

Funciones

1. Concepto de función

En matemáticas, una **función** es una **regla** mediante la cual se asigna a cada **elemento** “ x ” de un **conjunto origen** A un **único elemento** “ y ” de un **conjunto imagen** B .

La manera habitual de denotar una función f es:

$$f: A \rightarrow B$$
$$x \rightarrow y = f(x)$$

Ejemplo 1. Podemos asignar a los elementos de un conjunto A formado por **polígonos** un elemento del conjunto B (números naturales) que sea igual al **número de lados**. La **regla** sería: “asignar a cada polígono un número igual al número de sus lados” (Figura 1). ¿Cómo se expresaría la función?

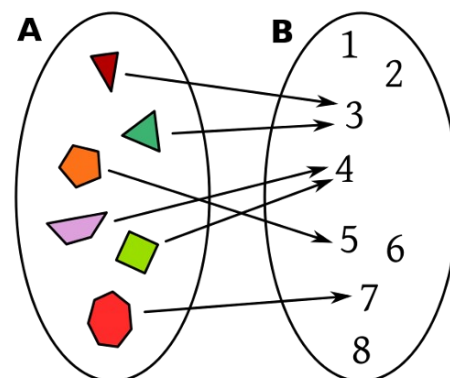


Figura 1: Concepto de función

$$f: A \rightarrow B$$
$$x \rightarrow y = f(x) = \text{número de lados de } x$$

1.1. Variable dependiente e independiente

Cada elemento genérico x del conjunto A recibe el nombre de **variable independiente**, y cada elemento genérico y del conjunto B el de **variable dependiente**.

Es lógico, puesto que el valor de **y depende** del elemento x elegido. En el ejemplo anterior el valor de y (número natural) depende del polígono x elegido, que determinará el número de lados que tenga.

La condición de que a cada elemento x sólo se le puede asignar **un único elemento** y es fundamental para que se trate de una **función**. Es decir, si hubiese algún elemento x al que se le pudiesen asignar **dos o más elementos** y , la **regla de asignación no sería una función**. Sin embargo, sí puede ocurrir que a varios elementos x se le asignen el mismo elemento y .

1.2. Dominio y recorrido de una función

El **dominio** de una función es el **conjunto de valores** x (variable independiente) a los que **se les puede aplicar la regla** establecida por la función. Es decir, aquellos valores x para los que existe un valor $f(x)$.

En el ejemplo de la Figura 1 el **dominio** sería **todo el conjunto** A . Pero si A contuviera también **círculos y elipses**, a esos elementos no se les podría aplicar la función, ya que en esas figuras geométricas no tiene sentido hablar de lados. En ese caso el dominio sería un **subconjunto del conjunto** A , formado exclusivamente por los **polígonos**.

El **recorrido** de una función es el **conjunto de valores** y (variable dependiente) que **han sido asignados** a algún valor x del **dominio**. Es decir, aquellos valores $f(x)$ correspondientes a los valores x del **dominio**.

En el ejemplo de la Figura 1 el recorrido no sería todo el conjunto B , ya que a los elementos 1 , 2 , 6 y 8 no se les ha asignado ningún elemento de A . Por un lado, no existen polígonos de 1 ni de 2 lados. Por otra parte, en A no hay polígonos de 6 ni de 8 lados.

Ejemplo 2. Supongamos que el conjunto A está formado por los alumnos de una clase y que el conjunto B lo forman los candidatos a delegado (Figura 2). El día de la elección hubo algunos alumnos que faltaron a clase, por lo que no participaron en la votación. Por otra parte, hubo un candidato que no recibió ningún voto. ¿Cómo definirías la función? ¿Cuáles serían su dominio y su recorrido?

Definición de la función:

$$f: A \rightarrow B$$

$$x \rightarrow y = f(x) = \text{candidato elegido por } x$$

Dominio: alumnos de la clase que votaron.

Recorrido: candidatos que obtuvieron algún voto.

Este ejemplo demuestra que las funciones no tienen por qué ser numéricas, aunque en la práctica la mayoría de las funciones que utilizamos sí son numéricas.

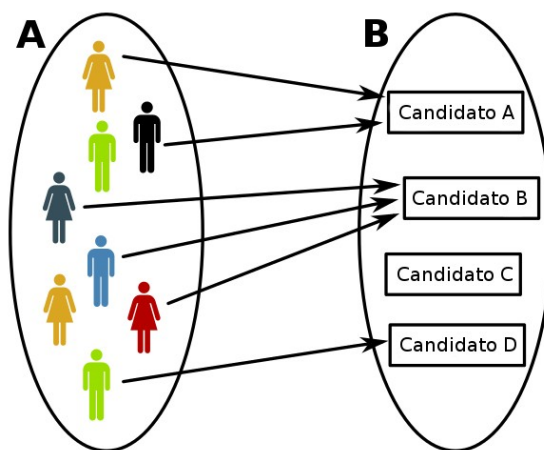


Figura 2: Ejemplo 2

A partir de ahora vamos a trabajar con funciones numéricas en las que tanto el conjunto A como el B son números. Como el conjunto de los números reales contiene al de los números racionales y éste al de los enteros y naturales, supondremos que tanto A como B son el conjunto de los números reales. Entonces hablaremos de funciones reales.

2. Gráfica de una función numérica

Una función numérica es aquella en la que tanto la variable independiente x , como la variable dependiente y son números. En general se tratará de números reales.

La gráfica de una función numérica es la representación sobre un plano cartesiano de todos los pares ordenados (x,y) correspondientes a dicha función, donde x es la variable independiente, e y es la variable dependiente.

Un plano cartesiano es un plano en el que la posición de cada punto se puede expresar tomando como referencia dos rectas, perpendiculares entre sí, una horizontal y otra vertical (Figura 3). La recta horizontal se denomina eje de abscisas y se designa con la letra X , mientras que la recta vertical se denomina eje de ordenadas y se designa con la letra Y .

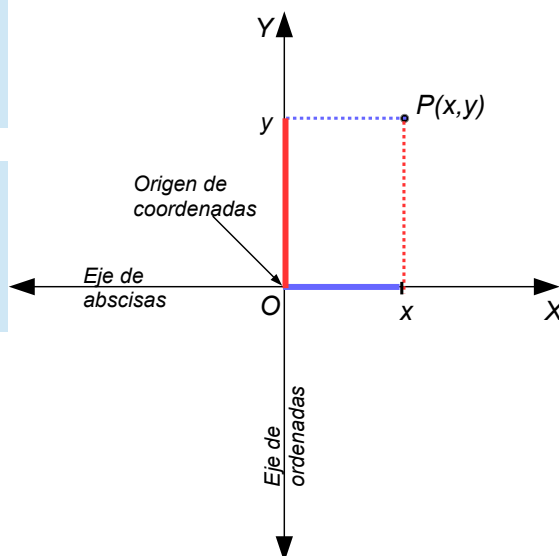


Figura 3: Plano cartesiano. Coordenadas de un punto.

Cada eje representa todos los **números reales**, desde $-\infty$ hasta $+\infty$, pasando por el 0. Los ejes se cortan en el **punto 0** de ambos ejes y se denomina **origen de coordenadas**, que se designa con la letra **O**.

