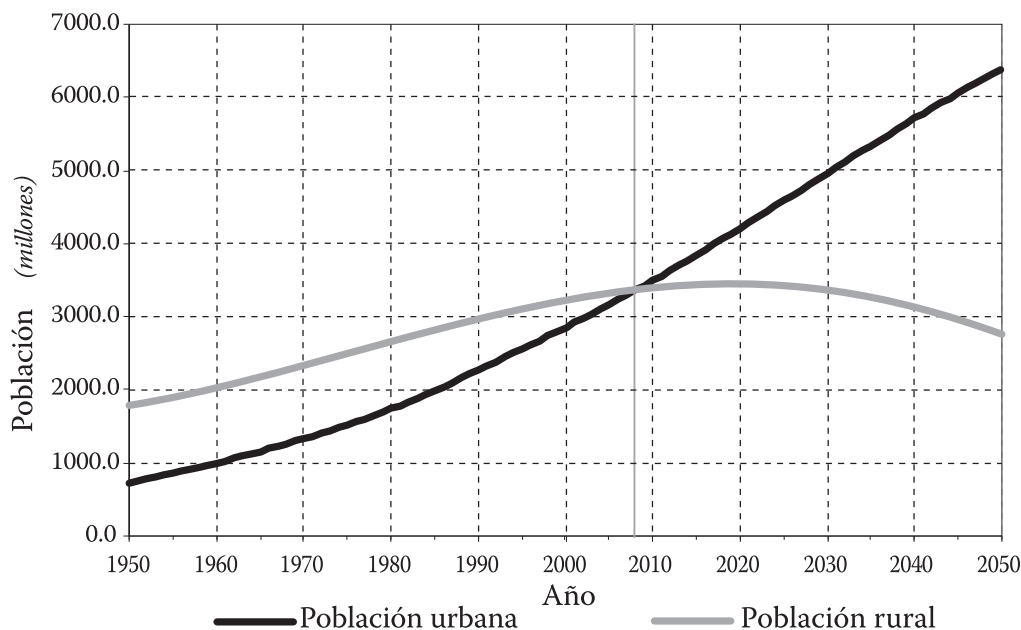




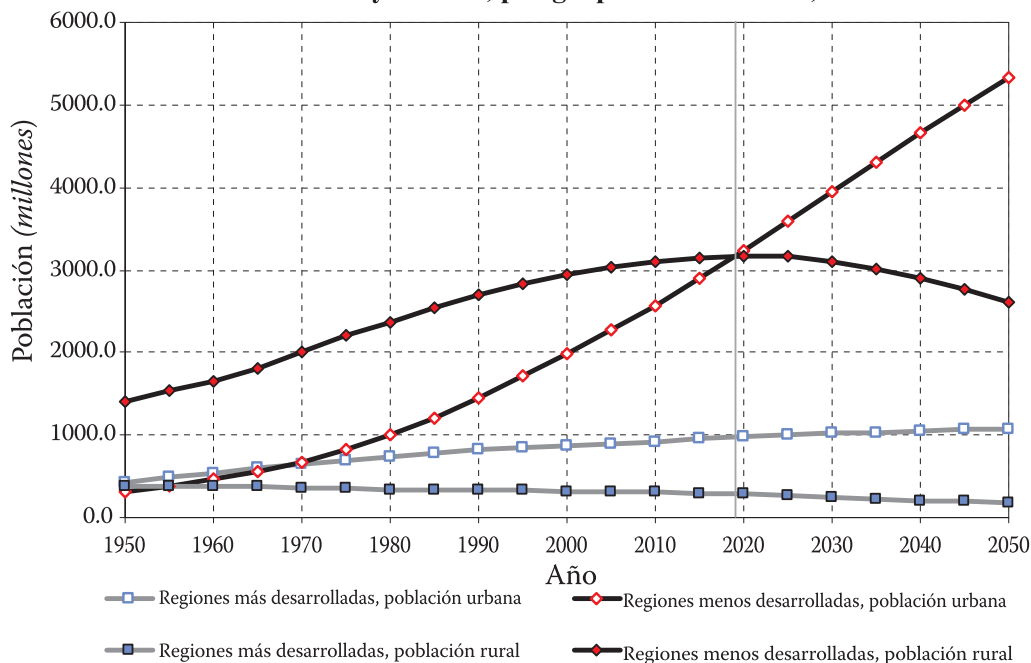
Ciudad y población

La ONU en su Informe *Perspectivas sobre la Urbanización Mundial* presenta estos dos gráficos:

Poblaciones rural y urbana del mundo, 1950-2050



Población rural y urbana, por grupos de desarrollo, 1950-2050



Fíjate que para expresar de forma sencilla y a la vez hacer comprensible la complejidad de matices de una realidad tan decisiva, el medio más eficaz son las gráficas de funciones.



