

Universidad de Sevilla
Facultad de Matemáticas
Departamento de Ecuaciones diferenciales
y Análisis Numérico

ALGUNOS MÉTODOS NUMÉRICOS PARA LA
RESOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DE
BÜRGERS Y DE NAVIER-STOKES

Luis Olmedo Sánchez

Sevilla, junio de 1997

Universidad de Sevilla
Facultad de Matemáticas
Departamento de Ecuaciones diferenciales
y Análisis Numérico

ALGUNOS MÉTODOS NUMÉRICOS PARA LA RESOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DE BÜRGER Y DE NAVIER-STOKES

Tesina presentada por
D. Luis Olmedo Sánchez
para optar al grado de Licenciado
en Matemáticas por la
Universidad de Sevilla.

Vº Bº

LUIS OLMEDO SÁNCHEZ
Sevilla, junio de 1997

D. FRANCISCO ORTEGÓN GALLEGO

Índice

Presentación	1
I MÉTODOS NUMÉRICOS PARA LA RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE BÜRGER	7
Introducción	9
1 Resultados preliminares	11
1.1 Solución entrópica	17
1.1.1 El problema viscoso	18
1.1.2 Existencia y unicidad de solución del problema de Burgers	20
2 El problema de Burgers	21
2.1 Formulación del problema	21
2.2 Formulación variacional	22
2.3 Existencia de solución del problema de Burgers variacional	23
2.4 Resolución numérica del problema de Burgers estacionario	29
2.4.1 Formulación del problema aproximado	29
2.4.2 Resolución del problema aproximado	31
2.4.3 Estudio de la convergencia	32
2.5 Cálculo de la solución aproximada	35
2.5.1 Método de Newton	35
2.5.2 Matriz de preconditionamiento	41
2.5.3 Método de mínimos cuadrados	44
2.5.4 Métodos del gradiente conjugado	45
2.5.5 Aplicación del (AGPR) a la ecuación de Burgers	49

II MÉTODOS PARA LA RESOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DE NAVIER-STOKES	51
3 Introducción	53
3.1 Descripción de algunas situaciones físicas y de su expresión en términos de ecuaciones en derivadas parciales	53
3.1.1 Fluido ideal, incompresible y homogéneo.	54
3.1.2 Fluido newtoniano viscoso (con viscosidad constante), incompresible y homogéneo.	55
3.1.3 Fluido newtoniano viscoso, incompresible y no homogéneo	55
3.1.4 Fluido newtoniano viscoso, compresible y no homogéneo	55
3.2 Elección de las dimensiones físicas	57
3.3 Existencia, unicidad y regularidad de la solución.	58
4 Métodos de Descomposición de Operadores	61
4.1 Método de Peaceman-Rachford	62
4.1.1 Estudio de la convergencia y del comportamiento asintótico	64
4.1.2 Elección del Δt óptimo	66
4.2 Descomposición del operador usando θ -esquemas	67
4.2.1 Descripción del método	67
4.2.2 Estudio de la estabilidad, convergencia y comportamiento asintótico	68
5 Método de Descomposición de Operadores aplicado a las ecuaciones de Navier-Stokes	71
5.1 Esquema de Peaceman-Rachford	71
5.2 El θ -esquema	73
5.3 Resolución del problema de Stokes (S)	74
5.3.1 Formulación variacional de (S)	74
5.3.2 Descripción de un método iterativo para resolver (S)	75
5.3.3 Resolución de (S) usando el método del gradiente conjugado	78
5.4 Estudio y Resolución del problema (NL)	82
5.4.1 Formulación variacional (NLV)	83
5.4.2 Resolución por mínimos cuadrados y gradiente conjugado	87
5.5 Observaciones finales	95
Bibliografía	97

Agradecimientos

La realización de este trabajo ha sido posible gracias al apoyo y ayuda de numerosas personas. Deseo expresar mi agradecimiento a todas ellas.

De forma muy especial, a **D. Francisco Ortegón Gallego**, director de esta tesina, por haberme facilitado toda la información que he necesitado, por su paciencia y amabilidad.

A mis amigos, compañeros de trabajo y de estudio.

Por último, quiero agradecer a mis padres, y a mi hermana el ánimo que me han infundido siempre.

