Tangencias usando la inversión

IES BELLAVISTA

Inversión

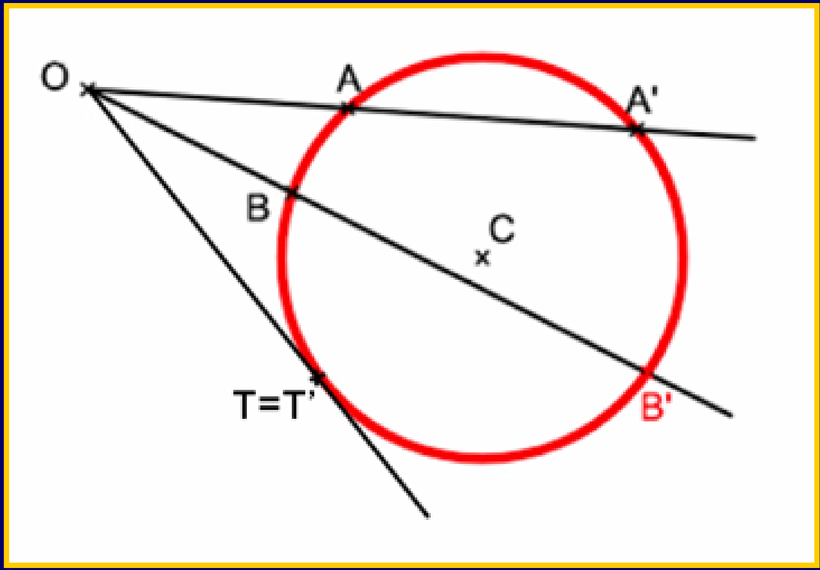
La **inversión** es una transformación geométrica que transforma cada punto en otro punto, inverso del anterior, cumpliéndose:

- Cada punto y su inverso están alineados con un punto fijo denominado **centro de la inversión (O)**.
- El producto de las distancias de los dos puntos al centro de inversión es un valor fijo denominado **potencia de inversión (K)**.

$$\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OB} \cdot \overline{OB'} = \overline{OT}^2 = K$$

Conocidos el centro de inversión O y dos puntos inversos, A y A’, para hallar el inverso de otro punto, B, basta trazar la circunferencia que pasa por los tres (su centro C es la intersección de las mediatrices de AA’ y AB). Donde esta circunferencia corta a OB obtenemos B’.

Cualquier circunferencia que pase por un punto y su homólogo es inversa de sí misma.

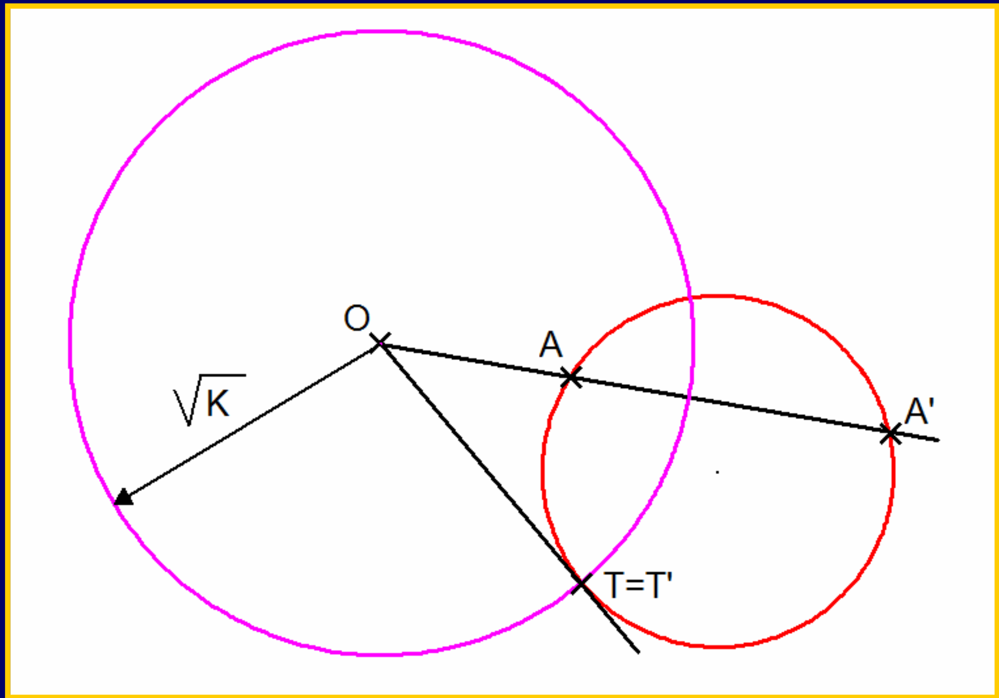


La circunferencia de autoinversión

El punto **T=T'** de la figura es un **punto doble**, es decir, es inverso de sí mismo. Realmente, todos los puntos situados a la distancia OT del centro de inversión son dobles, constituyendo una circunferencia denominada "**circunferencia de autoinversión**" y siendo el radio de esta circunferencia la raíz cuadrada de la potencia de inversión.

$$\overline{OT} = \sqrt{K}$$

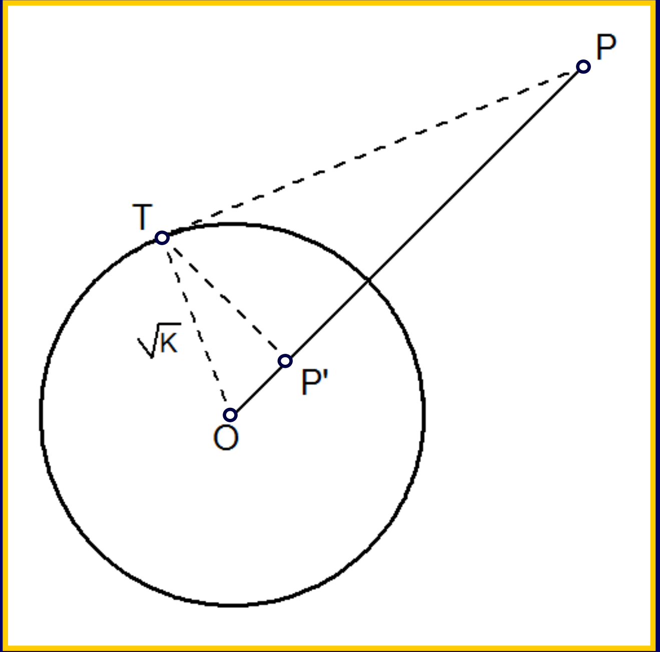
Conocidos el centro de inversión O y dos puntos inversos, A y A', para trazar la circunferencia de autoinversión trazamos cualquier circunferencia que contega a A y A' y le trazamos una tangente desde O. La distancia desde O al punto de tangencia, T, es el radio de la circunferencia de autoinversión.



Definición de la inversión

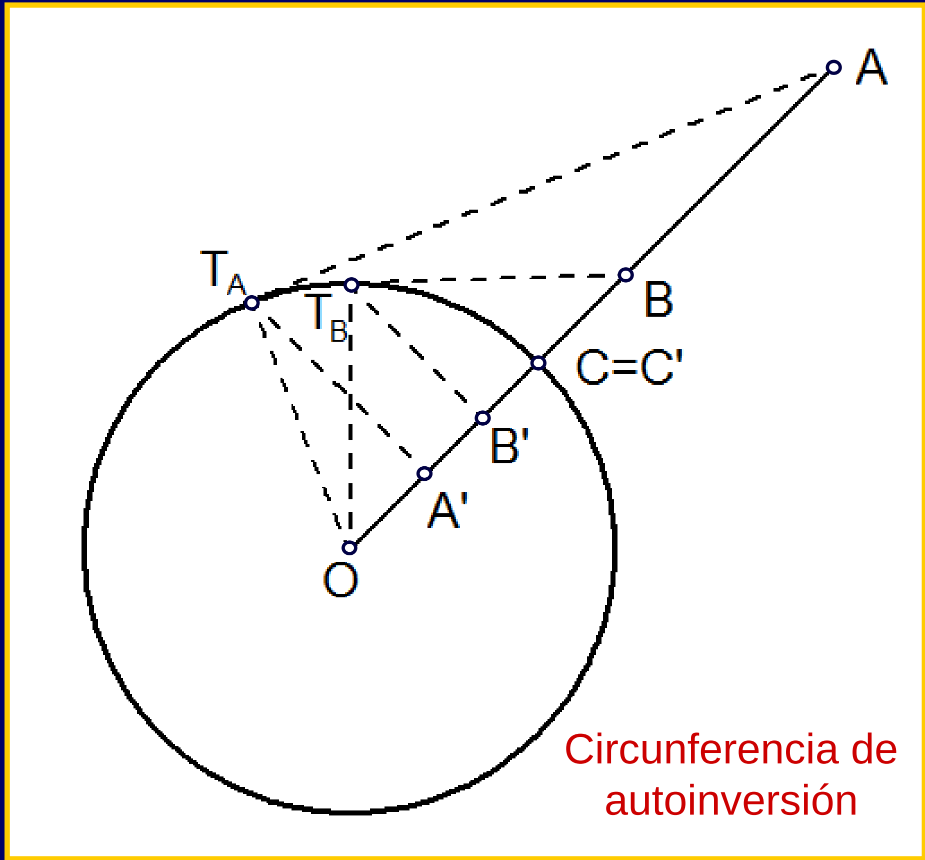
La inversión puede venir definida de diferentes formas:

- Dados el centro y dos puntos inversos. Se vio en la 1ª diapositiva.
- Dados dos pares de puntos inversos: La intersección de las rectas que unen cada par es el centro de inversión.
- Dados el centro y la circunferencia de autoinversión:
  - Para hallar el inverso de un **punto exterior** (P) se traza desde él la tangente a la circunferencia, obteniendo T. Por T se traza una perpendicular a OP hasta que la corta en P'
  - Para hallar el inverso de un **punto interior** (P') se traza una perpendicular por P' a OP' hasta cortar a la circunferencia en T, desde donde se traza una perpendicular a OT hasta cortar en P a la prolongación de OP'.



Inversa de una recta que pasa por el centro de inversión

La inversa de una recta que pasa por el centro de inversión **es ella misma**. Esto no quiere decir que todos sus puntos sean dobles. Sólo lo serán los puntos donde la recta corta a la circunferencia de inversión.

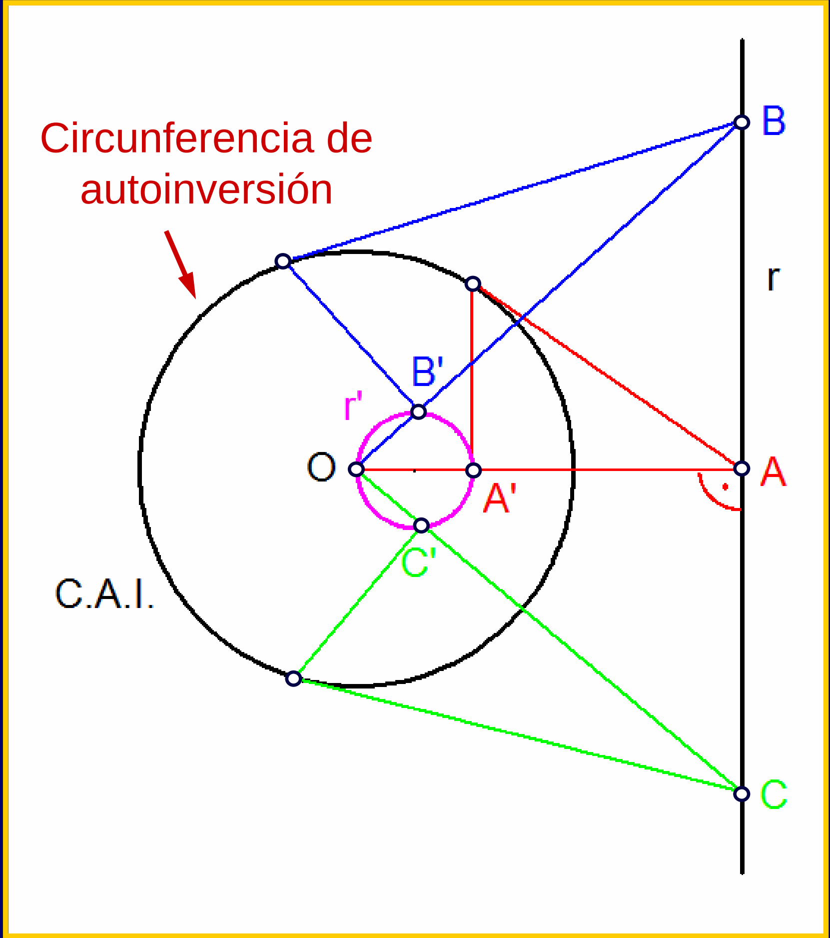


Inversa de una recta que NO pasa por el centro de inversión

La inversa de una recta que NO pasa por el centro de inversión **es una circunferencia que SÍ pasa por el centro de inversión**.

Para hallar dicha circunferencia trazamos una perpendicular a la recta por el centro de inversión y obtenemos el punto de corte A. Hallamos el inverso de A como hemos visto antes, obtenemos A’. La circnferencia de diámetro OA’ es la inversa de la recta.

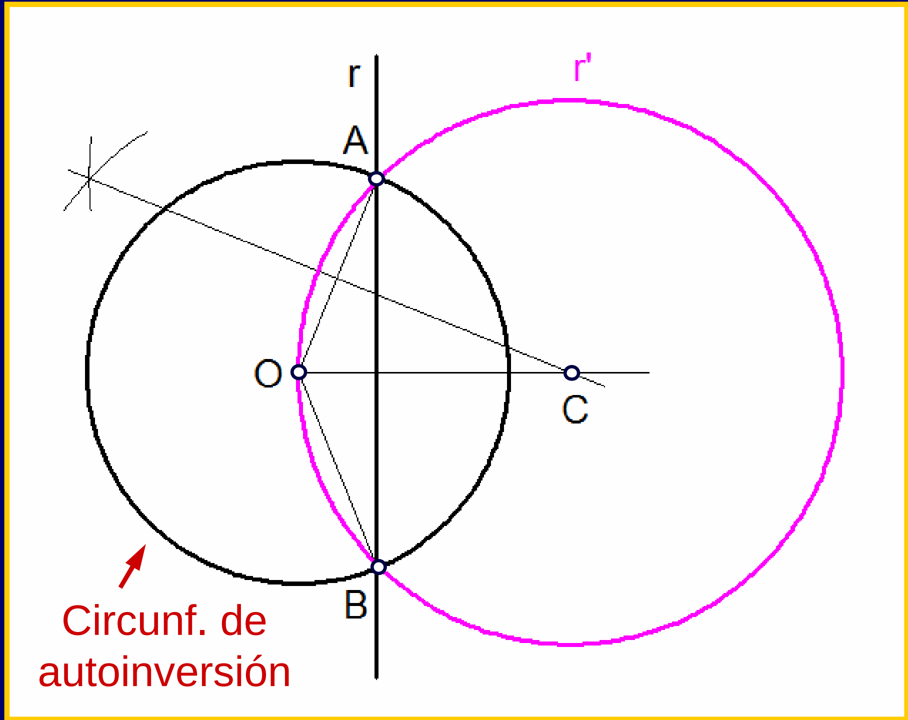
El centro de inversión, O, sería el inverso de los puntos impropios de la recta, es decir, los situados en el infinito.



Inversa de recta secante a la circunferencia de autoinversión

La inversa de una recta secante a la circunferencia de autoinversión **es una circunferencia que pasa por los puntos de corte y por el centro de inversión**.

Se deduce de que los puntos de corte, al pertenecer a la circunferencia de autoinversión, son dobles, por lo que la circunferencia que es la inversa de la recta tiene que pasar por ellos. Por otro lado, según se indicó antes, la circunferencia pasa por el centro de inversión.

