Tangencias usando potencia y eje radical

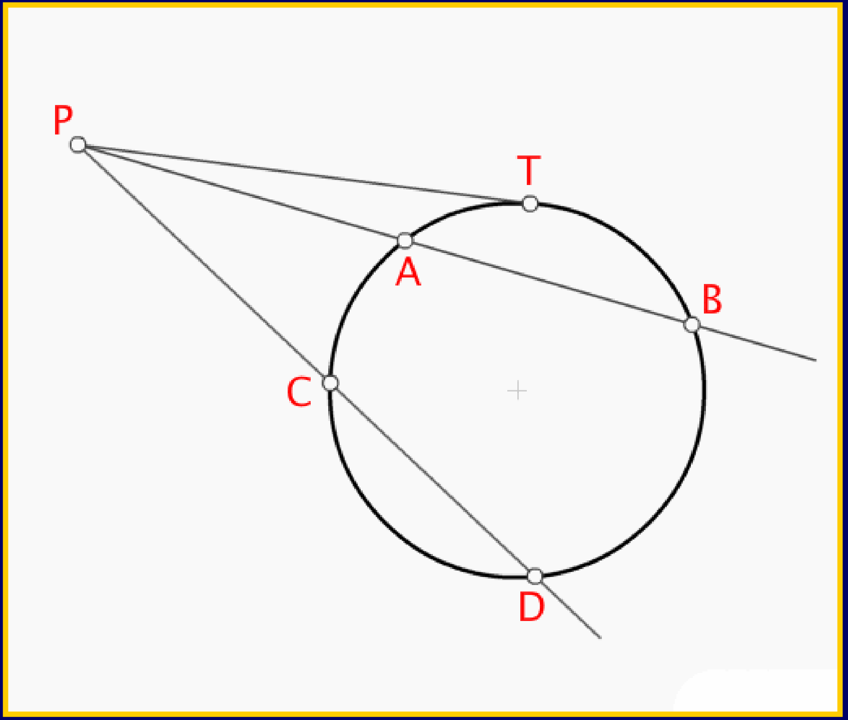
IES BELLAVISTA

Potencia

Se define la **potencia de un punto con respecto a una circunferencia** como el producto de los segmentos comprendidos entre dicho punto y la circunferencia, sobre cualquier recta que, pasando por él, sea secante o tangente a la circunferencia.

El valor de la potencia es el mismo independientemente de la recta elegida.

Si trazamos la recta tangente a la circunferencia por el punto, la potencia viene dada por el cuadrado del segmento comprendido entre el punto y el punto de tangencia.

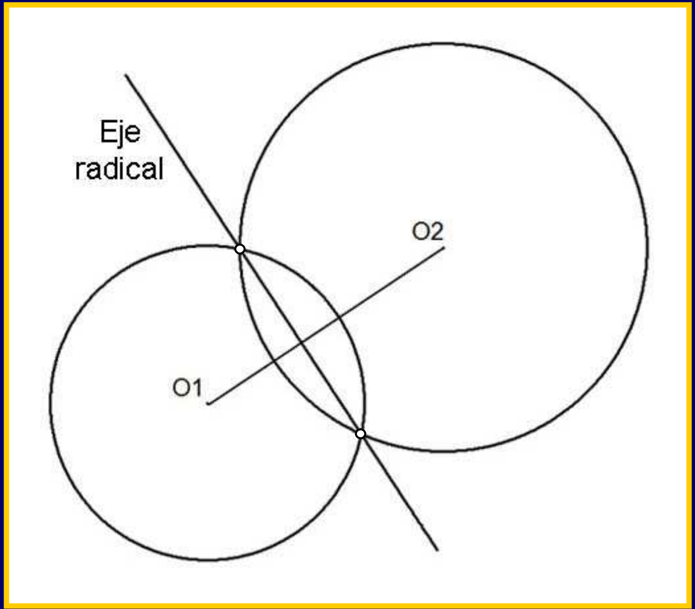


Potencia = $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD} = \overline{PT}^2$

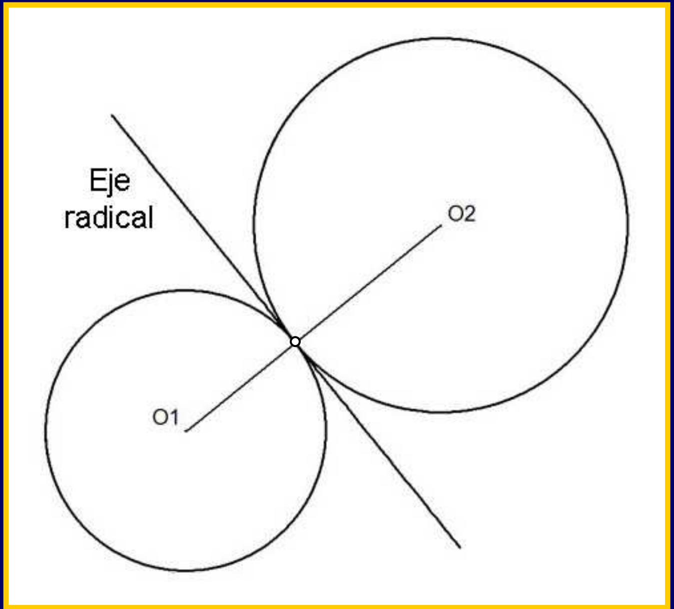
Eje radical

Se define el **eje radical** como el lugar geométrico de los puntos del plano que tienen igual potencia con respecto a dos circunferencias. Siempre es una recta perpendicular al segmento que une los centros de las circunferencias.