Presentación

Las ecuaciones en derivadas parciales no lineales aparecen en multitud de problemas de física e ingeniería, cuya resolución es de gran interés. Dado que resulta imposible obtener una solución explícita en la gran mayoría de los casos, se hace necesaria su resolución numérica. Pero la discretización directa de estos problemas, mediante diferencias finitas o elementos finitos, nos lleva a plantear sistemas con un gran número de ecuaciones que siguen siendo no lineales. Por tanto, está justificado el estudio de algoritmos que nos lleven a la solución numérica evitando estas dificultades. En el presente trabajo se estudian dos problemas en concreto: Búrgers y Navier-Stokes; examinando algunas de las dificultades que presenta la resolución de este tipo de problemas.

En la primera parte abordaremos el problema de Búrgers, que puede servir de modelo de ilustración de las dificultades inherentes al de Navier-Stokes; además, vamos a considerar únicamente el caso escalar, aunque los resultados son válidos también en el caso vectorial. Estudiaremos la existencia, unicidad y regularidad de la solución del problema. Pasando a su forma variacional daremos un resultado que nos da una condición suficiente para que una función sea solución débil. Dado que, como veremos, no hay unicidad de solución, añadiremos la condición de entropía que nos lleva a una única solución del problema que llamaremos solución entrópica. Además, como la solución puede presentar discontinuidades, la aproximación numérica directa de este problema resulta poco eficaz. Para evitar esta dificultad pasaremos a una nueva ecuación añadiendo a la que teníamos un término de viscosidad artificial, obteniendo así la ecuación viscosa asociada. Mediante un resultado, podemos asegurar que las soluciones de las ecuaciones viscosas convergen a la solución de la de Búrgers cuando hacemos tender el término de viscosidad a cero. Por consiguiente, nuestro objetivo será calcular una sucesión de soluciones del problema viscoso que, por el resultado anteriormente citado, convergerá a la solución del problema de Búrgers.

Nos dedicamos entonces al estudio de la ecuación viscosa desde el punto de vista numérico. Primero discretizamos en la variable temporal y, posteriormente, se aproxima en las variables espaciales. El problema estacionario que se obtiene al discretizar en tiempo tiene solución, y las soluciones, que resultan al aproximar en las variables espaciales, convergen a una solución del problema estacionario. Para resolver los sistemas no lineales que aparecen se puede pasar a un problema de mínimos y utilizar, por ejemplo, el método de Newton o alguna de sus variantes.

El algoritmo de Newton tiene ciertos inconvenientes: hay que resolver sistemas cuya matriz es distinta en cada etapa, están mal condicionadas, no son simétricas y que para asegurar la convergencia del algoritmo deberemos tomar un valor en la etapa inicial próximo a la solución que buscamos.

Se hace entonces aconsejable pasar a un problema de mínimos y usar algoritmos del gradiente conjugado. Las ventajas frente al anterior son: las matrices de los sistemas que hay que resolver en cada etapa no cambian, la simetría de las matrices y no es necesario que el dato inicial esté cerca de la solución.

Las ecuaciones de Navier-Stokes aparecen en mecánica de fluidos dentro de la mecánica de medios continuos, a partir de las leyes de conservación de la cantidad de masa, movimiento y energía. Para este problema se conocen resultados de existencia y unicidad de solución en dimensión dos; en dimensión tres la situación es más complicada, pues no se sabe de la existencia de solución y que esta no es única, a menos que se supongan hipótesis restrictivas sobre los datos (véase [1]). Además, para viscosidades muy pequeñas (número de Reynolds grande), el comportamiento del fluido es turbulento, es decir, las soluciones son muy oscilantes en tiempo y espacio.

La resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes presenta otras dificultades. Dado que la integración exacta es inviable en general, se hace imprescindible el uso del cálculo numérico para obtener soluciones aproximadas. Por consiguiente, se necesitan algoritmos de discretización que sean rápidos y poco costosos desde el punto de vista computacional. Uno de estos algoritmos está basado en el método de las direcciones alternadas, cuya principal virtud es que permite separar las dos dificultades fundamentales que aparecen en la aproximación numérica del problema. En el caso de las ecuaciones de Navier-Stokes son, por una parte, la presencia del término no lineal y, por otra, la condición de incompresibilidad. Antes de aplicar este algoritmo al problema de Navier-Stokes estudiamos la convergencia y

el comportamiento asintótico para el caso lineal. Para el θ -esquema estudiaremos cuál es la elección óptima de los parámetros α , β , θ y Δt . Tomaremos estos parámetros de manera que el esquema sea estable y las matrices que aparecen en las etapas del algoritmo sean siempre las mismas.

