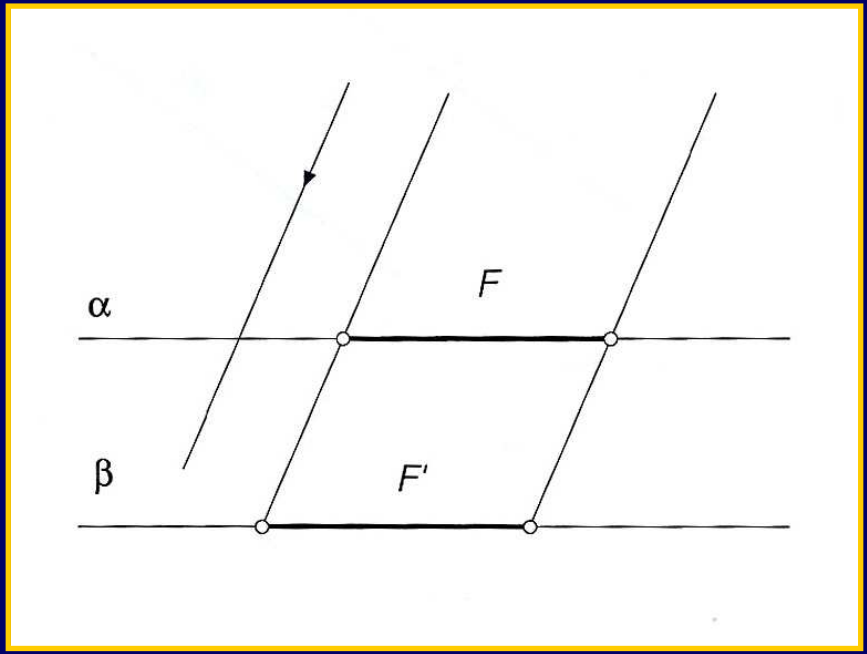
Homotecia

Proyección central – Planos paralelos.



Igualdad o traslación

Proyección paralela – Planos paralelos.

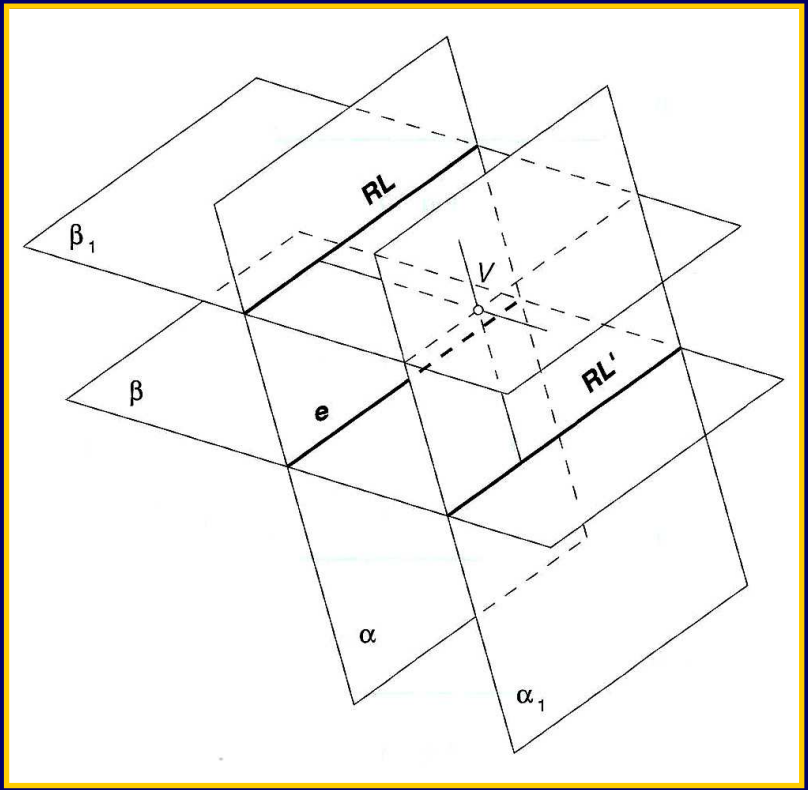


Homología

Es una transformación proyectiva que relaciona secciones planas de una misma radiación central. Las dos figuras sección se dice que son homológicas.

Los elementos de una homología son:

- **Centro de proyección** (**V**).
- **Planos** que seccionan la radiación (**α** y **β**).
- **Eje de homología** (**e**): es la recta intersección de los planos. En él se corta cada recta con su homóloga.
- **Rectas límites** (**RL** y **RL'**): son los lugares geométricos de los puntos de los planos **α** y **β** respectivamente cuyas imágenes están en el infinito.

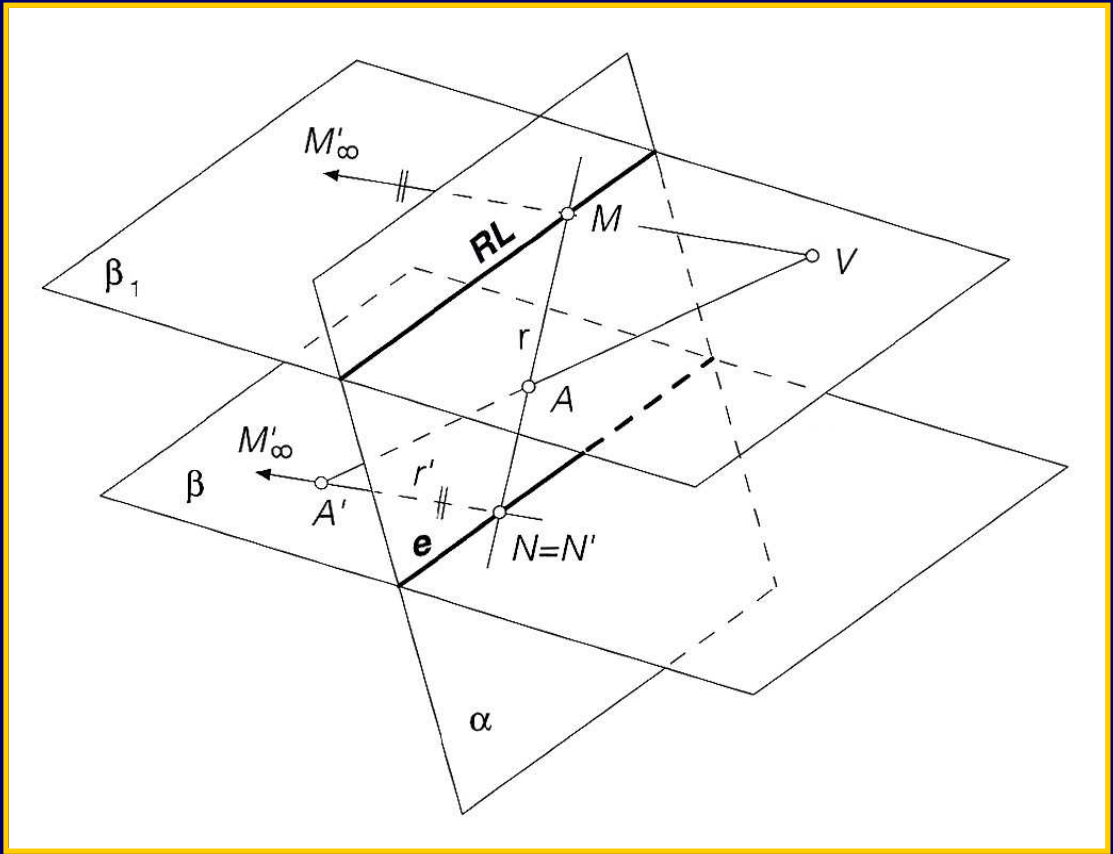


Recta límite (RL) del plano α

La recta límite en el plano **α** es la intersección del plano **β_1** (plano que contiene a **V** y es paralelo al plano **β**) con el plano **α**. Es paralela al eje de homología **e**.

Cualquier punto contenido en ella tiene por imagen un punto impropio ya que la recta que une a dicho punto con **V** nunca interseca al plano **β**.

Una recta **r** del plano **α** que corta a la recta límite **RL** en el punto **M** y al eje en el punto **N=N'**, tiene por imagen una recta **r'** que también pasa por **N** y es paralela a la recta **VM**.

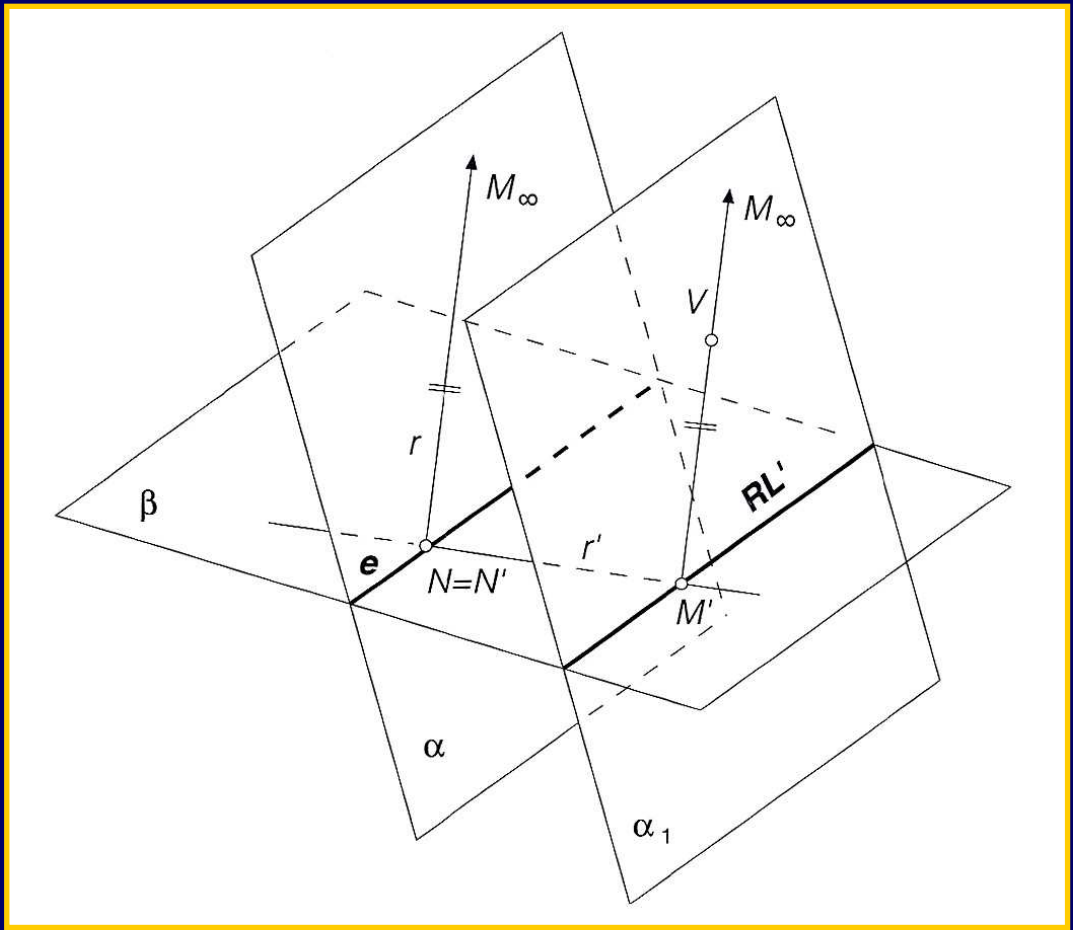


Recta límite (RL') del plano β

La recta límite **RL'** en el plano **β** es la intersección del plano α_1 (plano que contiene a **V** y es paralelo al plano α) con el plano **β**. Es paralela al eje de homología **e**.

