Números

1. Números naturales

Un **número natural** es cualquiera de los números que se usan para **contar** los elementos de ciertos conjuntos. Los números naturales se representan con la $\mathbb{N} = \{0,1, 2, 3, 4, \ldots\}$. El cero representa la ausencia de elementos.

1.1. Ordenación y representación

Todo número natural tiene un **sucesor**, que se obtiene sumándole 1, Entre dos número naturales sucesivos no existen más números naturales.

Puesto que representan cantidades, podemos decir que hay números naturales **mayores** o **menores** que otros. Es decir, existe una **relación de orden**.

Esto nos permite que puedan **representarse** en una **recta**, utilizando el siguiente método:

Se escoge un **origen** y una **unidad**, y esta se lleva sucesivamente a partir del origen siempre en el mismo **sentido**, obteniéndose una representación de los números naturales.

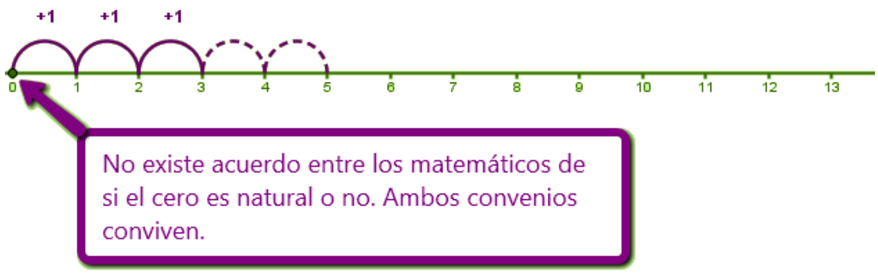


Figura 1: Números naturales sobre una recta.

Para indicar que el número **a** es **mayor que** el número **b**, pondremos: **a > b**. Para indicar que el número **b** es **menor que** el número **a**, pondremos: **b < a**.

<u>**Ejemplo 1**</u>. Por una estación de tren han pasado en una semana el siguiente número de viajeros: 24.789, 33.990, 14.378, 39.001, 21.987, 19.853, 28.234. Ordénalos de forma ascendente.

Solución: 14.378 < 19.853 < 21.987 < 24.789 < 28.234 < 33.990 < 39.001.

1.2. Operaciones con número naturales

Con números naturales solo podemos realizar las **operaciones** de **suma** y **multiplicación** siempre. Solo si restamos de un número natural otro menor obtendremos otro número natural (6 – 4 = 2). Solo podemos obtener un número natural al dividir un número natural entre otro menor, si el resto es 0 (12/4 = 3).

Ejemplo 1. Una empresa está organizando un evento para el que tiene que desplazar 270 personas. ¿Pueden ir en autobuses de 55 plazas sin que sobre ninguno? ¿Y en autobuses de 30 plazas? Razona tus respuestas.

Como tenemos que repartir viajeros entre plazas, estamos ante una operación de división. Dividimos las personas entre el número de plazas que tiene el autobús.

a) Autobús de 55 plazas

$$\begin{array}{r|l} 270 & 55 \\ \hline 50 & 4 \end{array}$$

En este caso se necesitan 5 autobuses y sobrarían 5 asientos.

B) Autobús de 30 plazas.

$$\begin{array}{r|l} 270 & 30 \\ \hline 00 & 9 \\ 0 & \end{array}$$

En este caso se necesitan 9 autobuses sin que sobren plazas.

1.3. Propiedades y operaciones combinadas

Es frecuente que las operaciones se combinen. Por ejemplo, en 2+3·4 se encadenan la suma y el producto. Para indicar qué operación debe hacerse en primer lugar se usan los **paréntesis** y también los **corchetes**. Lo que esté dentro del paréntesis o del corchete se hace en primer lugar.

Así, (2+3)·4 indica que primero debe realizarse la suma y a continuación el producto. El resultado sería, pues, (2+3)·4 = 5·4 = 20.

Para reducir el uso de los paréntesis se ha establecido un **orden de prevalencia** entre las operaciones. En ausencia de paréntesis, primero se realizan las **multiplicaciones** y después las **sumas**.

Así, 2+3·4 = 2+12 = 14.

La **suma** y la **multiplicación** de números naturales son operaciones **conmutativas** y **asociativas**, es decir:

- El orden de los números no altera el resultado (propiedad conmutativa), a + b = b + a, y a·b = b·a.
- Para sumar —o multiplicar— tres o más números naturales, no hace falta agrupar los números de una manera específica ya que (a + b) + c = a + (b + c) (propiedad asociativa). Esto es lo que da sentido a expresiones como a + b + c.

También se cumple la propiedad **distributiva**: a·(b + c) = a·b + a·c.

Ejemplo 2. Realiza la operación combinada: 5·(3+2·4·(3+2)+1).

5·(3+2·4·(3+2)+1) = 5·(3+8·(3+2)+1) = 5·(3+8·5+1) = 5·(3+40+1) =5·44 = 220.

He resaltado en azul las operaciones realizadas en cada paso, de acuerdo con el orden de prevalencia y los paréntesis.

2. Números enteros

Diremos que el conjunto de los números enteros es igual al de los números **naturales** unido con sus **negativos**. $\mathbb{Z} = \{...-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$. Por tanto, el conjunto de los números **naturales** está **contenido** en el de los número **enteros**: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$. Podemos decir que los número naturales son los números **enteros positivos**.

2.1. Ordenación y representación

Todo número entero tiene un **sucesor**, que se obtiene sumándole 1, Entre dos número enteros sucesivos no existen más números enteros.

Un número entero **a** es **mayor que** otro **b**, si existe un número **entero positivo c** tal que: **a = b + c**. Por ejemplo: 2 > -4 porque 2 = -4 + 6.

Por tanto, la representación sobre una recta de los números enteros es como la de los números naturales, añadiendo los enteros negativos de forma simétrica a los enteros positivos.

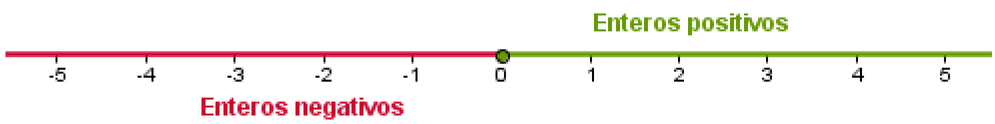


Figura 2: Número enteros sobre una recta.

El **valor absoluto** de un número entero es la **distancia** que le separa del cero. Se escribe entre dos barras | | y es el número sin su signo: |-3| = 3.