Si aplicamos el θ -esquema a las ecuaciones de Navier-Stokes, aparecen en cada etapa dos tipos de problemas: problemas de Stokes con la condición de incompresibilidad y problemas no lineales que carecen de dicha condición. En esta memoria se describen algunos algoritmos para resolver cada uno de estos problemas, estudiaremos su convergencia y, por último, se muestran algunos cálculos que facilitan su implementación numérica.

Notación

- Ω un dominio acotado de \mathbb{R}^N (se supondrá que $\partial\Omega$, frontera de Ω , es lipschitziana), variable $x = (x_1, \dots, x_N)$,
- $dx = dx_1 \dots dx_N$,
- $[0, T] \subset \mathbb{R}$ intervalo de tiempo, variable t ,
- $L^p(\Omega)$ = espacio de Banach de las clases de funciones medibles y de potencia p -ésima sumable sobre Ω con la norma

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \|f\|_{0,p} = \left(\int_{\Omega} |f|^p dx \right)^{1/p} \quad 1 \leq p < \infty$$

- $L^\infty(\Omega)$ = espacio de Banach de las clases de funciones medibles y acotadas esencialmente, con la norma

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \|f\|_{0,\infty} = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|,$$

- $L_0^2(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \mid \int_{\Omega} u dx = 0 \right\}$,
- $\mathcal{D}(\Omega)$ = espacio de las funciones infinitamente diferenciables y de soporte compacto,
- $\mathcal{D}'(\Omega)$ = espacio de las distribuciones sobre Ω ,
- $W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \mid D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall |\alpha| \leq m \right\}$ con $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_N$,

$$D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_N}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}} \text{ y con norma } \|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \|f\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_{0,p}^p \right)^{1/p},$$

- $W_0^{m,p}(\Omega)$ = adherencia de $\mathcal{D}(\Omega)$ en $W^{m,p}(\Omega)$,
- $W^{-m,p'}(\Omega)$ = dual de $W_0^{m,p}(\Omega)$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ y $p < \infty$,
- $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$,
- $H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega)$,
- $H^{-m}(\Omega) = (W^{m,2}(\Omega))' = W^{-m,2}(\Omega)$,

- Si X es un espacio de Banach y si $1 \leq p < \infty$

$$L^p(0, T; X) = \left\{ u \text{ medibles de } [0, T] \mapsto X, \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{1/p} < \infty \right\}$$

y si $p = \infty$

$$L^\infty(0, T; X) = \left\{ u \text{ medibles de } [0, T] \mapsto X, \sup_{t \in (0, T)} \|u(t)\|_X < \infty \right\},$$

- Si X e Y son dos espacios de Banach, $X \hookrightarrow Y$ significa que X se inyecta de forma continua en Y ,

Para $u = (u_1, \dots, u_N)$ y $v = (v_1, \dots, v_N)$:

- $uv = \sum_{i=1}^N u_i v_i$,
- $\nabla u \nabla v = \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$,
- $(u \cdot \nabla)v = \left(\sum_{j=1}^N u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)_{i=1}^N$,
- $\nabla u = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)_{i,j=1}^N$,
- $\nabla \cdot u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$,
- $\frac{\partial u}{\partial t} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)_{i=1}^N$.

PARTE I

**MÉTODOS NUMÉRICOS PARA
LA RESOLUCIÓN DEL
PROBLEMA DE BÜRGERS**

Introducción

La ecuación de Burgers constituye una versión monodimensional de la ecuación de Euler para los fluidos ideales. En su forma no conservativa, esta ecuación se escribe

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad [0.1]$$

donde u es la función incógnita que depende de x (variable espacial) y t (variable temporal). La ecuación [0.1] es un caso particular de una ecuación hiperbólica no lineal, cuya expresión en forma conservativa viene dada por

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [f(u)] = 0, \quad [0.2]$$

siendo $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ una función dada.

Este tipo de ecuaciones aparecen en el estudio de la dinámica de gases, donde tiene lugar un fenómeno que se ha dado en llamar “estampido sónico”. Este efecto lo originan a su paso los aviones que se desplazan a velocidades supersónicas. Se produce lejos del aparato y particularmente cerca del suelo. El sonido se concentra en ciertas zonas donde la presión se rige por la ecuación de Burgers (véase [2, pág. 133])

A finales de los años sesenta, en medio de la polémica organizada entorno al proyecto “Concorde”, estos problemas fueron intensamente estudiados teórica, numérica y experimentalmente, en EE.UU. (por la NASA) y en Europa (por la RAE y la ONERA).