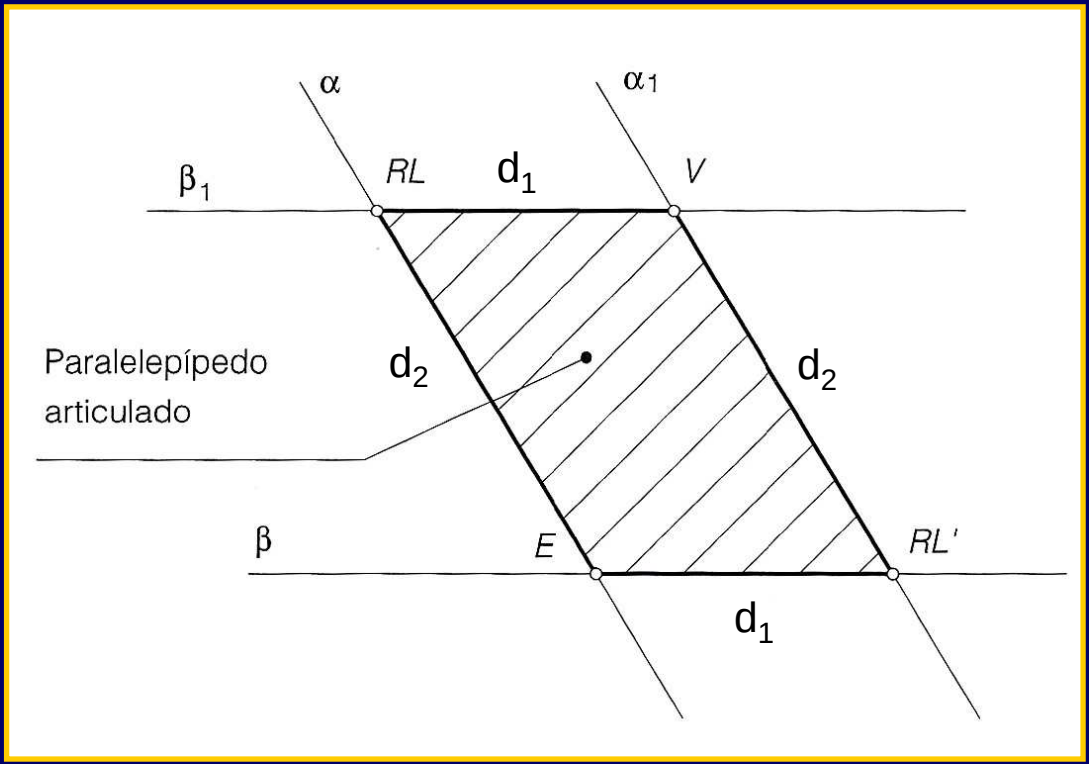
Cualquier punto contenido en **RL'** tiene por imagen un punto impropio ya que la recta que une a dicho punto con **V** nunca interseca al plano α.

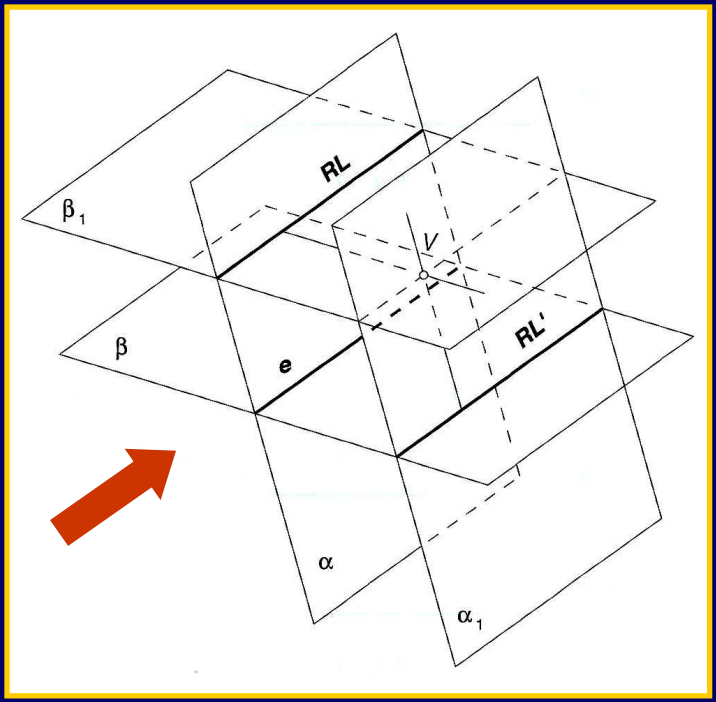
Una recta **r'** del plano **β** que corta a la recta límite **RL'** en el punto **M'** y al eje en el punto **N=N'**, tiene por imagen una recta **r** que también pasa por **N** y es paralela a la recta **VM'**.



Sección recta de una homología

Si miramos de perfil los planos **α, β, $α_1$** y **$β_1$** anteriores, obtenemos la sección recta de la homología, que es un paralelogramo de vértices RL, V, RL' y E, que, a su vez, es la proyección de un paralelepípedo denominado **paralelepípedo articulado**.

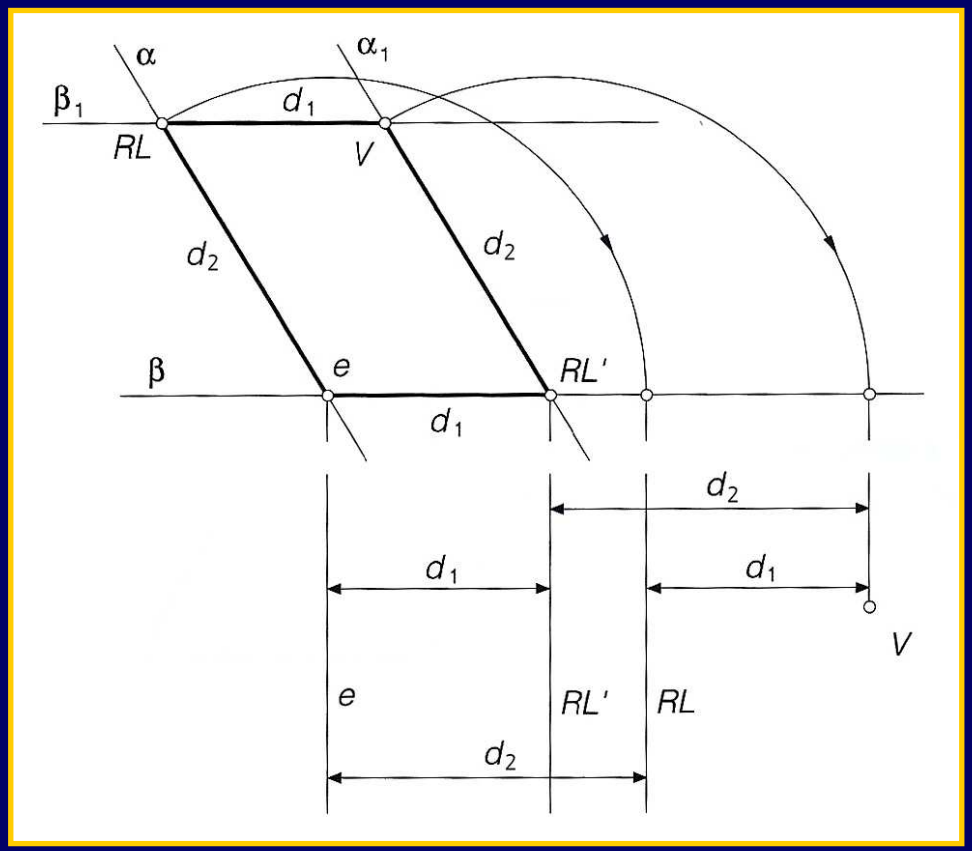


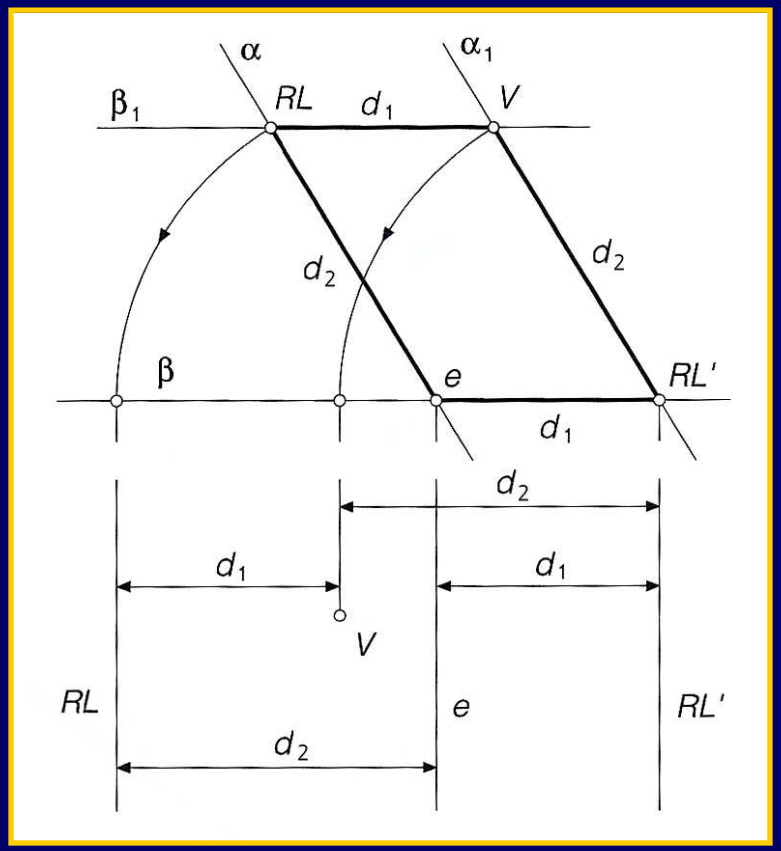


En él podemos observar que cada recta límite dista del eje la misma distancia que la otra recta límite dista del centro de homología.

Representación de la homología en un plano

Para poder **representar la homología en un plano**, transformamos la homología espacial abatiendo el paralelepípedo articulado. Dependiendo de cómo se haga el abatimiento, las rectas límite quedarán ambas entre el centro de homología y el eje o ambas por fuera.

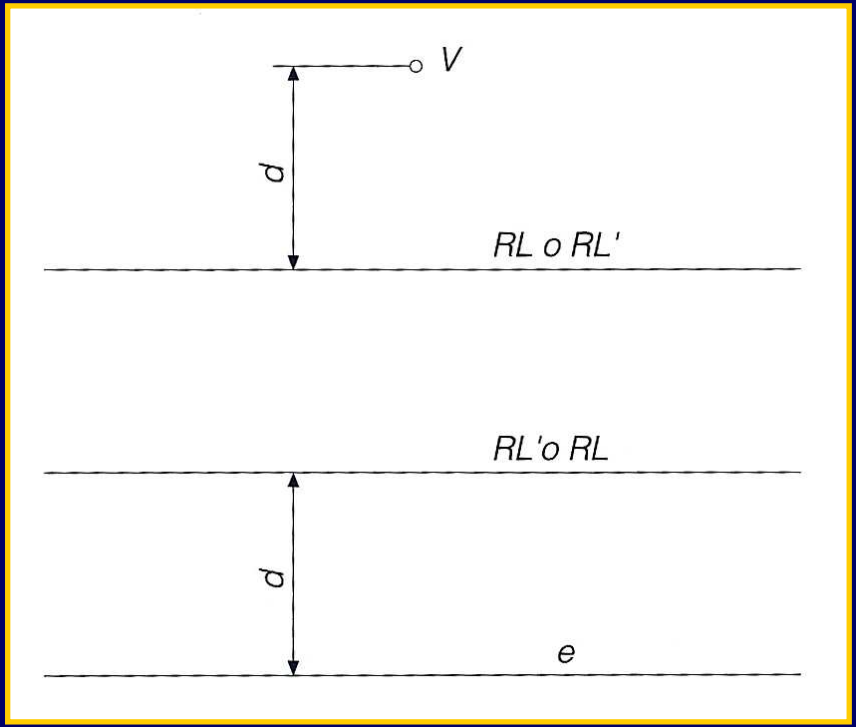


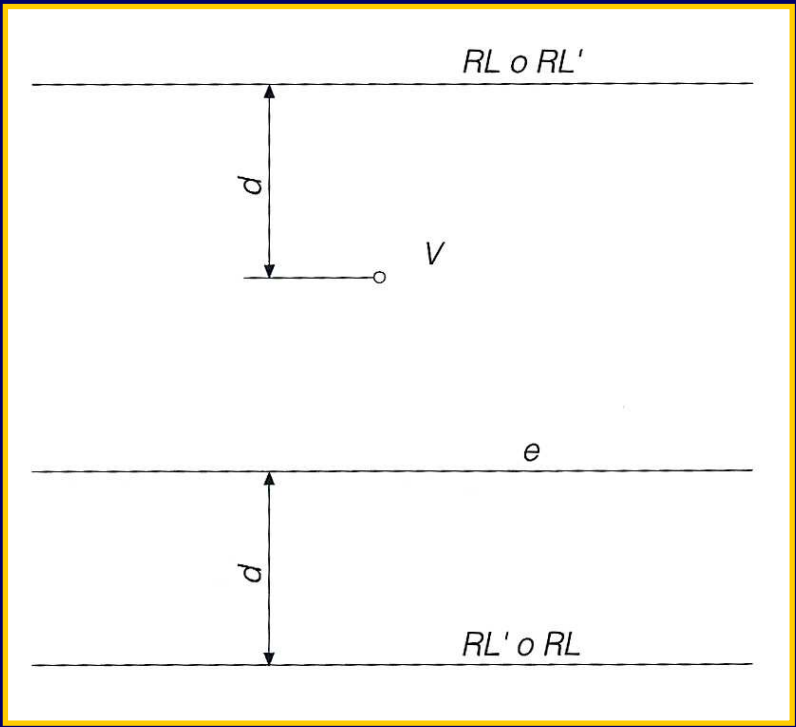


Posiciones relativas del eje, centro y rectas límites

Las posiciones relativas que pueden ocupar los elementos de una homología cuando la representamos en un plano son:

- Las dos rectas límite entre el centro y el eje de homología.
- El centro y el eje de homología entre las dos rectas límite.