A continuación te proponemos que tú mismo obtengas conclusiones. Los resultados a que llegues tendrán que ser necesariamente aproximados, ya que deberás realizar los razonamientos y cálculos a partir de los datos aproximados que obtengas de ambas gráficas.

Cuestiones

1. ¿Qué población mundial había en 1950? ¿En qué porcentajes era rural y urbana?
2. ¿Qué población mundial y qué porcentajes de población rural y urbana hay en estos momentos? ¿Cuáles se prevén para 2050?
3. En las tres próximas décadas se espera un ritmo de crecimiento uniforme de la población urbana. ¿Sabrías expresarlo con un número (tasa de crecimiento anual)?
4. Utiliza el lenguaje de funciones y de gráficas para describir con detalle la tendencia prevista para la población rural mundial hasta 2050.
5. ¿Te parece que en algún momento se ha producido un punto de inflexión en la población rural? ¿Y en la urbana? En caso de respuestas afirmativas, ¿qué significado demográfico han tenido esos puntos singulares de las gráficas?
6. ¿Cuánta población vive hoy en día en las regiones más desarrolladas y cuánta en las regiones menos desarrolladas? ¿Qué porcentajes de la población mundial representan? ¿Cuáles serán esos datos en 2050?
7. En las regiones más desarrolladas, hoy en día, ¿cómo se reparte la población entre los medios rural y urbano (en porcentajes)? ¿Y en las regiones menos desarrolladas?
8. Compara las gráficas de las regiones más y menos desarrolladas y responde: ¿en qué regiones va a experimentar mayor crecimiento la población urbana con respecto a la población rural? Puedes expresarlo con ayuda de las tasas de variación media.
9. Como consecuencia de esos crecimientos desiguales, ¿habrá variado mucho la situación actual?; ¿qué regiones del mundo serán entonces las más urbanizadas?



Paseo matemático por la ciudad

Vamos de tiendas

Hace poco, una noticia de prensa decía: *El Gobierno británico envía asesores a las rebajas, ya que la cuarta parte de los ciudadanos ignora las nociones matemáticas básicas para entender las ofertas*. No creas que es un problema exclusivo de ese país; también en España, aunque todos somos consumidores, no todos sabemos razonar qué es lo que nos conviene en cada situación. Para saberlo, hay que usar los números y el sentido común. Lo primero, comprar sólo lo que necesitamos, no comprar por comprar. Veámoslo en la práctica.

Es época de rebajas. He quedado con mis amigos Juan y Laura para ir de tiendas y comprar algunas cosas aprovechando las mejores ofertas que encontremos.

¿Misma oferta?

En una tienda vemos esta oferta. *todo al 50%*. Y en la tienda de al lado, esta otra: *compra dos unidades y paga una*. Juan dice que da igual elegir una u otra tienda, porque el descuento es el mismo, pero yo no veo claro cuál es la mejor oferta. ¿Tú que opinas?



Segunda rebaja

En otra tienda nos dicen: *Primero habíamos rebajado los precios el 20% y luego los hemos rebajado un 30%. Ahora todo está a mitad de precio*. ¿Es correcto?

Precisión

Observa la foto de la derecha. Se ve que en esa tienda quieren ser muy precisos, al céntimo. ¿Qué porcentaje de descuento hacen? ¿Consiguen la precisión deseada?

¿IVA antes o después?

Laura ha comprado un MP3 en un comercio donde se anuncia: *todo rebajado*





un 30%. Junto al precio aparece un asterisco (*) y más abajo está escrita, en letra pequeña, la explicación de ese símbolo. Pone: * *Precio sin IVA*. Eso significa que Laura deberá pagar además un 16% en concepto del Impuesto del Valor Añadido (IVA). En la Caja surge la polémica: el vendedor calcula el precio rebajado en un 30% y después lo incrementa en el 16% de IVA, diciendo que así se paga menos impuesto, porque se calcula sobre un precio menor. Pero Laura quiere que primero se calcule el precio más el 16% de IVA y después, al precio que resulte, se le aplique el 30% de descuento; pues dice que así va a conseguir un mayor descuento, al ser calculado sobre un número mayor. ¿Quién tiene razón? ¿Qué forma de cálculo le conviene a Laura?

Aunque comiences pensando el problema en casos particulares (algunos ejemplos), hay que llegar a dar un razonamiento general, que sea válido para cualquier precio posible.

Elegir ofertas

Hay muchas ofertas entre las que elegir. Hemos seleccionado las siguientes:

- *Comprando tres productos cualesquiera le regalamos el de menor precio.*
- *La segunda unidad a mitad de precio.*
- *Todo rebajado un 30%.*
- *En todas sus compras: vale descuento del 35% para su próxima compra.*

a) Ordena las cuatro ofertas de mejor a peor, de acuerdo, exclusivamente, con sus porcentajes de descuento.