La ecuación [0.1] se acompaña de una condición inicial del tipo

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad [0.3]$$

donde $u_0 : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ es una función dada. Veremos que para datos muy regulares (por ejemplo, $u_0 \in \mathcal{C}^\infty$), el problema [0.1]-[0.3] admite “soluciones” que son capaces de desarrollar discontinuidades o choques. Cuando una solución u de la ecuación [0.1] presenta un “choque”,

al discretizar el problema correspondiente, se observa que entre los puntos de la malla más cercanos al “choque”, subsiste necesariamente una variación de u que no tiende a cero. De manera que, en esta zona, plantear un *esquema de diferencias finitas consistente* no tiene sentido.

Para evitar el problema anterior se perturba la ecuación de Burgers añadiendo el término $-\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ que constituye un término de “viscosidad artificial”, siendo ν un coeficiente estrictamente positivo y pequeño.

Aunque la viscosidad sea mayor que la real, la práctica constata que la posición y la fuerza del “choque” se obtienen correctamente. Además como veremos en el teorema 1.13 se hace innecesario imponer la denominada *condición de entropía*.

Por consiguiente en el estudio de la ecuación de Burgers, es interesante introducir la *ecuación viscosa* asociada

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Se trata de una ecuación parabólica donde el término $-\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ es un término lineal y “disipativo” y el término $u \frac{\partial u}{\partial x}$ es un término no lineal de “convección”. De esta manera, se puede considerar la ecuación viscosa como una ecuación del calor con un término de convección, o como una ecuación de Burgers con un término disipativo o viscoso.

Capítulo 1

Resultados preliminares

Se considerará en primer lugar un problema que incluye al de Burgers. Luego particularizaremos los resultados obtenidos para el de Burgers.

Se considera el problema siguiente: Hallar $u : \mathbb{R}^N \times [0, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot f(u) = 0 & (x, t) \in \mathbb{R}^N \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^N \end{cases} \quad [1.1]$$

donde:

- $u : \mathbb{R}^N \times [0, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$;
- $f(u) = (f_1(u), \dots, f_N(u))^T$, $f_i : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq N$,
- $u_0 : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}$ es el dato inicial;
- $\nabla \cdot f(u) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} f_i(u)$, ($\nabla \cdot$ es el operador divergencia).

Veamos ahora qué se entiende por solución clásica de [1.1]

DEFINICIÓN 1.1

Se dice que u es solución clásica de [1.1] si:

- $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N \times (0, +\infty)) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^N \times [0, +\infty))$
- u satisface la ecuación de [1.1] puntualmente $\forall (x, t) \in \mathbb{R}^N \times (0, +\infty)$ y la condición inicial $\forall x \in \mathbb{R}^N$.

Ejemplo 1.2

Consideremos el problema de Burgers $\left[N = 1, f(u) = \frac{u^2}{2} \right]$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, & \text{en } \mathbb{R} \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{en } \mathbb{R} \end{cases}$$

Las curvas características $x(t)$ asociadas a dicho problema satisfacen el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} x(t) = u(x(t), t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Llamemos $\phi(t) = u(x(t), t)$; entonces $\phi'(t) = 0, \forall t$. Consecuentemente $\phi(t) = \phi(t_0) = u(x_0, t_0)$. Además, esto nos dice que $x(t)$ es la recta que pasa por (x_0, t_0) y tiene pendiente $u(x_0, t_0)$

$$x(t) = u(x_0, t_0)(t - t_0) + x_0$$

Si $t_0 = 0$

$$x(t) = u_0(x_0)t + x_0$$

Elijamos como condición inicial

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & x \leq 0 \\ u_0(x) & 0 < x < 1, \text{ de tal manera que } u_0 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \\ 0 & x \geq 1 \end{cases}$$

Las curvas características $x(t)$ asociadas a esta condición inicial están representadas en la figura