La **posición** de cualquier punto **P** del plano (Figura 3) se expresa mediante dos números **(x,y)**, que son las **coordenadas cartesianas** del punto. El primer número **(x)** representa la **coordenada del punto sobre el eje de abscisas (X)**, siendo el segundo número **(y)** la **coordenada sobre el eje de ordenadas (Y)**. Para simplificar diremos que **(x,y)** son las **coordenadas x e y** del punto **P**.

La **coordenada x** se obtiene **proyectando** el punto **P** sobre el eje **X**. Es decir, trazando un **línea vertical** por el punto **P** hasta que corte al eje **X** (Figura 3). En realidad nos dice a qué **distancia del eje Y** está el punto **P**.

La **coordenada y** se obtiene **proyectando** el punto **P** sobre el eje **Y**. Es decir, trazando un **línea horizontal** por el punto **P** hasta que corte al eje **Y** (Figura 3). En realidad nos dice a qué **distancia del eje X** está el punto **P**.

2.1. Gráfica de una función a partir de su fórmula

En el caso de las **funciones numéricas** estas suelen expresarse mediante su **fórmula**.

Por ejemplo, supongamos que la función **f** asigna a cada número **x** un número que se obtiene **sumándole 2** al número **x**. Es decir: **$f(x) = x + 2$** . Como a **$f(x)$** le hemos llamado **y**, tendremos que podemos expresar esta función mediante la **fórmula**: **$y = x + 2$** .

Para dibujar la gráfica de una función a partir de su fórmula:

1. Elaboramos una **tabla** con un número determinado de valores de **x**, para los cuales **calculamos** los correspondientes valores de **y**.
2. Consideramos cada pareja de valores **x** e **y** como un par ordenado **(x,y)**.
3. **Representamos** los pares ordenados **(x,y)** como **puntos** en un **plano cartesiano**.
4. **Unimos** los puntos dibujados mediante una **línea**.

Vamos a aplicar el procedimiento a la función **$y = x + 2$** . Para ello, vamos a elaborar una tabla con los siguientes valores de **x**: -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4. Para obtener los correspondientes valores de **y** simplemente le sumaremos 2 al correspondiente valor de **x**.

Para **$x = -4$** obtenemos **$y = -4 + 2 = -2$** . Y así para los demás valores de **x**. La tabla sería:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6

A continuación obtenemos los **pares ordenados (x,y)**. Para **$x = -4$** e **$y = -2$** obtenemos el par ordenado **(-4,-2)**. Y así para los demás valores. Los pares ordenados serían:

(-4,-2); (-3,-1); (-2,0); (-1,1); (0,2); (1,3); (2,4); (3,5); (4,6)

A continuación **representamos** estos **pares ordenados** como **puntos del plano cartesiano**, de manera que el primer número representa la coordenada **x** y el segundo la coordenada **y** (Figura 4).

Por último, trazamos una línea que pase por todos los puntos. En este caso obtenemos una **línea recta**.

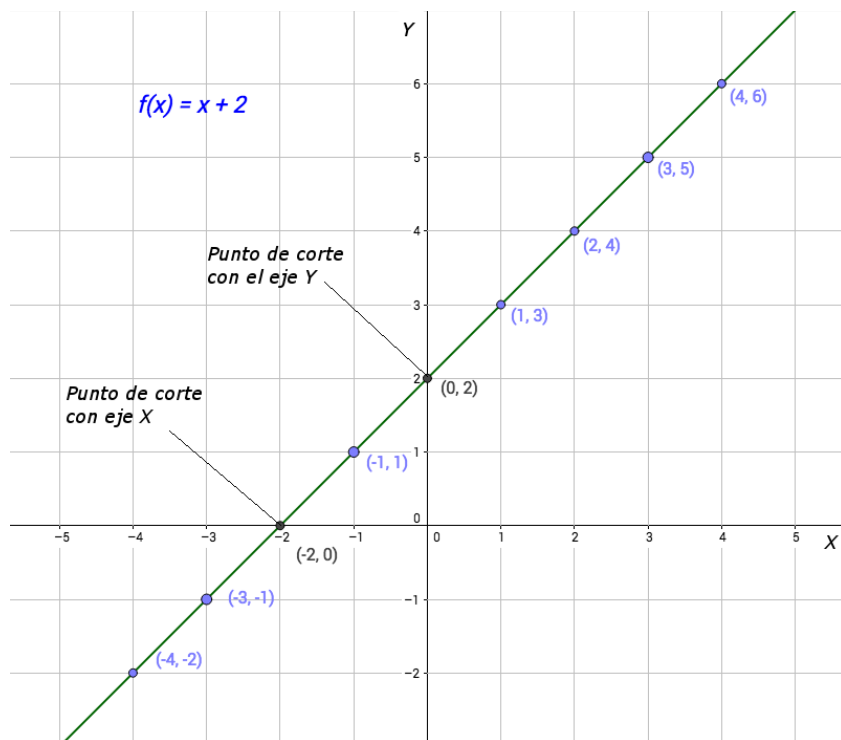


Figura 4: Trazado de la gráfica de una función

2.2. Puntos de corte con los ejes

En la Figura 4 podemos ver que la función $y = x + 2$ corta al eje Y en el punto $(0, 2)$ y al eje X en el punto $(-2, 0)$. ¿Podríamos averiguar cuáles son esos puntos sin necesidad de conocer la gráfica de la función, es decir, sólo a partir de su ecuación? La respuesta es afirmativa y se hace de la siguiente manera.

- **Punto de corte con el eje Y.** La función cortará al eje Y si existe un valor de y para $x = 0$. Por tanto, para averiguarlo debemos hacer $x = 0$ en la ecuación de la función y calcular el valor correspondiente de y . Es decir, hay que calcular $f(0)$. De acuerdo la definición de función (véase página 1) **sólo puede haber un valor $f(0)$** .

$$\text{Si } x = 0 \rightarrow y = 0 + 2 = 2 \rightarrow f(0) = 2 \rightarrow \text{El punto de corte con el eje Y es: } (0, 2)$$

- **Punto de corte con el eje X.** La función cortará al eje X si existe algún valor de x para el que $y = 0$. Es decir, si existe algún valor de x para el que $f(x) = 0$. En este caso sí puede haber **varios puntos de corte**. Para determinarlos haremos $y = 0$ en la ecuación de la función y calcularemos el valor (o valores) de x correspondientes.

$$\text{Si } y = 0 \rightarrow 0 = x + 2 \rightarrow x = -2 \rightarrow \text{El punto de corte con el eje X es: } (-2, 0)$$

Se puede comprobar que cualquier función del tipo $y = ax + b$ es una **recta** que corta al eje Y en el punto $(0, b)$ y al eje X en el punto $(-b/a, 0)$.

Ejemplo 3. Comprueba que la función $y = 1/x$ no tiene puntos de corte con los ejes X e Y.

Efectivamente. Si hacemos $x = 0$, obtenemos $y = 1/0$, que es una operación imposible en matemáticas. De la misma manera, si hacemos $y = 0$, obtenemos: $0 = 1/x$; de donde: $x = 1/0$, que vuelve a ser una operación imposible.

Si representamos la **gráfica** de la función (Figura 5) entenderemos lo que sucede. En este caso decimos que los ejes X e Y son **asíntotas** de la función.