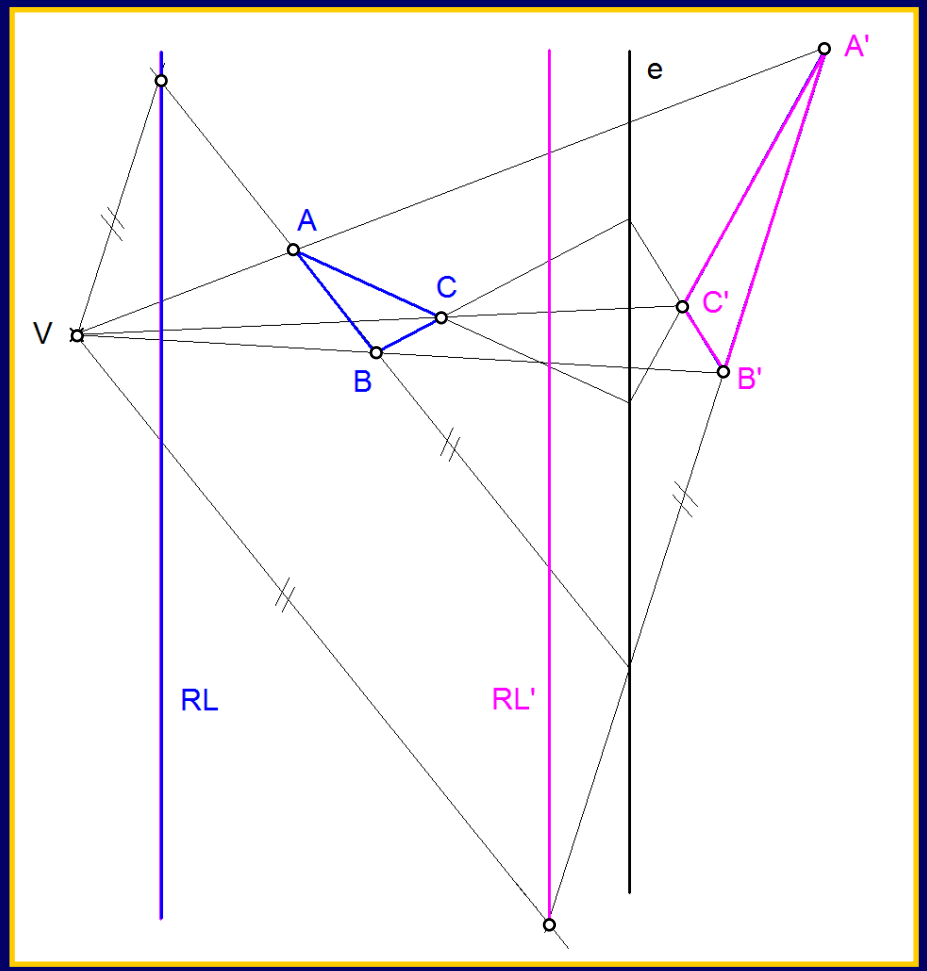




Homología plana

Una homología plana es aquella en la que los elementos homólogos son coplanarios. Dos figuras homólogas cumplirán:

- Los puntos homólogos estarán alineados con el centro de homología (V).
- Dos rectas homólogas se cortan en puntos de una recta fija llamada eje de homología (e), que será el lugar geométrico de los puntos dobles.
- Existirán dos rectas límites. La de la primera figura, RL, será el lugar geométrico de los puntos cuyos homólogos son puntos del infinito de la otra figura. La de la segunda figura, RL', será el lugar geométrico de los puntos homólogos de los puntos del infinito de la primera figura.



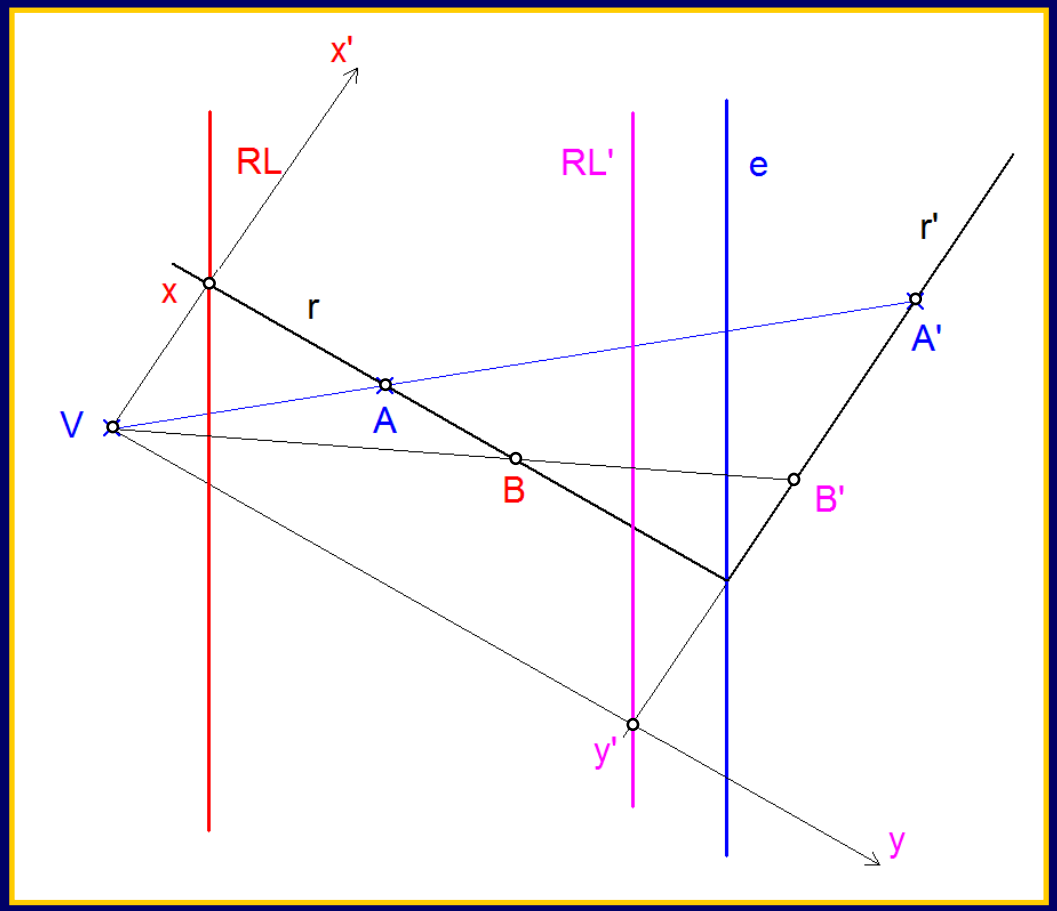
Definición de una homología

Caso 1: dados el eje (e), el centro (V) y una pareja de puntos homólogos (AA').

Se traza una recta (**r**) que contenga a **A** y se halla su homóloga (**r'**).

Se traza una paralela a **r'** por **V** y donde corte a **r** obtengo el punto **x** que pertenece a **RL** y cuyo homólogo **x'** estará en el infinito.

Se traza una paralela a **r** por **V** y donde corte a **r'** obtengo el punto **y'** que pertenece a **RL'** y es homólogo de un punto **y** de la recta **r** situado en el infinito.

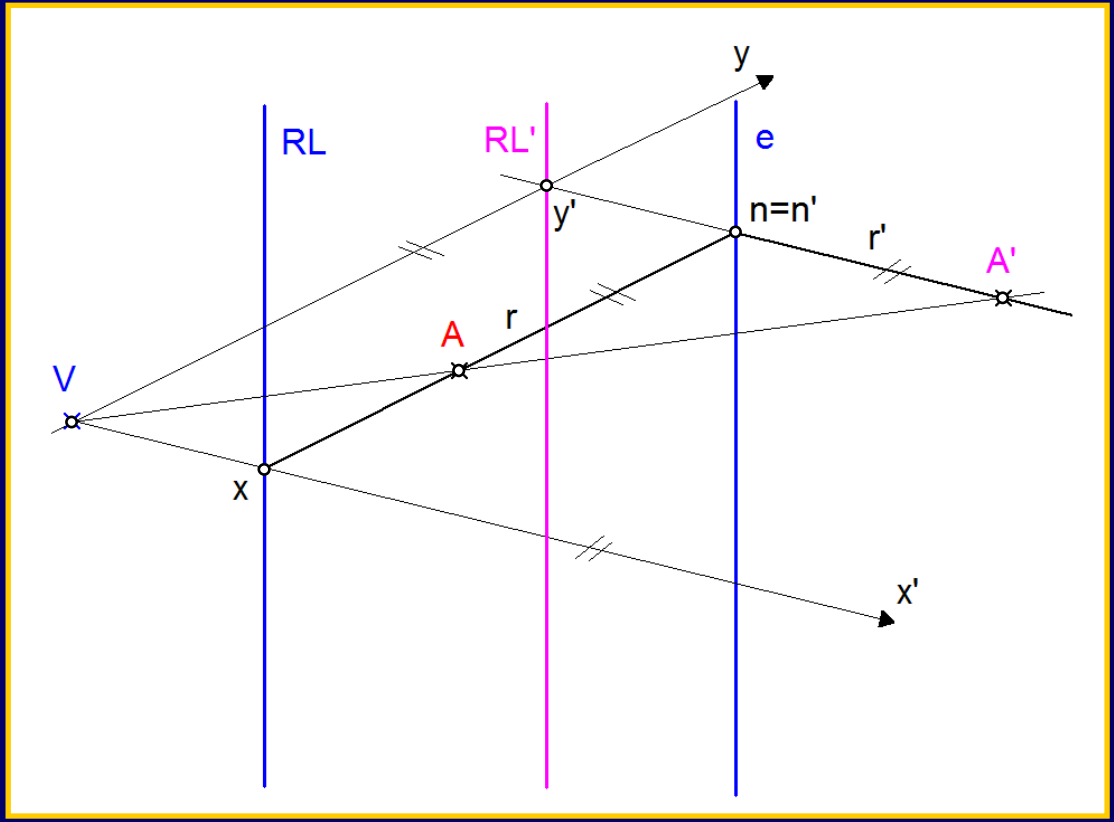


Definición de una homología

Caso 2: dados el eje (e), el centro (V) y la recta límite (RL) de la primera figura.

Para hallar el homólogo de un punto **A** cualquiera, se traza una recta (**r**) que lo contenga. El punto **x** donde **r** corta a **RL** se une con **V**. Por el punto **n=n'** donde **r** corta al eje **e** se traza una paralela a la anterior, que será la recta **r'** homóloga de **r**. Uniendo **V** con **A** y prolongando hasta cortar a **r'** obtenemos **A'**.

