Proporcionalidad

1. Proporcionalidad directa

1.1. Magnitudes directamente proporcionales

Una **magnitud** es todo aquello que **se puede medir**.

Por ejemplo, en Física son magnitudes, entre otras, la longitud, la masa y el tiempo.

En la práctica existen muchas **parejas de magnitudes** cuya **relación numérica** entre ellas es tal que, cuando una **aumenta al doble**, la otra también **aumenta al doble**, y cuando una **disminuye a la mitad**, la otra también **disminuye a la mitad**.

Ejemplo 1. Si **1 kg** de manzanas cuesta **2,5 €**, elabora una **tabla de valores**, que relacione la **cantidad** de manzanas (en **kg**) con el **coste** (en **€)**. Suponemos que las cantidades son: 0,5; 2, 3,5; 5; 8 y 10 kg. ¿Qué cantidad obtenemos si dividimos cada valor de **coste** entre el valor de **cantidad** correspondiente?

Si 1 kg de manzanas cuesta 2,5 €, para calcular el coste de una cantidad x kg de manzanas, bastará con multiplicar 2,5 por x: coste = 2,5x. De esa manera obtendremos la siguiente tabla.

Coste (€)	1,25	5	8,75	12,5	20	25
Cantidad (kg)	0,5	2	3,5	5	8	10

Si dividimos cada valor del coste entre el valor correspondiente de cantidad, obtenemos:

$$\frac{Coste(€)}{Cantidad(kg)}=\frac{1{,}25}{0{,}5}=\frac{5}{2}=\frac{8{,}75}{3{,}5}=\frac{12{,}5}{5}=\frac{20}{8}=\frac{25}{10}=2{,}5\ €/kg\ =precio$$

Es decir, al dividir cualquier valor de coste entre el correspondiente de cantidad nos da el mismo resultado (2,5 €/kg) que no es otra cosa que el precio de las manzanas.

Decimos que dos **magnitudes** son **directamente proporcionales**, si el **cociente** entre dos cantidades correspondientes de ambas magnitudes es **constante**. Ese cociente de denomina **constante** o **razón de proporcionalidad**, ***k***.

Magnitud 1	a	b	c	d
Magnitud 2	a’	b’	c’	d’

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{d}{d'}=k$$

Cuando dos magnitudes son **directamente proporcionales**, al multiplicar una de ellas por cualquier **número**, los correspondientes valores de la otra quedan **multiplicados** por ese número.

Efectivamente. En el ejemplo anterior tenemos las siguientes razones: $\frac{5}{2}=\frac{20}{8}=\frac{4\cdot5}{4\cdot2}$

Si (a, a') y (b, b') son dos parejas de valores de dos magnitudes directamente proporcionales, se puede **calcular cualquiera de los valores conociendo los otros tres**, ya sea utilizando una **pareja de datos conocidos**, o mediante la **constante de proporcionalidad**.

Efectivamente. Supongamos que la incógnita es *x* = *b* y que conocemos los valores *a, a' y b'*.

$$\frac{a}{a'} = \frac{x}{b'} = k \rightarrow \; x = \frac{a \cdot b'}{a'} \; \text{o bien} \; x = k \cdot b'$$

<u>Ejemplo 2</u>. Halla los valores de *x* e *y* para que las magnitudes sean directamente proporcionales. Para calcular *x* utiliza una pareja de datos conocidos. Para calcular *y* utiliza la constante de proporcionalidad.

Magnitud 1	16	65	y
Magnitud 2	x	52	7

Calculamos *x* utilizando la pareja de datos conocido:

$$\frac{65}{52} = \frac{16}{x} \rightarrow 65 \cdot x = 52 \cdot 16 \rightarrow x = \frac{52 \cdot 16}{65} = 12{,}8$$

Calculamos y utilizando la constante de proporcionalidad:

$$k = \frac{65}{52} = 1{,}25 \rightarrow \frac{y}{7} = 1{,}25 \rightarrow y = 1{,}25 \cdot 7 = 8{,}75$$

<u>Ejemplo 3</u>. Un coche consume **6 litros** de gasolina cada **100 km**. El conductor llena el depósito de **50 litros** antes de realizar un viaje de **1000 km**. ¿Puede hacer el viaje sin repostar? Si el testigo de reserva se enciende cuando quedan **5 litros** en el depósito, ¿cuántos kilómetros puede hacer hasta que se enciende el piloto de reserva?

Podemos hacer una tabla de valores que relacione la distancia que puede recorrer el coche (km) con el volumen de combustible (litros). Si llamamos *x* a la distancia correspondiente a 50 litros, y llamamos *y* a la distancia que puede recorrer con 45 litros (50 – 5), tenemos:

Distancia (km)	100	x	y
Volumen (litros)	6	50	45

$$\frac{100}{6} = \frac{x}{50} \rightarrow x = \frac{50 \cdot 100}{6} = 833{,}\hat{3} \; km$$

Incluso agotando todo el depósito no puede realizar 1000 km sin repostar.