Eje radical de dos **circunferencias secantes**: es la recta que pasa por los dos puntos de intersección.



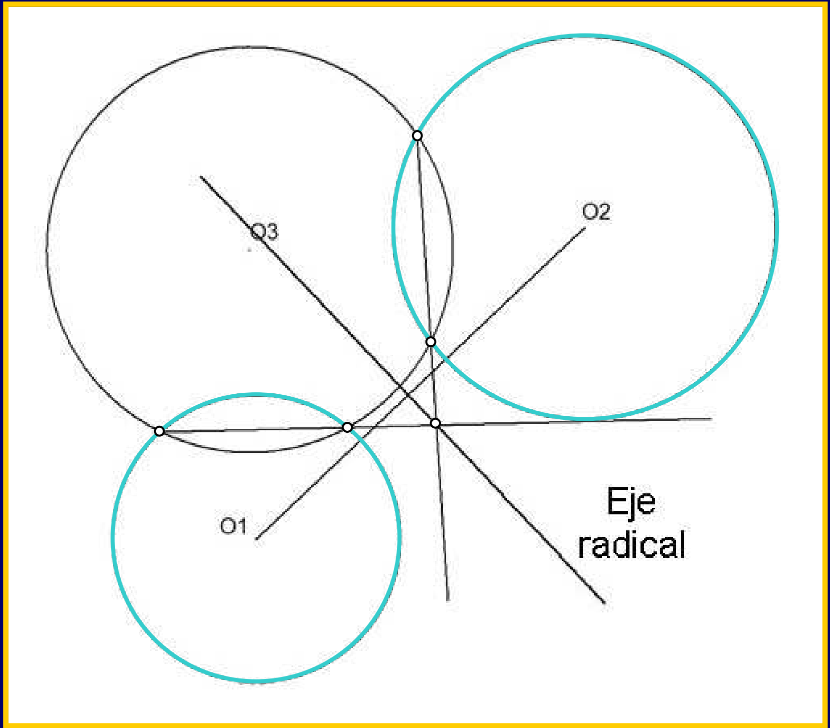
Eje radical de dos **circunferencias tangentes**: es la recta que pasa por el punto de tangencia.



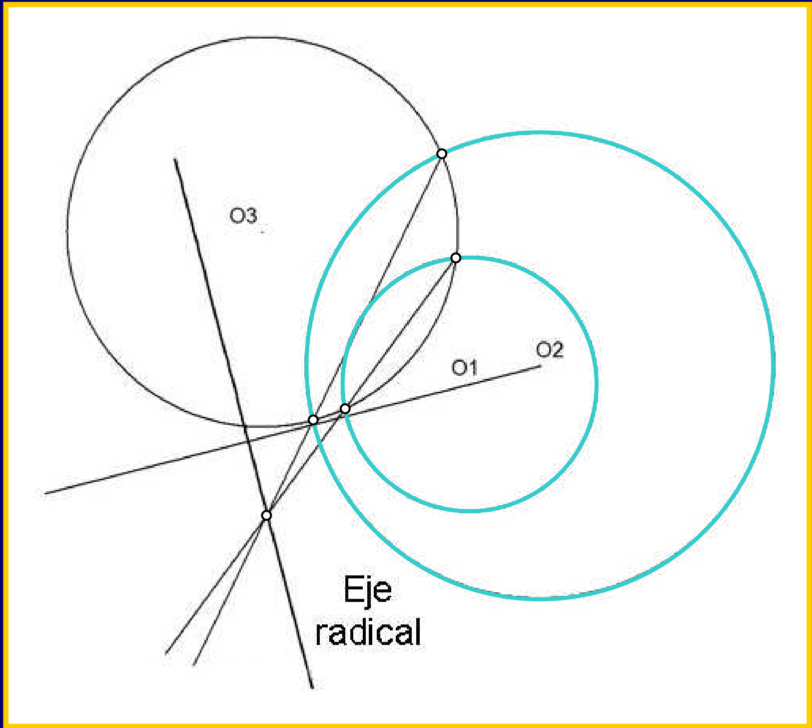
Eje radical

Para hallar el **eje radical de dos circunferencias exteriores o interiores** se utiliza una circunferencia auxiliar que corte a ambas. La intersección de los ejes radicales de ésta con las otras dos pertenece al eje radical de las dos circunferencias dadas.