Para responder a las siguientes preguntas, recuerda: ¡sólo vamos a comprar lo que necesitamos y hemos previsto comprar antes de salir de casa!

- b) Supongamos que lo que queremos comprar son cajas de leche para guardar en la despensa. En ese caso, ordena las cuatro ofertas de mejor a peor.
- c) Supongamos que lo que queremos comprar es un frigorífico. En ese caso, ordena las cuatro ofertas de mejor a peor.

La cuenta en un bar

Ir de tiendas nos ha cansado y abierto el apetito. Al pasar los tres amigos frente a un bar vemos que anuncian: Bocadillos de calamares de 3,35 €. Decidimos entrar y pedimos para cada amigo uno de esos bocadillos y un refresco, los tres iguales. Al pedir la cuenta nos dicen que son 14 €. ¿A cuánto nos cobran cada refresco? ¿Qué opinas en este caso?



Geometría en la ciudad

El camino más corto

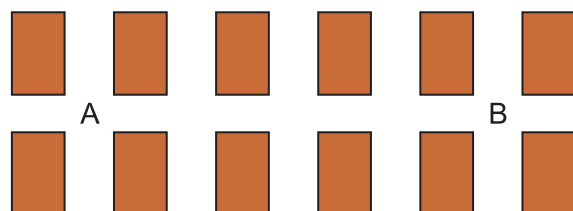
La ciudad moderna fue urbanizada siguiendo tres modelos geométricos:

Modelo Lineal: las casas se construyen a ambos lados de una vía de comunicación principal. El crecimiento de la ciudad siempre es lineal y paralelo a esa vía.

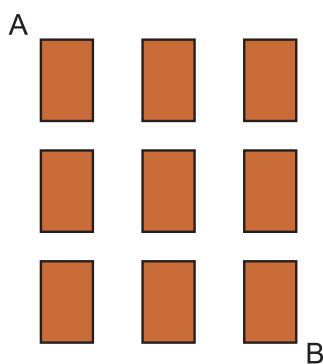
Modelo Ortogonal: las calles se cortan en ángulos rectos: siguen dos direcciones perpendiculares y en cada dirección son paralelas. Esto produce manzanas rectangulares.

Modelo Radioconcéntrico: Está centrado en una plaza, rodeada de calles en círculos concéntricos. Del centro salen avenidas rectas que las unen; son los radios de esa trama circular.

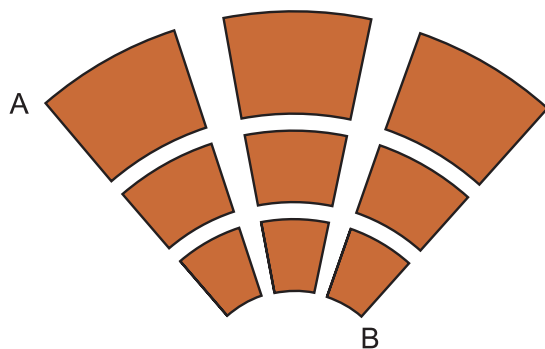
A continuación tienes gráficos ilustrativos de los tres modelos:



Modelo Lineal



Modelo Ortogonal



Modelo Radioconcéntrico



Cuestiones

1. En la Geometría Euclídea del Plano, la que conoces, la distancia más corta entre dos puntos es el segmento que los une; está sobre una línea recta. Pero, si circulamos por las calles de las ciudades casi nunca nos es posible seguir ese camino, ya que no podemos atravesar los edificios.

Para cada uno de los tres gráficos anteriores:

Traza el camino más corto que, circulando por la calle, une los puntos A y B .

Si en algún caso hay varios caminos que cumplen esa condición, di cuál es su número. Luego, encuentra una fórmula para calcular dicho número sin necesidad de trazarlos todos. Y por último, expresa cuál sería la fórmula para dos puntos A y B cualesquiera.

2. En la Geometría Euclídea del Plano se cumple la *Desigualdad Triangular*:

Si llamamos $d(A, B)$ a la distancia entre A y B : para tres puntos A , B y C cualesquiera

$$d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$$

y se cumple que $d(A, B) = d(A, C) + d(C, B)$ si y sólo si A , B y C están alineados, con C situado entre A y B .

Estudia si se cumple lo anterior en cada uno de los tres modelos de ciudad.

Aplicación práctica

Si fueras taxista, cartero o repartidor en una de esas ciudades, saber esas cuestiones te haría más fácil el trabajo.