Distancia que puede recorrer hasta que se encienda el testigo de reserva.

$$\frac{100}{6} = \frac{y}{45} \rightarrow y = \frac{45 \cdot 100}{6} = 750 \; km$$

1.2. Repartos directamente proporcionales

Existen muchas situaciones en las que es necesario repartir una **cantidad N** entre **varias partes**, de forma **directamente proporcional** a otras **cantidades** (***a***, ***b***, ***c*** …) asociadas a cada una de las partes.

Ejemplo 4. En un bloque de viviendas formado por **4 vecinos**, la cuota de comunidad mensual del bloque es de **N = 516 €**. La cuota que debe pagar cada vecino debe ser directamente proporcional a la **superficie** de su vivienda. Hay **cuatro** tipos de vivienda, con las siguientes **superficies**: ***a* = 100 m²**, ***b* = 105 m²**, ***c* = 110 m²**, y ***d* = 115 m²**. ¿Qué **cuota** de comunidad debe pagar cada tipo de vivienda?

Si llamamos *x, y, z, w* a las cuotas correspondientes a cada tipo de vivienda, se tiene que cumplir la proporcionalidad entre cuotas y superficies:

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{w}{d}=k \rightarrow \frac{x}{100}=\frac{y}{105}=\frac{z}{110}=\frac{w}{115}=k$$

En este punto hay que tener en cuenta que si varias fracciones son iguales, también es igual a ellas la fracción que resulta de dividir la suma de numeradores entre la suma de denominadores.

$$\frac{x}{100}=\frac{y}{105}=\frac{z}{110}=\frac{w}{115}=\frac{x+y+z+w}{100+105+110+115}=\frac{N}{430}=\frac{516}{430}=1{,}2\,€/m^2=k$$

En este caso, el reparto proporcional equivale a que todos los vecinos paguen la misma cantidad por m² de superficie.

Por tanto, la cuota que debe pagar cada tipo de vivienda es:

$$\frac{x}{100}=1{,}2 \rightarrow x=1{,}2\cdot 100=120\ €$$

$$\frac{y}{105}=1{,}2 \rightarrow y=1{,}2\cdot 105=126\ €$$

$$\frac{z}{110}=1{,}2 \rightarrow z=1{,}2\cdot 110=132\ €$$

$$\frac{w}{115}=1{,}2 \rightarrow w=1{,}2\cdot 115=138\ €$$

Podemos comprobar que: 120 + 126 + 132 + 138 = 516.

Generalizando el procedimiento realizado:

Para **repartir la cantidad N de forma directamente proporcional a las cantidades *a*, *b*, *c*** … se multiplica cada cantidad ***a*, *b*, *c*** … por la constante de proporcionalidad $\boldsymbol{k}=\frac{N}{a+b+c\ldots}$.

Ejemplo 5. Antonio reparte **180 €** de forma directamente proporcional al número de tardes que le ayudaron sus tres hijos. Juan se llevó **45 €** por **3 tardes**. ¿Cuánto se llevó Pedro, que ayudó **5 tardes**? ¿Cuantas **tardes** ayudó Alicia?

Llamemos: *x* = asignación de Pedro; *y* = asignación de Alicia; *z* = tardes que ayudó Alicia.

El reparto proporcional del dinero obtenido y las tardes que han ayudado es:

$$\frac{x}{5}=\frac{y}{z}=\frac{45}{3}=\frac{x+y+45}{8+z}=\frac{180}{8+z}=15\text{ €}/tarde=k$$

Asignación de Pedro: $\frac{x}{5}=15 \rightarrow x=5\cdot 15=75\text{ €}$

Asignación de Alicia: $180=75+y+45 \rightarrow y=60\text{ €}$

Tardes que ha ayudado Alicia: $\frac{60}{z}=15 \rightarrow z=\frac{60}{15}=4\ tardes$

2. Proporcionalidad inversa

2.1. Magnitudes inversamente proporcionales

En la práctica existen muchas **parejas de magnitudes** cuya **relación numérica** entre ellas es tal que, cuando una **aumenta al doble**, la otra **disminuye a la mitad**, y cuando una **disminuye a la mitad**, la otra **aumenta al doble**.

Ejemplo 6. Queremos llenar un cubo de agua de **10 litros**. El **caudal** del grifo puede variar entre **0 y 10 litros/minuto**. Calcula el **tiempo** que tardará en llenarse el cubo para los siguientes **caudales: 1; 2,5; 5; 8; 10 l/min**. Elabora una **tabla** en la que la primera fila corresponda a los **caudales** (en l/min) y la segunda fila a los **tiempos de llenado** (en minutos).

El volumen de agua (l) es igual al caudal (l/min) por el tiempo (min): $V = c\cdot t$. Despejando el tiempo: $t = V/c$. Sustituyendo V = 10 l y c por los diferentes caudales, calculamos los tiempos de llenado y elaboramos la siguiente tabla.