Circunferencias exteriores



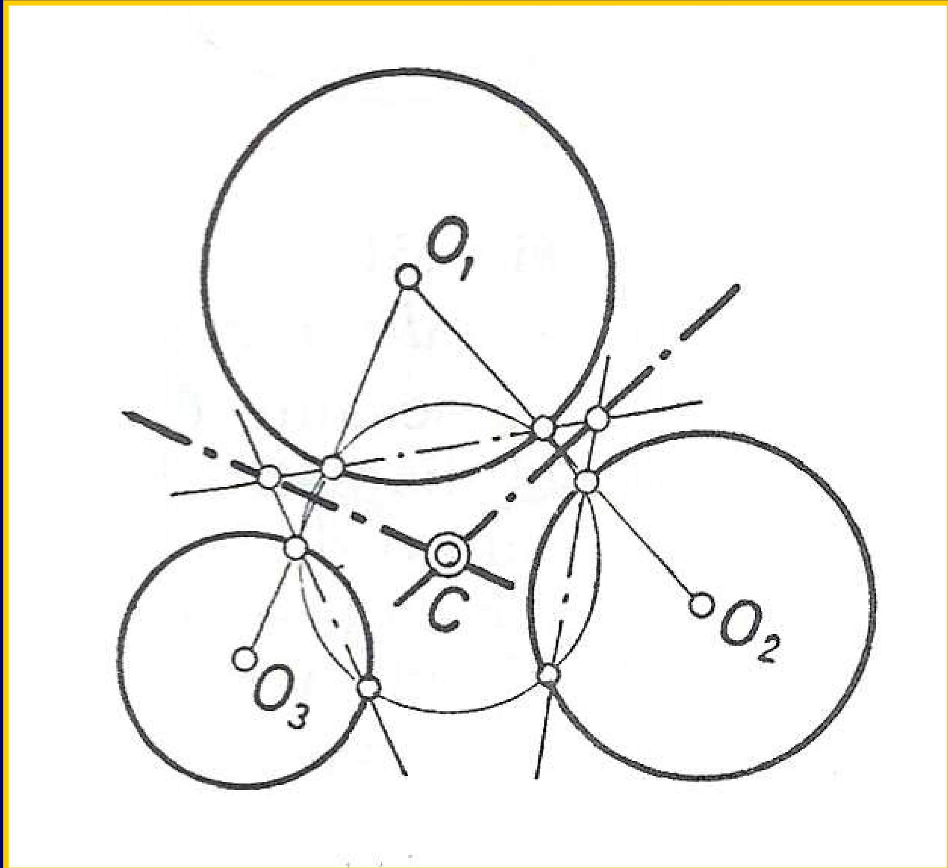
Circunferencias interiores



Centro radical

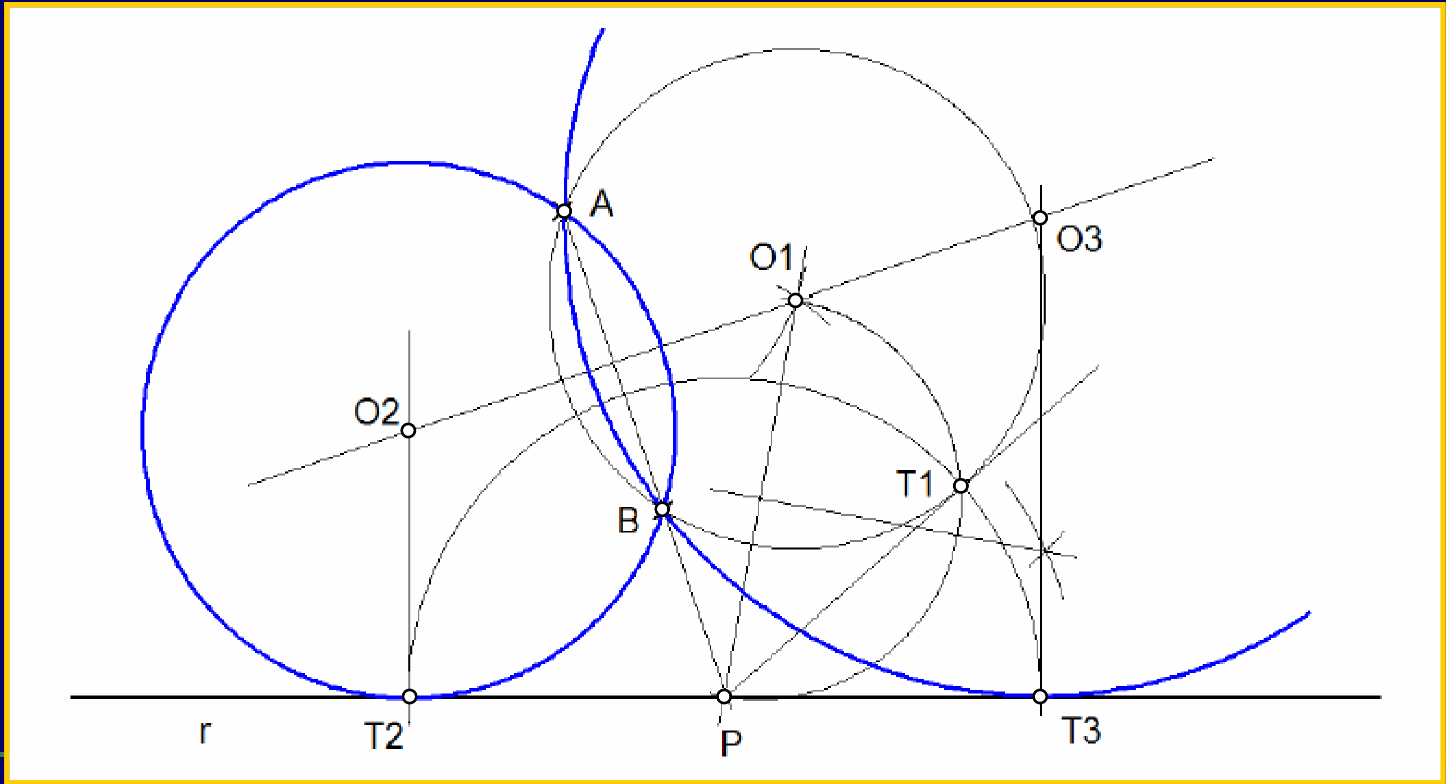
Se denomina **centro radical de tres circunferencias** al punto de intersección de sus ejes radicales. Este punto tendrá la misma potencia por respecto a las tres circunferencias.