Geometría en la ciudad

Circunferencias que no son redondas

En la *Ciudad Lineal*, las casas se construyen sólo a ambos lados de una calle principal.

La ciudad moderna ha sido urbanizada principalmente según el *Modelo Ortogonal*. Las calles se cortan en ángulos rectos: siguen dos direcciones perpendiculares y en cada dirección son paralelas. Esto produce manzanas rectangulares. Cuando esos cruces se producen a una distancia constante, las manzanas son cuadradas. Es la *Urbanización en Damero*.

Llamamos *Circunferencia* al conjunto de todos los puntos del plano que equidistan de un punto llamado *centro*; a esa distancia constante la llamamos *radio*.

En la Geometría Euclídea del Plano, la que conoces, una circunferencia es una curva cerrada con la conocida forma redonda y está formada por infinitos puntos. Pero, si el centro es un punto C de la calle en una ciudad, ¿cuántos puntos de esa ciudad estarán a una distancia constante r de ese centro? Y nos referimos a puntos de las calles, a los que se pueda llegar desde C siguiendo el camino más corto por las calles; no nos valen 'puntos teóricos' en el interior de los edificios.

Cuestiones

Primero, en la **urbanización lineal** y después en una **urbanización en damero**, responde:

1. ¿Cuántos puntos tiene una circunferencia?
2. Encuentra una fórmula que, sabiendo el radio r , nos dé ese número de puntos.

En el caso del damero, para facilitar las cosas, tomaremos como unidad de medida la longitud de una manzana de casas. Pronto verás que hay varias situaciones posibles que se pueden estudiar. **Estudia los siguientes casos:**

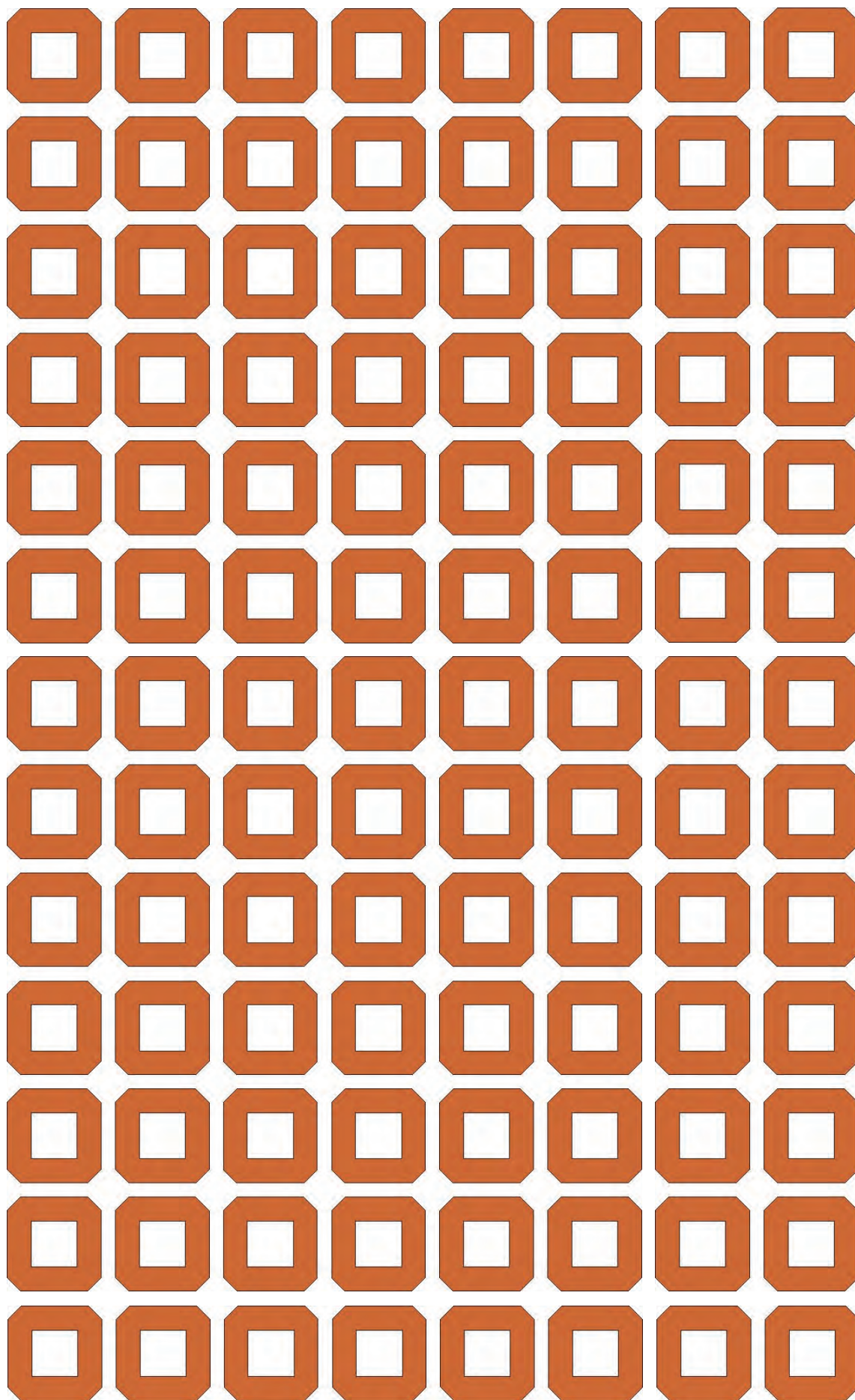
1. Cuando C está en una intersección de calles y r es un número entero.
2. Cuando C está en una intersección de calles y r no es un número entero.
3. Cuando C no está en una intersección de calles y r es un número entero.
4. Cuando C no está en una intersección de calles y r no es un número entero.