Caudal (l/min)	1	2,5	5	8	10
Tiempo (min)	10	4	2	1,25	1

Si multiplicamos cada valor de caudal por el correspondiente de tiempo, obtenemos:

$$Caudal(l/min)\ x\ Tiempo(min)=1\cdot 10=2{,}5\cdot 4=5\cdot 2=8\cdot 1{,}25=10\cdot 1=10\ litros=volumen$$

Es decir, obtenemos siempre el mismo valor, correspondiente al volumen de agua total.

Decimos que **dos magnitudes** son **inversamente proporcionales** cuando el **producto** entre cantidades correspondientes de ambas magnitudes es **constante**. Este producto se denomina constante o **razón de proporcionalidad inversa, k.**

Magnitud 1	a	b	c	d
Magnitud 2	a’	b’	c’	d’

$$a\cdot a'=b\cdot b'=c\cdot c'=d\cdot d'=k$$

Cuando dos magnitudes son **inversamente proporcionales**, al multiplicar una de ellas por cualquier **número**, los correspondientes valores de la otra quedan **divididos** por ese número.

Efectivamente, en el ejemplo anterior, para un caudal de 2,5 l/min obtenemos un tiempo de 4 min. Si multiplicamos ese caudal por 2, tendríamos un caudal de 5 l/min, al que corresponde un tiempo de 4/2 = 2 min.

Si (a, a') y (b, b') son dos parejas de valores de dos magnitudes inversamente proporcionales, se puede **calcular cualquiera de los valores conociendo los otros tres**, ya sea utilizando una **pareja de datos conocidos**, o mediante la **constante de proporcionalidad**.

Efectivamente. Supongamos que la incógnita es *x* = *b* y que conocemos los valores *a, a' y b'*.

$$a \cdot x = a' \cdot b' = k \rightarrow x = \frac{a' \cdot b'}{a} \text{ o bien } x = \frac{k}{a}$$

Ejemplo 7. Halla los valores de *x* e *y* para que las magnitudes sean inversamente proporcionales. Para calcular *x* utiliza una pareja de datos conocidos. Para calcular *y* utiliza la constante de proporcionalidad.

Magnitud 1	4	5	y
Magnitud 2	x	60	15

Calculamos *x* utilizando la pareja de datos conocido:

$$4 \cdot x = 5 \cdot 60 \rightarrow x = \frac{5 \cdot 60}{4} = 75$$

Calculamos *y* utilizando la constante de proporcionalidad:

$$k = 5 \cdot 60 = 300 \rightarrow y \cdot 15 = 300 \rightarrow y = \frac{300}{15} = 20$$

Ejemplo 8. **Doce** personas tardan **8 h** en descargar un barco. ¿Cuántas personas deben trabajar para descargarlo en **1 hora**?

El número de personas que trabajan y el tiempo empleado son magnitudes inversamente proporcionales. Por tanto, si llamamos x al número de personas necesarias para descargar el barco en 1 hora:

$$12 \cdot 8 = x \cdot 1 \rightarrow x = 12 \cdot 8 = 96$$

Ejemplo 9. Un vehículo tarda **3 horas** en realizar un determinado recorrido a una velocidad media de **80 km/h**. Calcula cuánto tiempo tardará otro vehículo en realizar el mismo recorrido, si lo hace a una velocidad media de **100 km/h**.

El tiempo empleado en realizar el recorrido es inversamente proporcional a la velocidad media con la que se hace. Por tanto:

$$3 \cdot 80 = x \cdot 100 \rightarrow x = \frac{3 \cdot 80}{100} = 2{,}4\, horas = 2\, horas\ y\, 24\, minutos$$

2.2. Repartos inversamente proporcionales

Repartir una cantidad M de forma inversamente proporcional a los números *a, b, c*, … es lo mismo que repartir esa misma cantidad M de forma directamente proporcional a los números $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, …

Ejemplo 10. Se decide construir una estación de ferrocarril en la comarca del Guadalhorce. El coste es de un **1.175.000 €** y se acuerda que paguen las tres localidades principales, de manera **inversamente proporcional a la distancia** a la que se encuentran de la estación. **Coín** se encuentra a **6 km**, **Alhaurín el Grande** a **8 km** y **Alhaurín de la Torre** a **10 km** de la estación. ¿Cuál será el importe a pagar de cada localidad?

Sean x, y, z las cantidades que deben pagar los tres pueblos. Como son inversamente proporcionales a sus distancias a la estación, de cumplirse:

$$x\cdot 6 = y\cdot 8 = z\cdot 10 \rightarrow \frac{x}{\frac{1}{6}} = \frac{y}{\frac{1}{8}} = \frac{z}{\frac{1}{10}} = \frac{x+y+z}{\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}} = \frac{1.175.000}{\frac{47}{120}} = 3.000.000 = k$$

Despejando las incógnitas:

$$x = \frac{1}{6}\cdot 3.000.000 = 500.000\ € \quad ; \quad y = \frac{1}{8}\cdot 3.000.000 = 375.000\ €$$

$$z = \frac{1}{10}\cdot 3.000.000 = 300.000\ €$$

Podemos comprobar que: 500.000 € + 375.000 € + 300.000 € = 1.175.000 €.