Para determinarlo es suficiente trazar dos de los tres ejes radicales que se obtienen tomando las circunferencias dos a dos.



Circunferencia tangente a recta r y pasa por dos puntos A y B

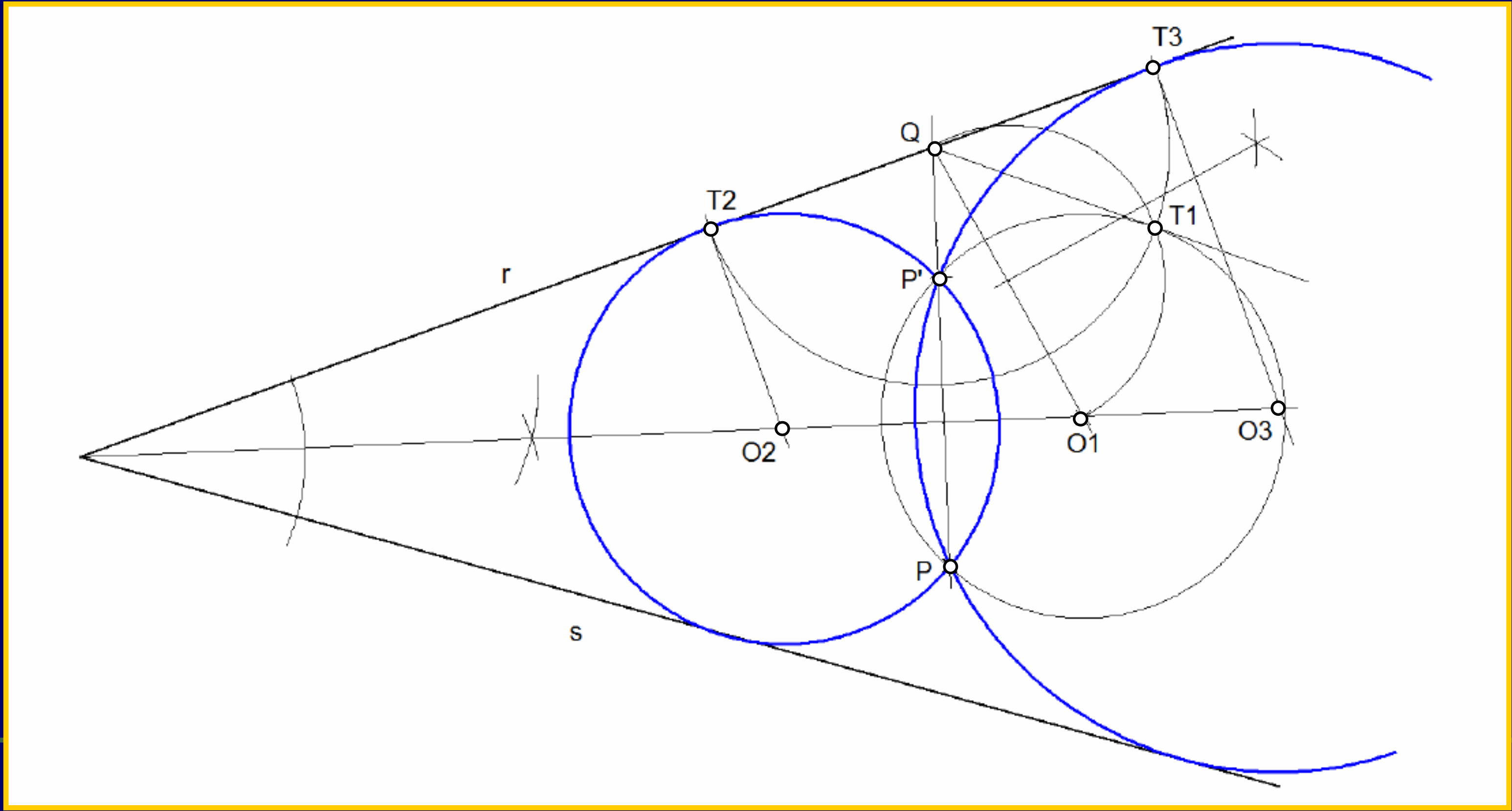
Dos soluciones. En la mediatriz de **AB** están los centros. La recta que pasa por **A** y **B** es el **eje radical**. Trazamos una circunferencia auxiliar que pase por **A** y **B** (la de centro $\mathbf{O_1}$). La prolongación de **AB** nos da **P** en la recta. Por **P** trazamos la tangente a la circunferencia auxiliar y nos da el punto de tangencia $\mathbf{T_1}$. Con centro en **P** y radio $\mathbf{PT_1}$ hallamos los puntos de tangencia $\mathbf{T_2}$ y $\mathbf{T_3}$ de las circunferencias buscadas, que tienen que tener la misma potencia respecto a **P** que la auxiliar. Trazamos perpendiculares a la recta por $\mathbf{T_2}$ y $\mathbf{T_3}$ y obtenemos los centros $\mathbf{O_2}$ y $\mathbf{O_3}$ en la intersección con la mediatriz de **AB**.