2.2. Operaciones con números enteros

Con números enteros solo podemos realizar las **operaciones** de **suma**, **resta** y **multiplicación** siempre. La **división** entre dos números enteros a y b, tal que a >= b, solo será otro número entero si el resto de la división es cero (división exacta).

Para **sumar dos números enteros con el mismo signo**, se suman sus **valores absolutos** y se le pone el **mismo signo** de los sumandos: 4 + 5 = 9; -4 +(-5) = -4 – 5 = -9.

Para **sumar dos números enteros con distinto signo**, el resultado adopta el signo del número de mayor valor absoluto, y el valor absoluto del resultado es igual a la diferencia entre el mayor valor absoluto de los sumandos y el menor: (-3) + 1 = -(3 – 1) = -2.

Para **restar dos números enteros** sumamos al primer sumando el opuesto del segundo, siendo el opuesto el mismo número cambiado de signo: (+8) – (+2) = 8 +(-2) = 8 – 2 = 6. (-8) - (-2) = (-8) + (+2) = -(8 – 2) = -6.

El **producto (o la división) de dos números enteros** se obtiene multiplicando (o dividiendo) los **valores absolutos** de dichos números, y tendrá el **signo** que resulte de aplicar las siguientes **reglas de signos**: a) si ambos números tienen el **mismo signo**, el resultado es **positivo**; b) si ambos números tienen **distintos signos**, el resultado es **negativo**.

Ejemplos: a) (-100):(+25) = -4; b) (+8)·(-5) = -40; c) (-6)·(-5)·(+4) = 120.

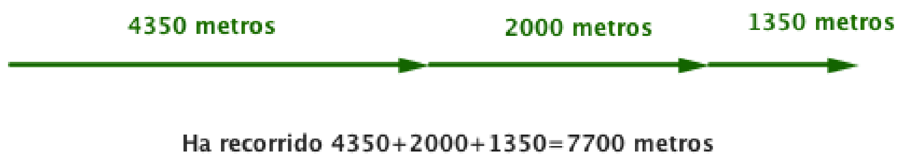
En el caso de las operaciones con números enteros, podemos pensar que **restar** es **gastar** o **deber dinero**, y **sumar** equivale a **ingresar** o **ganar dinero**. Por ejemplo:

a) 6 + 3 = 9 → Tienes 6 y ganas 3. b) -7 – 5 = -12 → Debes 12 y gastas 5; c) -6 + 8 = 2 → Debes 6 y ganas 8, pasas a tener 2; d) -5 + 3 = -2 → Debes 5 y ganas 3, luego sigues debiendo 2.

__Ejemplo 3__. Una persona aficionada al senderismo recorre 4350 metros hasta que se da cuenta que en la parada que hizo a 2000 metros de donde está se olvidó la comida, por lo que vuelve sobre sus pasos. Si una vez recogida la comida recorre 1350 metros antes de la siguiente parada...Contesta a las siguientes preguntas: a) ¿A qué distancia está de la salida? b) ¿Cuántos metros ha recorrido en total?

a) Cuando queremos averiguar la distancia a la que está, siempre que avance debemos sumar los metros, y si retrocede restarlos. Luego en este caso:

b) En este caso no importa el sentido en el que camine, sino los metros recorridos:



2.3. Potencias y raíces de números enteros

Al igual que la **multiplicación** consiste en **sumar** varias veces un **mismo número**, la **potenciación** consiste en **multiplicar** varias veces un **mismo número**.

Las **potencias** se representan de la forma $\mathbf{a^n}$ donde **a** es el **número** que se multiplica (**base**) y **n** el número de **veces** que se hace el producto (**exponente**).

Por ejemplo: $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

Además, hay que tener en cuenta que: $\mathbf{a^0 = 1}$ y que $\mathbf{a^{-n} = 1/a^n}$.

El resultado de la potencia $\mathbf{a^n}$, con **a negativo**, será **positivo** si **n** es **par** y **negativo** si **n** es **impar**, de acuerdo con la regla de los signos de la multiplicación.

Por ejemplo: $(-2)^3 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = 4\cdot(-2) = -8$; $(-2)^2 = (-2)\cdot(-2) = 4$.

2.3.1. Propiedades de las potencias

- Producto de potencias de la misma base: $\mathbf{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$ → $2^2 \cdot 2^3 = 2^5$.

- Cociente de potencias de la misma base: $a^m:a^n = a^{m-n}$ → $2^5:2^3 = 2^2$.
- Potencia de una potencia: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ → $(2^3)^2 = 2^6$.
- Potencia de un producto: $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ → $(2 \cdot 4)^3 = 2^3 \cdot 4^3$.
- Potencia de un cociente: $(a:b)^n = a^n:b^n$ → $(2:4)^3 = 2^3:4^3$.

2.3.2. Raíces cuadradas exactas

La **operación inversa** a la **potenciación** es la **radicación**. En ella, conocidos el resultado de la **potencia** y su **exponente**, hemos de calcular la **base**.

La **raíz cuadrada** de un número **a** es otro número **b** tal que, al **elevarlo al cuadrado**, nos da **a**. El número **a** se denomina **radicando**. Si el radicando es negativo no existe raíz.

$$\sqrt{a} = b \rightarrow b^2 = a$$

Ejemplos: $\sqrt{36} = 6 \rightarrow 6^2 = 36$ $\quad \sqrt{100} = 10 \rightarrow 10^2 = 100$

Si $b^2 = a$, también $(-b)^2 = a$. Por tanto, tanto **b**, como **-b** son soluciones de la raíz cuadrada de **a**.

$$\sqrt{a} = \pm b \rightarrow b^2 = a \quad y \quad (-b)^2 = a$$

El **cuadrado de un número entero** se denomina **cuadrado perfecto**. La **raíz cuadrada** de un **cuadrado perfecto** es el **mismo número**. En este caso se dice que la **raíz cuadrada es exacta**.

$$5^2 = 25 \rightarrow \sqrt{25} = 5$$

2.4. Operaciones combinadas con números enteros

En este tipo de operaciones hay que tener en cuenta las siguientes reglas:

1. Se resuelven las operaciones que estén dentro de **paréntesis**.
2. Se realizan las **potencias** y **raíces**, de izquierda a derecha.
3. Se realizan las **multiplicaciones** y las **divisiones**, de izquierda a derecha.
4. Se realizan las **sumas** y **restas**.