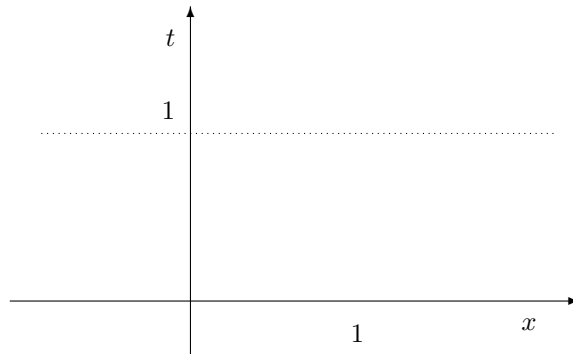


Figura 1.1

Puesto que u permanece constante a lo largo de las curvas características, y dado que, por ejemplo, en el punto $(1,1)$ se cortan dos de estas rectas, tendremos

$$u(1, 1) = u_0(0) \quad \text{y} \quad u(1, 1) = u_0(1)$$

Por lo tanto $!!! \quad 1 = u_0(0) = u_0(1) = 0 \quad !!!$

Ejemplo 1.3

Consideremos el mismo ejemplo anterior cambiando u_0 por

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

En tal caso, la solución obtenida es (véase la figura 2.2)

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x}{t} & 0 < x < t \\ 1 & x > t \end{cases}$$

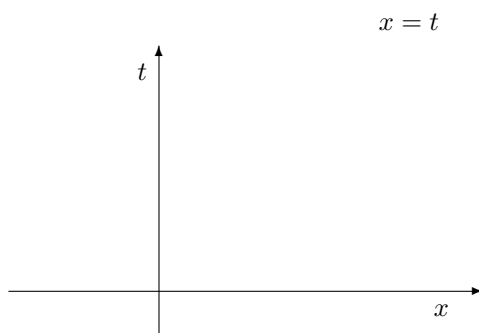


Figura 1.2

Observaciones:

Nótese que para unos datos muy regulares como los del primer ejemplo no obtenemos solución clásica, ya que sólo podemos asegurar la existencia de solución en un entorno de $t = 0$. Por otra parte en el ejemplo segundo para un dato discontinuo obtenemos una solución continua en todo $\mathbb{R} \times (0, +\infty)$ (incluso analítica).

Esto se debe a la no linealidad de la ecuación diferencial.

Los ejemplos precedentes muestran que el marco de la definición 1.1 puede resultar excesivo. Ello hace necesario introducir un marco más amplio donde hallar la solución y que

contemple las soluciones descritas anteriormente.

Si u es solución clásica, entonces satisface la ecuación de [1.1] puntualmente. Podemos multiplicar por $\phi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}^N \times [0, +\infty))$ e integrar

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} \left[\phi \frac{\partial u}{\partial t} + \phi \nabla \cdot f(u) \right] dx dt = 0$$

Dado que $\text{Sop } \phi \subset\subset K \times [0, T]$ para $T > 0$ y K compacto de \mathbb{R}^N , podemos suponer $\phi|_{\partial K} = 0$ y $\phi(x, T) = 0$. Así,

$$- \int_0^T \int_K \left[u \frac{\partial \phi}{\partial t} + f(u) \nabla \cdot \phi \right] dx dt - \int_K u_0(x) \phi(x, 0) dx = 0$$

Obtenemos así la formulación variacional del problema

$$\begin{cases} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} \left[u \frac{\partial \phi}{\partial t} + f(u) \nabla \cdot \phi \right] dx dt + \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x) \phi(x, 0) dx = 0 \\ \forall \phi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}^N \times [0, +\infty)) \end{cases} \quad [1.2]$$

la cual permite introducir el concepto de solución débil para el problema [1.1].

DEFINICIÓN 1.4

Dada $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, se dice que u es solución débil de [1.1] si

- (i) $u \in L^\infty(\mathbb{R}^N \times [0, +\infty))$
- (ii) u satisface [1.2].

Observaciones:

1. Nótese que si u es solución débil, entonces satisface la ecuación diferencial del problema [1.1] en el sentido de las distribuciones

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot f(u) = 0, \quad \text{en } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N \times (0, +\infty))$$

es decir

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} \left[u \frac{\partial \phi}{\partial t} + f(u) \nabla \cdot \phi \right] dx dt = 0, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N \times (0, +\infty))$$

2. Las soluciones clásicas son soluciones débiles. Para que una solución débil sea clásica necesitamos cierta regularidad, como veremos en el siguiente resultado.

DEFINICIÓN 1.5

Diremos que u es de clase \mathcal{C}^1 ($\mathbb{R}^N \times [0, +\infty)$) a trozos si existe un número finito de superficies H_j en $\mathbb{R}^N \times [0, +\infty)$ de manera que fuera ellas u es de clase \mathcal{C}^1 y a través de ellas, u puede tener una discontinuidad de salto.