Para hallar **RL'** se procede con en el caso anterior.

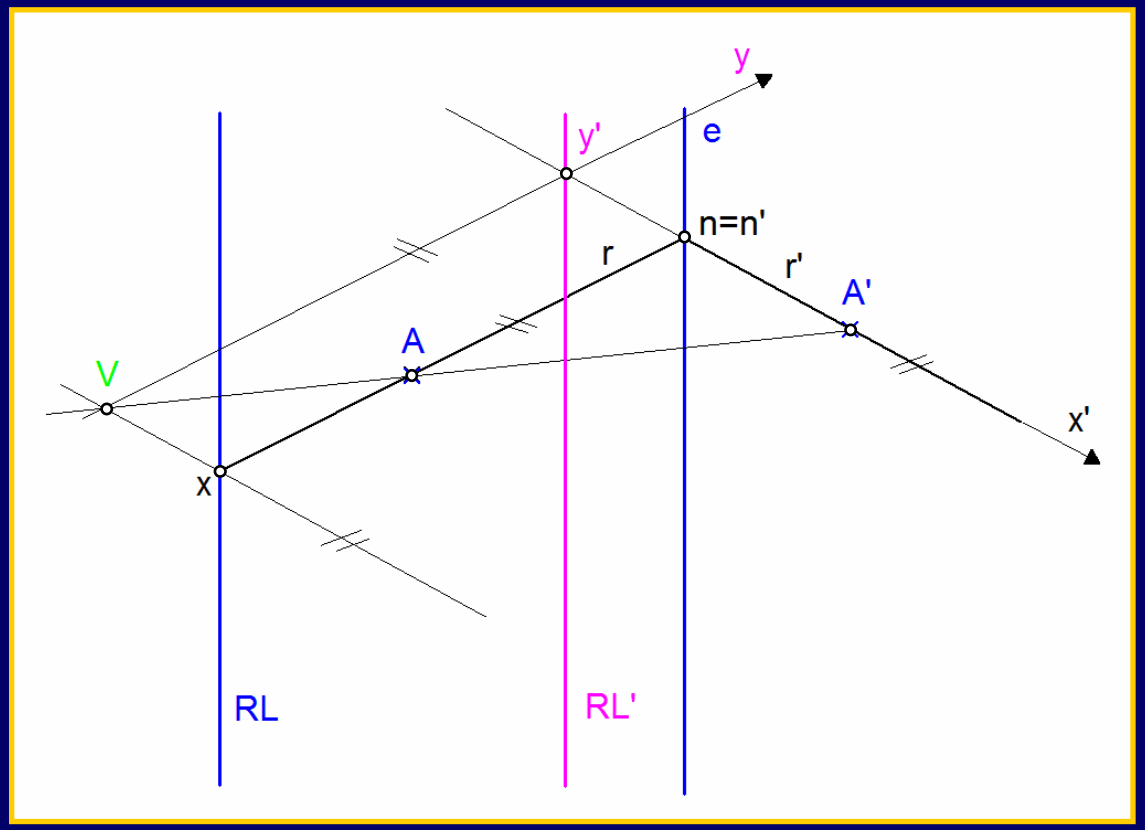


Definición de una homología

Caso 3: dados el eje (e), la recta límite (RL) de la primera figura y una pareja de puntos homólogos (AA').

Para hallar el centro de homología (**V**), se trazan una recta (**r**) cualquiera por **A** y su homóloga (**r'**) por **A'**. Por el punto **x** donde **r** corta a **RL** se traza una paralela a **r'**. Se une **A** con **A'** y donde corta a la recta anterior se obtiene el punto **V**.

Para hallar **RL'** se procede con en el caso anterior.



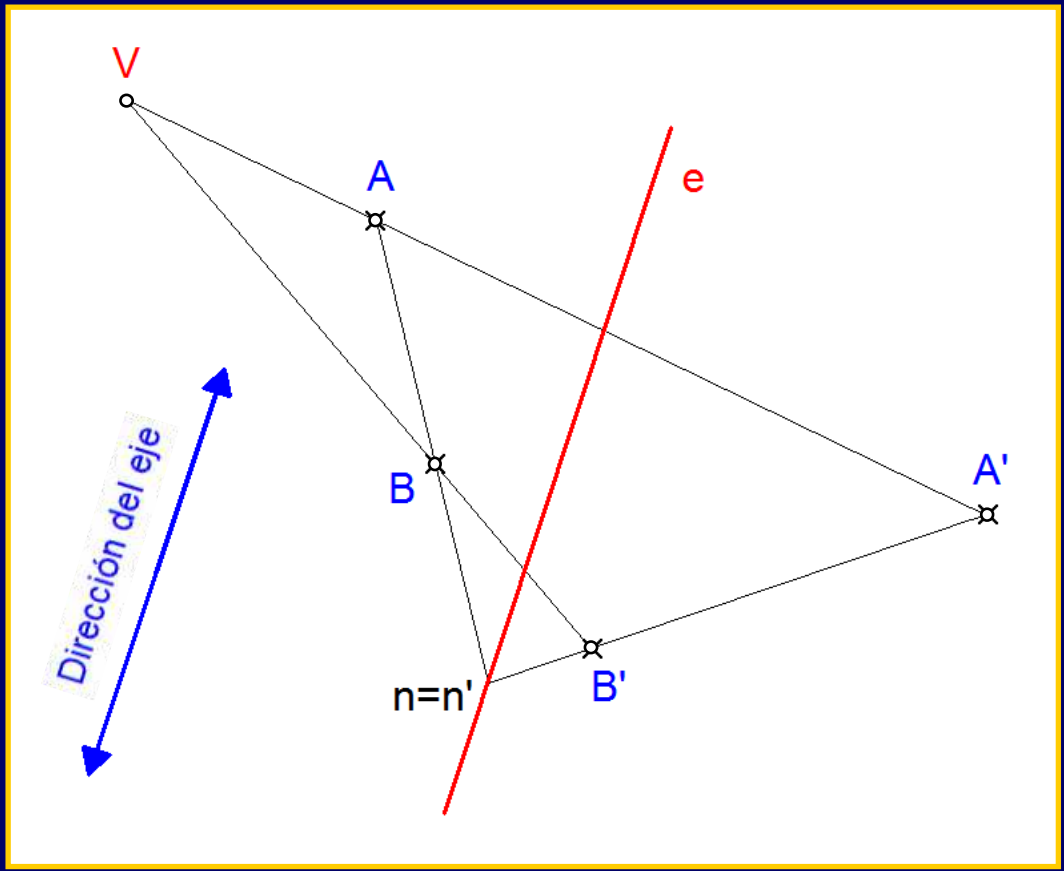
Definición de una homología

Caso 4: dados dos parejas de puntos homólogos (AA' y BB') y la dirección del eje.

Para hallar el centro de homología (**V**), se unen A con **A'** y **B** con **B'**; la intersección de estas rectas es el centro de homología (**V**).

Para hallar el eje, se unen **A** con **B** y **A'** con **B'**, obteniendo el punto **n=n'** que pertenece al eje. Se traza una recta por **n=n'** paralela a la dirección del eje dada.

Para hallar **RL** y **RL'** se procede con en casos anteriores.

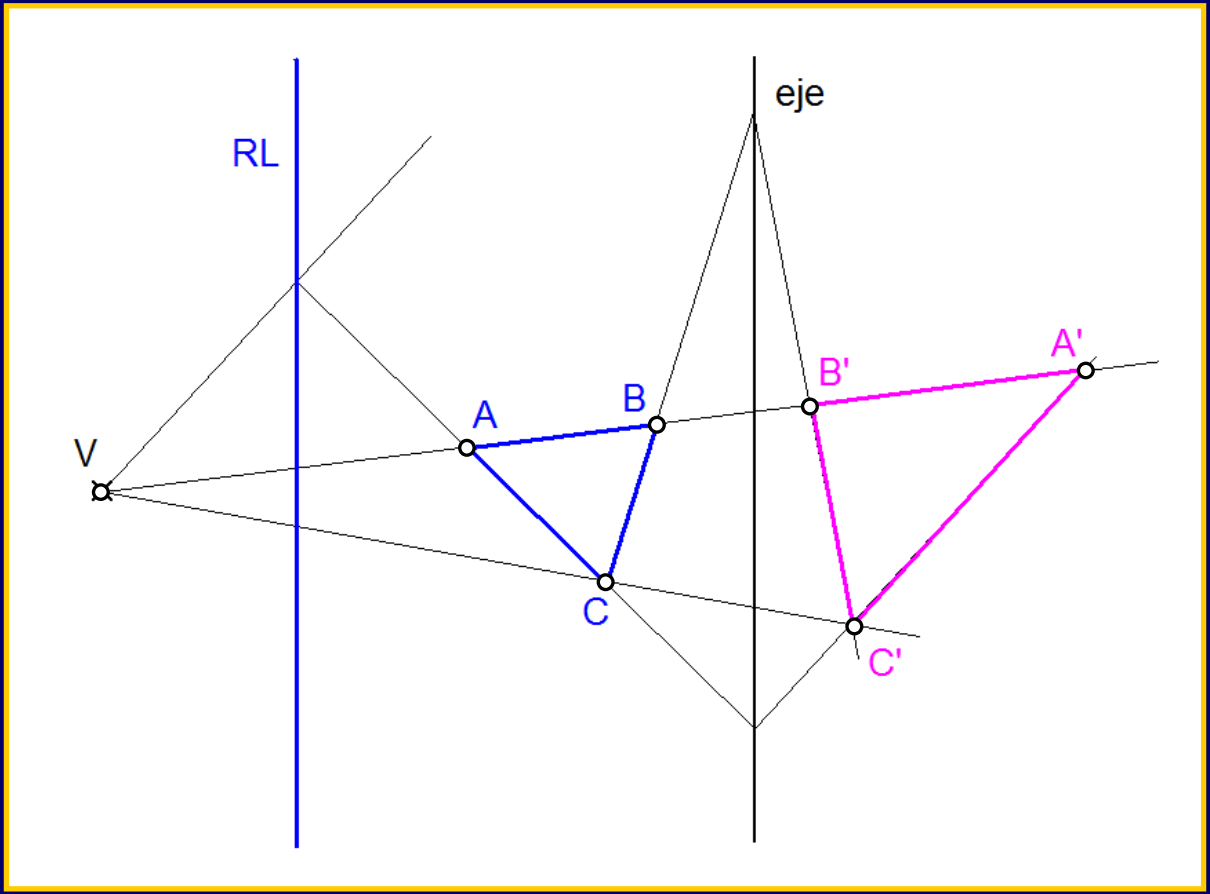


Transformación homológica de polígonos

La transformación homológica de un polígono es otro polígono.

Si ningún punto del perímetro del polígono está sobre la RL, el polígono homólogo tiene todos sus puntos propios.