Ejemplos:

a) (4 – 5)·(3 – 7 – 2) + (-9):(-3) + 5 = (-1)·(-6) + (-9):(-3) + 5 = 6 + 3 + 5 = 14.

En azul se indican las operaciones realizadas en cada paso.

b) $-2\cdot((3 - 1)^2\cdot 3 - 9) + (4 - 6)^3:(-2) = -2\cdot(2^2\cdot 3 - 9) + (-2)^3:(-2) = -2\cdot(4\cdot 3 - 9) + (-8):(-2) =$

$= -2\cdot(12 - 9) + 4 = -2\cdot 3 + 4 = -6 + 4 = -2$.

3. Números racionales

3.1. Concepto de fracción

En matemáticas, cuando queremos expresar **una parte de un total** recurrimos a los **números fraccionarios** o **fracciones** (Figura 3).

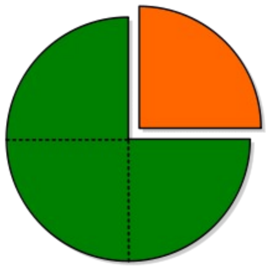


Figura 3: Fracción

Los **elementos que forman la fracción**, y que se escriben separados por una raya horizontal, son:

- El **denominador**. Es el número de abajo, indica el **número de partes iguales en que se divide la unidad**.
- El **numerador**. Es el número de arriba, indica la **cantidad de esas partes que se toman**.

Ejemplo: en la Figura 3 hemos dividido un círculo (unidad) en 4 partes, que representan el denominador de la fracción, y hemos tomado una parte, que representa el numerador de la fracción. Por tanto:

$$Fracción = \frac{Partes\ que\ se\ toman}{Partes\ en\ que\ se\ divide\ la\ unidad} = \frac{Numerador}{Denominador} = \frac{1}{4}$$

Para **leer una fracción**, primero se lee el **numerador** como cualquier **número** y a continuación, el **denominador** de la siguiente manera:

- Si es 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 se lee: medios, tercios, cuartos, quintos, sextos, séptimos, octavos y novenos.
- Si es 10 se lee décimos; si es mayor que 10 se lee el número añadiendo la terminación -avos.

Así, un minuto es un sesentavo de hora y se representa por $\frac{1}{60}$. Si tomamos cinco minutos, se lee como cinco sesentavos de hora, y se representa por $\frac{5}{60}$.

3.2. Tipos de fracciones

__**Fracciones propias**__: son aquellas que representan **números menores que la unidad**. Se caracterizan por tener el **numerador menor que el denominador**. Por ejemplo:

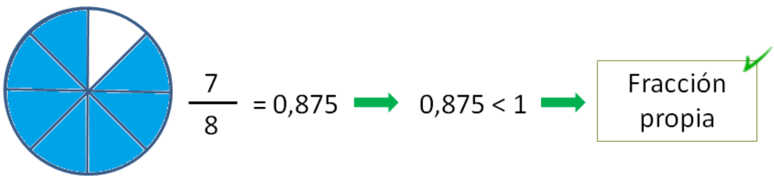


Figura 4: Fracción propia. (Smartick)

__**Fracciones impropias**__: Son aquellas que representan **números mayores que la unidad**. Se caracterizan por tener el **numerador mayor que el denominador**. Por ejemplo:

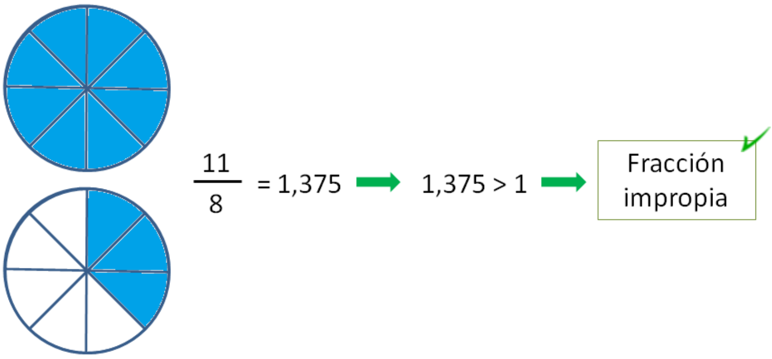


Figura 5: Fracción impropia.(Smartick)

Fracciones iguales a la unidad: Son las que representan **números iguales a la unidad**. Es decir, son las fracciones que representan el 1 y se caracterizan por tener **el numerador y el denominador iguales**. Por ejemplo:

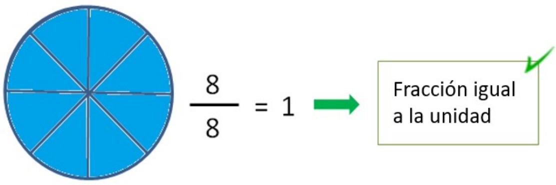


Figura 6: Fracción igual a la unidad.(Smartick)

3.3. Números racionales

Una definición matemática más estricta de fracción es la siguiente:

Una **fracción** es una expresión del tipo $\frac{a}{b}$ donde a y b son números **enteros**, con $b \neq 0$. Los números que se pueden expresar mediante una fracción se denominan **números racionales** y se representan con la letra $\mathbb{Q}$.

Es decir, los número fraccionarios (racionales) también pueden ser negativos.

Dos fracciones, $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, son **equivalentes** si se verifica que $a \cdot d = b \cdot c$. El conjunto de todas las fracciones equivalentes entre sí define **un único número racional**.

Es decir, para dos fracciones equivalentes, si realizamos la división indicada por la fracción, obtendremos el mismo resultado, que puede ser un número entero o decimal.

$$\frac{6}{14}=\frac{42}{98} \quad ya\ que \quad 6 \cdot 98 = 14 \cdot 42 = 588 \quad y\ el\ resultado\ de\ ambas\ fracciones\ es \quad 0{,}4257\ldots$$

Al **multiplicar o dividir una fracción por un mismo número entero no nulo**, obtenemos una fracción **equivalente** a la inicial, ya que, en realidad, estamos multiplicando o dividiendo la fracción por 1.

Ejemplo: $\frac{5}{8}=1\cdot(\frac{5}{8})=\frac{3}{3}\cdot\frac{5}{8}=\frac{3\cdot5}{3\cdot8}=\frac{15}{24}$ *Por tanto* $\frac{5}{8}$ *es equivalente a* $\frac{15}{24}$

Una fracción es **irreductible** cuando no existe ningún número entero que divida a la vez al numerador y al denominador.