Una **asíntota** es una **recta** hacia la que la función se acerca indefinidamente, para determinados valores de x , sin llegar nunca a tocarla.

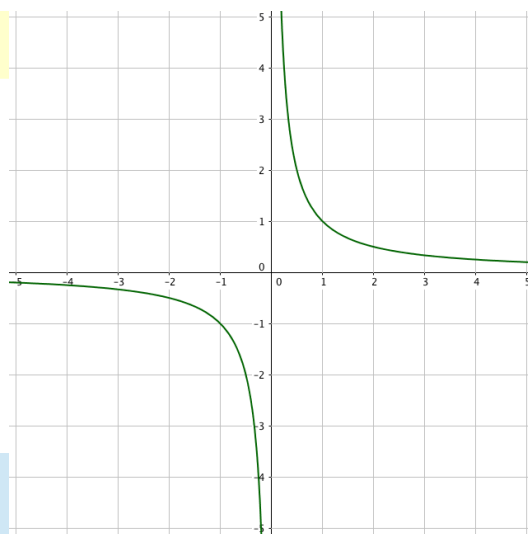


Figura 5: Gráfica de la función $f(x) = 1/x$

En nuestro ejemplo podemos decir que el **eje X** es una **asíntota horizontal** hacia la que tiende la función cuando los valores de x crecen, tanto en sentido positivo, como negativo. Mientras que el **eje Y** es una **asíntota vertical** hacia la que tiende la función cuando los valores de x se acercan al 0, tanto desde valores positivos como negativos.

2.3. Dominio y recorrido de una función real

Estos conceptos ya se han definido en la página 1. Ahora los vamos a aplicar a las **funciones reales**; es decir a funciones en las que tanto el **conjunto A** (origen) como el **conjunto B** (imagen) son **números reales** (\mathbb{R}).

El **dominio** de la función $f(x)$ se designa por $Dom(f)$. El **recorrido** se designa por $Img(f)$.

Normalmente a partir de la **gráfica** de la función se puede determinar fácilmente el dominio y el recorrido de una función.

Ejemplo 4. Determina el **dominio** y el **recorrido** de la función $f(x) = -x^4 + 4x^2 + 1$ a partir de su gráfica (Figura 6).

Podemos ver que el **dominio** es el conjunto de los **números reales** \mathbb{R} , ya que la función es válida para cualquier valor de x . Entonces: $Dom(f) = \mathbb{R}$

Sin embargo, sobre el eje Y la función toma valores entre $-\infty$ y 5. Eso lo expresamos así: $Img(f) = (-\infty, 5]$. El corchete “]” indica que el número 5 pertenece al recorrido.

En este caso la expresión analítica de $f(x)$ es un **polinomio**. Para todas estas funciones el **dominio** va a ser siempre \mathbb{R} . Sin embargo, el **recorrido** dependerá de cada caso.

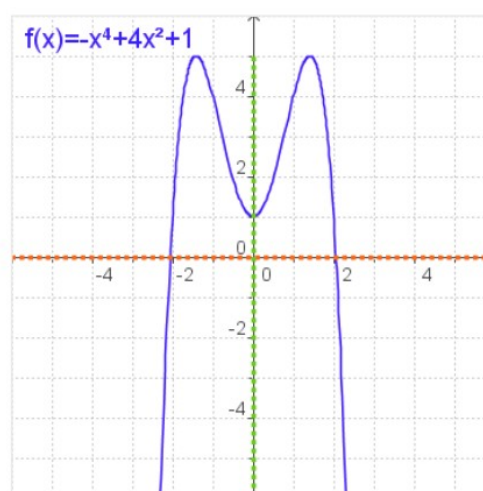


Figura 6: Función polinómica

Ejemplo 5. Determina el **dominio** y el **recorrido** de la función $f(x) = 2/(x - 1)$ a partir de su gráfica (Figura 7).

En este caso podemos ver que para $x = 1$ no existe un valor de $f(x)$. Por tanto, el dominio será:

- $Dom(f) = \mathbb{R} - \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

En cuanto al **recorrido**, vemos que para cualquier valor de x se cumple que $f(x) \neq 0$. Por tanto el recorrido será:

- $Im(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

Si la expresión analítica de la función es un **cociente**, el **dominio** son todos los números reales excepto los que **anulan el denominador**. En este caso el denominador se anula para $x = 1$. Sin embargo, el **recorrido** dependerá de cada caso.

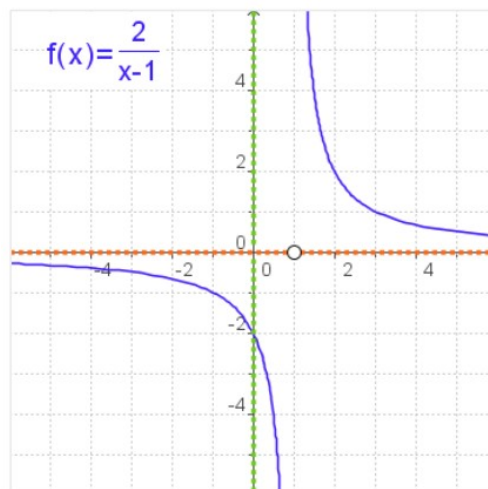


Figura 7: Función con cociente

Vamos a aprovechar este ejemplo para llamar la atención sobre cómo se puede expresar el dominio o el recorrido de una función cuando se trata de **intervalos de valores**, en lugar de todos los posibles valores de un eje, que serían todos los números reales \mathbb{R} .

Cuando hay un punto “a” de un eje que **no pertenece** al dominio o al recorrido, podemos expresarlo de dos formas:

1. Restándole al conjunto \mathbb{R} el número a: $\mathbb{R} - \{a\}$
2. Mediante la **unión** de **dos intervalos** que **no contengan** el punto a. En este caso hay que poner un **paréntesis** “(“ o “)” junto al número a, en lugar de un **corchete** “[“ o “]”. Para indicar la **unión** de dos intervalos se utiliza el símbolo **U**. Por tanto, utilizaremos el siguiente formato: $(-\infty, a) \cup (a, +\infty)$.

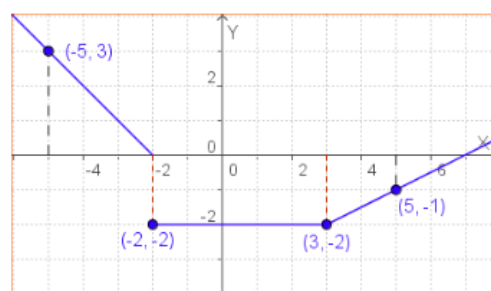
2.4. Funciones definidas a trozos

Hay un tipo de funciones que vienen definidas con **distintas expresiones algebraicas según los valores de x**, se dice que están **definidas a trozos**.

Para describir analíticamente una función formada por trozos de otras funciones, se dan las expresiones de los distintos tramos, por orden, de izquierda a derecha, indicando en cada tramo los valores de x para los que la función está definida.