3. Porcentajes

Los **porcentajes** expresan la razón entre dos **magnitudes directamente proporcionales** e indican la **cantidad *r*** que corresponde a una de ellas cuando la otra es exactamente **100**. La fracción $\frac{r}{100}$ se expresa como ***r* %**, o como el **número decimal** resultante.

$$\frac{25}{100} = 25\ \% = 0{,}25$$

Ejemplo 11. En una clase de **30 alumnos**, hay un **60 %** de **mujeres**. ¿Cuántas *mujeres* hay?

Mujeres	x	60
Clase	30	100

$$\frac{x}{30} = \frac{60}{100} \rightarrow x = \frac{60}{100}\cdot 30 = 0{,}6\cdot 30 = 18\ mujeres$$

Para calcular el ***r* %** de la cantidad ***C*** multiplicamos dicha cantidad por $\frac{r}{100}$, o el número decimal que resulte de esa fracción.

$$r\ \%\ \text{de}\ C=\frac{r}{100}\cdot C$$

Ejemplo 12. En un instituto de **400 alumnos**, **80** son de **Bachillerato**. ¿Qué **porcentaje** representan los alumnos de **Bachillerato** con respecto al total de alumnos del instituto?

Bachillerato	80	*r*
Instituto	400	100

$$\frac{80}{400}=\frac{r}{100}\rightarrow r=\frac{80}{400}\cdot 100=20$$

Los alumnos de Bachillerato son el 20 % de los alumnos del instituto.

Para calcular qué **porcentaje** representa la cantidad ***A*** con respecto a la cantidad ***B***, se divide ***A*** entre ***B*** y se multiplica por 100.

3.1. Aumentos y disminuciones porcentuales

Si una cantidad inicial C_i **aumenta** un ***r* %,** la cantidad final C_f será:

$$C_f=C_i+C_i\cdot\frac{r}{100}=C_i\left(1+\frac{r}{100}\right)$$

Si una cantidad inicial C_i **disminuye** un ***r* %,** la cantidad final C_f será:

$$C_f=C_i-C_i\cdot\frac{r}{100}=C_i\left(1-\frac{r}{100}\right)$$

Ejemplo 13. Un producto tiene un **precio sin IVA** de **400 €**. Sabiendo que ese producto tiene un IVA del **21 %**, calcula su **precio con IVA**.

$$C_f=C_i\left(1+\frac{r}{100}\right)=400\cdot\left(1+\frac{21}{100}\right)=400\cdot 1{,}21=484\ €$$

Ejemplo 14. Un televisor tenía un precio de venta al público (PVP, o precio con IVA) de **600 €**. Han llegado las rebajas y le han aplicado un **descuento** del **15 %**. ¿Cuál es el **precio rebajado**?

$$C_f=C_i\left(1-\frac{15}{100}\right)=600\cdot 0{,}85=510\ €$$

Ejemplo 15. Un frigorífico tiene un **precio con IVA** de **700 €**. a) ¿Cuál sería su precio en un día **sin IVA**? b) ¿A qué **descuento** equivale?

a) En este caso C_f = 700 €, r = 21 y tenemos que calcular C_i.

$$700=C_i\left(1+\frac{21}{100}\right)=C_i\cdot 1{,}21\rightarrow C_i=\frac{700}{1{,}21}=578{,}51\ €$$

b) En este caso, suponemos que C_i = 700 € y que le hemos aplicado un descuento del r %, quedándose su precio final en C_f = 578,51 €. Entonces:

$$C_f=C_i-C_i\cdot\frac{r}{100}\rightarrow C_i\cdot\frac{r}{100}=C_i-C_f\rightarrow r=\frac{C_i-C_f}{C_i}\cdot 100=\frac{700-578{,}51}{700}\cdot 100=\frac{121{,}49}{700}\cdot 100$$

Por tanto: r = 17,36. Es decir, el precio sin IVA equivale a aplicarle al precio con IVA un descuento del 17,36 %.

En realidad, lo que hemos hecho es calcular lo que nos hemos ahorrado: 700 – 578,51 = 121,49 € y después hemos calculado qué porcentaje representa esa cantidad con respecto al precio si descuento.

Ejemplo 16. Un determinado modelo de coche cuesta **18.150 €**, incluyendo el IVA general del **21 %.** ¿Cuanto costaría si el comprador fuese una persona con discapacidad y se le aplicara un IVA reducido del **4 %**?