Al dorso de esta hoja tienes un gráfico sobre el que podrás dibujar para dar respuesta a las anteriores cuestiones.

Aplicación práctica

Correos quiere situar buzones de recogida de correspondencia a una distancia fija de su Oficina. O bien: un banco quiere abrir sucursales por la ciudad a distancias iguales de su Central. En ambos casos, el reparto equitativo se produce sobre los puntos de las circunferencias estudiadas.

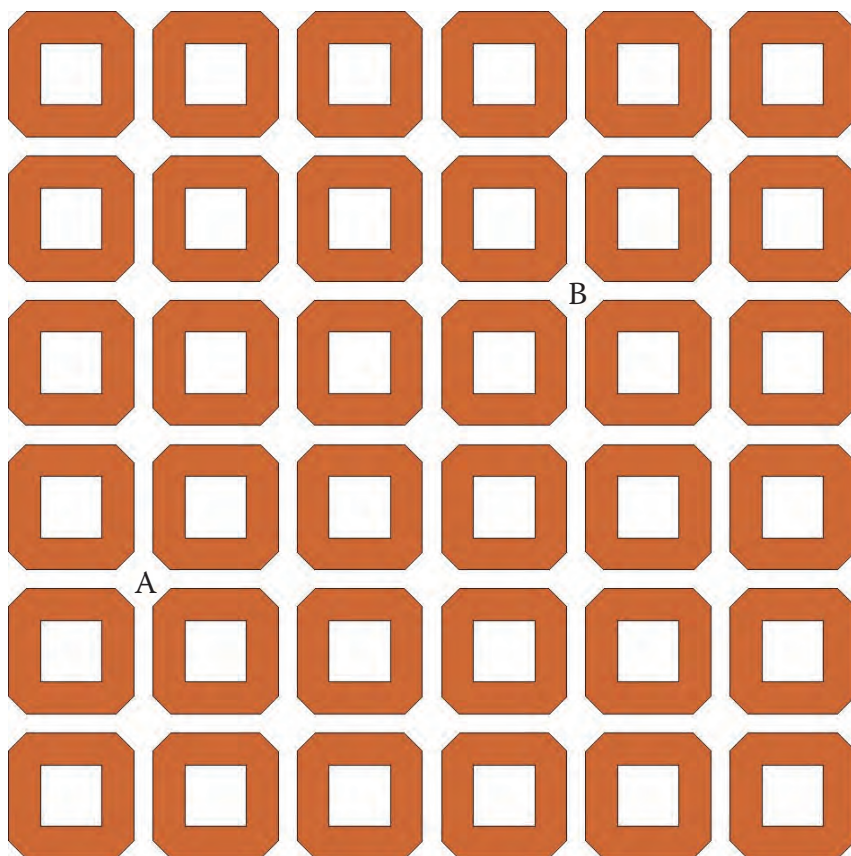




Geometría en la ciudad

A la misma distancia

1. Las casas de Andrés y Blanca están en los cruces de calles marcados en el gráfico con las letras A y B. Cuando quedan para salir de paseo lo hacen siempre a mitad de camino entre sus casas. ¿En cuántos puntos diferentes de la ciudad pueden quedar?
2. Se llama *Mediatriz* entre dos puntos al conjunto de puntos que están a la misma distancia (equidistan) de ambos. En el gráfico, dibuja los puntos de la mediatriz entre A y B. ¿Cuántos puntos forman esa mediatriz?