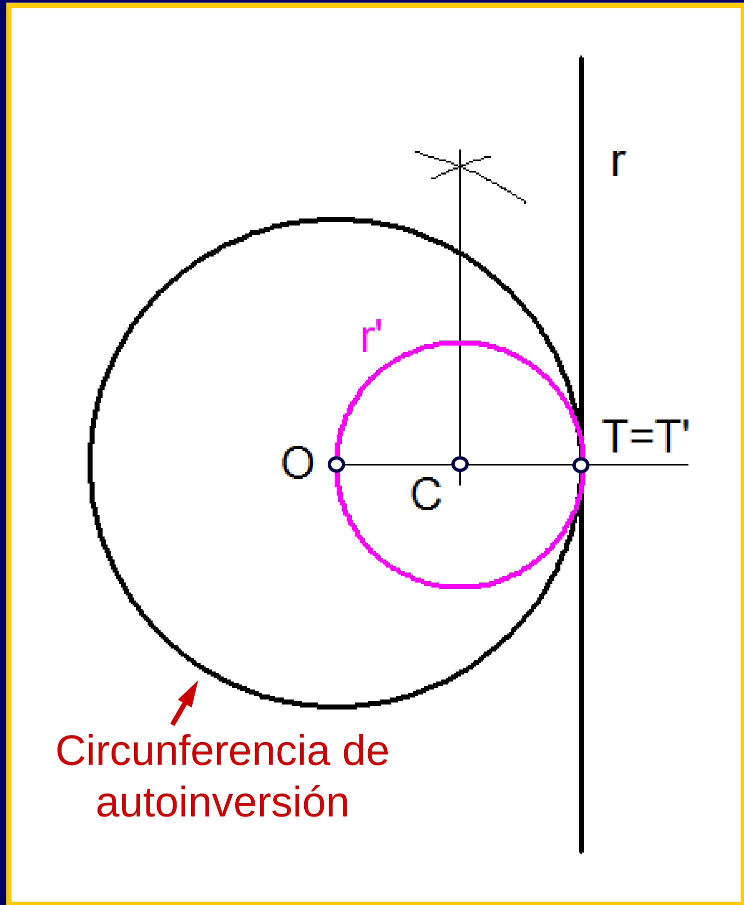


El trazado es el correspondiente a una circunferencia que pasa por tres puntos (O, A y B de la figura).

Inversa de recta tangente a la circunferencia de autoinversión

La inversa de una recta tangente a la circunferencia de autoinversión es una circunferencia tangente interior a la circunferencia de autoinversión y pasa por el centro de inversión.

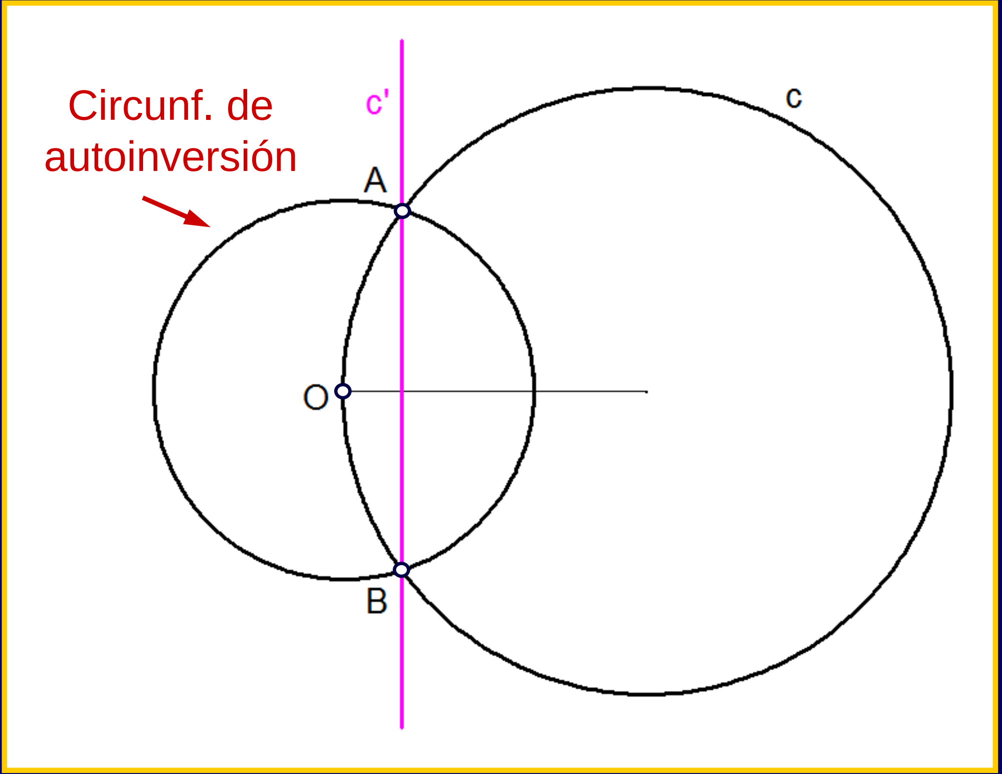
Se deduce de que el punto de tangencia, al pertenecer a la circunferencia de autoinversión es doble, por lo que la circunferencia que es la inversa de la recta tiene que pasar por él. Por otro lado, según se indicó antes, la circunferencia pasa por el centro de inversión.



Inversa de circunferencia que pasa por el centro de inversión

La inversa de una circunferencia que pasa por el centro de inversión **es una recta que <u>no</u> pasa por el centro de inversión**.

Se deduce de que los puntos de corte con la circunferencia de autoinversión son dobles, por lo que la inversa de la circunferencia debe pasar por ellos. Por otra parte, el punto O, al ser el centro de inversión tiene su inverso en el infinito, por lo que la inversa tiene que ser una recta.

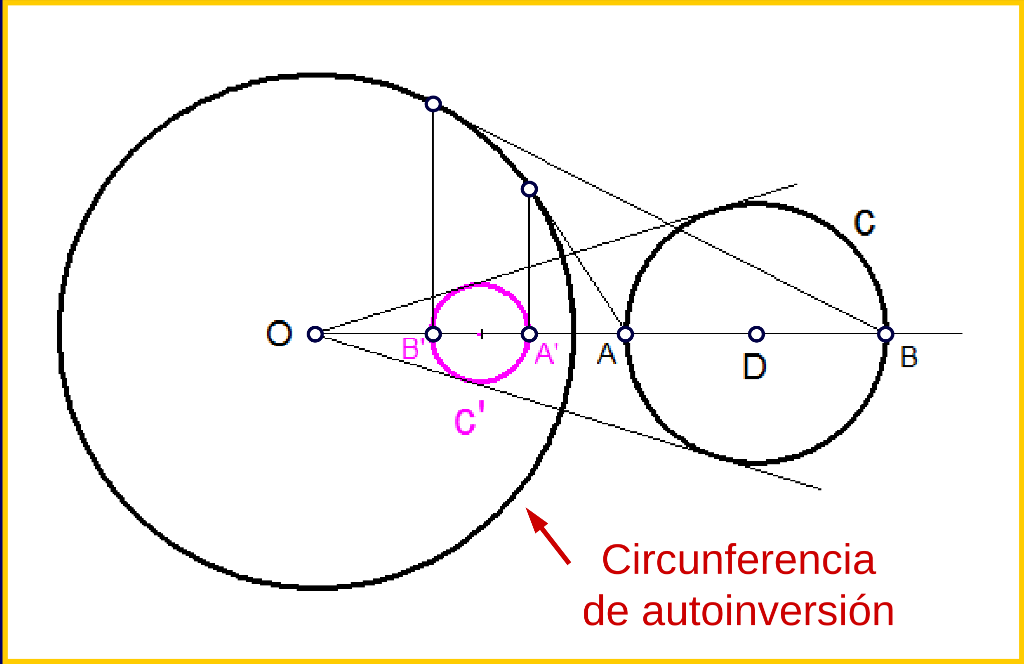


Inversa de circunferencia que no pasa por el centro de inversión

La inversa de una circunferencia que no pasa por el centro de inversión **es otra circunferencia homotética de la primera**.

Para trazar la circunferencia inversa se une el centro de inversión (O) con el centro de la circunferencia (D) y se prolonga obteniendo A y B al intersectar a la circunferencia.

Se hallan los inversos de A y B, o sea A’ y B’ que consituyen el diámetro de la circunfencia inversa, cuyo centro se encuentra alineado con el centro de inversión y de la circunferencia inicial.