En la Figura 8 podemos ver un ejemplo de función definida a trozos. Aprovechemos este ejemplo para definir $f(x)$ utilizando **intervalos**:

$$f(x) = \begin{cases} -x - 2 & (-\infty, -2) \\ -2 & [-2, 3] \\ 0,5x - 3,5 & (3, +\infty) \end{cases}$$



$$f(x) = \begin{cases} -x - 2 & x < -2 \\ -2 & -2 \leq x \leq 3 \\ 0,5x - 3,5 & x > 3 \end{cases}$$

Figura 8: Función definida a trozos

Aunque pueda parecer que este tipo de funciones son extrañas, vamos a ver un ejemplo real.

Ejemplo 6. Una tarifa telefónica tiene los siguientes costes: a) 0,20 € de establecimiento de llamada; b) los primeros 5 minutos a 0 €/min; c) a partir de los 5 minutos a 0,15 €/min. Define la función de forma analítica, utilizando intervalos. Dibuja la gráfica de la función hasta los 10 minutos de llamada, suponiendo que la función f asigna a cada tiempo transcurrido el coste acumulado de la llamada.

La variable independiente x es el tiempo transcurrido desde el establecimiento de llamada, expresado en minutos. La variable dependiente $y = f(x)$ es el coste acumulado de la llamada, expresado en euros. Por tanto:

- Cuando se establece la llamada el coste es de 0,20 € y se mantiene constante hasta el minuto 5. Por tanto: $f(x) = 0,2$ en $[0,5]$.
- A partir del minuto 5 el coste es proporcional al tiempo transcurrido a razón de 0,15 €/min. Eso quiere decir que es una recta del tipo $f(x) = 0,15x + b$. Para $x = 5$, $f(5) = 0,2$. Luego: $0,2 = 0,15 \cdot 5 + b$. Es decir: $0,2 = 0,75 + b$. Despejando el valor de b : $b = 0,2 - 0,75 = -0,55$. Por tanto: $f(x) = 0,15x - 0,55$ en $(5,+\infty)$.

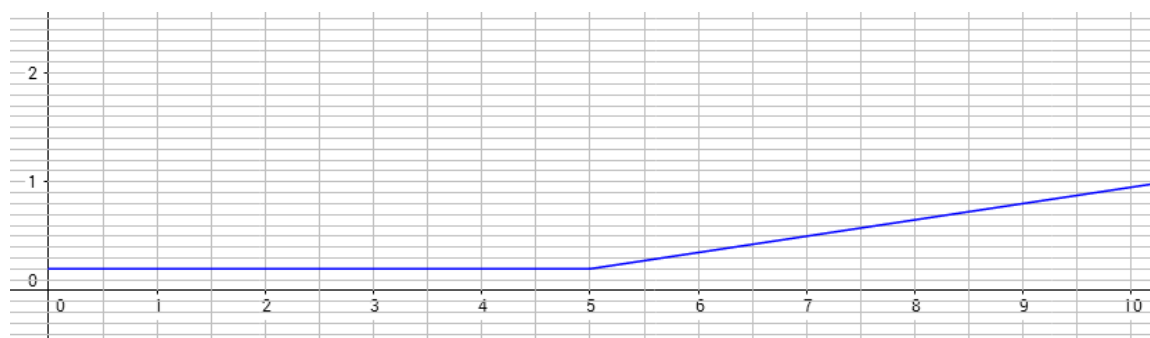


Figura 9: Gráfica de la función correspondiente a la tarifa telefónica

En la Figura 9 puede verse la gráfica de la función.

2.5. Continuidad

Desde el punto de vista gráfico podemos decir que una función es continua si podemos trazar su gráfica sin levantar el lápiz del papel.

Por ejemplo, las funciones de las figuras 4 y 6 son continuas, mientras que las funciones de las figuras 5, 7 y 8 son discontinuas.

2.6. Monotonía: crecimiento y decrecimiento

Puede ocurrir que una función sea creciente o decreciente en todo su dominio, o solamente en algún intervalo.

Se dice que una función es creciente en un intervalo en el que es continua, si al aumentar el valor de x , también aumenta el valor de $y = f(x)$. Si al aumentar x sucede que $f(x)$ disminuye, decimos que es decreciente. Y si al aumentar x , resulta que $f(x)$ no varía, decimos que es constante.

Por ejemplo, la función de la Figura 8 es decreciente en el intervalo $(-\infty, -2)$, es constante en el intervalo $[-2, 3]$, y es creciente en el intervalo $(3, +\infty)$.

2.7. Máximos y mínimos

Dada una función **continua** en un punto $x = a$, se dice que presenta un **máximo relativo**, si a la izquierda de dicho punto la función es **creciente** y a la derecha la función es **decreciente**. Si, por el contrario, la función es **decreciente** a la izquierda y **creciente** a la derecha, hay un **mínimo relativo** (Figura 11).

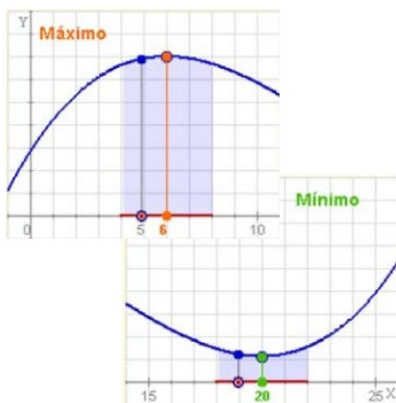


Figura 11: Máximo y mínimo

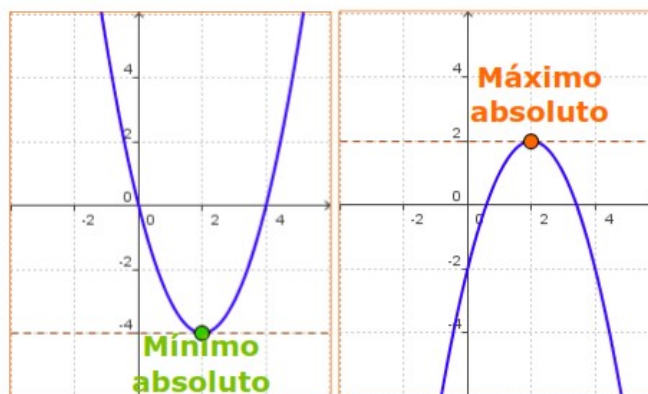
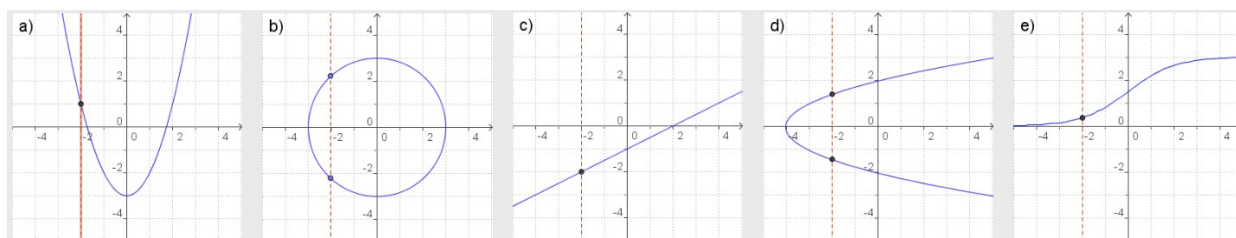


Figura 10: Máximo y mínimo absoluto

Si se verifica que $f(a) > f(x)$ para cualquier valor x del dominio, y no sólo para los valores de "alrededor", se habla de **máximo absoluto** en $x = a$. Y, análogamente, si $f(a) < f(x)$ para cualquier x del dominio, se dice que hay un **mínimo absoluto** en $x = a$ (Figura 10).