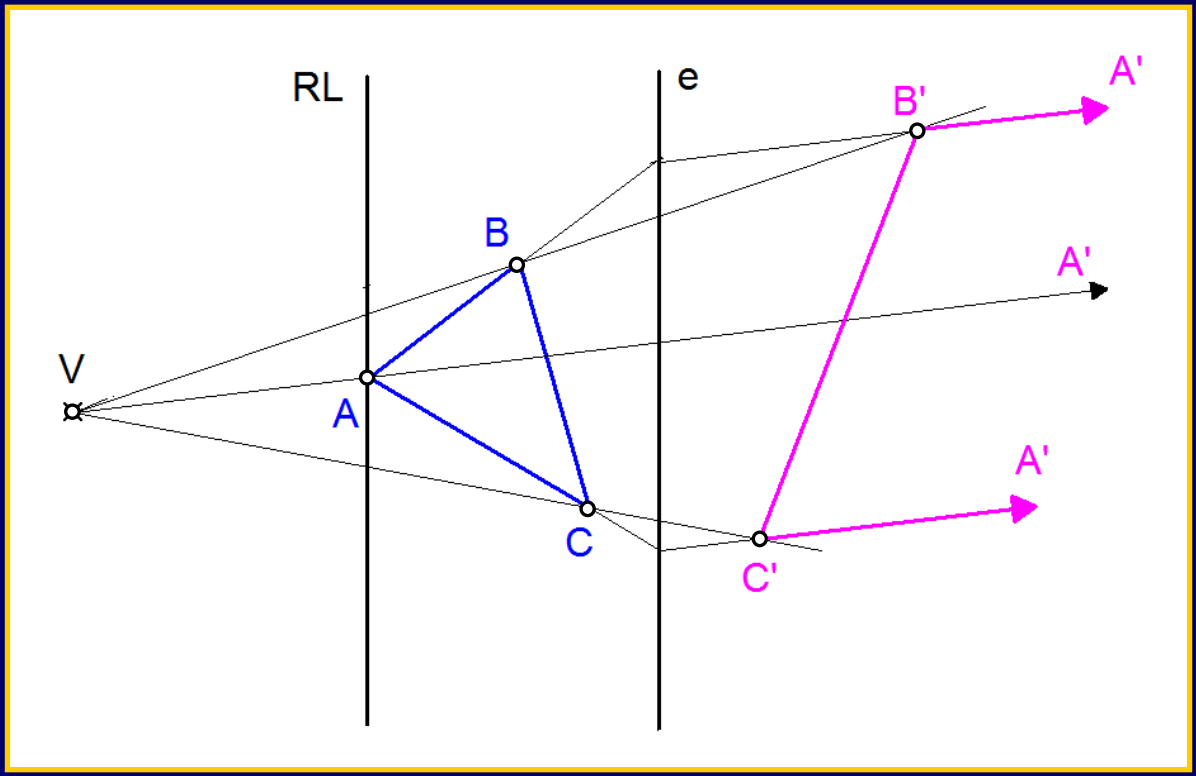
Transformación homológica de un polígono sin ningún punto en la recta límite RL.



Transformación homológica de polígonos

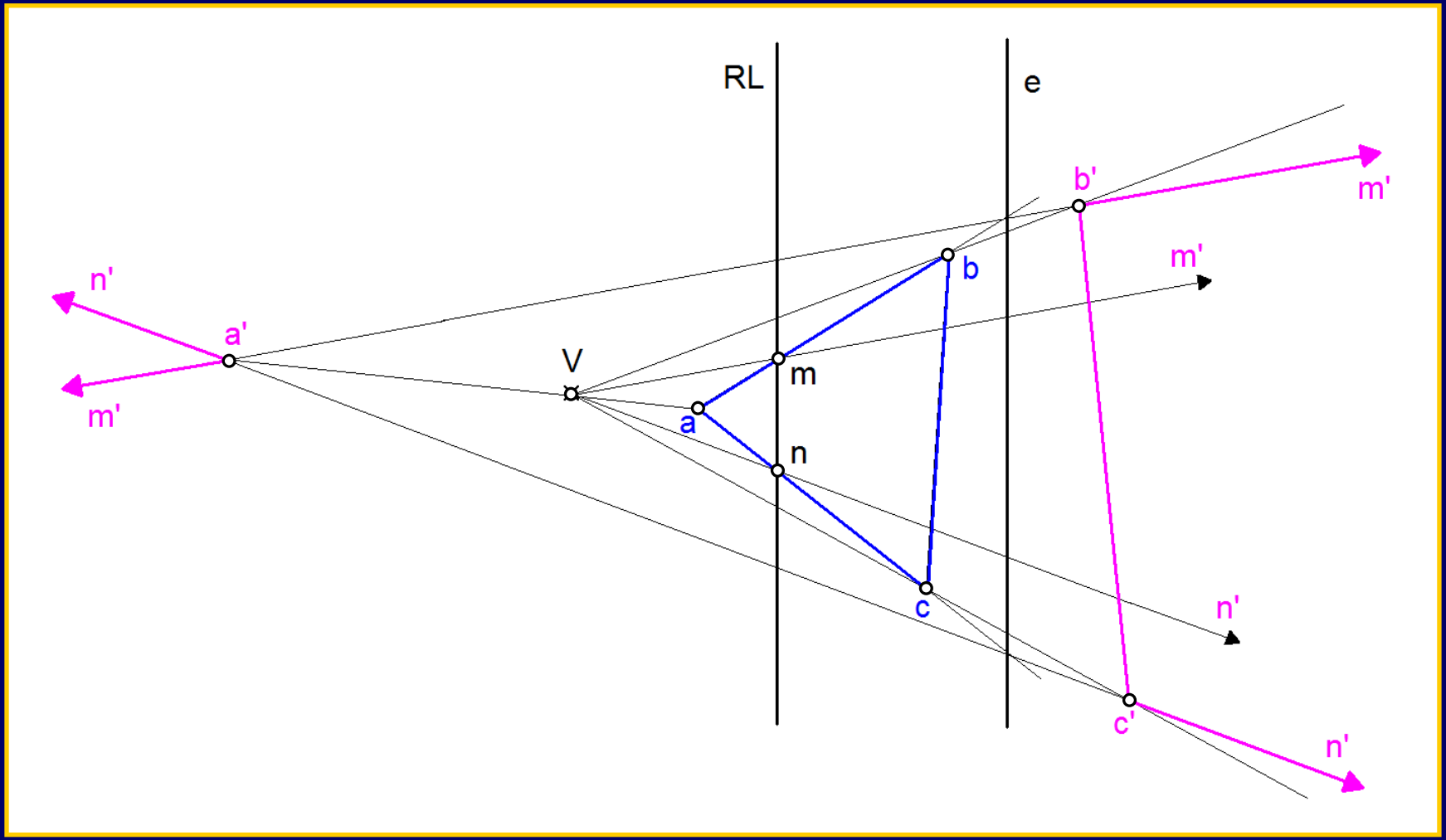
Sin embargo, si algún punto del perímetro está contenido en RL, el polígono homólogo tendrá **puntos impropios**.

Transformación homológica de un polígono con un vértice en la recta límite RL; su homólogo es un punto impropio.



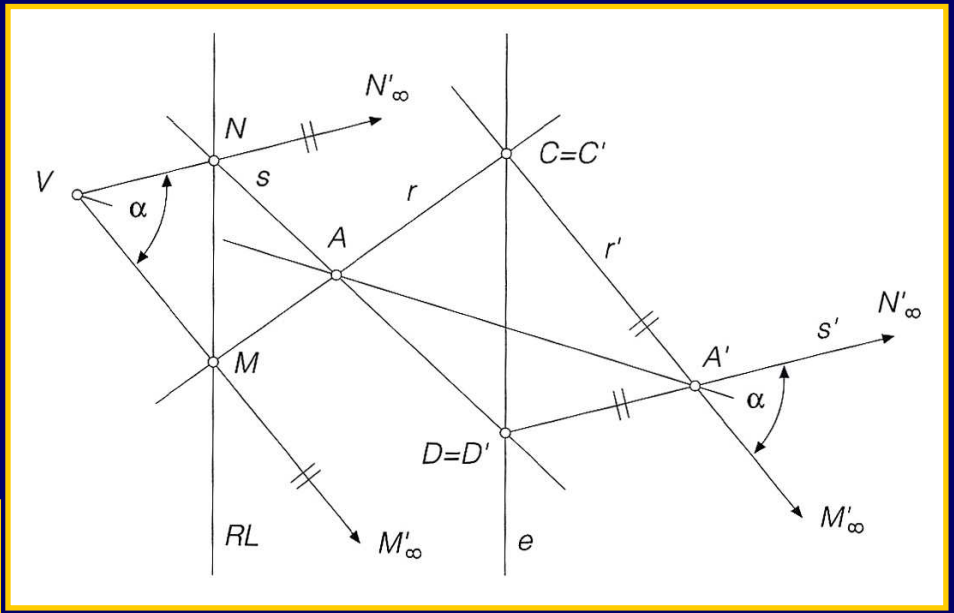
Transformación homológica de polígonos

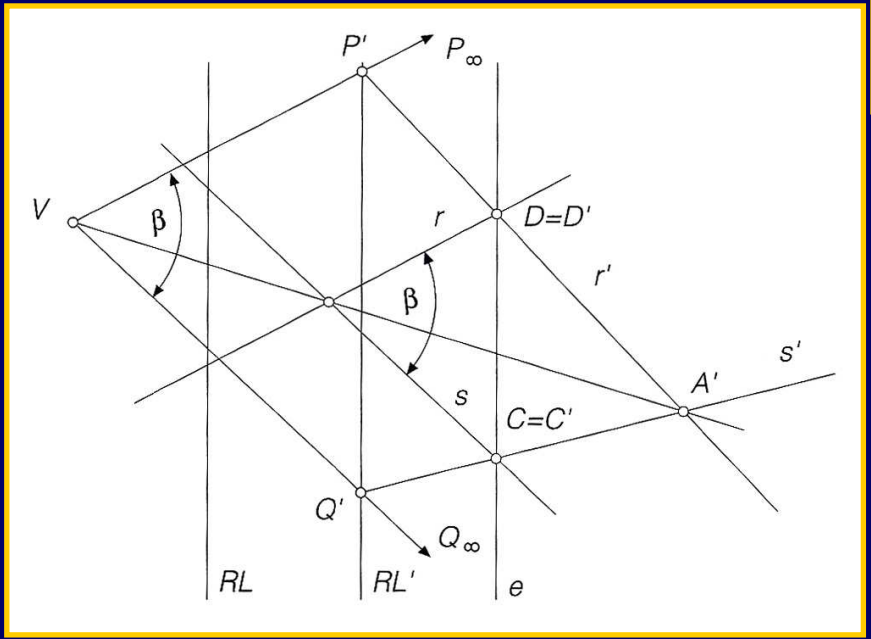
Transformación homológica con puntos impropios. La figura corta a la RL



Relaciones angulares en la homología

En las figuras homólogas no se conservan los ángulos. Sin embargo, el ángulo **α** que forman dos rectas **r'** y **s'** homólogas de **r** y **s**, es igual al que forman las rectas que unen el centro de homología con los puntos de corte de **r** y **s** con **RL**.