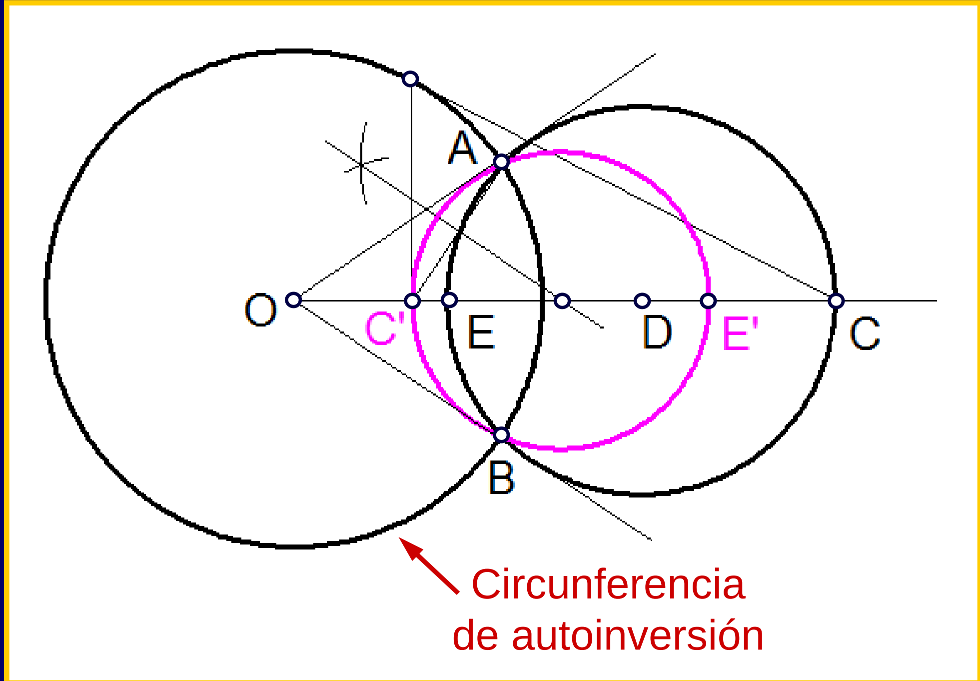


Las tangentes trazadas por el centro de inversión a una de las circunferencias deben ser también tangentes a la circunferencia inversa.

Inversa de circunferencia que corta a la de autoinversión

Es un caso particular del anterior, en el que se da la particularidad de que **los puntos de corte son dobles**, por lo que por ellos debe pasar la circunferencia inversa.

Para que quede definida la circunferencia inversa hallamos el inverso de uno de los puntos situados en la recta que une el centro de inversión con el centro de la circunferencia, por ejemplo del C. De esta forma, con los puntos A, B y C' queda definida la circunferencia.



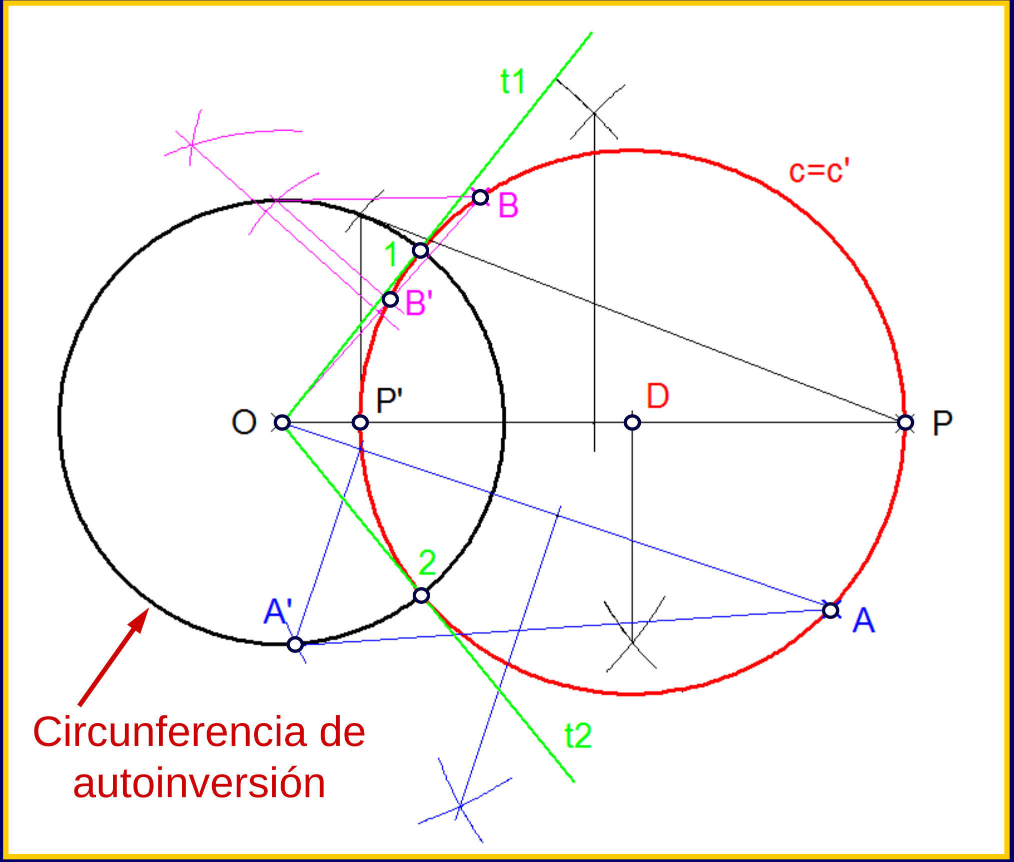
Las tangentes trazadas por el centro de inversión a una de las circunferencias deben ser también tangentes a la circunferencia inversa.

Inversa de circunferencia que pasa por un par de puntos inversos

La inversa de una circunferencia que pasa por un par de puntos inversos **es inversa de sí misma**. Esto no quiere decir que sus puntos sean puntos dobles (salvo los de corte con la circunferencia de autoinversión), sino que el inverso de cada punto de la circunferencia se encuentra en la misma circunferencia.

De lo anterior se deduce que los puntos de tangencia de las tangentes trazadas a la circunferencia dada (que es la misma que su inversa) por el centro de inversión son los puntos de intersección de la circunferencia dada con la circunferencia de autoinversión.

Obsérvense los puntos 1 y 2 de la figura.



Aplicación de la inversión a problemas de tangencias

La principal aplicación de la inversión es la resolución de problemas de tangencias mediante un **método sistemático** que consiste en:

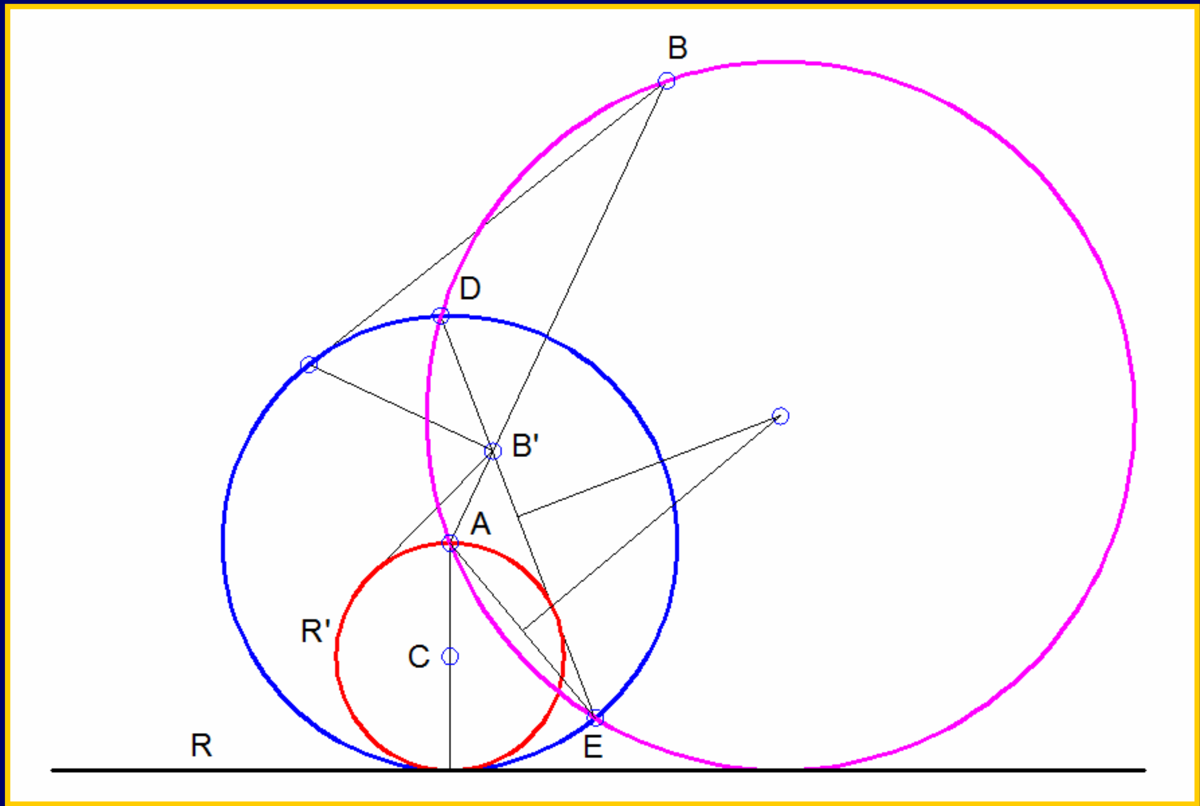
1. Definir un centro de inversión y una circunferencia de autoinversión convenientes.
2. Hallar los inversos de los elementos.
3. Trazar las tangentes comunes a los inversos.
4. Hallar los inversos de las tangentes.