Circunferencia tangente a dos rectas y pasa por un punto P

Dos soluciones. En la bisectriz de **r** y **s** están los centros. Trazamos el simétrico de **P** respecto a la bisectriz, obtenemos **P'**. Las circunferencias buscadas deben pasar por **P** y **P'**. El problema queda reducido al caso anterior, es decir, de hallar las circunferencias tangentes a la recta r que pasen por los puntos **P** y **P'**.

Trazamos una circunferencia auxiliar que pase por P y P' (la de centro O_1). La prolongación de PP' nos da Q en la recta. Por Q trazamos la tangente a la circunferencia auxiliar y nos da el punto de tangencia T_1. Con centro en Q y radio QT_1 hallamos los puntos de tangencia T_2 y T_3 con la recta r de las circunferencias buscadas, que tienen que tener la misma potencia respecto a Q que la auxiliar. Trazamos perpendiculares a la recta r por T_2 y T_3 y obtenemos los centros O_2 y O_3.



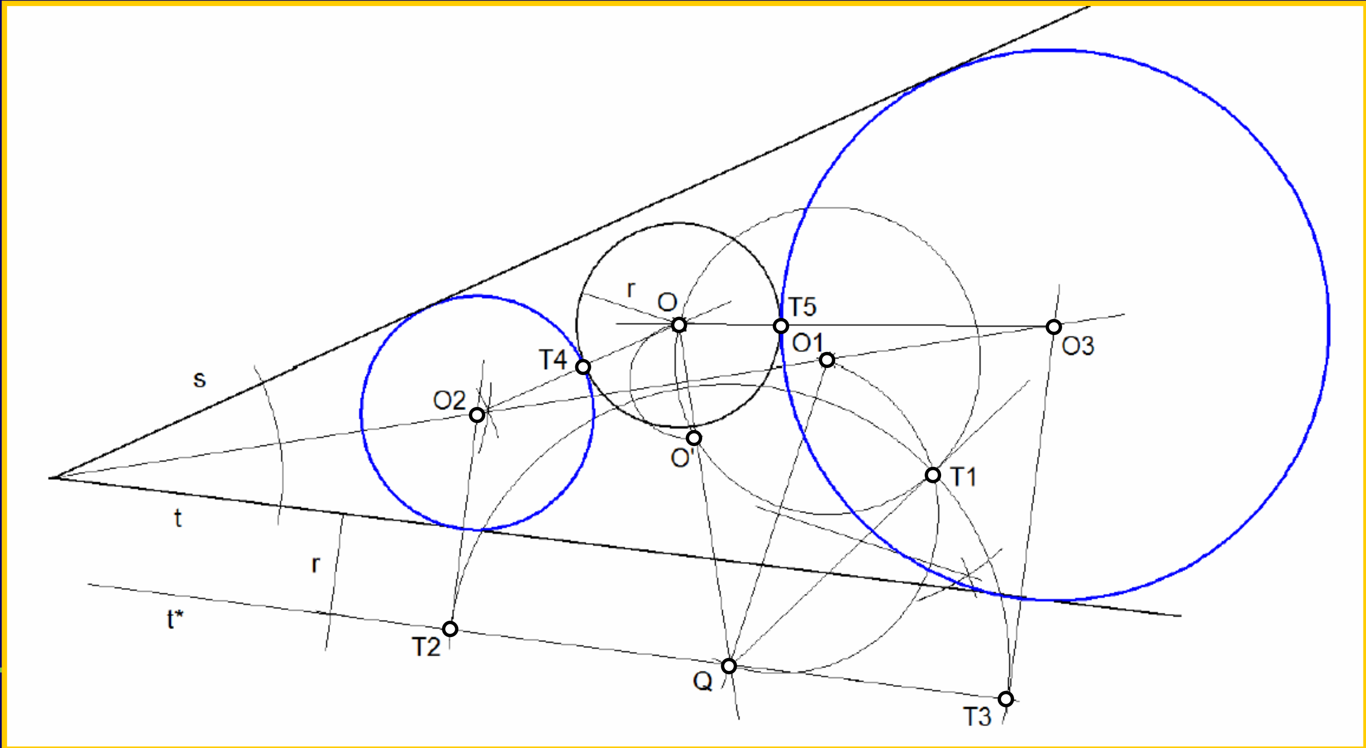
Circunferencia tangente a dos rectas y a una circunferencia

Cuatro soluciones. En la bisectriz de **s** y **t** están los centros. Trazamos una recta **t*** paralela a **t** a una distancia **r** igual al radio de la circunferencia dada. Trazamos el simétrico de **O** respecto a la bisectriz, obtenemos **O'**. El problema se reduce al caso anterior de hallar las circunferencias tangentes a **t*** que pasan por **O** y **O'**.