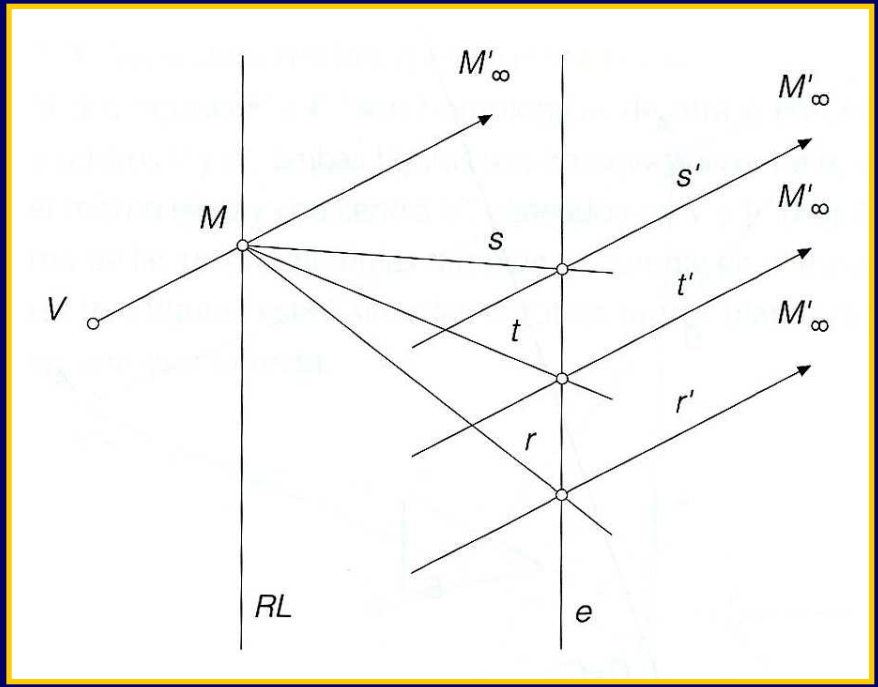


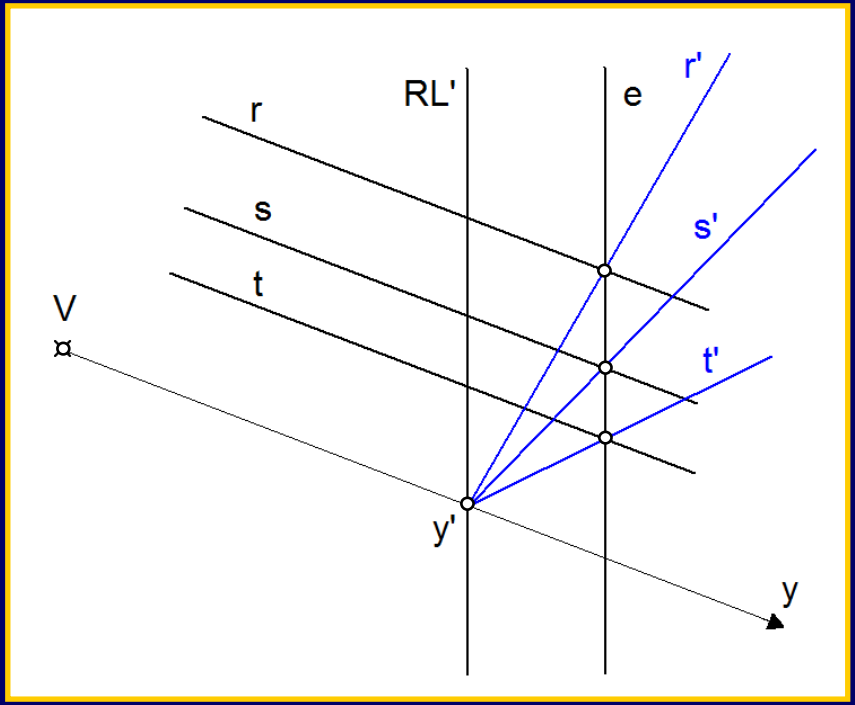


Análogamente, el ángulo **β** formado por las rectas **r** y **s** cuyas homólogas son **r'** y **s'** es igual al que forman las rectas que unen el centro de la homología con los puntos de corte de **r'** y **s'** con **RL'**.

Relaciones angulares en la homología

Si varias rectas (**r**, **s**, **t**) se cortan en la recta límite (**RL**), sus rectas homólogas (**r'**, **s'**, **t'**) son paralelas.

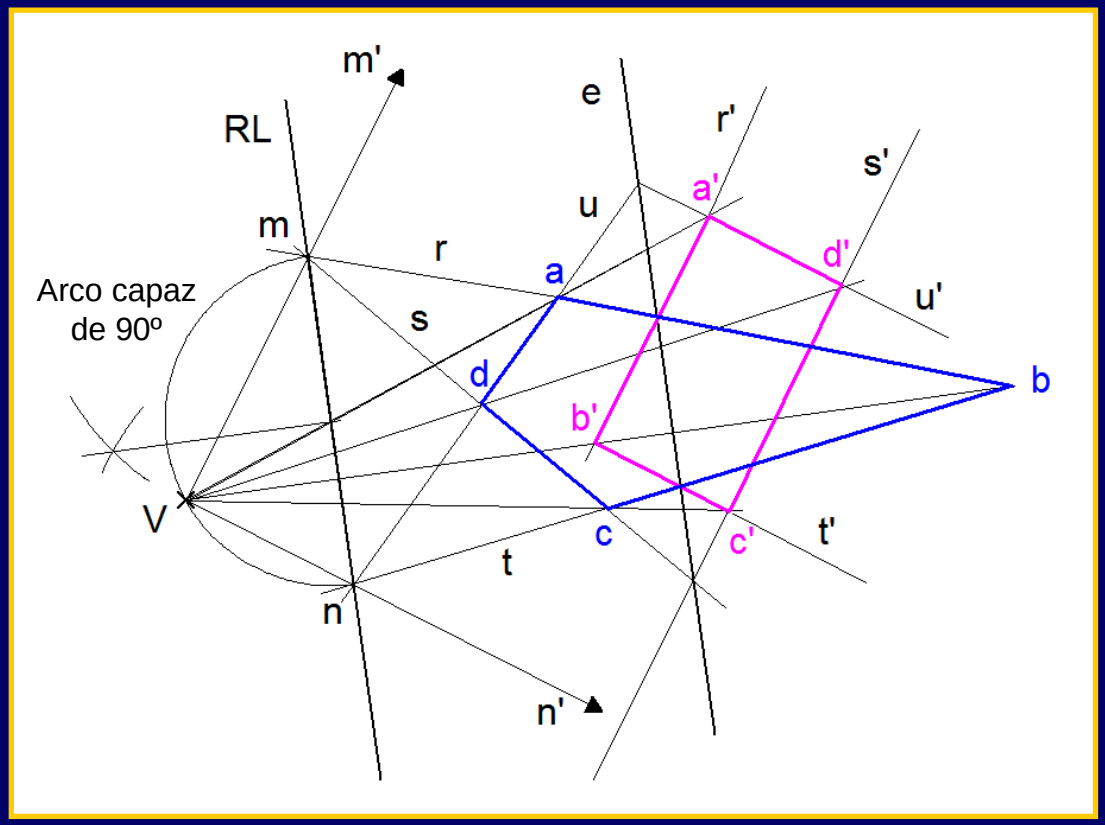




Se forma análoga, si varias rectas (**r**, **s**, **t**) son paralelas sus rectas homólogas (**r'**, **s'**, **t'**) se cortan todas en la recta límite **RL'**.

Transformación homológica de polígonos

Determinación de la homología para **transformar un cuadrilátero en un rectángulo**.



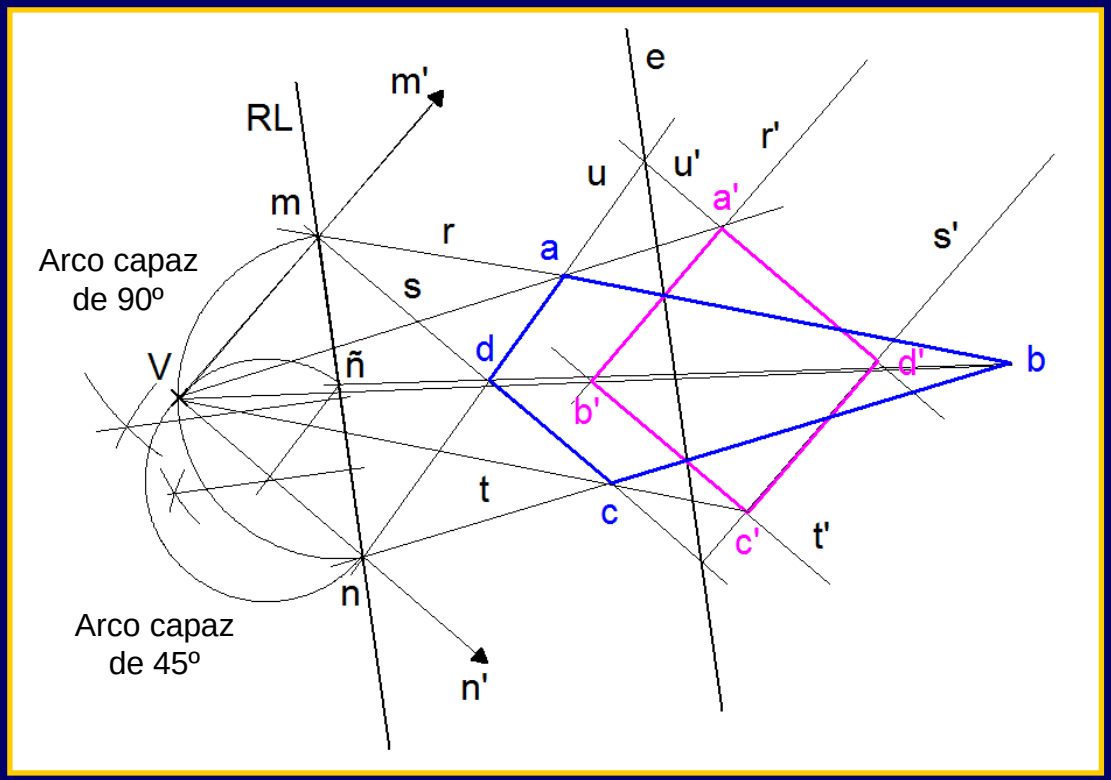
Los lados **ad** y **cb** deben transformarse en lados paralelos, por lo que el punto **n** de corte debe estar en **RL**. Igualmente, los lados **ab** y **cd** deben transformarse en paralelos por lo que su punto de corte **m** debe estar también en **RL**. Por tanto, **m** y **n** definen **RL**.

Por otro lado, para que las rectas **r** y **t** formen, al transformarse en **r'** y **t'**, un ángulo de 90º, los segmentos **mV** y **nV** deben formar un ángulo de 90º, por lo que **V** debe estar en el arco capaz de 90º sobre **mn**. Podemos elegir cualquier punto.

Por último, el eje **e** se puede colocar en una posición arbitraria pero paralelo a **RL**.

Transformación homológica de polígonos

Determinación de la homología para **transformar un cuadrilátero en un cuadrado**.



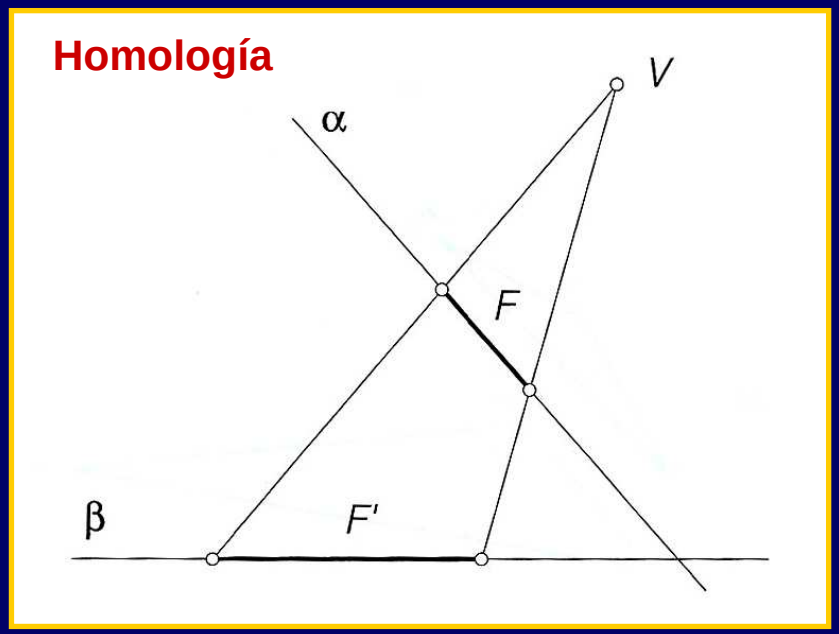
En este caso, a las condiciones del caso anterior se le añade una más para que el resultado sea un cuadrado. En este caso que el lado **cb** y la diagonal **bd** al transformarse en **c'b'** y **b'd'** rerspectivamente, formen un ángulo de 45º (es lo que distingue un cuadrado de un rectángulo). Para ello, los segmentos **ñV** y **nV** deben formar 45º, por lo que **V** debe estar sobre un arco capaz de 45º sobre el segmento **ñn**.

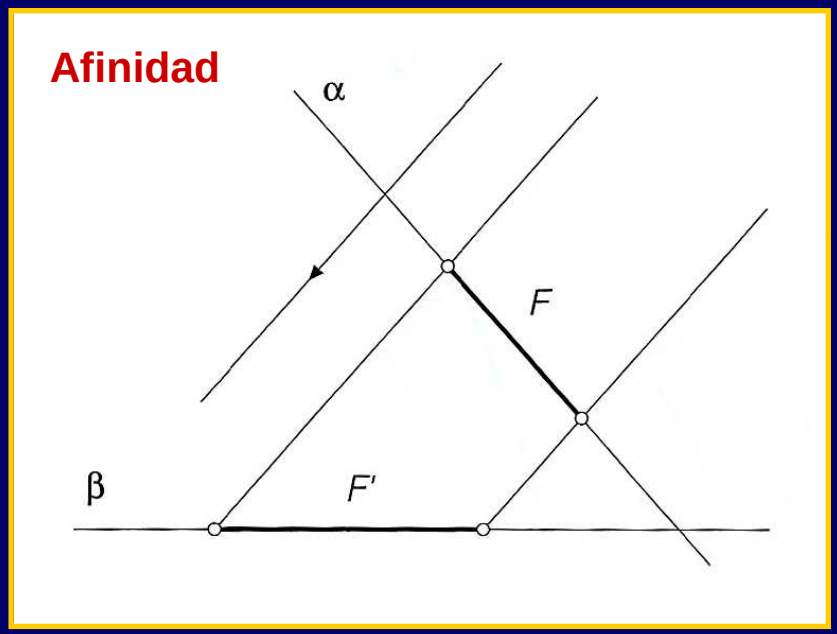
En este caso, **V** no lo podemos elegir libremente, como en el caso anterior, sino en la intersección de dos arcos capaces.