Ejemplo: La fracción $\frac{15}{24}$ se puede reducir (simplificar), ya que podemos dividir el numerador y el denominador por 3, obteniendo la fracción $\frac{15/3}{24/3}=\frac{5}{8}$ que sí es irreductible.

3.4. Mínimo común múltiplo

Para operar con fracciones, en algunas ocasiones es necesario obtener **fracciones equivalentes** que tengan un **denominador común**. Dicho denominador común puede obtenerse **multiplicando todos los denominadores** implicados, lo cual puede dar lugar a un número grande, o calcular el **mínimo común múltiplo (m.c.m.)** de los denominadores implicados.

Para calcular el **mínimo común múltiplo** de dos o más números naturales, empezamos por descomponer esos números en **factores primos**. El mínimo común múltiplo se obtiene cogiendo todos los **factores (comunes y no comunes), elevados a la máxima potencia**.

Para descomponer un número natural en sus **factores primos** es conveniente conocer algunas **reglas de divisibilidad**:

- Divisible por 2: los números pares.
- Divisible por 3: la suma de sus cifras es múltiplo de 3.
- Divisible por 5: la última cifra es 0 o 5.

Ejemplo: calcula el m.c.m. de 15, 21 y 35.

15 | 5	15 = 3·5	21 | 3	21 = 3·7	35 | 5	35 = 5·7
3 | 3		7 | 7		7 | 7	

m.c.m.(15, 21, 35) = 3·5·7 = 105.

3.5. Operaciones con fracciones

Suma y resta. Para **sumar o restar** fracciones, éstas deben tener **el mismo denominador**. El resultado tiene el denominador común y el numerador es la suma o la resta de los numeradores.

$$\frac{a}{m}\pm\frac{b}{m}=\frac{a\pm b}{m}$$

En el caso de que las fracciones **no tengan el mismo denominador**, las convertiremos en otras **equivalentes** que sí tengan el mismo denominador. Si los denominadores son números pequeños, multiplicamos cada fracción, arriba y abajo, por el denominador de la otra. En caso contrario, el denominador común será el m.c.m. de ambos denominadores.
Ejemplos:

a) $\frac{5}{3}+\frac{7}{5}=\frac{5\cdot 5}{3\cdot 5}+\frac{7\cdot 3}{5\cdot 3}=\frac{25}{15}+\frac{21}{15}=\frac{46}{15}$

b) $\frac{13}{21}+\frac{11}{35}$ 21 = 3·7; 35 = 7·5; entonces m.c.m. (21, 35)= 3·7·5 = 105 = 21·5 = 35·3.

$$\frac{13}{21}+\frac{11}{35}=\frac{13\cdot 5}{21\cdot 5}+\frac{11\cdot 3}{35\cdot 3}=\frac{65}{105}+\frac{33}{105}+\frac{65+33}{105}=\frac{98}{105}$$

Multiplicación. Para **multiplicar fracciones** multiplicamos los numeradores entre sí y los denominadores también entre sí.

$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$ **Ejemplo:** $\frac{7}{5}\cdot\frac{4}{3}=\frac{7\cdot 4}{5\cdot 3}=\frac{28}{15}$

Fracción inversa. Para hallar la **fracción inversa** de una fracción intercambiamos el numerador y el denominador. El producto de una función por su inversa es siempre la unidad.

$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}=\frac{b}{a}\Rightarrow\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}=\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1$ **Ejemplo:** $\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}=\frac{4}{3}\Rightarrow\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}=\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}=\frac{12}{12}=1$

División. Para **dividir dos fracciones** calculamos el producto de la primera por la inversa de la segunda.

$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$ **Ejemplo:** $\frac{6}{5}:\frac{9}{4}=\frac{6}{5}\cdot\frac{4}{9}=\frac{6\cdot 4}{5\cdot 9}=\frac{24}{45}$

Si escribimos la división como una fracción de fracciones, podemos utilizar la siguiente regla gráfica:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

Potenciación. Para hallar la **potencia enésima de una fracción** elevamos el numerador y el denominador a dicha potencia.

$\left(\frac{a}{b}\right)^{n}=\frac{a^n}{b^n}$ **Ejemplo:** $\left(\frac{7}{3}\right)^{2}=\frac{7^2}{3^2}=\frac{49}{9}$

Fracción de un número. Para hallar la **fracción de un número** se multiplica la fracción por el número.

$\frac{a}{b}\ de\ c=\frac{a}{b}\cdot c$ **Ejemplo:** calcula las 3 cuartas partes de 120. $\frac{3}{4}\ de\ 120=\frac{3}{4}\cdot 120=90$

Fracción de otra fracción. Para hallar la **fracción de otra fracción** se multiplican ambas fracciones.

$\frac{a}{b}$ *de* $\frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ **Ejemplo:** calcula $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{5}$. $\frac{3}{4}$ *de* $\frac{2}{5} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 5} = \frac{6}{20}$

Ejemplo 4. Un equipo de cuatro alumnos ha preparado un trabajo en tres días. El primer día escriben las tres séptimas partes del trabajo, el segundo día solo hacen la cuarta parte de lo que les quedaba y el tercer día escriben las tres últimas páginas. ¿Cuántas páginas escriben cada día?

El primer día escriben $\frac{3}{7}$ de las páginas. Les faltan $1 - \frac{3}{7} = \frac{7}{7} - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$ de las páginas.

El segundo día escriben $\frac{1}{4}$ de $\frac{4}{7}$ = $\frac{1}{4} \cdot \frac{4}{7} = \frac{1 \cdot 4}{4 \cdot 7} = \frac{1}{7}$ de las páginas. Les faltan $\frac{4}{7} - \frac{1}{7} = \frac{4}{7} - \frac{1}{7} = \frac{3}{7}$ del total de páginas, que son las 3 páginas que escriben el tercer día. Por tanto, si x es el total de páginas: $\frac{3}{7} \cdot x = 3$ *; de donde:* $x = \frac{7}{3} \cdot 3 = 7$ páginas.

Por tanto, el primer día escriben 3 páginas, el segundo 1 y el tercero 3.

3.6. Expresión decimal de un número racional

Una **fracción** puede considerarse como una **división indicada**. Cuando realizamos dicha división obtendremos un **número decimal**, el cual está formado por una **parte entera** y otra **decimal**, separadas ambas por una **coma** (Figura 7).