Ejemplo 7. De las siguientes **gráficas** indica las que corresponden a una **función** y las que no.



Para decidir si una gráfica corresponde a una función o no debemos aplicar el **concepto de función**, según el cual a cada valor de x le debe corresponder un **único** valor de y . De acuerdo con esto, podemos decir que **sí son funciones** las gráficas **a), c) y e)**. Por el contrario, **no lo son** las gráficas **b) y d)**.

Ejemplo 8. De las siguientes **reglas de asignación** indica las que corresponden a una función y las que no.

- En una clase, a cada **nota** (del 1 al 10) se le asigna el **alumno** (o alumnos) que la hayan obtenido.
- En una clase, a cada **alumno** se le asigna la **letra** por la que empieza su nombre.
- A cada **número natural** que sea el **cuadrado** de un **número entero** se le asigna dicho **número entero**.
- A cada **número natural** se le asigna la letra **A** si es **impar** y la letra **B** si es **primo**.
- En una clase, a cada **alumno** se le asigna un par ordenado (x, y) , siendo x la **fila** e y la **columna** en la que se encuentra situado. Se supone que siempre se sientan en el mismo sitio.

De nuevo aplicamos el **concepto de función** y vemos si la regla le asigna a cada **elemento del conjunto de partida** un **único elemento** en el **conjunto de llegada**.

- No** es una función, porque puede haber más de un alumno con la misma nota.
- Sí** es función, porque a cada alumno le corresponde una única letra.
- No** es función, porque cada cuadrado puede ser obtenido a partir de dos números diferentes. Por ejemplo, 4 es el cuadrado de 2 y de -2.
- No** es función, porque hay números que son impares y primos a la vez, con lo que se le asignarían las dos letras. Por ejemplo: 1, 3, 5, 7, etc.
- Sí** es función, porque a cada alumno le corresponde un único par ordenado.

Ejemplo 9. La Figura 12 representa la gráfica de la función $f(x) = -2x^2 + 4x^2 + 1$. Determina: a) el **dominio** y el **recorrido**; b) los **puntos de corte** con los ejes; c) los intervalos de **crecimiento** y **decrecimiento**, teniendo en cuenta que los máximos y mínimos no pertenecen a estos intervalos; d) los puntos **máximos** y **mínimos**, indicando si son **relativos** o **absolutos**.

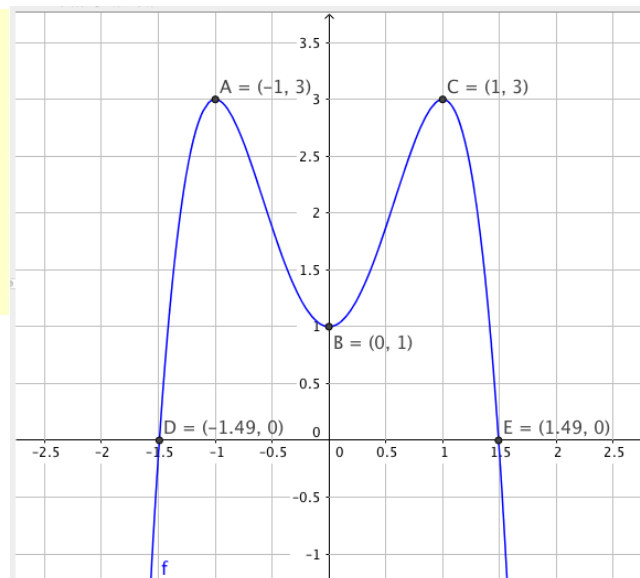


Figura 12

- $Dom(f) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$; $Img(f) = (-\infty, 3]$
- Eje Y: B(0,1); eje X: D(-1.49,0) y E(1.49,0)
- Intervalos de crecimiento: $(-\infty, -1)$ y $(0, 1)$
Intervalos de decrecimiento: $(-1, 0)$ y $(1, +\infty)$
- Máximos absolutos: A(-1,3) y C(1,3)
Mínimo relativo: B(0,1)

Ejemplo 10. Las **gráficas** representan el **llenado** de los diferentes **recipientes**, relacionando el **volumen** de líquido que hay en el recipiente con la **altura** del líquido dentro del recipiente. Determina qué **gráfica** corresponde a cada **recipiente**.

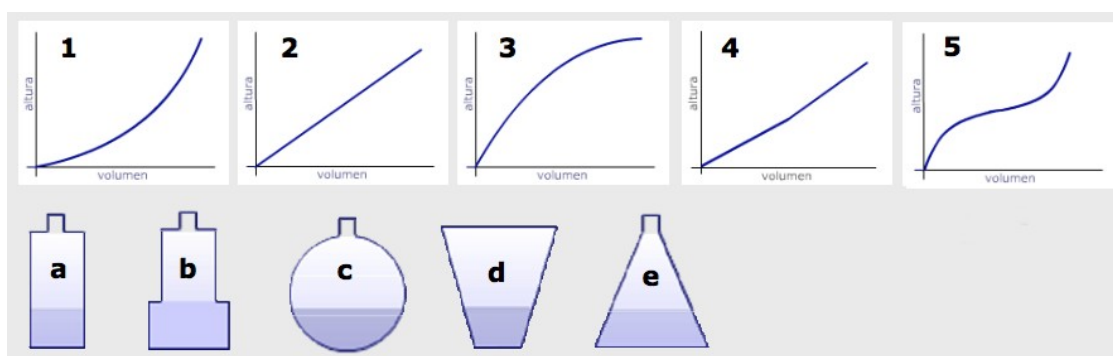


Figura 13: Llenado de recipientes

- 2. La altura es proporcional al volumen, por ser la sección constante.
- 4. El recipiente tiene dos secciones constantes diferentes. En la parte ancha la altura aumenta más despacio.
- 5. Al principio la sección se ensancha y crece menos la altura. Después ocurre lo contrario.
- 3. Conforme crece la sección, la altura crece más despacio.
- 1. Conforme disminuye la sección, la altura crece más deprisa.

3. Funciones lineales

Las **funciones lineales** son aquellas cuya ecuación es del tipo $y = mx + n$, donde m y n son **números reales** cualesquiera. Su gráfica es una **recta** que corta al eje Y en el punto $(0, n)$, siendo m el valor de la **pendiente** de la recta (Fig. 15).

La **pendiente** indica la **inclinación** de la recta (Fig. 14):

- Si $m > 0$, la función es **creciente**: al aumentar x también aumenta y .
- Si $m = 0$, la función es **constante**: la gráfica es una **recta horizontal**.
- Si $m < 0$, la función es **decreciente**: al aumentar x la y disminuye.