El eje **e** sí se puede colocar en una posición arbitraria paralelo a **RL**.

Afinidad

Una **afinidad** se puede considerar un caso particular de homología en la que el centro de homología es un punto impropio. De ello se deriva que los rayos que unen los puntos afines sean paralelos en una dirección determinada. Las rectas límite también son impropias.

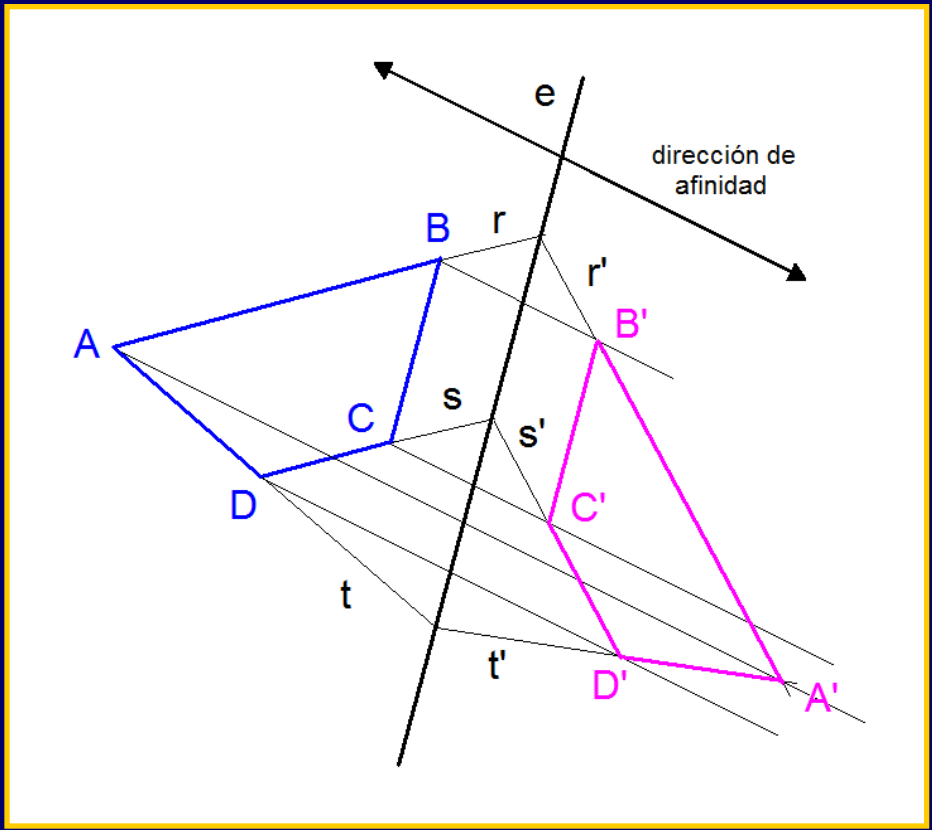




Afinidad plana

Una **afinidad plana** es aquella en la que los elementos afines son coplanarios. Se cumplen las siguientes propiedades:

- Los puntos afines estarán alineados en una dirección fija denominada dirección de afinidad.
- Dos rectas homólogas se cortan en puntos de una recta fija llamada eje de afinidad (e), que será el lugar geométrico de los puntos dobles.
- Rectas paralelas al eje de afinidad tienen rectas afines también paralelas a dicho eje.
- Si dos rectas son paralelas, sus afines también lo son.
- Los segmentos originales y sus afines guardan una proporción.

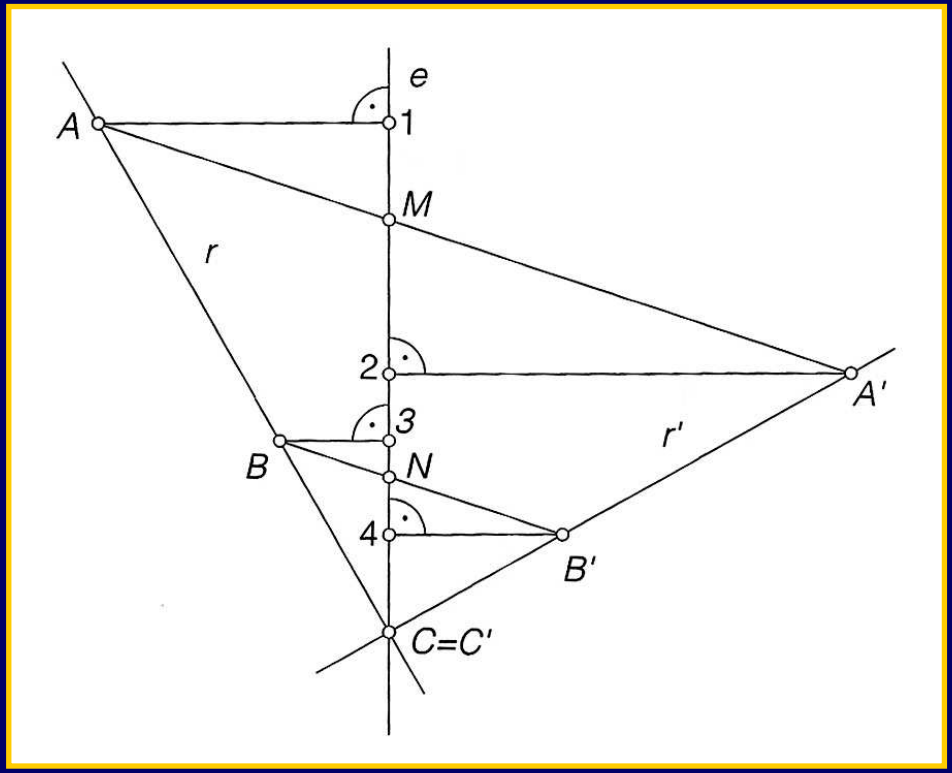


Razón de afinidad (K)

En una **afinidad plana**, la relación de distancias al eje desde dos puntos afines se mantiene constante. A esta relación se le llama **razón de afinidad** y se designa por **K**.

$$\frac{A'2}{A1} = \frac{A'M}{AM} = \frac{B'4}{B3} = \frac{B'N}{BN} = K$$

- Cuando los dos puntos afines se encuentran uno a cada lado del eje la razón se considera negativa, mientas que cuando están al mismo lado la razón se considera positiva.
- Cuando K = – 1 y la afinidad es ortogonal (dirección perpendicular al eje) la afinidad es igual a una simetría axial cuyo eje es el eje de afinidad.



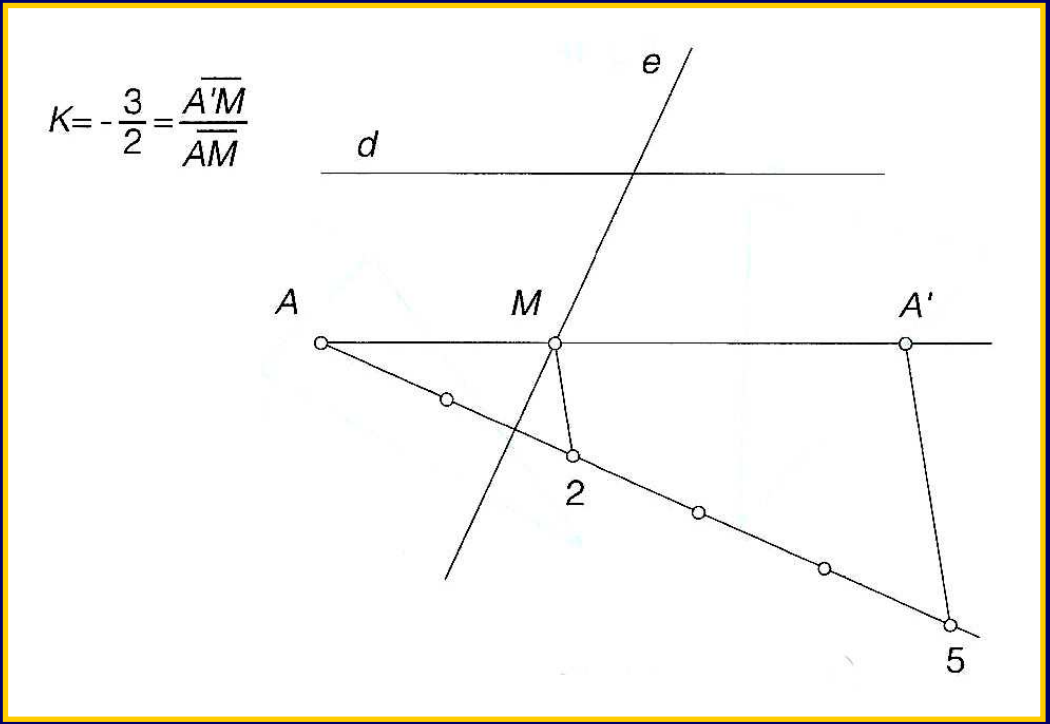
Definición de afinidad a partir de K

Dados el eje (**e**), la dirección (**d**) y la razón de una afinidad (**K**), por ejemplo, K= –1,5, podemos obtener el punto homólogo **A'** de un punto **A** cualquiera del siguietne modo:

Buscamos una fracción de enteros equivalente (en este caso –3/2) y establecemos una proporción.

El signo menos (–) indica que los puntos homólogos están uno a cada lado del eje.

En este ejemplo, trazamos un segmento de 5 unidades y unimos la segunda división con el punto de corte **M** de la recta trazada desde **A** en la dirección **d**. Por la quinta división se traza una paralela a **2M** y obtenemos **A'** sobre la prolongación de AM.

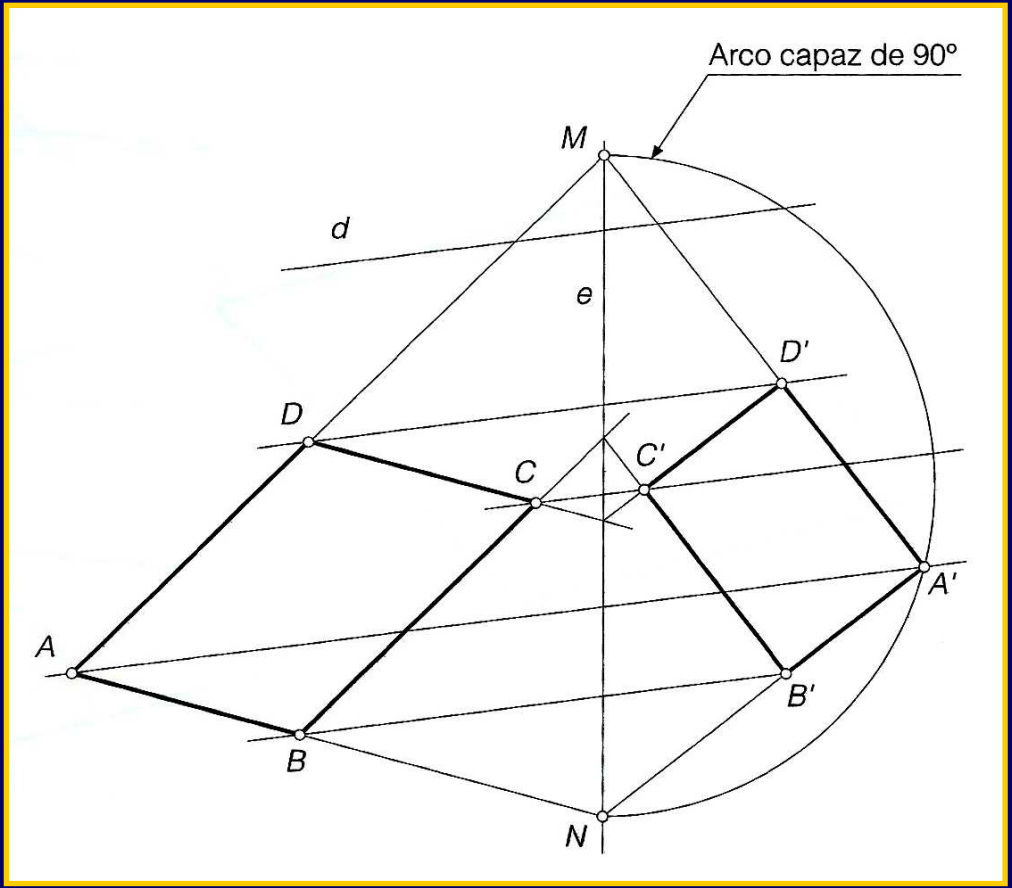


Transformación afín de polígonos

Determinación de la afinidad para **transformar un romboide en un rectángulo** dados el eje y la dirección de afinidad.