Figura 7: Número decimal

Cuando la parte decimal es **nula**, obtenemos un **número entero**. En caso contrario, se pueden dar los siguientes casos:

Número decimal exacto o finito: tiene un número finito de cifras decimales.	$\frac{13}{2} = 6{,}5$
Número decimal periódico puro: toda su parte decimal es periódica, entendiendo por periodo el conjunto de cifras que se repiten hasta el infinito. En el ejemplo es el 6.	$\frac{8}{3} = 2{,}6666... = 2{,}\hat{6}$
Número decimal periódico mixto: Su parte decimal tiene una parte no periódica y otra parte periódica. En el ejemplo el anteperiodo es 4 y el periodo es 6.	$\frac{457}{15} = 30{,}46666... = 30{,}4\hat{6}$

3.7. Operaciones combinadas con números racionales

En este tipo de operaciones hay que tener en cuenta las mismas reglas que con números enteros:

1. Se resuelven las operaciones que estén dentro de **paréntesis**.
2. Se realizan las **potencias** y **raíces**, de izquierda a derecha.

3. Se realizan las **multiplicaciones** y las **divisiones**, de izquierda a derecha.
4. Se realizan las **sumas** y **restas**.

3.8. Comparación y ordenación de fracciones

Para **comparar fracciones** las reducimos a un **común denominador** y comparamos los **numeradores**. Se suele utilizar como denominador común el **mínimo común múltiplo** de los denominadores.

Ejemplo 5. Compara y ordena de mayor a menor las fracciones $\frac{7}{15}, \frac{10}{21}\ y\ \frac{16}{35}$.

Mínimo común múltiplo: 15 = 3·5; 21 = 3·7; 35 = 7·5; m.c.m. (15, 21, 35)= 3·7·5 = 105.

Fracciones equivalentes a las dadas con denominador común 105: $\frac{49}{105}, \frac{50}{105}\ y\ \frac{48}{105}$

Ordenación: $\frac{50}{105} > \frac{49}{105} > \frac{48}{105}$. Por tanto: $\frac{10}{21} > \frac{7}{15} > \frac{16}{35}$

3.9. Números irracionales

Los **números que no se pueden expresar mediante una fracción** se denominan **números irracionales**. El **conjunto** de los números irracionales se designa con la letra I . La **expresión decimal** de un número irracional tiene **infinitas cifras** que no forman **ningún periodo**.

Hay dos números famosos en matemáticas que son irracionales: π = 3,141592…; ϕ = 1,61803…

También son números irracionales todas las **raíces de números enteros que no son exactas**.

4. Números reales

El conjunto que forman todos los números **racionales** e **irracionales** se denomina conjunto de los **números reales** y se designa con la letra $\mathbb{R}$.

En la Figura 8 podemos ver gráficamente la relación entre los distintos conjuntos de números.

Los números **naturales** forman parte de los números **enteros** y , a su vez, éstos forman parte de los números **racionales**.

Si a los números **racionales** le añadimos los **irracionales**, obtenemos el conjunto de los números **reales**.

Utilizando la **notación de conjuntos**:

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup I$; $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

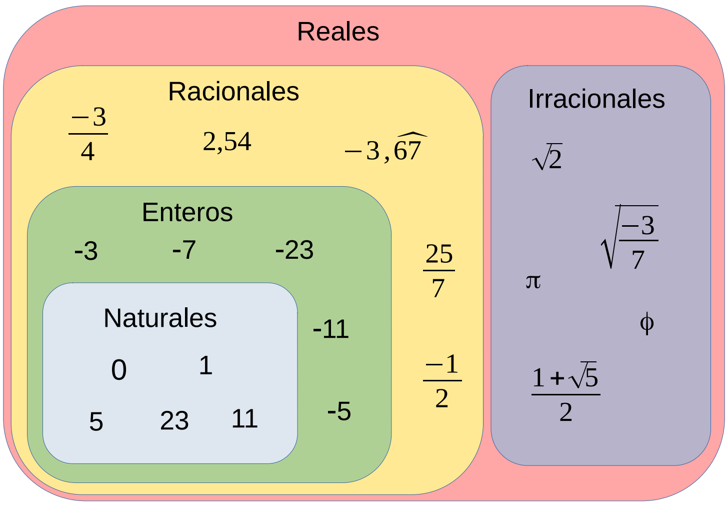


Figura 8: Relación entre los distintos conjuntos de números

5. La recta real

Llamamos recta real a la recta que contiene todos los números reales. Cada punto de la recta representa un número real y todo número real tiene una posición en la recta numérica.

5.1. Valor absoluto de un número real

El **valor absoluto de un número real** *a* se representa por |a| y es la **distancia** que hay desde el número *a* hasta 0.

Es siempre un número **positivo**, que coincide con él mismo cuando es positivo y con su opuesto cuando es negativo.

$$|a| = \begin{Bmatrix} a & si & a>0 \\ -a & si & a<0 \end{Bmatrix}$$

Ejemplo 6. Calcula el valor absoluto de 5 y de -5.

Como 5>0, entonces: $|5| = 5$; Como -5<0, entonces: $|-5| = -(-5) = 5$

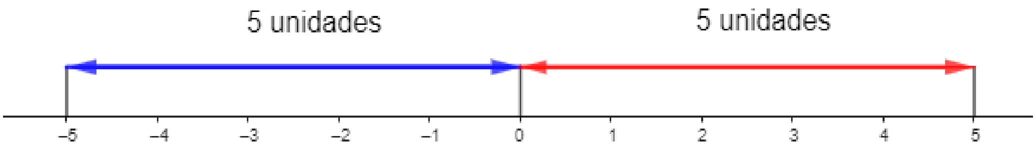


Figura 9: Valores absolutos

La **distancia** entre dos número reales *a* y *b* es el valor absoluto de su diferencia.

$$d(a,b) = d(b,a) = |b-a|$$

Ejemplo 7. Calcula la distancia entre los números reales -2 y 5.

$$d(-2,5) = |5-(-2)| = |5+2| = |7| = 7$$

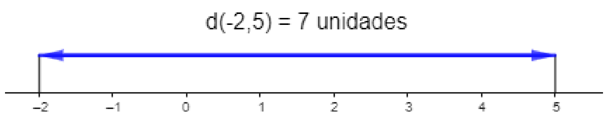


Figura 10: Distancia entre números reales

5.2. Intervalos y semirrectas

Un **intervalo** es el conjunto de todos los **números comprendidos entre dos puntos** de la recta real. Si *a* y *b* son números reales, con *a* < *b*, un intervalo puede ser:

Cerrado, si ambos extremos se consideran incluidos en el intervalo: [*a*,*b*] o bien *a* ≤ *x* ≤ *b*.