Dados dos puntos cualesquiera de la recta $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$, la **pendiente** puede calcularse como el cociente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

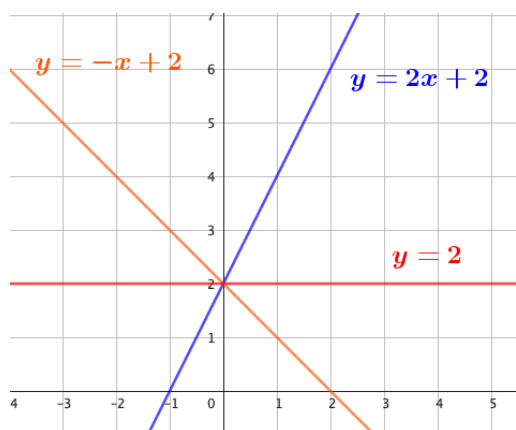


Figura 14: Pendientes

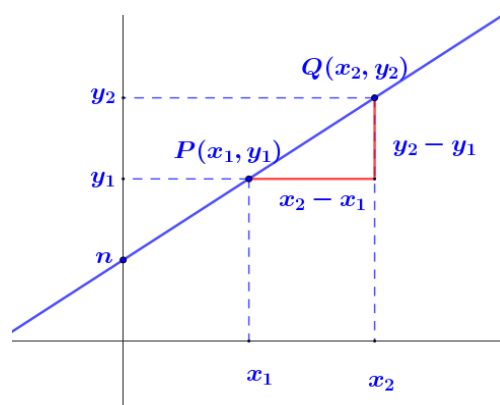


Figura 15: Función lineal

3.1. Función de proporcionalidad directa

Las **funciones de proporcionalidad directa** son funciones lineales en las que $n = 0$, es decir, aquellas cuya ecuación es del tipo $y = mx$. Su gráfica es una recta que pasa por el **origen de coordenadas O** (Fig. 16)

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = \dots = \frac{y}{x} = m$$

Un caso especial de función de proporcionalidad directa es aquella en la que $m = 1$, es decir, aquella cuya ecuación es del tipo $y = x$. Se llama **función identidad** y su gráfica es una recta que pasa por el origen de coordenadas y forma un ángulo de 45° con el eje X (bisectriz del primer cuadrante).

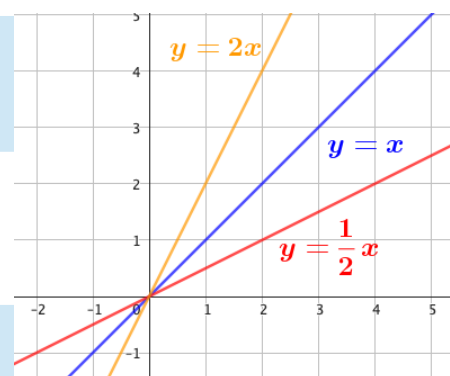


Figura 16: Función de proporcionalidad directa

Ejemplo 11. Queremos comparar dos tarifas eléctricas para un periodo de 30 días y una determinada potencia contratada. La **tarifa A** tiene un **coste fijo** de **20€** y un **coste variable** de **0,19 €/kWh**. La **tarifa B** tiene un **coste fijo** de **30 €** y un **coste variable** de **0,12 €/kWh**. A estos gastos hay que añadirles un **21 % de IVA**. Si llamamos **x** a la **energía consumida**, expresada en kWh, calcula: a) las **funciones A(x)** y **B(x)** que representen el **coste total** de cada tarifa para un consumo x; b) los **intervalos de consumo** en los que sería más favorable cada tarifa.

a) $A(x) = 20 + 0,19x + 0,21(20 + 0,19x) = 24,2 + 0,23x$

$B(x) = 30 + 0,12x + 0,21(30 + 0,12x) = 36,3 + 0,145x$

b) Como la función A(x) parte de un valor fijo menor, pero tiene una pendiente mayor, tiene que haber un valor de x para el que las rectas que representan a ambas funciones se corten. Para calcular ese valor de x hay que igualar ambas funciones (Fig. 17).

$A(x) = B(x) \rightarrow 24,2 + 0,23x = 36,3 + 0,145x$

$0,23x - 0,145x = 36,3 - 24,2 \rightarrow 0,085x = 12,1$

Despejado x: $x = 12,1/0,085 = 142,35$ kWh.

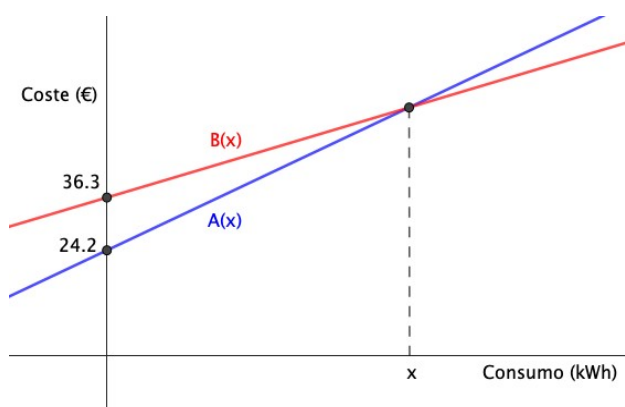


Figura 17

Por tanto, para un consumo inferior a 142,35 kWh es más favorable la tarifa A, pero a partir de ese consumo lo es la tarifa B.

Ejemplo 12. Expresa mediante la **ecuación de una función** las siguientes situaciones: a) el precio de una determinada cantidad x de queso en kg, sabiendo que **1 kg** cuesta **11,50 €**; b) la factura de teléfono para un determinado tiempo x de llamada, en minutos, si hemos contratado una tarifa de **10 € fijos** al mes, más **0,05 €** por cada **minuto** de llamada; c) los honorarios de un fontanero para un determinado tiempo x de trabajo, en horas, que cobra **20 €** la hora de trabajo, más **30 €** de desplazamiento.

a) Precio de una cantidad x (kg) de queso: $y = 11,50x$.

b) Factura de teléfono para un tiempo x (min) de llamadas: $y = 10 + 0,05x$.

c) Honorarios para un tiempo x (h) de trabajo: $y = 30 + 20x$.

Ejemplo 13. A medida que asciende un globo aerostático, la temperatura disminuye a razón de **1° C** cada **200 m** de ascenso. Al iniciar el ascenso el termómetro marcaba **16° C**. ¿Qué tipo de función relaciona la temperatura t con la altura x? Escribe la ecuación de dicha función.

Se trata de una función lineal, con pendiente negativa, puesto que al aumentar la altura disminuye la temperatura.

Ecuación de la función: $t = 16 + mx$ Sabemos que para $x = 200$, entonces $t = 15$. Por tanto:

$15 = 16 + m \cdot 200 \rightarrow -1 = m \cdot x \rightarrow m = -\frac{1}{200} \rightarrow t = 16 - \frac{1}{200}x$

4. Funciones cuadráticas

Las funciones cuadráticas son funciones del tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde a , b y c son números reales con $a \neq 0$ (Fig. 18).

La gráfica de una función cuadrática es una **parábola**, que tiene las siguientes características:

- Un **vértice**, que puede ser un máximo absoluto, si $a < 0$, o un mínimo absoluto, si $a > 0$. Las coordenadas del vértice son:

$$\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$$

- Un **eje de simetría**: es una recta vertical que pasa por el vértice. La ecuación del eje de simetría es:

$$x = -\frac{b}{2a}$$

- Un **punto de corte con el eje Y**: $(0, c)$.
- Ninguno, uno o dos **puntos de corte con el eje X**:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Los puntos son: $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$.