Trazamos una circunferencia auxiliar que pase por **O** y **O'** (la de centro O_1). La prolongación de **OO'** nos da **Q** en la recta **t***. Por **Q** trazamos la tangente a la circunferencia auxiliar y nos da el punto de tangencia T_1. Con centro en **Q** y radio QT_1 hallamos los puntos T_2 y T_3 en la recta **t***. Trazamos perpendiculares a **t*** por T_2 y T_3 y obtenemos O_2 y O_3 sobre la bisectriz.

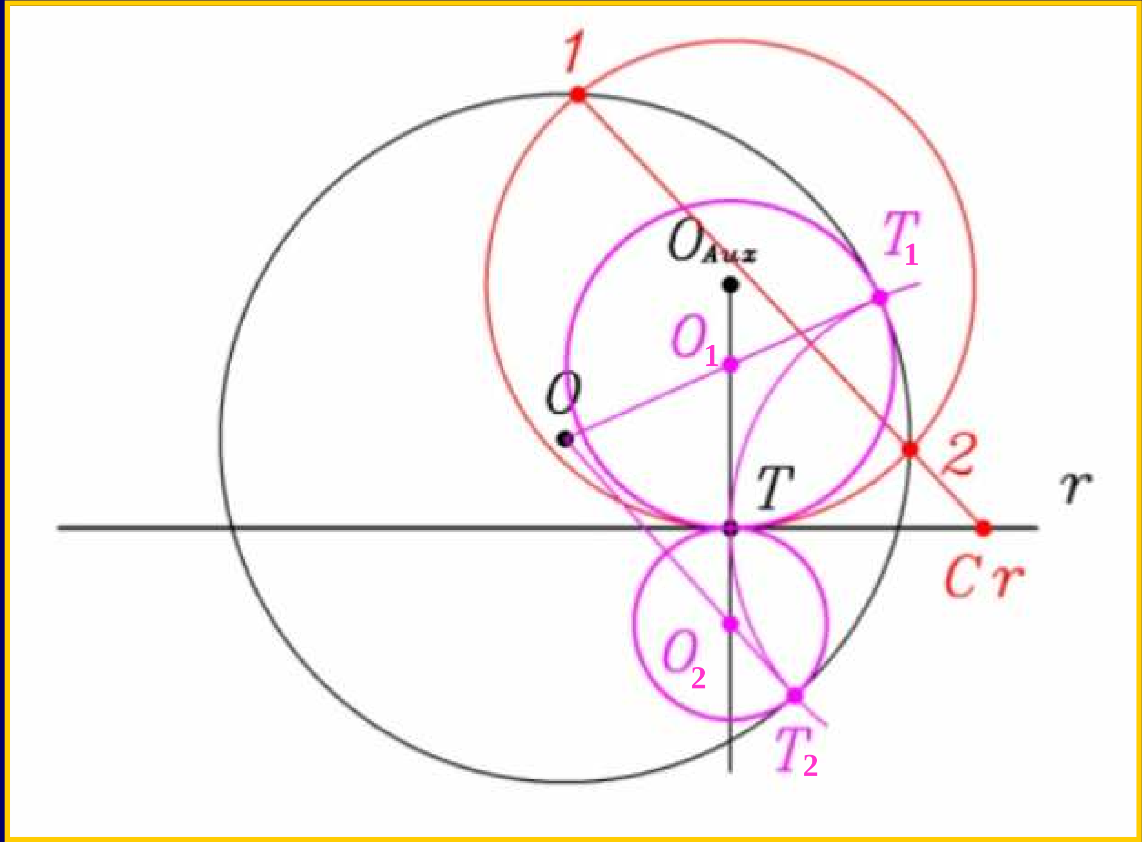
Unimos O_2 y O_3 con **O** (centro de la circunferencia dada) y obtenemos los puntos de tangencia T_4 y T_5. Las circunferencias buscadas tienen centros O_2 y O_3 y radios O_2T_4 y O_3T_5 respectivamente.

Nota: Si trazamos la paralela **t*** al otro lado de la recta **t** obtenemos las otras dos soluciones, siendo las soluciones cuatro en total.