Abierto, si ambos extremos no se consideran incluidos en el intervalo: (*a*,*b*) o bien *a* < *x* < *b*.

Semiabierto o semicerrado, si uno de los extremos no se considera incluido en el intervalo y el otro sí:

[*a*,*b*) o bien $a \le x < b$

(a,b] o bien $a < x \le b$

Una **semirrecta** es el conjunto de todos los **números menores o mayores que un punto** de la recta real. Una semirrecta puede ser:

<u>**Cerrada por la derecha**</u>:

(-∞, *a*] o bien x ≤ *a*.

<u>**Abierta por la derecha**</u>:

(-∞, *a)* o bien x < *a*.

<u>**Cerrada por la izquierda**</u>:

[*a*, +∞) o bien x ≥ *a*.

<u>**Abierta por la izquierda**</u>:

(*a*, +∞) o bien x > *a*.

<u>**Ejemplo 8**</u>. Escribe las siguientes desigualdades como semirrectas o intervalos:
a) x ≥ -3   b) -5 ≤ x < 7   c) x < 8   d) -2 < x < 3

a) [-3, +∞)   b) [-5, 7)   c) (-∞, 8)   d) (-2, 3)

6. Aproximaciones. Errores

6.1. Aproximación de números reales

Aproximar un número real consiste en **considerar solo algunas de sus primeras cifras decimales**. Se puede aproximar un número real de diferentes maneras:

<u>**Por defecto**</u>. El número aproximado que se utiliza es **menor que el valor verdadero**. Una forma de aproximación por defecto es el truncamiento, que consiste en eliminar todas las cifras decimales a partir de un orden determinado.

<u>**Ejemplo 9**</u>. Trunca a la décima los siguientes números: a) 0,083; b) 65,841; c) 865,986.

a) 0; b) 65,8; c) 865,9

<u>**Por exceso**</u>. El número aproximado es **mayor que el verdadero**.

<u>**Ejemplo 10**</u>. Aproxima a a la décima por exceso los siguientes números: a) 0,083; b) 65,841; c) 865,879.

a) 0,1; b) 65,9; 865,9

Por redondeo. La última cifra que se quiere considerar se mantiene si la siguiente es menor que 5, o se le añade una unidad si es mayor o igual que 5.

Ejemplo 11. Redondea a la milésima los siguientes números: a) 0,0854365; b) 19,853736; c) 98,37256.

a) 0,085; b) 19,854; c) 98,373.

Ejemplo 12. Aproxima a cuatro cifras decimales (a la diezmilésima) el número π = 3,141592… utilizando los tres procedimientos estudiados.

a) Por defecto: π = 3,1415; b) por exceso: π = 3,1416; c) por redondeo: π = 3,1416, por ser 9 > 5.

6.2. Errores

Cuando utilizamos valores aproximados en lugar de valores exactos cometemos un error que se puede medir de dos formas.

Error absoluto (E_A): es igual al valor absoluto de la diferencia entre el **valor real x_r** (exacto) y el **valor aproximado x_a**.

$$E_A = |x_r - x_a|$$

Error relativo (E_R): es el cociente entre el error absoluto y el valor real. Suele expresarse en %.

$$E_R = \frac{E_A}{x_r} = \frac{|x_r - x_a|}{x_r}$$

Ejemplo 13. Calcula el error absoluto y el error relativo al tomar como valor aproximado 3,59 cm en lugar del valor real 3,50 cm.

$$E_A = |x_r - x_a| = |3{,}50 - 3{,}59| = |-0{,}09| = 0{,}09\,cm$$

$$E_R = \frac{E_A}{x_r} = \frac{0{,}09}{3{,}50} = 0{,}0257142\ldots \approx 0{,}0257 = 2{,}57\,\%$$

7. Notación científica

7.1. Expresiones en notación científica

Un número expresado en notación científica está formado por un número decimal, cuya parte entera está comprendida entre 1 y 9, multiplicado por 10^n, siendo *n* un número entero positivo o negativo.

La notación científica se utiliza en general para expresar números muy grandes o muy pequeños. Por ejemplo: a) la edad de la Tierra es de aproximadamente $4 \cdot 10^9$ años = 4.000.000.000 años; b) el tamaño de un virus es de aproximadamente $6{,}2 \cdot 10^{-8}$ m = 0,000000062 m.

Cuando la calculadora da un resultado que tiene más cifras que los dígitos que caben en la pantalla, lo expresa en notación científica. Por ejemplo, si calculamos 2^{64}, nos dará como valor aproximado $1,844674407 \cdot 10^{19}$.

7.2. Operaciones en notación científica

Para multiplicar o dividir números escritos en notación científica, se multiplican o dividen entre sí la **parte decimal**, y se multiplican o dividen entre sí las **potencias de 10**, teniendo en cuenta las propiedades de las potencias. El resultado se expresa en notación científica.

Ejemplo 14. Calcula la fuerza de atracción gravitatoria entre la Tierra y la Luna, utilizando la ley de gravitación universal, sabiendo que la masa de la Tierra es: $\mathbf{m_1 = 6 \cdot 10^{24}}$ **kg**, la masa de la Luna es: $\mathbf{m_2 = 7,34 \cdot 10^{22}}$ **kg** y la distancia desde el centro de la Tierra al centro de la Luna: **d = 384.400 km**. ($\mathbf{G = 6,674 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2/kg^2}$).

$$F = G\,\frac{m_1 \cdot m_2}{d^2}$$

Distancia en metros y en notación científica: $d = 384.400\,km = 384.400.000\,m = 3,844 \cdot 10^8\,m$

A continuación aplicamos la Ley de gravitación:

$$F = G\,\frac{m_1 \cdot m_2}{d^2} = 6,674 \cdot 10^{-11}\,\frac{6 \cdot 10^{24} \cdot 7,34 \cdot 10^{22}}{\left(3,844 \cdot 10^8\right)^2} = \frac{6,674 \cdot 6 \cdot 7,34}{3,844^2} \cdot \frac{10^{-11} \cdot 10^{24} \cdot 10^{22}}{10^{16}}\,N$$

$F = 19,89 \cdot 10^{19}\,N = 1,989 \cdot 10^{20}\,N$ La suma de exponentes es: 24 + 22 – 11 – 16 = 19.

8. Sucesiones de números reales

Este apartado lo he tomado de www.apuntesmareaverde.org.

8.1. Definiciones

Una **sucesión** de números reales es una **secuencia ordenada de números**.