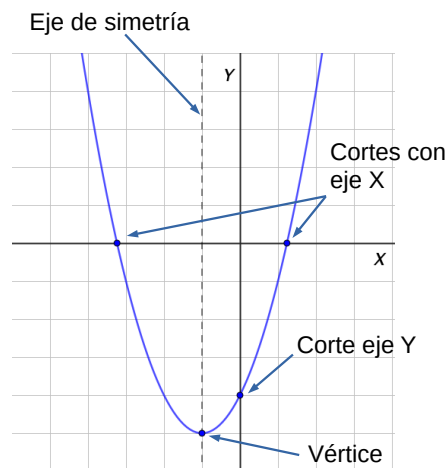


Figura 18: Parábola

5. Funciones de proporcionalidad inversa

Las funciones de proporcionalidad inversa son funciones del tipo $f(x) = \frac{k}{x}$ con $k \neq 0$.

La gráfica de una función de proporcionalidad inversa es una hipérbola, que tiene las siguientes características:

- El **dominio** es $Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, o bien: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Es decir, el conjunto de los números reales, excepto el 0.
- Si $k > 0$, las ramas de la hipérbola están en el **1º y 3º cuadrantes** y es **decreciente** en todo el dominio.
- Si $k < 0$, las ramas de la hipérbola están en el **2º y 4º cuadrante** y es **creciente** en todo el dominio.
- Los ejes X e Y son **asíntotas** de la función.
- Se cumple que: $f(x) = -f(-x)$.

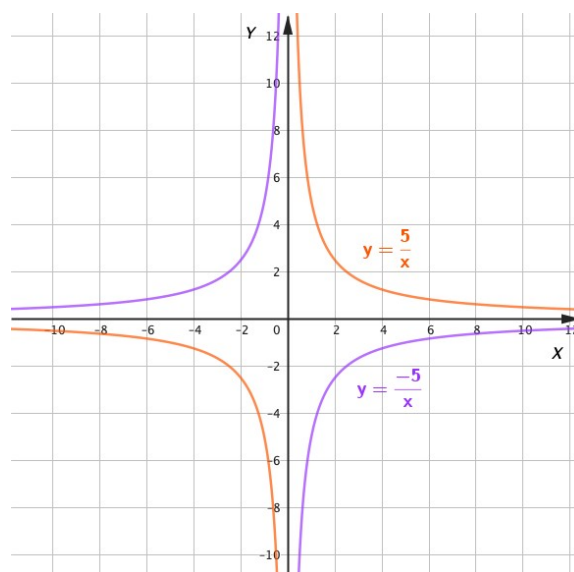


Figura 19: Función de proporcionalidad inversa

Ejemplo 14. El número de insectos, en miles, en un cierto lugar, puede calcularse mediante la ecuación $P(t) = -0,2t^2 + 2t + 1$, donde t es tiempo transcurrido en meses: a) calcula las coordenadas del vértice (A); b) los puntos de corte con el eje horizontal (B y C); c) el punto de corte con el eje vertical (D); d) dibuja su gráfica; e) ¿cuál es la población de insectos inicial? f) ¿a partir de qué mes la población de insectos empieza a decrecer? g) ¿cuándo desaparece la población de insectos?

a) Vértice (A): $A = \left(\frac{-b}{2a}, P\left(\frac{-b}{2a}\right)\right) = \left(\frac{-2}{-0,4}, P\left(\frac{-2}{-0,4}\right)\right) = (5, P(5))$

$$P(5) = -0,2 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5 + 1 = -5 + 10 + 1 = 6 \quad A = (5, 6)$$

b) Puntos de corte con el eje horizontal (B y C). Son aquellos para los que $P(t) = 0$. Es decir, aquellos para los que: $-0,2t^2 + 2t + 1 = 0$. Se trata de una ecuación de segundo grado cuyas soluciones son:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 + \sqrt{2^2 - (-4 \cdot 0,2 \cdot 1)}}{-0,4} = \frac{2 + \sqrt{4,8}}{0,4} = \frac{2 + 2,19}{0,4} = 10,48$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 - \sqrt{2^2 - (-4 \cdot 0,2 \cdot 1)}}{-0,4} = \frac{2 - \sqrt{4,8}}{0,4} = \frac{2 - 2,19}{0,4} = -0,48$$

Por tanto: B = (-0,48, 0) y C = (10,48, 0).

c) Punto de corte con el eje vertical (D). Se obtiene para $t = 0$. $P(0) = 1$. D = (0, 1).

d) Gráfica de la función. A partir de los puntos hallados anteriormente podemos trazar la función.

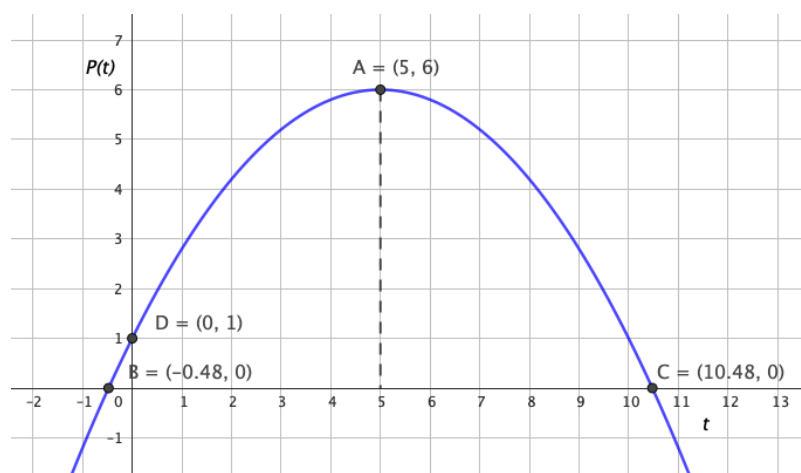


Figura 20: Gráfica de la función

tanto, dicho momento es a los 10 meses y medio.

e) Población inicial. Nos la da el punto de corte con el eje vertical. $P(0) = 1$, es decir, 1000 insectos.

f) Momento en el que empieza a decrecer la población de insectos. Eso ocurre a partir del mes 5, que es cuando se alcanza el valor máximo (vértice) de 6000 insectos.

g) Momento en el que la población de insectos se hace nula. Nos lo da el punto de corte con el eje horizontal C. Por

Ejemplo 15. Para llenar una piscina se utiliza un grifo que proporciona un caudal de 200 L/min y tarda 25 h en llenarse: a) justifica que las magnitudes “caudal” y “tiempo de llenado” son inversamente proporcionales; b) calcula la **constante de proporcionalidad** e indica de qué **magnitud** se trata; c) escribe la ecuación de la **función $f(c)$** que determina el **tiempo de llenado** en función del **caudal (c)**, indicando cuál es su dominio; d) calcula el **tiempo** que tardará en llenarse la piscina con los siguientes caudales: 25, 50 y 100 L/min; e) **representa** la función $f(c)$ en su dominio.

a) Las magnitudes “caudal” (c) y “tiempo de llenado” (t) son inversamente proporcionales porque cuando una aumenta, la otra disminuye en la misma proporción, y viceversa.