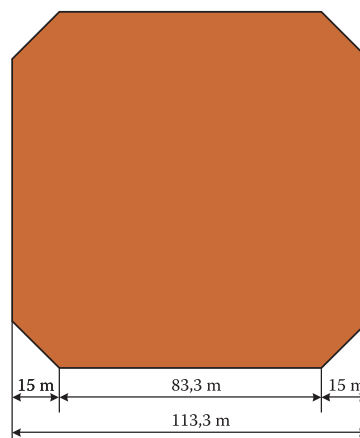


Geometría en la ciudad

Geometría y negocio urbanístico

A mediados del s. XIX el auge industrial de Barcelona obligaba a desbordar el recinto de la ciudad antigua y el Ayuntamiento convocó un concurso de proyectos para la urbanización del Ensanche (*l'Eixample*). Ildefons Cerdá y Sunyer presentó un proyecto de plano en damero, con calles en dos direcciones perpendiculares y manzanas cuadradas. Cerdá quería una ciudad pensada para las personas, desde una voluntad igualitaria, donde sea equivalente circular por una calle o por una paralela, pues no las hay privilegiadas; lo cual conduciría a la igualación del valor de las viviendas.

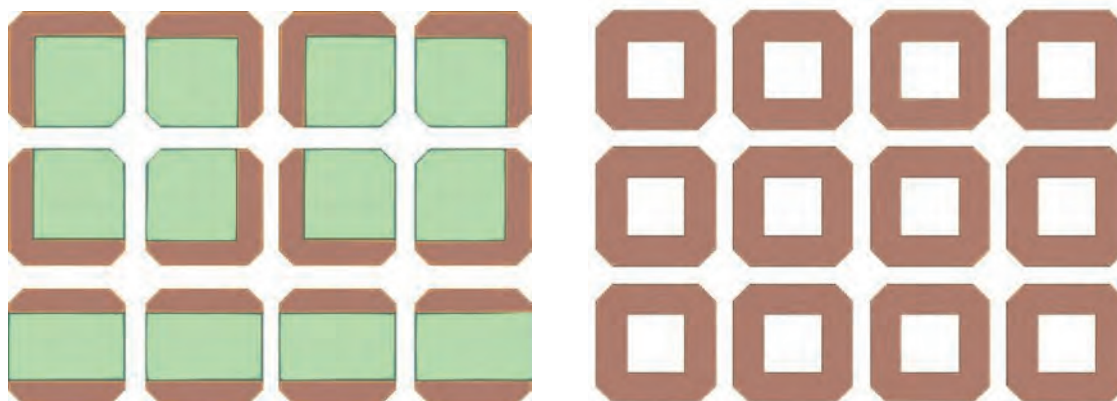
Proyectó manzanas de 113,3 m de lado. Para mejorar la visibilidad en los cruces de 90°, Cerdá diseñó chaflanes cortando 15 m de fachada en cada esquina. Esas manzanas debían estar construidas sólo en dos lados, dejando espacio para grandes zonas verdes: plazas ajardinadas en el interior de cada cuatro manzanas, alternándose con amplios bulevares transversales, para el ocio y el paseo. Las casas no debían tener más de 16 m de altura y 14 m de anchura, siendo la anchura de las calles 20 m, y así el sol entraría en la calle durante buena parte del día.



Los propósitos de Cerdá chocaban con el deseo de distinción de la clase dominante, que quería un centro donde confluyan avenidas en las que ubicar las mansiones de los nuevos ricos, mientras el proletariado se alojaría en una periferia de rango inferior. El Ayuntamiento de Barcelona rechazó el Plan Cerdá, pero éste fue después impuesto por el Gobierno Central de Madrid.

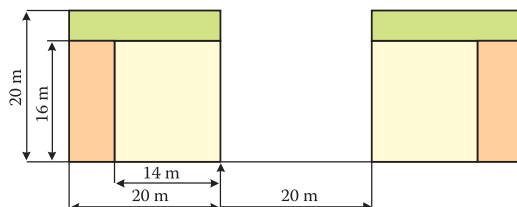
También se oponían al *Plan Cerdá* los intereses de los propietarios de los terrenos, quienes querían obtener el máximo beneficio posible, aprovechando más los solares. No veían con buenos ojos tanta amplitud de patios y calles. En sucesivas veces, lograron modificar el proyecto inicial:

- Primero, consiguieron construir en los cuatro lados de cada manzana; después, en algunos casos, también se construyeron talleres en los patios interiores de las manzanas, desapareciendo la mayoría de las zonas verdes proyectadas. Ver en los dos gráficos siguientes el proyecto inicial (izquierda) y lo que luego se construyó (derecha):