Dos lados concurrentes del romboide, como el AB y el AD deben tener por afines dos lados perpendiculares. Como estos dos lados cortan al eje de afinidad en los puntos M y N, el vértice A' debe estar en el arco capaz de 90º sobre el segmento MN. Trazando por A una recta en la dirección de afinidad, donde corta al arco capaz obtenemos A'.

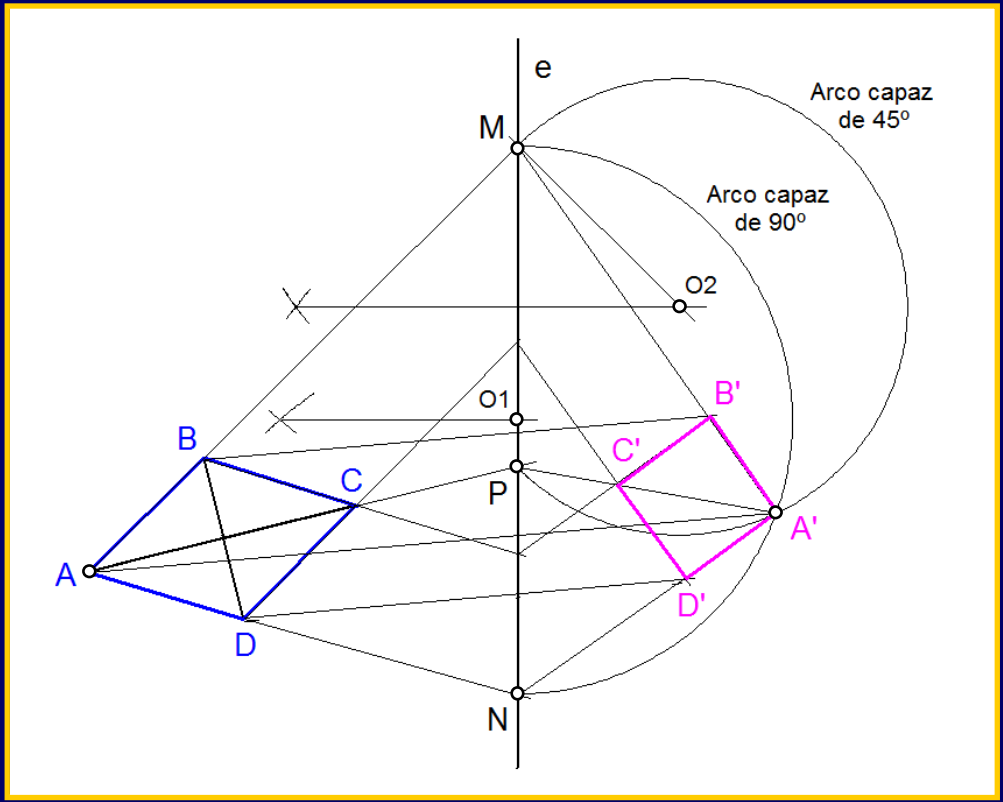
Los otros puntos se obtienen por el procedimiento ya conocido.



Transformación afín de polígonos

Determinación de la afinidad para **transformar un rombo en un cuadrado** dado el eje de afinidad.

Los lados AB y el AD cortan al eje en M y N, por lo que el punto A' debe estar sobre el arco capaz de 90º sobre el segmento MN. Por otra parte, el lado AB y la diagonal AC deben formar al transformarse un ángulo de 45º por lo que el punto A' debe estar sobre el arco capaz de 45º sobre el segmento MP. El punto A' está, por tanto, en la intersección de los dos arcos capaces. La recta AA' es la dirección de afinidad.

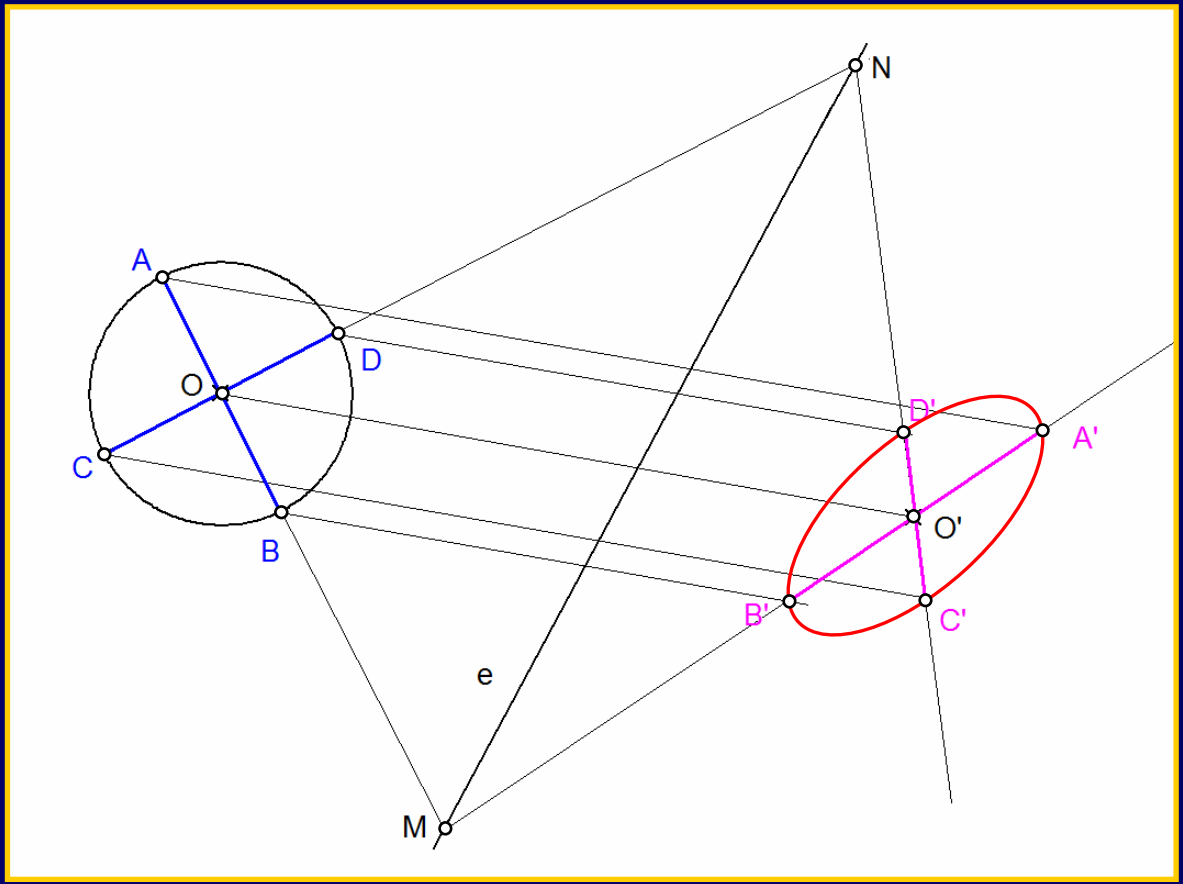


Los otros puntos se obtienen por el procedimiento ya conocido.

Transformación afín de la circunferencia en elipse

Dados el eje de afinidad (**e**), la circunferencia de partida y su centro (**O**) y el punto afín de dicho centro (**O'**). Vamos a obtener dos **diámetros conjugados** cualesquiera de la elipse.

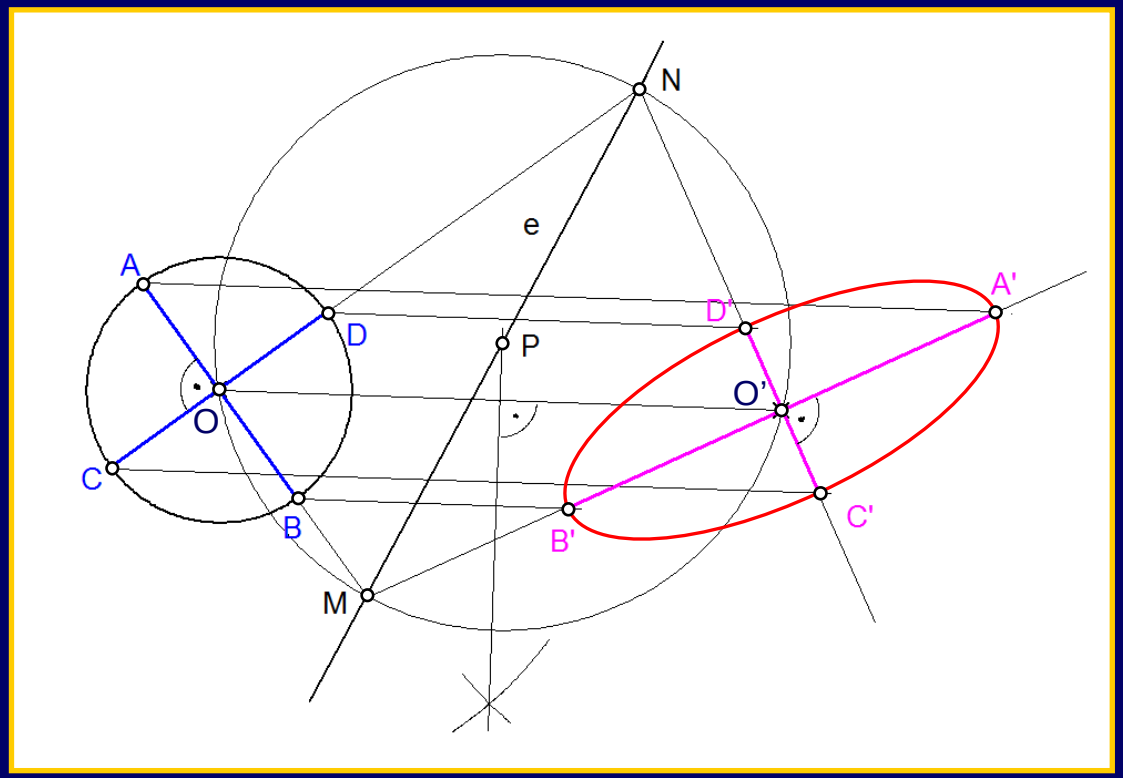
Se toman dos diámetros perpendiculares en la circunferencia, como **AB** y **CD**. Se obtienen sus segmentos afines **A'B'** y **C'D'**, los cuales serán diámetros conjugados de la elipse.



Transformación afín de la circunferencia en elipse

Dados el eje de afinidad (**e**), la circunferencia de partida y su centro (**O**) y el punto afín de dicho centro (**O'**). Obtendremos los **ejes de la elipse**.

Hemos de buscar los dos diámetros perpendiculares de la circunferencia que se transforman en los ejes de la elipse (que son los únicos diámetros conjugados que son perpendiculares).



Se traza el segmento **OO'** y su mediatriz. Donde ésta corta al eje (punto **P**) trazamos un arco capaz de 90º con radio **PO**=**PO'** a cada lado del eje (o sea, una circunferencia. Obtenemos los puntos **M** y **N**. Uniendo estos puntos con **O** obtenemos los diámetros **AB** y **CD**. Uniendo **M** y **N** con **O'** obtenemos las direcciones de los ejes de la elipse. Los puntos afines de A, B, C y D nos determinan los extremos de los ejes.