Ejemplos: a) 1, 2, 3, 4,… b) 2, 4, 6, 8,… c) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

Se llama **término de una sucesión** a cada uno de los **elementos** que constituyen la sucesión. Cada término de una sucesión se identifica con una **letra** (generalmente minúscula) con un **subíndice**, el cual indica su posición de orden dentro de la sucesión.

Ejemplos: en la sucesión a) $a_1 = 1$; en la sucesión b) $a_2 = 4$; en la sucesión c) $a_3 = \frac{1}{4}$

Se llama **término general de una sucesión** al término que ocupa el lugar *n*-ésimo y se escribe con la letra que denote a la sucesión (por ejemplo a) con subíndice n: a_n.

Conviene resaltar que aunque los subíndices son números naturales, los términos de una sucesión pueden ser cualquier número real.

Una **sucesión de números reales** es una aplicación que hace corresponder a cada **número natural** un **número real**.

8.2. Formas de definir una sucesión

Existen varias formas de definir una sucesión:

A partir de una **propiedad** que cumplan los términos de la sucesión.

Ejemplos:
- Sucesión de números pares: 2, 4, 6, 8, 10, …
- Sucesión de números primos: 1, 2, 3, 5, 7, 11, …
- Sucesión de cuadrados de números enteros: 1, 4, 9, 16, 25, …

A partir de la expresión de su **término general**.

Ejemplo: $a_n = 2n^2 - 1$ En este caso sustituimos *n* por los sucesivos números naturales:

$$a_1 = 2\cdot 1^2 - 1 = 1;\ \ a_2 = 2\cdot 2^2 - 1 = 2\cdot 4 - 1 = 7;\ \ a_3 = 2\cdot 3^2 - 1 = 2\cdot 9 - 1 = 17$$

Por una **ley de recurrencia**, que permite obtener un término a partir de los anteriores.

Ejemplo: la sucesión de *Fibonacci* se obtiene con la siguiente ley de recurrencia:

$$a_1 = a_2 = 1;\ \ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \rightarrow 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

Es decir, cada término, salvo los dos primeros, se obtiene como suma de los dos anteriores.

Ejemplo 15. Escribe los cuatro primeros términos de las siguientes sucesiones: a) $a_n = 4n - 2$; b) $b_1 = 1$, $b_n = 3b_{n-1} + 5$.

a) 2, 6, 10, 14, … b) 1, 8, 29, 92, …

8.3. Progresiones aritméticas

Una **progresión aritmética** es una sucesión de números reales en la que la **diferencia entre dos términos consecutivos** de la sucesión es **constante**. A esta constante se le llama **diferencia** de la progresión y se suele denotar con la letra *d*.

$$a_{n+1} - a_n = d \ \rightarrow \ a_{n+1} = a_n + d$$

Es decir, cada término se obtiene sumando al anterior la diferencia, *d*.

Ejemplo: La sucesión formada por los números naturales: {1, 2, 3, 4, 5,...} es una progresión aritmética, ya que cada término se obtiene sumando 1 al término anterior.

Ejemplo 16. Escribe los cinco primeros términos de una progresión aritmética, sabiendo que el primer término es 1 y que la diferencia es -2.

{1, -1, -3, -5, -7,…}

8.3.1. Término general de una progresión aritmética

Vamos a calcularlo utilizando la definición que hemos visto de progresión aritmética y suponiendo conocidos el primer término a_1 y la diferencia de la sucesión, d.

a_1
$a_2 = a_1 + d$
$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$
$a_4 = a_3 + d = (a_2 + d) + d = ((a_1 + d) + d) + d = a_1 + 3d$
………

Generalizando: $\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d}$

Si en lugar del primer término a_1 conocemos el término a_k, podemos calcular el término general de una progresión aritmética como:

$$\boxed{a_n = a_k + (n-k)d}$$

Si no conocemos la diferencia d, pero sí dos términos a_r y a_s, podemos calcular la diferencia de la progresión de la siguiente manera:

$$a_n = a_r + (n-r)d, \text{ y también: } a_n = a_s + (n-s)d; \text{ luego: } a_r + (n-r)d = a_s + (n-s)d$$

$$a_r + nd - rd = a_s + nd - sd \rightarrow a_r - rd = a_s - sd \rightarrow a_r - a_s = (r-s)d \rightarrow d = \frac{a_r - a_s}{r-s}$$

Ejemplo 17. Dada una progresión aritmética dos de cuyos términos son: $a_3 = 4$ y $a_{10} = 18$: a) calcula su diferencia; b) calcula su término general.

$$d = \frac{a_{10} - a_3}{10-3} = \frac{18-4}{10-3} = \frac{14}{7} = 2 \qquad a_n = a_r + (n-r)d \rightarrow a_3 = a_1 + (3-1)2 = a_1 + 4$$

$$4 = a_1 + 4; \text{ luego: } a_1 = 4 - 4 = 0; \text{ por tanto: } a_n = 2(n-1) = 2n-2$$

8.3.2. Suma de los términos de una progresión aritmética

En una progresión aritmética, la suma de dos términos equidistantes es constante. Es decir,si los subíndices naturales p, q, r y s verifican que p + q = r + s, entonces: $a_p + a_q = a_r + a_s$.

Se cuenta la anécdota de que el gran matemático *Johann Carl Friedrich Gauss* (1777, 1855), a sus nueve años, durante la clase de aritmética, el maestro propuso el problema de sumar los números del 1 al 100, con la mera finalidad de mantener entretenidos a los chicos. *Gauss* halló la respuesta correcta al cabo de poquísimo tiempo. Cuando terminó la hora se comprobaron las soluciones y se vio que la de *Gauss* era correcta, mientras que no lo eran muchas de las de sus compañeros.

Él, en vez de sumar directamente, había observado que tomando los números por pares, el primero y el último, luego el segundo y el penúltimo, y así sucesivamente, se obtiene 100 + 1 = 99 + 2 = 98 + 3 = 101 …, es decir, lo que se le pedía era equivalente a multiplicar 101 x 50: el pequeño *Gauss* había descubierto la fórmula de la suma de los términos de una progresión aritmética. (Wikipedia).

La suma de los n primeros términos de una progresión aritmética viene dada por:

$$\boxed{S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}}$$

Ejemplo 18. Suma los 30 primeros términos de la progresión aritmética: $a_n = \{17, 13, 9, 5, 1, \ldots\}$.