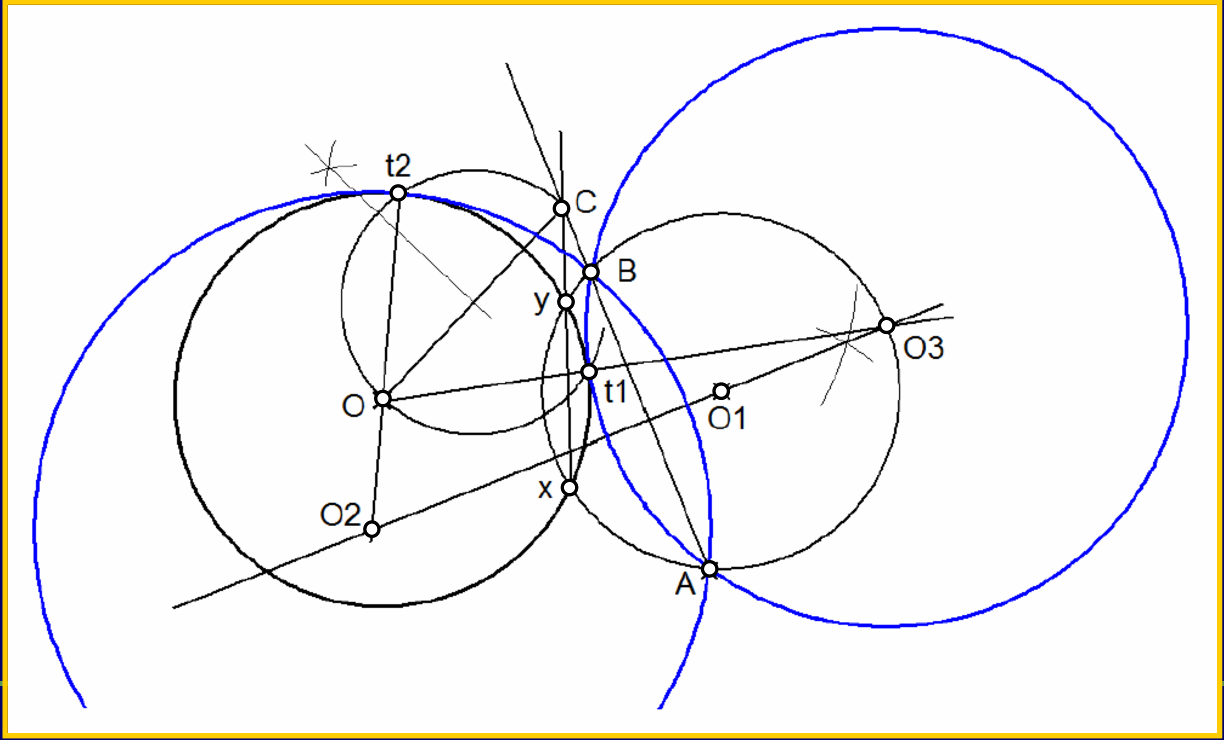
Circunferencia tangente a una dada y a una recta conocido el punto de tangencia en la recta

Dos soluciones. Las dos circunferencias solución tendrán sus centros en la perpendicular a **r** por **T** y tendrán a dicha recta por eje radical. Trazamos una circunferencia auxiliar cualquiera tangente a **r** por **T** que corte a la circunferencia dada en dos puntos (**1** y **2**). La recta **12** será el eje radical de la circunferencia auxiliar y la dada. El punto de intersección de la recta **12** y la recta **r** será el centro radical (**Cr**) de las cuatro circunferencias referidas, por lo que tendrá la misma potencia respecto a todas (**CrT^2**). Trazamos un arco de centro **Cr** y radio **CrT**, que corta a la circunferencia dada en los puntos de tangencia (**T_1** y **T_2**). Si unimos estos puntos con **O** obtenemos en la perpendicular a **r** por **T** los centros de las circunferencias solución (**O_1** y **O_2**).



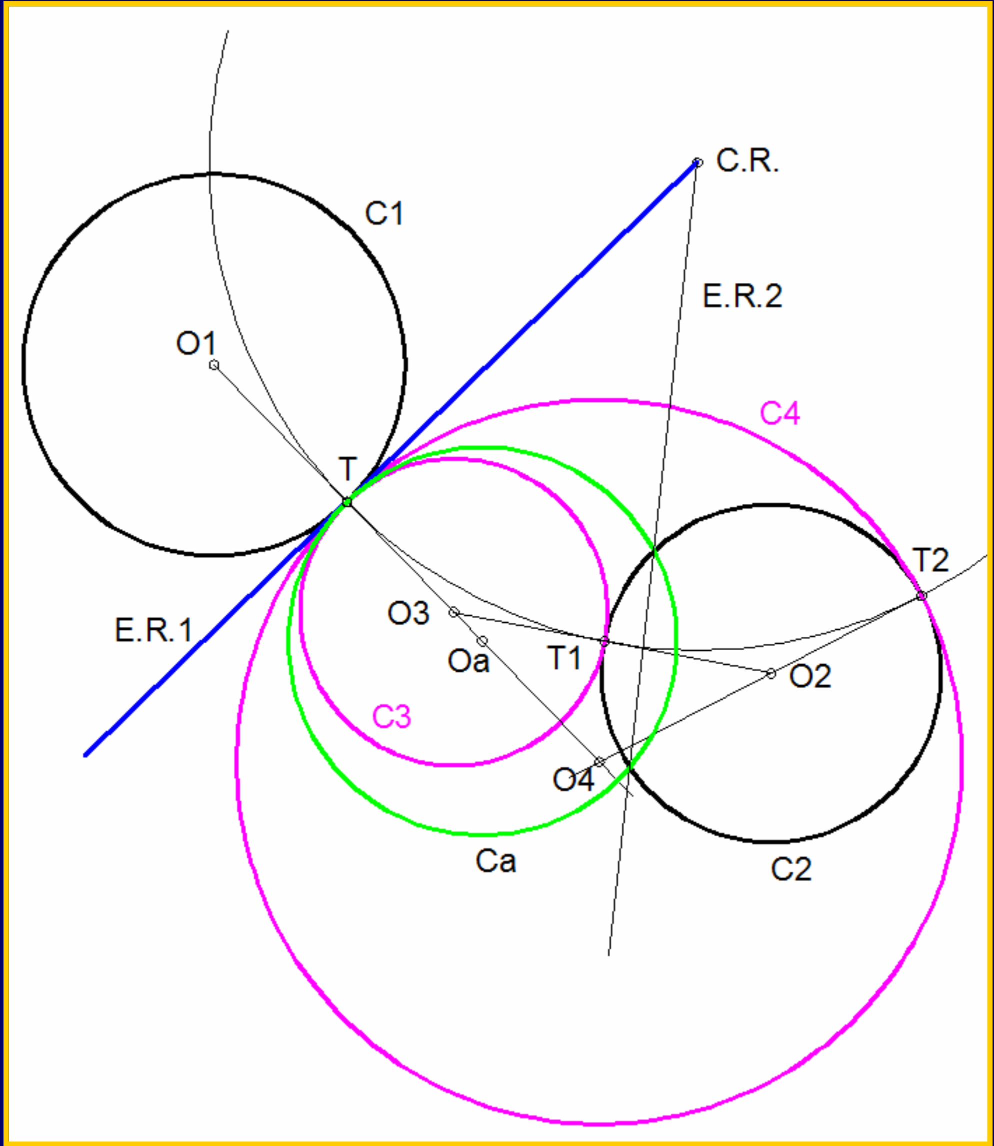
Circunferencia tangente a una dada y que pasa por dos puntos