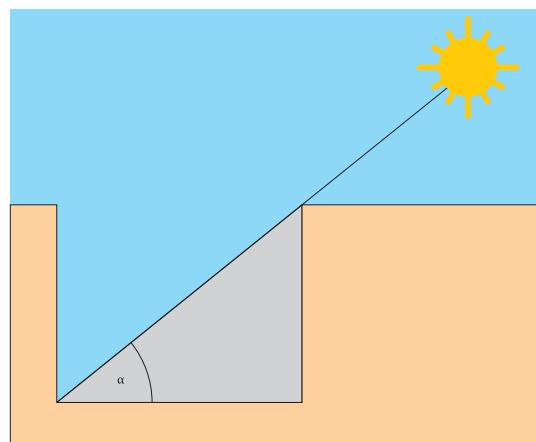


- Luego, de los 16 m de altura prevista para las casas se subió hasta 20 m, argumentando que así ya recibían suficiente luz.
- Y por último, por una forzada e interesada analogía, como las casas ya tenían 20 m de alto, también se construyeron con 20 m de anchura, en vez de los 14 m proyectados..



Cuestiones

- a) Calcula cuál era, según el proyecto del *Plan Cerdá*, el volumen que iba a ser edificado en cada manzana.
 - b) Calcula cuál fue, tras las presiones especulativas, el volumen que fue edificado en cada manzana.
 - c) ¿En qué porcentaje aumentó el volumen de edificación?
- a) Según el proyecto del *Plan Cerdá*, ¿con qué ángulo de elevación solar α se producía la iluminación total de una fachada?
 - b) ¿Cuál es ese ángulo α en la realidad finalmente construida?
 - c) Ese cambio de ángulo reduce el tiempo de iluminación. En una jornada con 12 horas de luz solar, ¿cuánto tiempo supone esa reducción?



Hemos visto cómo alterando la geometría de calles y edificios se pueden variar la amplitud de las ciudades y la luz que reciben nuestras casas. Consentir el mayor beneficio económico de algunos puede perjudicar a la calidad de vida de todos.



Geometría en la ciudad

Curiosa urbanización

Observa esta foto aérea. Está realizada en Brøndby, una zona residencial en las afueras de Copenhague (Dinamarca).

Vemos parcelas con una casa unifamiliar al fondo de cada parcela. Se agrupan en núcleos de 24, formando coronas circulares. Cada corona tiene una placita central de la cual sale una corta vía de servicios que va a la vía principal; ésta discurre casi tangente a las coronas.

Este curioso tipo de urbanización ha sido diseñado con criterios de seguridad y comodidad: desde la placita central de cada corona se controlan a la vez 24 parcelas y, en un mismo viaje, un repartidor puede atender a 24 casas, etc. La geometría a que da lugar no es la Euclídea del Plano, pero tampoco la de nuestras ciudades.



Foto: Yann Arthus Bertrand

Cuestiones

En lo que sigue, vamos a suponer siempre que nos movemos sólo por las vías asfaltadas.

- Traza el camino más corto entre dos casas de la misma corona o de coronas diferentes. ¿En algún caso hay más de un camino?
- Elige una casa C y su distancia r a otra casa, circulando por la calle. ¿Hay más casas que estén a esa misma distancia de C ? ¿Cuántas? Analiza los casos posibles.
- Localiza dónde se encuentra el punto medio entre dos casas, según cuál sea la situación de éstas.
- Si hubiera que instalar una tienda o un servicio común para la zona de la foto, ¿cuál sería la ubicación más lógica? ¿Por qué?



Calidad de vida en la ciudad

Zonas verdes

La Organización Mundial de la Salud (OMS) recomienda disponer de al menos entre 10 y 15 m² de zonas verdes por habitante, distribuidos equitativamente en relación a la densidad de población. Esta última aclaración es importante. Para la calidad de vida de cada ciudadano lo que importan son las zonas verdes próximas a su casa, no tanto las de la ciudad en su totalidad, tal vez lejanas.

El barrio de Delicias en Zaragoza tiene 115 000 habitantes y un parque, cuyo plano puedes ver a continuación. El lado superior de este dibujo, casi recto, en la realidad mide 300 m. Calcula los m² de zonas verdes por habitante en ese barrio. ¿Se cumple la recomendación de la OMS?



Imagen: José Luis Garde en www.parqueszaragoza.es



Recomendaciones

El parque no tiene una forma geométrica regular. ¿Cómo calcular su superficie? Haz una triangulación, es decir: aproxímalo con una línea poligonal, divídelo en triángulos y calcula las áreas de éstos. Te será útil la *fórmula de Herón* para el área de un triángulo de lados a , b y c :

$$\text{Área} = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)} \quad \text{donde } p = \frac{a+b+c}{2}$$

Por último, ten en cuenta cómo hay que aplicar la escala, ¡en este caso a superficies, no a longitudes!

Para que puedas escribir sobre él, repetimos el plano con menos detalles:



Ahora que has practicado, calcula los m^2 de zonas verdes por habitante en tu barrio.