Las propiedades en que se fundamenta este método son:

- **La tangencia se conserva en la inversión**, es decir, los inversos de dos elementos tangentes son también tangentes.
- **Los inversos de rectas son circunferencias** que pasan por el centro de inversión.

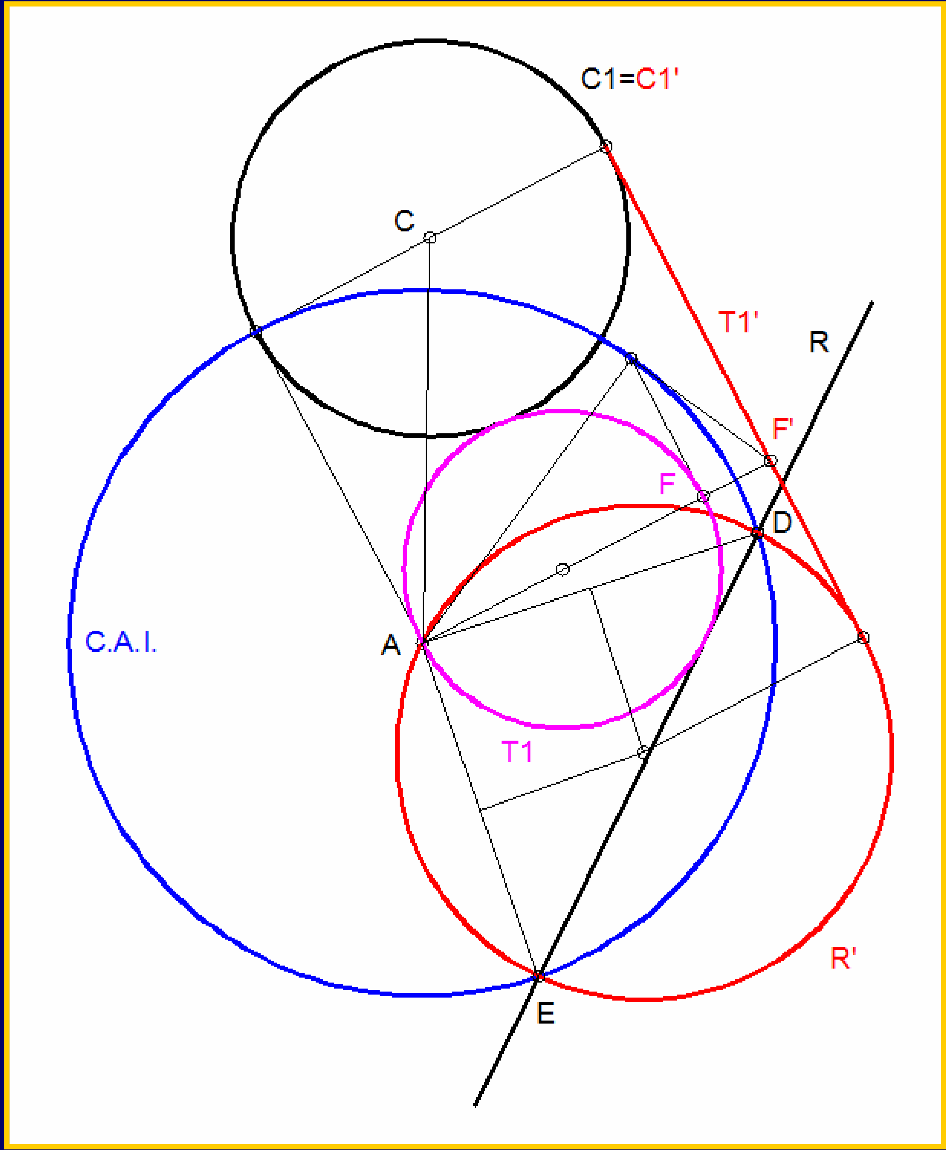
Circunferencia tangente a una recta que pasa por dos puntos

Dados los puntos **A** y **B** y la recta **R**. Se elige como centro de inversión el punto **A** y como circunferencia de autoinversión una de centro **A** y tangente a la recta **R**. De esta forma, la inversa de la recta es la circunferencia **R’** tangente interior a la de autoinversión que pasa por el centro de inversión **A**. Se halla el inverso del otro punto, en **B’**. Se traza la tangente por **B’** a **R’** y se prolonga hasta cortar en la circunferencia de autoinversión en **D** y **E**. La solución es la inversa de la tangente, para lo que se traza una circunferencia por los puntos **D**, **A** y **E**.



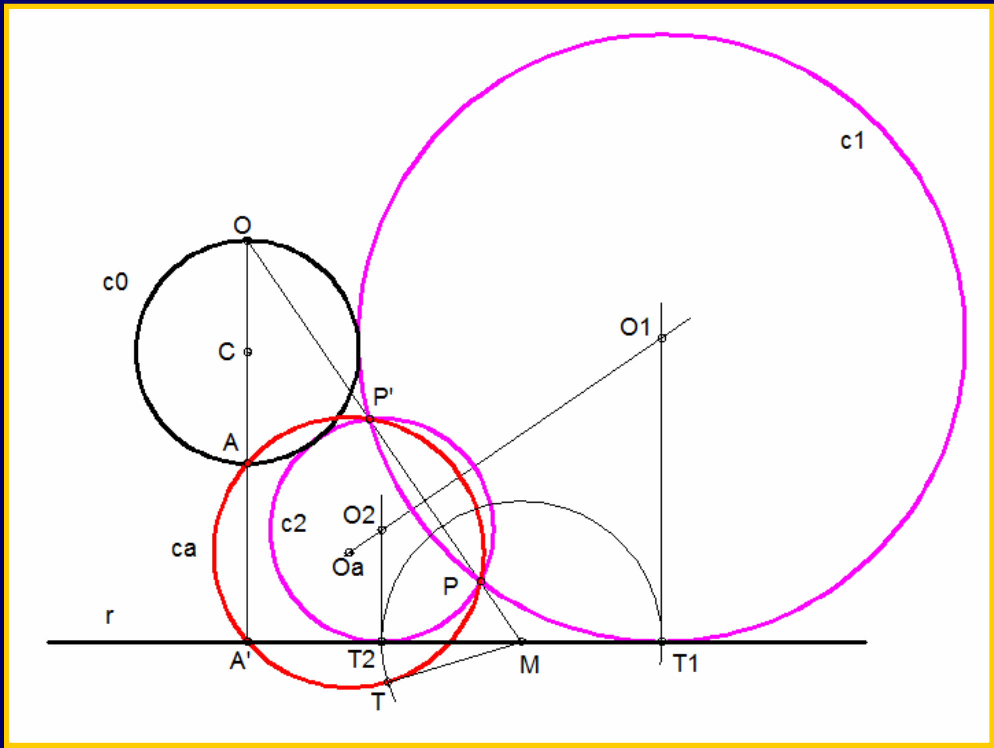
Circunferencia tangente a otra dada, a una recta y que pasa por un punto

1er Proc. Dados la circunferencia **C1**, el punto **A** y la recta **R**. Se elige el punto **A** como centro de inversión. Se elige una circunferencia de autoinversión de modo que la inversa de la circunferencia, **C1**, sea ella misma (**C1**=**C1'**). Hallamos el inverso de la recta R, que será una circunferencia, **R'**, que pasa por los puntos dobles **D** y **E** y por el centro de inversión **A**. Trazamos una tangente común entre las circunferencias **C1'** y **R'** (hay cuatro posibles soluciones), elegimos la **T1'**. Hallamos la inversa de esta tangente. Para ello, hallamos el inverso del punto **F'**, que será el punto **F**. La circunferencia buscada, **T1**, pasará por **F** y por **A** y su centro será el punto medio del segmento **AF**.