Si llamamos *x* al precio sin IVA: $x \cdot 1{,}21 = 18.150\ € \rightarrow x = \dfrac{18.150}{1{,}21} = 15.000\ €$

Si llamamos *y* al precio con un IVA del 4 %: $y = 15.000 \cdot 1{,}04 = 15.600\ €$

Cuando a una cantidad inicial se le aplican **aumentos o disminuciones porcentuales sucesivamente**, se dice que se han aplicado **porcentajes encadenados**. Calcularlos equivale a calcular un único porcentaje que sea **el producto de todos ellos**.

Ejemplo 17. Un comerciante vende los artículos de su tienda un **40 % más caros** que el precio que paga él. Quiere hacerle un precio especial a un familiar y ordena al dependiente que le haga un **descuento** del **40 %** del **precio de venta al público**. ¿Cuánto pagará por un artículo que el comerciante compró por **100 €**? ¿Qué **descuento** tendría que haberle hecho para que el familiar pagase los **100 €** del precio de coste?

Sea *x* el precio de venta al público. Entonces: $x = 1{,}4 \cdot 100 = 140\ €$

Sea y el precio que paga el familiar. Entonces: $y = 0{,}6 \cdot 140 = 84\ €$

Podríamos haber encadenado los porcentajes: $y = 1{,}4 \cdot 0{,}6 \cdot 100 = 0{,}84 \cdot 100 = 84\ €$

Si llamamos *z* al descuento necesario para que el familiar pague 100 € en lugar de 84 €:

$$100 = (1-z) \cdot 140 = 140 - z \cdot 140 \rightarrow z \cdot 140 = 140 - 100 \rightarrow z = \frac{40}{140} = 0{,}286 = 28{,}6\,\%$$

Ejemplo 18. Un coche pierde un **18 %** de su valor en el momento de la compra y un **5 %** adicional cada **4 meses**. Calcula el valor del coche al cabo de **4 meses**, **8 meses**, **1 año** y **2 años**, suponiendo que su precio de compra es de **20.000 €**.

A los 4 meses: P_1 = (1-0,18)·(1-0,05)·20.000 = 0,82·0,95·20.000 = 15.580 €.

A los 8 meses = 2 cuatrimestres: P_2 = 0,82·0,95·0,95· 20.000 = 14.801 €.

Al cabo de 1 año = 3 cuatrimestres: P_3 = 0,82·0.95·0,95·0,95· 20.000 = 14.060,95 €

Al cabo de 2 años = 24 meses = 6 cuatrimestres: P_6 = 0,82·$0{,}95^6$·20.000 = 12.055,51 €

En general, para *n* cuatrimestres: P_n = 0,82·$0{,}95^n$·20.000 €

4. Interés simple y compuesto

Se trata de problemas de **porcentajes** en los que, partiendo de una **cantidad de dinero que invertimos** en un determinado producto financiero, la entidad financiera nos **remunera** con otra **cantidad de dinero**, de forma **periódica**, ya sea anual, semestral, trimestral, mensual, o diaria.

Para entender las fórmulas de cálculo, definimos los siguientes **conceptos**:

- **Capital inicial (C_i).** Es la cantidad invertida.
- **Tipo de interés nominal anual (i).** Porcentaje que se utiliza para calcular la cantidad con la que nos remunera la entidad financiera.
- **Periodo de capitalización**. Intervalo de tiempo (año, semestre, trimestre, mes, día) entre dos pagos consecutivos.
- **Número de periodos de capitalización (n)**. Equivale al número de pagos realizados, ya sea en un determinado momento, o al finalizar la inversión. Equivale numéricamente al tiempo transcurrido, expresado en las unidades de tiempo de cada periodo de capitalización. Por ejemplo: en una inversión con pagos mensuales, da igual calcular la renta obtenida al cabo de 30 periodos de capitalización, o de 30 meses.
- **Interés de un periodo** (I_p). Es la cantidad recibida en cada pago. Puede ser constante (interés simple) o aumentar en cada periodo (interés compuesto).
- **Interés total (I)**. Es la cantidad total recibida al cabo de n periodos. Es la suma de todos los intereses periódicos.
- **Capital final (C_f)**. Es la cantidad acumulada al finalizar la inversión. Es la suma del capital inicial y el interés total.

4.1. Interés simple

Se dice que una inversión tiene un tipo de **interés simple** cuando el **interés de cada periodo de capitalización** es **constante**, ya que **se calcula siempre con respecto al capital inicial**.

Por ejemplo: supongamos que invertimos un capital inicial **C_i = 10.000 €**, a **interés simple**, con un **tipo de interés nominal i = 3 %**, con **pagos anuales** y durante **5 años**. En la tabla siguiente mostramos cómo evoluciona la inversión a lo largo del tiempo.