Dos soluciones. En la mediatriz de **AB** estarán los centros. Trazamos una circunferencia auxiliar que pase por **A** y **B** (la de centro **O_1**). La recta que pasa por **A** y **B** será eje radical de la circunferencia auxiliar y de las dos buscadas. La circunferencia auxiliar corta a la dada en los puntos **x** e **y**. La recta que los une será el eje radical de estas dos circunferencias. La intersección de los dos ejes radicales, el punto **C**, será el centro radical de todas las circunferencias por lo que tendrá la misma potencia respecto a todas ellas. Hallamos los puntos de tangencia de las tangentes desde **C** a la circunferencia dada, **t_1** y **t_2**. Estos puntos también serán de tangencia desde **C** de las circunferencias buscadas. Unimos los puntos **t_1** y **t_2** con **O** y prolongamos hasta cortar a la mediatriz de **AB**, obteniendo los centros **O_2** y **O_3**.



Circunferencias tangentes a otras dos dadas y dado el punto de tangencia en una de ellas

Dos soluciones. Dados **C_1**, **C_2** y **T**. Los centros de las circunferencias buscadas deben estar en la recta **O_1T**. Trazo el eje radical (**E.R.1**) de la circunferencia **C_1** y las buscadas, que será una perpendicular a **O_1T** por **T**. Trazo una circunferencia auxiliar **Ca** con centro **Oa** en la recta **O_1T** que corte a la circunferencia **C_2**. Trazo el eje radical (**E.R.2**) de **Ca** y **C_2**. El punto de intersección de los dos ejes radicales (**C.R.**) será el centro radical de **C_1**, **C_2**, **Ca** y de las circunferencias buscadas. Este punto debe tener la misma potencia para todas las circunferencias que será **OT^2**. Por tanto, trazo un arco de radio **OT** que corta a **C_2** en los puntos **T_1** y **T_2** que serán los puntos de tangencia de **C_2** con las circunferencias buscadas. Uno **O_2** con **T_1** y **T_2** hasta cortar a **O_1T** en **O_3** y **O_4**, centros de las circunferencias **C_3** y **C_4** buscadas.



Intersección de una recta con una parábola

Se trata de un ejercicio de curvas cónicas, pero como se resuelve usando los conceptos de **potencia** y **eje radical**, lo pondremos aquí. Nota: repasar la definición de la parábola.

Supongamos que nos dan la directriz (**d**) y el foco (**F**) de la parábola y la recta (**r**). Cada punto en los que la recta corta a la parábola debe cumplir que su distancia al foco y a la directriz debe ser la misma, por lo que unas circunferencias con centro en ellos y radio hasta el foco deben ser tangentes a la recta directriz.

Todas las circunferencias con centro en la recta y que pasan por el foco tendrán como eje radical una perpendicular a la recta por el foco. Trazamos dicha perpendicular y obtenemos su punto de corte (**P**) con la directriz. Al pertenecer **P** al eje radical debe tener la misma potencia para cualquiera de las circunferencias anteriores; trazamos una cualquiera (la de centro **c**) y le trazamos la tangente desde **P**. Con centro en **P** y radio hasta el punto de tangencia (**T**) trazamos arco hasta cortar a la directriz en dos puntos (**A** y **B**). Trazamos perpendiculares a la directriz por **A** y **B** hasta cortar a la recta en **I1** e **I2**. Estos son los puntos de intersección de recta y parábola.