Circunferencia tangente a otra dada, a una recta y que pasa por un punto

2º Proc. Dados la circunferencia **c0**, el punto **P** y la recta **r**. Se traza por **C** una perpendicular a **r**. Se determinan los puntos **O**, **A** y **A'**. Se elige el punto **O** como centro de una inversión de modo que los puntos **A** y **A'** sean inversos, de donde se deduce que la circunferencia **c0** y la recta **r** serán inversos. Se traza una circunferencia, **ca**, que contenga a los puntos **A**, **A'** y **P**, que será inversa de sí misma. Uniendo **P** con **O** determinamos sobre **ca** el punto **P'** (inverso de **P**).

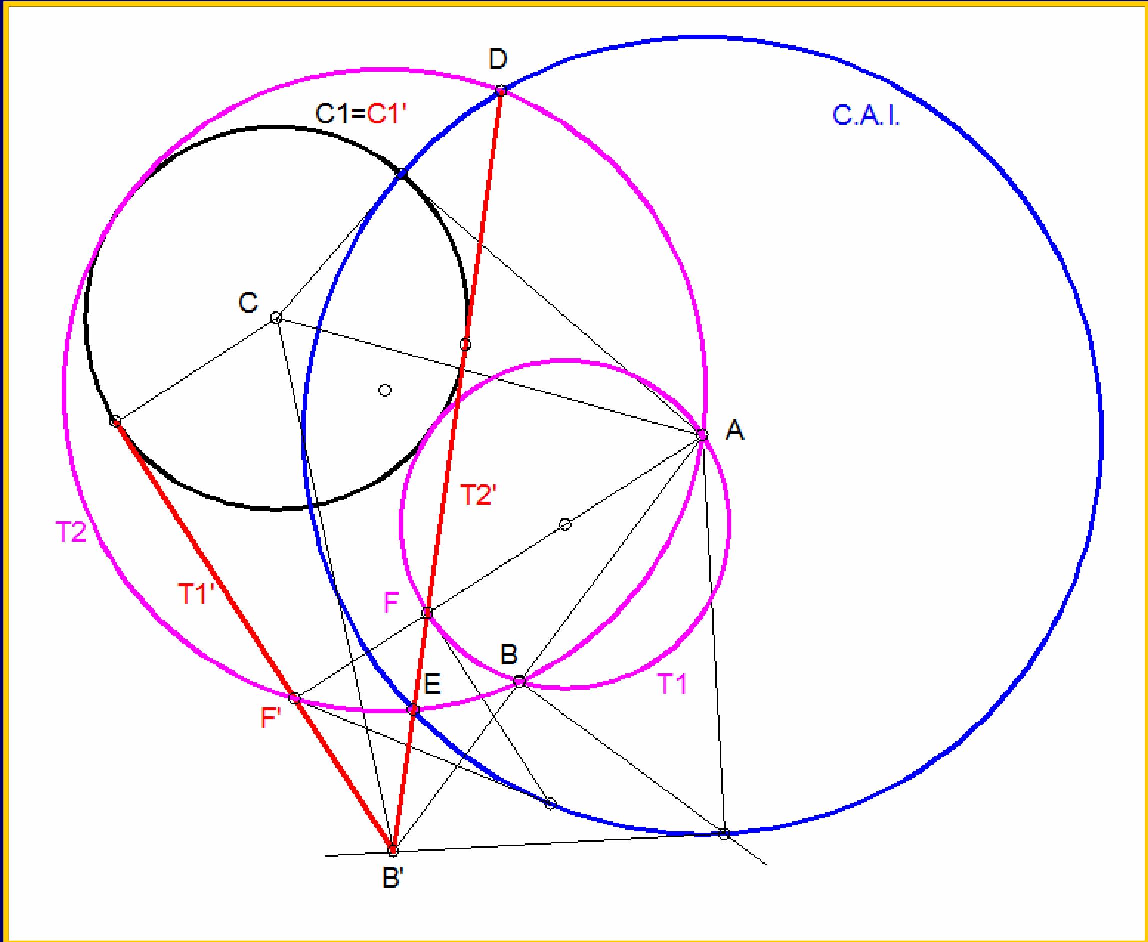


Las circunferencias **c1** y **c2**, tangentes a la recta **r** que pasan por los puntos **P** y **P'** (problema que ya hemos resuelto) serán las soluciones buscadas. En efecto, **c1** y **c2**, por construcción, ya son tangentes a **r** en **T1** y **T2** y pasan por el punto **P**. Por otra parte, al pasar por dos puntos inversos (**P** y **P'**) son inversas de sí mismas, por lo que serán tangentes a la inversa de la recta (circunferencia **c0**).

Circunferencia tangente a otra dada y que pasa por dos puntos

Dados **A**, **B** y **C1**. Se elige uno de los puntos como centro de inversión (**A**). Se elige una circunferencia de autoinversión de modo que la inversa de la circunferencia, **C1**, sea ella misma (**C1=C1**’). Hallamos el inverso del otro punto (**B**) que es **B’**. Trazamos tangentes desde **B’** a la circunferencia **C1’** dando **T1’** y **T2’**. Hallamos las inversas de estas tangentes:

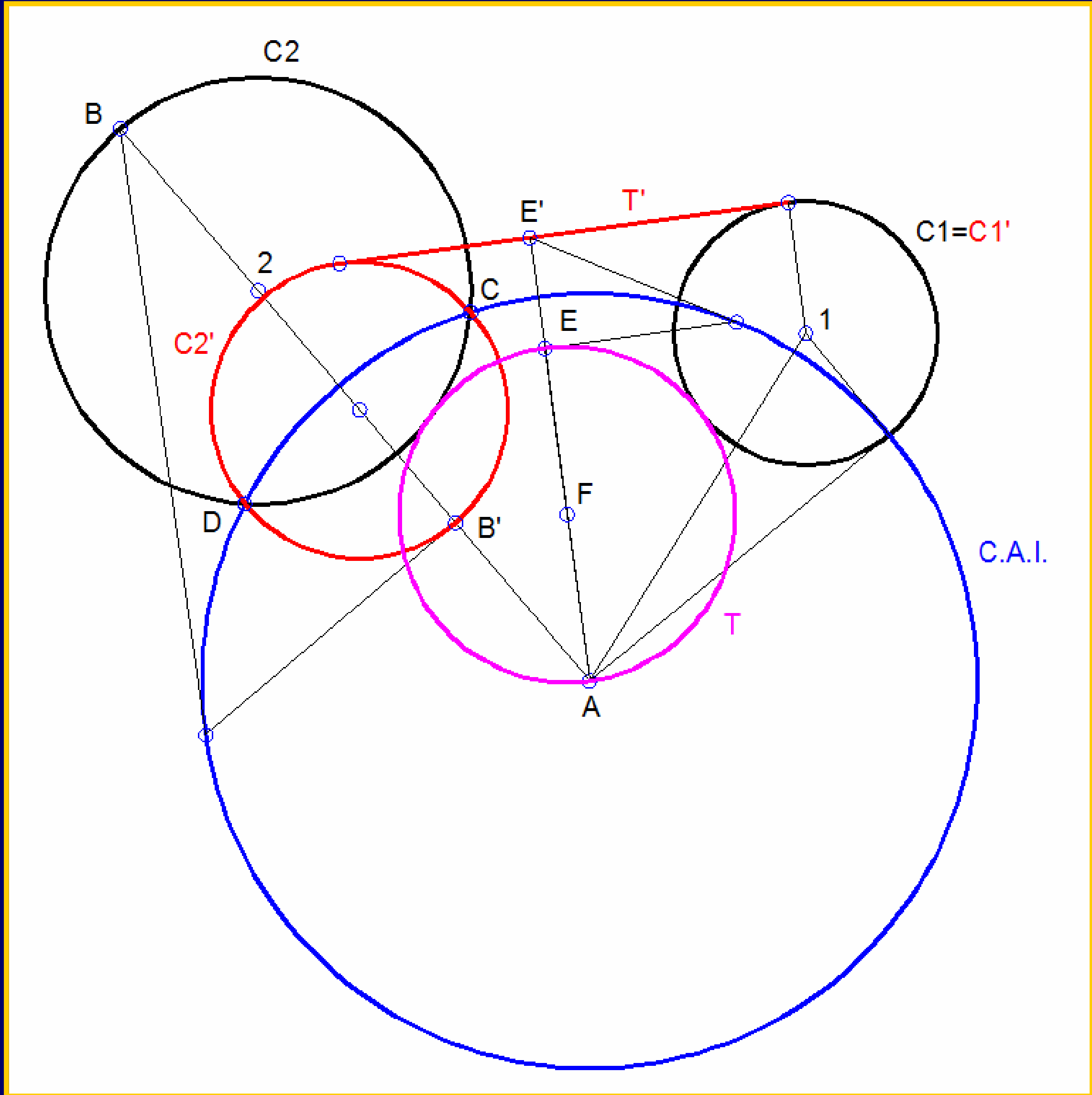
En el caso de **T1’** hallamos el inverso del punto **F’**, qu será el punto **F**, las circunferencia inversa, **T1** será la que pase por **A** y **F** y su centro sea el punto medio de **AF**.