b) Si dos magnitudes c y t son inversamente proporcionales, entonces: $c \cdot t = k$, siendo k el coeficiente de proporcionalidad. En este caso:

$$k = c \cdot t = 200 \text{ L/min} \cdot 25 \cdot 60 \text{ min} = 300.000 \text{ L} \quad \text{Se trata del volumen de agua de la piscina (V).}$$

c) Ecuación de la función $f(c)$ = tiempo de llenado en función del caudal.

$$f(c) = t = \frac{k}{c} \rightarrow f(c) = \frac{300.000}{c} \text{ min} = \frac{300.000}{c \cdot 60} \text{ h} \rightarrow f(c) = \frac{5.000}{c} \text{ h}$$

El dominio de la función es: $Dom(f) = c > 0$, ya que no tiene sentido un caudal negativo y la función no está definida para $c = 0$.

d) Sustituyendo el valor de los diferentes caudales en la ecuación de la función:

$$f(25) = \frac{5000}{25} = 200 \text{ h} \quad f(50) = \frac{5000}{50} = 100 \text{ h} \quad f(100) = \frac{5000}{100} = 50 \text{ h}$$

e) Gráfica de la función $f(c)$ en su dominio.

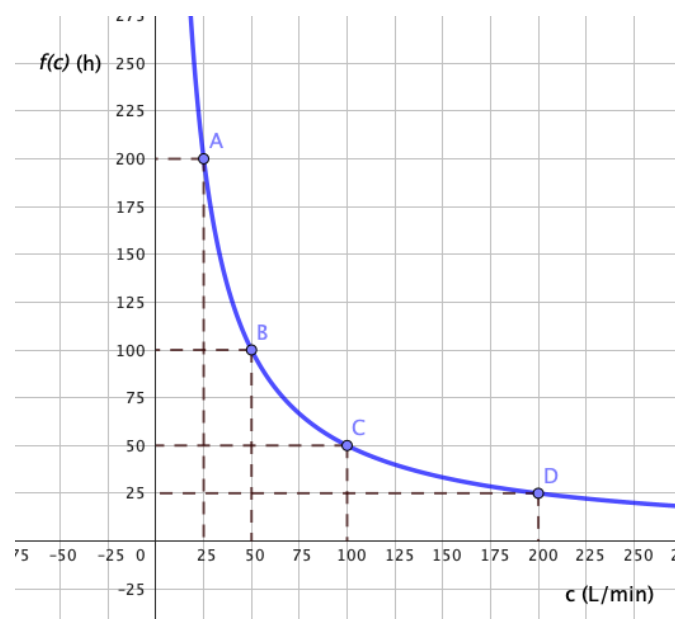


Figura 21: Tiempo de llenado en función del caudal

Realizamos una tabla con los valores obtenidos, más el del enunciado:

c	25	50	100	200
$f(c)$	200	100	50	25

A continuación representamos los cuatro puntos resultantes:

$$A = (25, 200) \quad B = (50, 100)$$

$$C = (100, 50) \quad D = (200, 25)$$

Finalmente trazamos la gráfica de la función, tomando como referencia los cuatro puntos por los que sabemos que pasa (Fig. 21). Solo representamos la función para $c > 0$, que es su dominio.

6. Funciones exponenciales

Las funciones exponenciales son funciones del tipo $f(x) = ab^x$, en las que a es un número real, con $a \neq 0$, y b es un número real positivo y $b \neq 1$. Para $b > 1$, la función es creciente. Sin embargo, para $0 < b < 1$, la función es decreciente.

Las funciones del tipo $f(x) = ab^{cx+d}$ también son exponenciales, ya que, de acuerdo con las propiedades de la potenciación:

$$ab^{cx+d} = ab^d b^{cx} = ab^d (b^c)^x = kh^x ; k = ab^d \text{ y } h = b^c$$

Hay dos casos especiales de funciones exponenciales: aquellas en las que $b = 10$ y aquellas en la que $b = e$, siendo e el número de Euler, que es irracional y cuyo valor es $e = 2,71828182845\dots$ (Fig. 22).

Las funciones exponenciales sirven para expresar de forma matemática procesos naturales, (crecimiento de cultivos de microorganismos, o de poblaciones vegetales y animales) así como fenómenos económicos y otros.

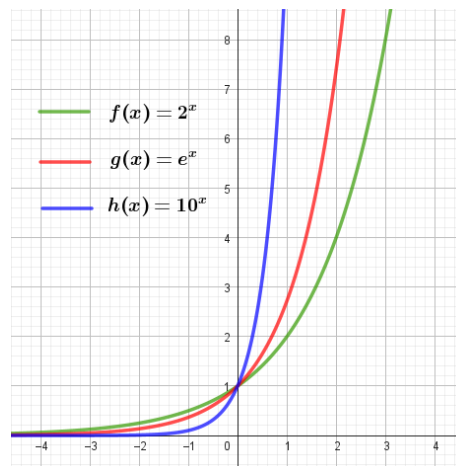


Figura 22: Funciones exponenciales

Ejemplo 16. Se sabe que un determinado virus, en un paciente infectado, se multiplica por 2 cada hora y después muere. Si llamamos V_0 al número de virus iniciales (cuando empezamos a contar el tiempo) y x al tiempo transcurrido, medido en horas, la función para calcular el número de virus al cabo de un tiempo x es: $V(x) = V_0 \cdot 2^x$. Suponiendo que $V_0 = 1000$, calcula el número de virus que habrá al cabo de $x = 1, 2$ y 3 horas. Representa la función para valores de x del intervalo $[0, 3]$.

Sustituyendo en la ecuación de la función $V(x) = 1000 \cdot 2^x$ los diferentes valores de x :

$$V(1) = 1000 \cdot 2^1 = 2000 \quad V(2) = 1000 \cdot 2^2 = 4000$$

$$V(3) = 1000 \cdot 2^3 = 8000$$

Para dibujar la gráfica elaboramos una tabla de valores:

x	0	1	2	3
$V(x)$	1000	2000	4000	8000

A partir de la tabla anterior obtenemos las coordenadas de cuatro puntos de la gráfica:

$$A = (0, 1000) \quad B = (1, 2000) \quad C = (2, 4000) \quad D = (3, 8000)$$

Finalmente, trazamos la gráfica para el intervalo de x $[0, 3]$. Para ello, lógicamente, debemos elegir diferentes escalas en cada eje (Fig. 23).

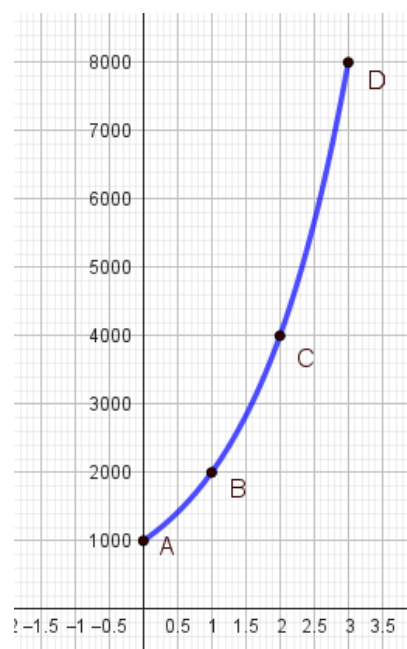


Figura 23