Necesitas el dato de población, que fácilmente se encontrará en la web municipal o en la Junta de Distrito. Y también deberás conseguir planos o fotos aéreas (por ejemplo, en *Google Earth*) de cada plaza, jardín o parque del barrio.



Calidad de vida en la ciudad

El diseño y organización de la ciudad influyen en nuestra calidad de vida y en eso las Matemáticas tienen mucho que aportar: tanto para conocer la realidad como para pensar formas de mejorarla.

El tráfico

Semáforos

A lo largo de una calle hay tres semáforos, en los puntos A , B y C . Un vehículo que va a la velocidad permitida pasa de A a B en 15 seg. y de B a C en 25 seg. Los técnicos de vialidad han fijado estas secuencias: en A , 70 seg. verde y 30 seg. rojo; en B , 65 seg. verde y 35 seg. rojo; en C , 75 seg. verde y 25 seg. rojo.

- Diseña la peor programación de semáforos en esa calle: para que un coche pueda estar parado el mayor tiempo posible. ¿Cuánto dura la *ola verde* en ese caso?
- Diseña la mejor programación: para que la duración de la *ola verde* sea máxima.



Idea. Puedes representar cada programación mediante tres líneas temporales.

Ocupación de vehículos

Sítuate en una calle concurrida y haz recuento del número de personas que viajan en 50 vehículos particulares. Haz una estadística completa con los datos obtenidos (medidas de centralización, gráficos y medidas de dispersión). Interpreta los resultados y saca tus propias conclusiones.

Bus urbano

Los precios actuales del bus urbano en mi ciudad son:

1 viaje: 0,95 € bono 10 viajes: 5,40 € abono mensual: 35,00 €

Para cada una de las tres opciones, expresa como función y representa gráficamente la relación entre el número de viajes realizados y el precio a pagar. Razona a quiénes interesa más cada una.

¿Qué autobús?

Para ir al trabajo puedo elegir entre dos líneas de bus: la línea A que pasa cada 6 min. o la línea B que pasa cada 8 min. Cuando llego a la parada, subo en el primer autobús que llega, sea A o B . ¿Qué probabilidad hay de que coja cada uno de ellos?



Calidad de vida en la ciudad

El diseño y organización de la ciudad influyen en nuestra calidad de vida y en ello las Matemáticas tienen mucho que aportar: tanto para conocer la realidad como para pensar formas de mejorarla.

Reciclado de basuras

La ciudad es una gran fábrica de basura. Cada español genera 525 kg de basura al año. Si esta basura termina en un vertedero, tarda años en degradarse; sin embargo, reciclar los residuos puede ahorrar energía. La colaboración ciudadana está avanzando mucho en este terreno. La recogida selectiva de basuras en España se ha duplicado en el último lustro. Pero todavía representa sólo un 15% de toda la basura generada.

¿Cuántos kg diarios de basura se reciclaban en 2003 por habitante y año? ¿Cuántos en 2008?

Contenedores

En mi ciudad va en aumento la recogida selectiva de basuras. Por eso, se necesitan contenedores que, ocupando el mismo espacio lineal de acera, tengan cada vez mayor capacidad. En mi ciudad, antes tenían forma de ortoedro, con 155 cm, de largo, 115 de ancho y 162 de alto. El Ayuntamiento los está cambiando por otros cuya forma es la de un recipiente troncopiramidal (base inferior 155 x 120; base superior 165 x 140; altura 130) con una cubierta casi semicilíndrica (altura 58). Con este cambio se quiere evitar la acumulación de basuras fuera del contenedor cuando la recogida se retrasa, sin quitar más espacio de aparcamiento. ¿Cuál es el aumento de capacidad de los nuevos contenedores con respecto a los anteriores? Para los cálculos difíciles, haz estimaciones.



Ahorro de agua

La campaña *Zaragoza, ciudad ahorradora de agua* ha logrado un gran cambio en los últimos años. Se ha pasado de gastar 106 millones de m³ de agua en 1979, con 550 000 habitantes, a utilizar 64,4 millones de m³ en la actualidad, con 680 000 habitantes. ¡Ojo! esos litros de agua no son los consumidos directamente por las personas en sus casas, sino que se incluyen además los consumidos por los servicios públicos, la industria y la



agricultura en el término municipal. En el consumo doméstico, los zaragozanos gastan 126 litros diarios de agua, frente a la media española de 176 litros.

- a) ¿Cuál es el consumo doméstico total diario de agua en Zaragoza? ¿Cuál es el no doméstico?
- b) Si hablamos de consumo por habitante, concepto que engloba el consumo doméstico y los demás consumos, ¿qué porcentaje de ahorro se ha producido de 1979 a la actualidad?