En el caso de **T2’**, tenemos que corta a la circunferencia de autoinversión en **D** y **E**, que serán puntos dobles y, por tanto, pertenecientes a la circunferencia inversa, que también pasará por **A**, con lo que queda definida. Ya tenemos las dos soluciones **T1** y **T2**.

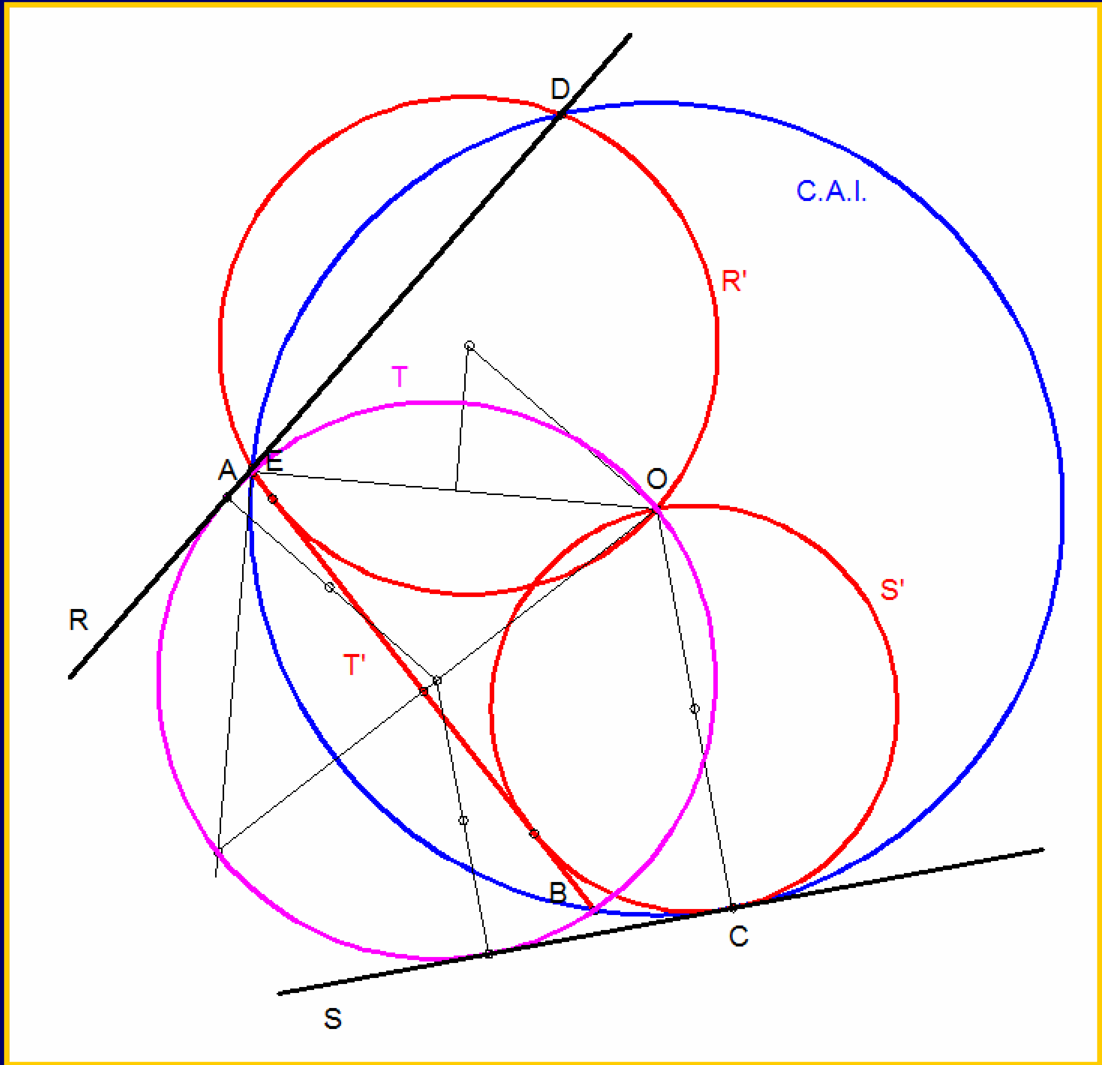
Circunferencia tangente a dos dadas que pasa por un punto

Dados **C1**, **C2** y **A**. Se elige el punto **A** como centro de inversión y se elige una circunferencia de autoinversión de modo que la inversa de una de las circunferencias, **C1**, sea ella misma. Hallamos la inversa de **C2**, para lo que hallamos el inverso de **B** y ya tenemos las circunferencia **C2’**, que pasará por **C**, **B’** y **D**. A continuación trazamos la tangente común a **C1’** y **C2’** que es **T’** y le hallamos su inversa, para lo cual hallamos el inverso del punto **E’**, que es **E**. La inversa de la tangente **T’** es la circunferencia **T**, que pasa por **E** y por el centro de inversión **A**. Esta circunferencia pasa por **A** y es tangente a **C1** y **C2**.



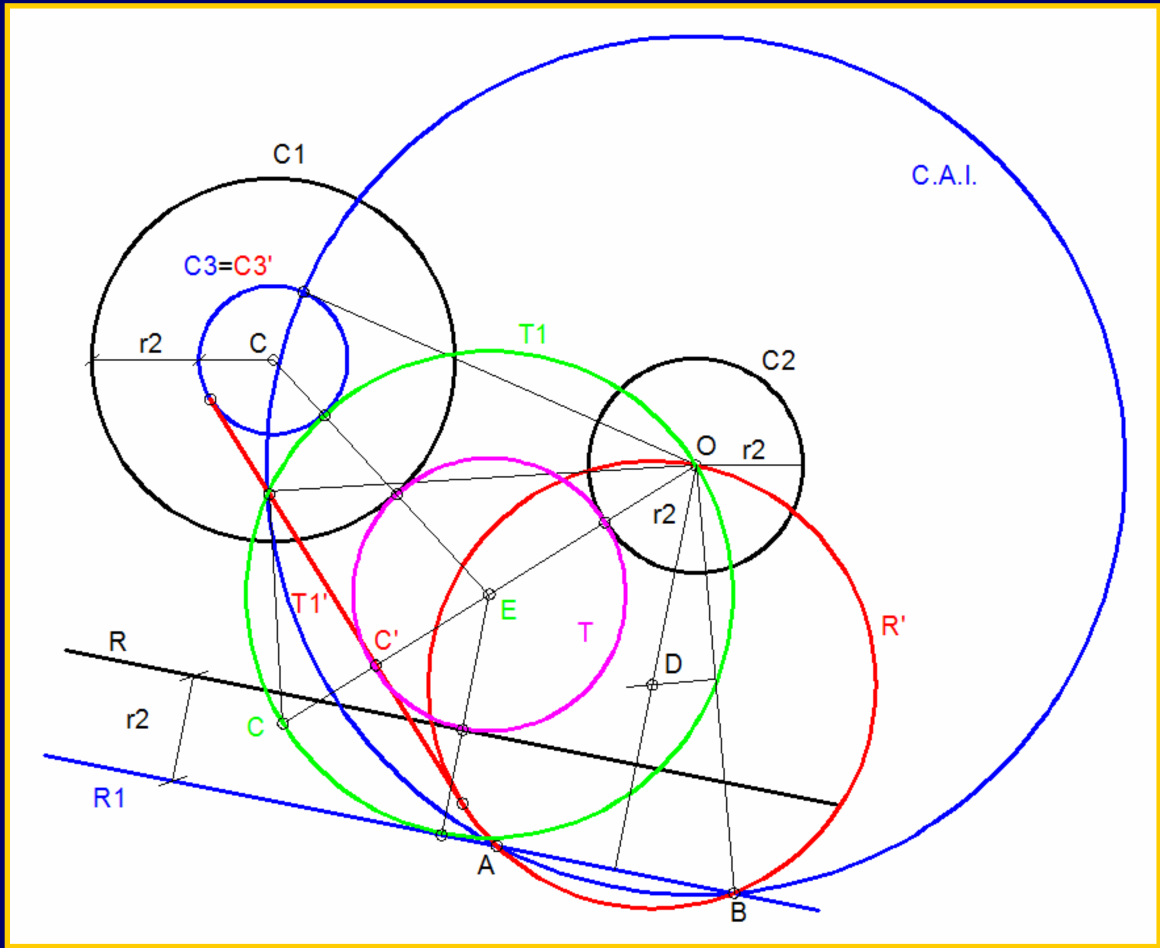
Circunferencia tangente a dos rectas y que pasa por un punto