Observamos que $d = -4$. Para aplicar la fórmula de la suma tenemos que calcular primero el término que ocupa el lugar 30, a_{30}:

$a_{30} = a_1 + (n - 1)d = 17 + (30 - 1)\cdot(-4) = 17 + 29\cdot(-4) = -99$

Entones: $S_{30} = \frac{30 \cdot (a_1 + a_{30})}{2} = \frac{30 \cdot (17 - 99)}{2} = -1.230$

Ejemplo 19. Un nadador se entrena en una piscina de 50 m y quiere controlar las pérdidas de velocidad por cansancio. Para ello, cronometra durante cinco días consecutivos los tiempos que tarda en hacer 2, 5, 8, 11, 14 largos. A) Halla el término general de la sucesión a_n que da los metros recorridos en el día n. B) ¿Cuántos metros habrá nadado en total en dichos cronometrajes?

Cada largo recorre 50 m. Por tanto: $a_1 = 2\cdot 50 = 100$ m; $a_2 = 5\cdot 50 = 250$ m; $a_3 = 8\cdot 50 = 400$ m; $a_4 = 11\cdot 50 = 550$ m; $a_5 = 14\cdot 50 = 700$ m. La sucesión es: 100, 250, 400, 550, 700.

Término general. Podemos comprobar que la diferencia $d = 150$. Por tanto: $a_n = 100 + (n - 1)\cdot 150$.

Total de metros nadados. Es la suma: $S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_5)}{2} = \frac{5 \cdot (100 + 700)}{2} = 2.000\,\text{m}$

8.4. Progresiones geométricas

Una progresión geométrica es una sucesión de números reales en la que el cociente entre cada término y el anterior es constante. A esta constante se denomina razón de la progresión y se suele denotar con la letra r. O lo que es lo mismo: cada término se obtiene multiplicando el anterior por la razón r: $a_{n+1} = a_n \cdot r$.

8.4.1. Término general de una progresión geométrica

El término general de una progresión geométrica de cuyo primer término es a_1 y cuya razón es r, se obtiene con la fórmula:

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot r^{n-1}}$$

Efectivamente. Sin más que aplicar la definición de progresión geométrica:

$$a_2 = a_1 \cdot r$$
$$a_3 = a_2 \cdot r = a_1 \cdot r \cdot r = a_1 \cdot r^2$$
$$a_4 = a_3 \cdot r = a_2 \cdot r \cdot r = a_1 \cdot r^2 \cdot r = a_1 \cdot r^3$$
$$\ldots\ldots$$
$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

Generalizando este resultado, podemos calcular el término general de una progresión geométrica conociendo *r* y otro término de la progresión, por ejemplo el de la posición *k*:

$$\boxed{a_n = a_k \cdot r^{n-k}}$$

Ejemplo 20. Calcula el primer término de una progresión geométrica con $a_3 = 6$ y $r = -2$.

Despejamos a_1 de la fórmula del término general: $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ → $a_1 = \dfrac{a_n}{r^{n-1}}$

Para $n = 3: a_1 = \dfrac{a_3}{r^{3-1}} = \dfrac{6}{(-2)^2} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$

Ejemplo 21. Cierta clase de alga, llamada *clorella*, se reproduce doblando su cantidad cada dos horas y media. Al cabo de otras dos horas y media vuelve a doblar su cantidad, y así sucesivamente. Si se tiene en el momento inicial 1 kg, al cabo de dos horas y media hay 2 kg. A) Haz una tabla de valores en la que indiques para cada periodo de reproducción el número de kg de *clorella*. B) Indica el término general. C) Cantidad de alga al cabo de 40 periodos.

Periodo	1	2	3	4	5
Cantidad (kg)	2	4	8	16	32

Vemos que la cantidad de alga correspondiente a cada periodo es una progresión geométrica de razón 2, ya que cada término se obtiene multiplicando por 2 el anterior.

Término general: $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$.

Cantidad al cabo de 40 periodos: $a_{40} = 2^{40} = 1.099.511.627.776$ kg.

8.4.2. Producto de los términos de una progresión geométrica

En una progresión geométrica, el producto de dos términos equidistantes es constante. Es decir, si los subíndices naturales p, q, t y s verifican que p + q = t + s, entonces: $a_p \cdot a_q = a_t \cdot a_s$.

El **producto** de los *n* primeros términos de una **progresión geométrica** viene dado por:

$$\boxed{P_n = \pm\sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}}$$

Ejemplo 22. Calcula el producto de los 5 primeros términos de la progresión: 3, 6, 12, 24, …

Vemos que r = 2. Entonces: a_5 = 24·2 = 48. Luego: $P_5 = \pm\sqrt{(a_1 \cdot a_5)^5} = \pm\sqrt{(3 \cdot 48)^5} = 248.832$

8.4.3. Suma de los términos de una progresión geométrica

La **suma** de los n primeros términos de una progresión **geométrica** cuyo primer término es a_1 y cuya razón es $r \neq 1$, se obtiene con la fórmula:

$$\boxed{S_n = \frac{r \cdot a_n - a_1}{r-1} = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r-1}}$$

Se considera $r \neq 1$ ya que si $r = 1$ la progresión es la progresión constante formada por el primer término:$\{a_1,a_1,a_1,a_1,\ldots\}$ y $S_n = n \cdot a_1$.

Ejemplo 23. Hallar la suma de los 11 primeros términos de una progresión geométrica sabiendo que el primer término es -2 y la razón -3.

$$S_{11} = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r-1} = \frac{-2 \cdot ((-3)^{11} - 1)}{-3-1} = \frac{-2 \cdot (-177.147 - 1)}{-4} = 88.574$$

Ejemplo 24. Suma los quince primeros términos de una progresión geométrica en la que a_1 = 5 y r = 0,5.

$$S_{15} = \frac{a_1 \cdot (r^{15} - 1)}{r-1} = \frac{5 \cdot ((0{,}5)^{15} - 1)}{0{,}5-1} = \frac{5 \cdot (0{,}0000305 - 1)}{-0{,}5} = 10$$

La **suma** de un número **ilimitado** de términos de una progresión geométrica sólo toma un valor finito si $|r| < 1$, y entonces viene dada por:

$$\boxed{S = \frac{a_1}{1-r}}$$

Ejemplo 25. Suma todos los términos de una progresión geométrica en la que a_1 = 5 y r = 0,5.

$$S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{5}{1-0{,}5} = 10$$

Observe que nos da el mismo resultado que el ejemplo anterior, ya que al ser r < 1 los términos de la sucesión disminuyen rápidamente, de manera que la suma se aproxima rápidamente a la correspondiente a todos los términos.