Periodo	Capital inicial en cada periodo	Interés de cada periodo (I_p)	Capital acumulado en cada periodo
1	10.000 €	$C_i \cdot i$ = 10.000·0,03 = 300 €	10.300 €
2	10.000 €	$C_i \cdot i$ = 10.000·0,03 = 300 €	10.600 €
3	10.000 €	$C_i \cdot i$ = 10.000·0,03 = 300 €	10.900 €
4	10.000 €	$C_i \cdot i$ = 10.000·0,03 = 300 €	11.200 €
5	10.000 €	$C_i \cdot i$ = 10.000·0,03 = 300 €	11.500 €
n	**Capital inicial (C_i)**	**Interés total (I)**	**Capital final (C_f)**
5	10.000 €	$I = C_i \cdot i \cdot n$ = 10.000·0,03·5 = 1.500 €	$C_f = C_i + I$ = 11.500 €

Observamos que el interés en cada periodo es siempre el mismo y se obtiene calculando el 3 % de 10.000 €; es decir, multiplicando el capital inicial C_i por el tipo de interés nominal i. Como el interés de cada periodo es constante, para obtener el interés total multiplicamos el interés de un periodo ($I_p = C_i \cdot i$) por el número de periodos (n).

El capital final (C_f) se obtiene sumándole al capital inicial (C_i) el interés total (I). Y teniendo en cuenta que el interés total es $I = C_i \cdot i \cdot n$, podemos decir que:

$C_f = C_i + I = C_i + C_i \cdot i \cdot n = C_i \cdot (1 + i \cdot n)$.

Así pues, las fórmulas para calcular el **interés total** y el capital final de una inversión con **interés simple** y **pagos anuales**, si conocemos el **capital inicial**, el **tipo de interés nominal** y el **número de periodos**, son:

$$\boxed{I = C_i\, i\, n} \qquad \boxed{C_f = C_i(1+i\, n)}$$

Si llamamos ***t*** al **tiempo que dura la inversión**, expresado en **años**, tendremos que ***t* = *n***. Por tanto, las fórmulas anteriores también pueden ponerse:

$$\boxed{I = C_i\, i\, t} \qquad \boxed{C_f = C_i(1+i\, t)}$$

4.1.1. Interés simple para otros periodos de capitalización

En la práctica, los pagos de los intereses periódicos pueden producirse también de forma **semestral** (cada 6 meses, 2 veces al año), **trimestral** (cada 3 meses, 4 veces al año), o **mensual** (cada mes, 12 veces al año). También puede ocurrir que, si es posible, decidamos **cancelar** la inversión antes plazo previsto, independientemente de la periodicidad de los pagos.

Vamos a ver que las fórmulas anteriores siguen siendo válidas si cambiamos el **tipo de interés nominal *i***, que es **anual**, por el correspondiente al periodo de capitalización elegido: **semestral**, **trimestral** o **mensual**, y si expresamos el **tiempo** en las mismas **unidades** que dichos **periodos.**

El **tipo de interés nominal correspondiente a un determinado periodo de capitalización** es igual al **tipo de interés nominal anual (*i*)** dividido por el **número de periodos de capitalización** que se produzcan al cabo de un **año (*k*).**

Periodo de capitalización	Anual	Semestral	Trimestral	Mensual
Nº de periodos/año (*k*)	1	2	4	12
Tipo de interés nominal (i_k)	i	$i_2 = \frac{i}{2}$	$i_4 = \frac{i}{4}$	$i_{12} = \frac{i}{12}$

$$\boxed{i_k = \frac{i}{k}}$$

Si llamamos ***t*** al **tiempo que dura la inversión**, expresado en **años**, para expresar ese mismo tiempo en **semestres**, **trimestres** o **meses**, hay que multiplicar *t* por el número de semestres, trimestres o meses que tiene un año; es decir, por ***k***.

Periodo de capitalización	Anual	Semestral	Trimestral	Mensual
Nº de periodos/año (*k*)	1	2	4	12
Tiempo de la inversión (t_k)	t	$2t$	$4t$	$12t$

$$t_k = k\,t$$

Por tanto, podemos generalizar las fórmulas de cálculo del **interés total** de una inversión y del **capital final** obtenido, para cualquier periodo de capitalización, teniendo en cuenta que ***k*** es el **número de periodos/año**.

$$I = C_i\, i_k\, t_k \qquad C_f = C_i(1+i_k t_k) \qquad i_k = \frac{i}{k} \qquad t_k = k\,t$$

En una inversión a **interés simple** el **interés total** obtenido (así como el capital final) es **independiente** de la **periodicidad** con la que se hagan los **pagos**.

Efectivamente: $I = C_i\, i_k\, t_k = C_i \dfrac{i}{k} k\, t = C_i\, i\, t$

<u>Ejemplo 19</u>. En una inversión de **10.000 €** con un interés simple del **3 %**, calcula el valor de cada **pago periódico**, según que estos sean **anuales**, **semestrales**, **trimestrales** o **mensuales**.