Dados **O**, **R** y **S**. Se elige como centro de inversión el punto **O**. Elegimos como circunferencia de autoinversión una tangente a una de las rectas (**S**). Hallamos las inversas de las rectas. La de **S** es una circunferencia, **S'**, que pasa por el punto de tangencia **C** y por **O**. La de R es una circunferencia, **R'**, que pasa por los puntos dobles **D** y **E** y por el centro de inversión **O**. A continuación hallamos una tangente, **T'**, común a las circunferencias **R'** y **S'** y la prolongamos hasta que corte a la circunferencia de autoinversión en los puntos **A** y **B**. Por último, hallamos la inversa de esta tangente que es una circunferencia que pasa por los puntos dobles **A** y **B** y por el centro de inversión **O**, siendo la solución del problema.



Circunferencia tangente a dos dadas y a una recta

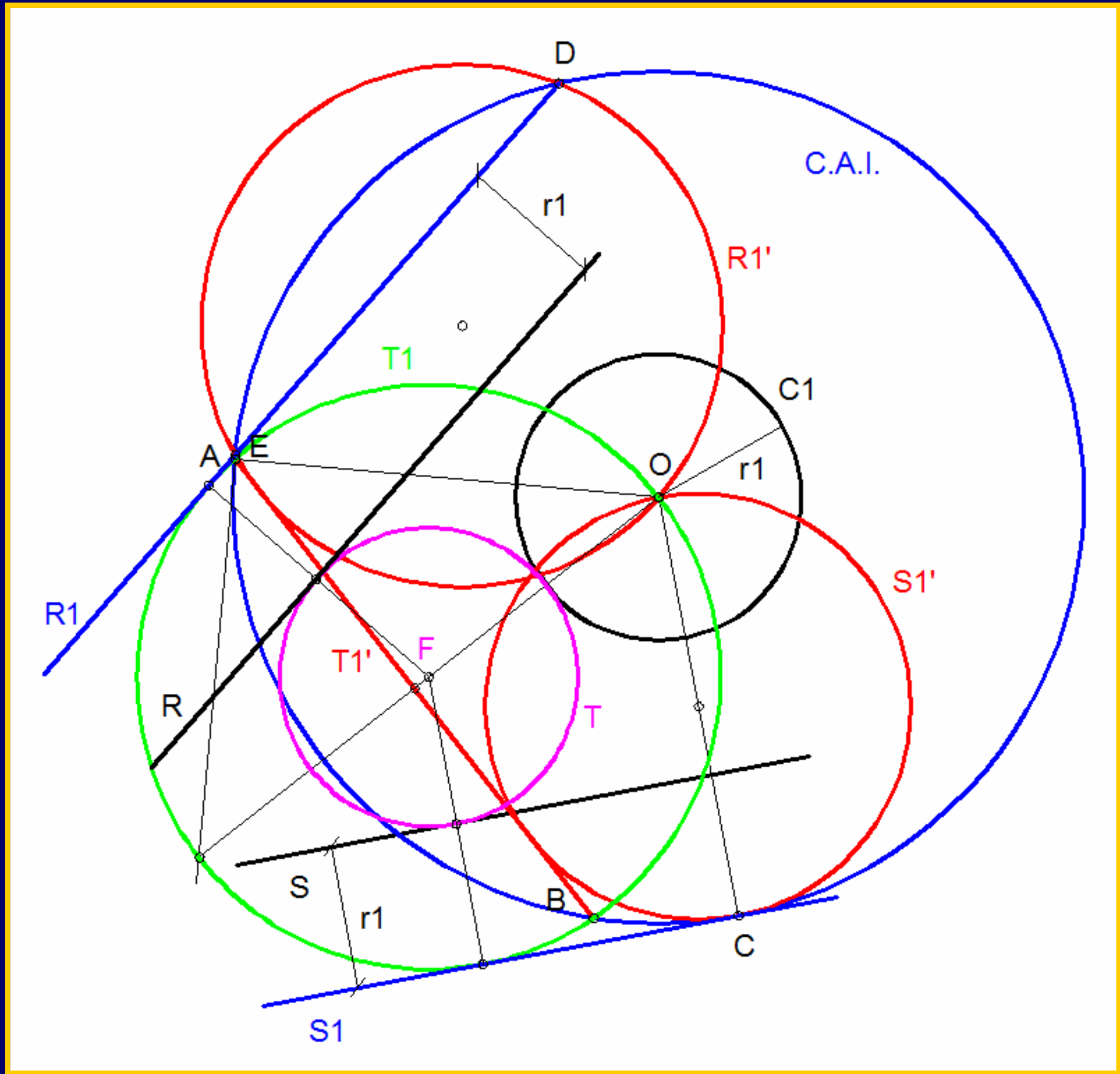
Dados **C1**, **C2** y **R**. Cuando no tenemos ningún punto, se elige como centro de inversión el centro de una circunferencia, en este caso **O** (centro de **C2**). Seguimos trazando una circunferencia **C3** cuyo radio es el de **C1** menos el de **C2** (que es **r2**). También tenemos que desplazar paralelamente la recta **R** una distancia igual al radio de **C2**, obteniendo **R1**. Ahora el problema ha cambiado a uno ya resuelto, que es hallar la circunferencia tangente a una dada (**C3**), a una recta (**R1**) y que pasa por un punto (**O**). Resolviéndolo, se obtiene la circunferencia **T1**, que cumple estas condiciones.



Para obtener la circunferencia buscada, tan solo tenemos que trazar una concéntrica con **T1** pero con un radio resultante de restarle "**r2**" al radio de **T1**. Así obtenemos la solución **T**.

Circunferencia tangente a otra dada y a dos rectas

Dados **C1**, **R** y **S**. Como no tenemos ningún punto, se elige como centro de inversión el centro de la circunferencia, en este caso **O** (centro de **C1**). Desplazamos paralelamente las recta **R** y **S** una distancia igual a “r1” (radio de **C1**), obteniendo **R1** y **S1**. Ahora el problema ha cambiado a uno ya resuelto, que es hallar la circunferencia tangente a dos rectas (**R1** y **S1**) y que pasa por un punto (**O**). Resolviéndolo, se obtiene la circunferencia **T1**, que cumple estas condiciones. Para obtener la circunferencia buscada, tan solo tenemos que trazar una concéntrica con **T1** pero con un radio resultante de restarle “**r1**” al radio de **T1**. Así obtenemos las solución **T**.



Circunferencia tangente a otras tres dadas

Dados **C1**, **C2** y **C3**. Como no tenemos ningún punto, se elige como centro de inversión el centro de una circunferencia, en este caso **O** (centro de **C1**). Trazamos circunferencias concéntricas con **C2** y **C3** pero con radio resultado de restarle al radio de estas circunferencias el radio de **C1**. Ahora el problema ha cambiado a uno ya resuelto, que es hallar la circunferencia tangente a dos dadas (**C4** y **C5**) y que pasa por un punto (**O**). Resolviéndolo, se obtiene la circunferencia **T1**, que cumple estas condiciones. Para obtener la circunferencia buscada, tan solo tenemos que trazar una concéntrica con **T1** pero con un radio resultante de sumarle o restarle (según la tangente elegida) "**r1**" al radio de **T1**. Así obtenemos las solución **T**.