Pagos anuales: $I_a = C_i\, i = 10.000 \cdot 0{,}03 = 300\,€$

Pagos semestrales: $I_s = C_i \dfrac{i}{2} = 10.000 \cdot \dfrac{0{,}03}{2} = 150\,€$

Pagos trimestrales: $I_t = C_i \dfrac{i}{4} = 10.000 \cdot \dfrac{0{,}03}{4} = 75\,€$

Pagos mensuales: $I_m = C_i \dfrac{i}{12} = 10.000 \cdot \dfrac{0{,}03}{12} = 25\,€$

Podemos comprobar que la cantidad obtenida al cabo de un año es la misma.

<u>Ejemplo 20</u>. Hemos invertido **20.000 €** a un interés simple del **2,5 %**, con pagos **anuales**, en un **plazo fijo** de **5 años**. Sin embargo, a los **3 años** y **100 días** necesitamos recuperar el dinero invertido más los intereses. Al ser un plazo fijo, el banco nos cobra una comisión del **1 %** del capital invertido. Calcula el **capital final neto** obtenido, teniendo en cuenta la **penalización** por no cumplir el plazo.

En este caso, como la duración de la inversión no es un número entero de años, tenemos que convertir los días en años, dividiendo por 360 días, que es la equivalencia utilizada en el mundo financiero.

$$t = 3 \text{ años} + 100 \text{ días} = 3 \cdot 360 + 100\, \text{días} = 1080 + 100\, \text{días} = \frac{1180}{360}\, \text{años}$$

$$C_f = C_i(1+i\,t) = 20.000\left(1+0{,}025\left(\frac{1180}{360}\right)\right) = 21.638{,}89\,€$$

El capital final neto es: 21.638,89 - 0,01·20.000 = 21.638,89 - 200 = 21.438,89 €

Ejemplo 21. Un capital, colocado a interés simple durante **4 años**, ha pasado de **5.000 €** a **5.900 €**. ¿Qué **tipo de interés nominal** se le ha aplicado?

Interés total producido: $I = C_f - C_i = 5.900 - 5.000 = 900\,€$

Sustituyendo en la fórmula del interés total:

$$I = C_i i t \rightarrow 900 = 5.000 \cdot i \cdot 4 \rightarrow i = \frac{900}{5.000 \cdot 4} = 0{,}045 = 4{,}5\%$$

Ejemplo 22. Calcula el **capital** que hay que invertir para obtener un **interés** de **1.000 €** al **4 %** de interés simple en **15 meses**.

$$I = C_i i_{12} t_{12} \rightarrow 1.000 = C_i \frac{0{,}04}{12} 15 \rightarrow C_i = \frac{1.000 \cdot 12}{0{,}04 \cdot 15} = 20.000\,€$$

4.2. Interés compuesto

Se dice que una inversión tiene un tipo de **interés compuesto** cuando el **interés de cada periodo de capitalización se calcula con respecto al capital acumulado en el periodo anterior**. Esto hace que el **interés de cada periodo vaya aumentando**, en lugar de ser constante, como sucede en el interés simple.

Por ejemplo: supongamos que invertimos un capital inicial C_i = **10.000 €**, a **interés compuesto**, con un **tipo de interés nominal** i **= 3 %**, con **pagos anuales** y durante **5 años**. En la tabla siguiente mostramos cómo evoluciona la inversión a lo largo del tiempo.

Periodo	Capital inicial en cada periodo	Interés de cada periodo (I_p)	Capital acumulado en cada periodo
1	10.000 €	10.000·0,03 = 300 €	10.300 €
2	10.300 €	10.300·0,03 = 309 €	10.609 €
3	10.609 €	10.609·0,03 = 318,27 €	10.927,27 €
4	10.927,27 €	10.927,27 €·0,03 = 327,82 €	11.255,09 €
5	11.255,09 €	11.255,09 €·0,03 = 337,65 €	11.592,74 €

Observamos que el interés de cada periodo es mayor que el del periodo anterior, porque se calcula en base al capital acumulado, en lugar del capital inicial. Por tanto, un interés compuesto es más ventajoso que un interés simple.

El interés total es la suma de los intereses de cada periodo:

I = 300 + 309 + 318,27 + 327,82 + 337,65 = 1.592,74 €

El capital final es la suma del capital inicial y del interés total:

$C_f = C_i + I$ = 10.000 + 1.592,74 = 11.592,74 €

Podemos obtener la fórmula del **capital final** para ***n* periodos**, calculando el capital acumulado en cada periodo:

Periodo 1: $C_{a1} = C_i + C_i \cdot i = C_i(1+i)$
Periodo 2: $C_{a2} = C_{a1} + C_{a1} \cdot i = C_{a1}(1+i) = C_i(1+i)(1+i) = C_i(1+i)^2$
Periodo 3: $C_{a3} = C_{a2} + C_{a2} \cdot i = C_{a2}(1+i) = C_i(1+i)^2(1+i) = C_i(1+i)^3$
Periodo 4: $C_{a4} = C_{a3} + C_{a3} \cdot i = C_{a3}(1+i) = C_i(1+i)^3(1+i) = C_i(1+i)^4$
…
Periodo n: $C_f = C_i(1+i)^n$. El interés total es, por tanto: $I = C_f - C_i = C_i(1+i)^n - C_i = C_i((1+i)^n - 1)$

Como ya vimos en el caso del interés simple, en la práctica se utiliza t = años de inversión como equivalente a n = número de periodos anuales.

Las fórmulas de cálculo para el **capital final** y el **interés total** de una inversión a **interés compuesto**, con periodos de capitalización **anuales** son:

$$\boxed{C_f = C_i(1+i\,t)^t} \qquad \boxed{I = C_f - C_i} \qquad \boxed{I = C_i((1+i)^t - 1)}$$

Aplicando estas fórmulas al ejemplo anterior:

Capital final: $C_f = C_i(1+i\,t)^t = 10.000(1+0{,}03)^5 = 11.592{,}74\,€$

Interés total: $I = C_f - C_i = 11.592{,}74 - 10.000 = 1.592{,}74\,€$

4.2.1. Interés compuesto para otros periodos de capitalización

Podemos generalizar las fórmulas anteriores de la misma manera que hicimos en el caso del interés simple, sustituyendo ***i*** por ***i_k* =*i*/*k*** y ***t*** por ***n* = *kt***, siendo ***k*** el número de periodos de capitalización por año.

$$\boxed{C_f = C_i(1+i_k)^n = C_i\left(1+\frac{i}{k}\right)^{k\,t}} \qquad \boxed{i_k = \frac{i}{k}} \qquad \boxed{n = k\,t} \qquad \boxed{I = C_i((1+i_k)^n - 1)}$$

En una inversión a interés compuesto, el capital final obtenido es mayor cuanto menor sea el periodo de capitalización.

<u>Ejemplo 23</u>. Se depositan **10.000 €** a un **interés compuesto** del **3 %** anual durante **5 años**. Calcula el **capital final** obtenido suponiendo pagos **semestrales**, **trimestrales** y **mensuales**.

Pagos semestrales: $k = 2$, $n = 2 \cdot 5 = 10$ semestres. $C_f = 10.000\left(1+\frac{0{,}03}{2}\right)^{10} = 11.605{,}41\,€$

Pagos trimestrales: $k = 4$, $n = 4 \cdot 5 = 20$ trimestres. $C_f = 10.000\left(1+\frac{0{,}03}{4}\right)^{20} = 11.611{,}84\,€$

Pagos mensuales: $k = 12$, $n = 12 \cdot 5 = 60$ meses. $C_f = 10.000\left(1+\frac{0{,}03}{12}\right)^{60} = 11.616{,}17\,€$

A la hora de hacer una inversión podemos encontrarnos con diferentes ofertas, que no solo se diferencian en el tipo de interés anual, sino también en si se trata de interés simple o compuesto, o cuál es la periodicidad de los pagos. Así mismo, puede ser que nos cobren diferentes tipos de comisiones. Por ello, no siempre será la más rentable la que ofrezca un tipo de interés nominal más alto.

Ejemplo 24. Queremos invertir **30.000 €** en un depósito a plazo fijo durante **10 años**. El banco **A** nos ofrece un interés nominal anual del **3%**, a **interés simple**, debiendo pagar una comisión de estudio y apertura del **1%** del **capital invertido**. El banco **B** nos ofrece un interés nominal anual del **2,9%**, a **interés compuesto** y periodos de capitalización **anuales**, debiendo pagar 80€ anuales de gastos de mantenimiento. El banco **C** nos ofrece un interés nominal anual del **2,7%**, a **interés compuesto** y periodos de capitalización **mensuales**, sin comisiones ni gastos de mantenimiento. Calcula la **rentabilidad** (**intereses totales - gastos**) de las diferentes ofertas.

Oferta A: $I_A = C_i \cdot i_A \cdot t = 30.000 \cdot 0{,}03 \cdot 10 = 9.000\,€$ Gastos: $G_A = 30.000 \cdot 0.01 = 300\,€$

Rentabilidad: $R_A = I_A - G_A = 9.000 - 300 = 8.700\,€$

Oferta B:

k = 1 → $I_B = C_i\left(\left(1+i_B\right)^t - 1\right) = 30.000 \cdot \left(\left(1{,}029\right)^{10} - 1\right) = 30.000\left(1{,}331 - 1\right) = 9.930\,€$

Gastos: $G_B = 80 \cdot 10 = 800\,€$ Rentabilidad: $R_B = I_B - G_B = 9.930 - 800 = 9.130\,€$

Oferta C:

k = 12 → $I_C = C_i\left(\left(1+\frac{i_C}{k}\right)^{kt} - 1\right) = 30.000 \cdot \left(\left(1+\frac{0{,}027}{12}\right)^{120} - 1\right) = 30.000\left(1{,}31 - 1\right) = 9.300\,€$

Sin gastos. Resulta ser la más rentable.