TEOREMA 1.6

Sea $u \in \mathcal{C}^1$ ($\mathbb{R}^N \times [0, +\infty)$) a trozos. Entonces u es solución débil de [1.1] siempre y cuando se cumplan las condiciones siguientes:

1. u es solución clásica en los abiertos donde u es \mathcal{C}^1 , es decir $\mathbb{R}^N \times [0, +\infty) \setminus \bigcup_{j=1}^m H_j$.
2. u satisface la condición de salto de **Rankine-Hugoniot**, es decir

$$(u_+ - u_-)n_t + \sum_{j=1}^N (f_j(u_+) - f_j(u_-)) n_{x_j} = 0, \quad \forall (x, t) \in \bigcup_{j=1}^m H_j \quad [1.3]$$

donde

- (a) H_j son las superficies que separan los abiertos donde u es de clase \mathcal{C}^1 .
- (b) $\vec{n}(x, t) = (n_{x_1}, \dots, n_{x_N}, n_t)^T$ es un vector unitario y normal a la superficie en el punto (x, t) de la misma.
- (c) $u_+(x, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} u((x, t) + \varepsilon \vec{n}(x, t))$
- (d) $u_-(x, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} u((x, t) - \varepsilon \vec{n}(x, t))$

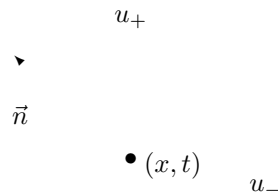


Figura 1.3

Demostración: (Véase Godlewski-Raviart [3], página 29)

□

Apliquemos este resultado para introducir la solución débil del ejemplo 1.3
 Veamos cuál es la recta Σ de la figura 2.4 aplicando [1.3]

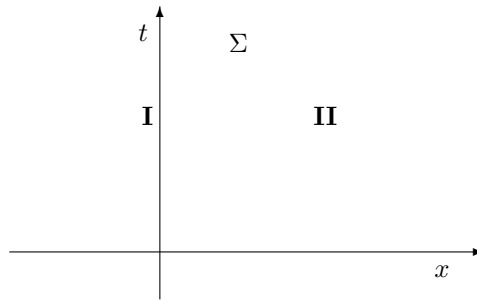


Figura 1.4

$$(1 - 0)n_t + \left(\frac{1}{2} - 0\right)n_x = 0, \quad \forall(x, t) \in \Sigma$$

luego

$$2n_t + n_x = 0, \quad \forall(x, t) \in \Sigma$$

por tanto la recta Σ tiene de ecuación

$$t = 2x$$

y la solución débil que hemos hallado es

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 & (x, t) \in \mathbf{I} \\ 0 & (x, t) \in \mathbf{II} \end{cases}$$

Veamos ahora un ejemplo en el que no hay unicidad.

Ejemplo 1.7

Consideremos el dato inicial

$$u_0(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ -1, & x > 0 \end{cases} \quad [1.4]$$

Para $\alpha > 1$ se introducen las rectas

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &\equiv t = \frac{2x}{(1-\alpha)} \\ \Sigma_2 &\equiv x = 0 \\ \Sigma_3 &\equiv t = \frac{2x}{(\alpha-1)} \end{aligned}$$

Aplicando el teorema [1.6] podemos deducir que

$$u_\alpha(x, t) = \begin{cases} -1 & \text{si } 2x < (1 - \alpha)t \\ -\alpha & \text{si } (1 - \alpha)t < 2x < 0 \\ \alpha & \text{si } 0 < 2x < (\alpha - 1)t \\ 1 & \text{si } (\alpha - 1)t < 2x \end{cases} \quad [1.5]$$

son una cantidad infinita y no numerable de soluciones del problema de Burgers con condición inicial [1.4], para cualquier $\alpha \geq 1$.

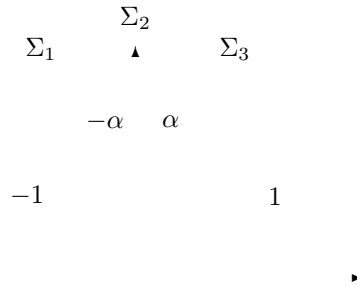


Figura 1.5

1.1 Solución entrópica

Como hemos visto en el ejemplo de la sección anterior, ni siquiera se tiene asegurada la unicidad de solución del problema de Burgers. Con objeto de aislar una solución (la única físicamente admisible), se introduce el concepto de solución entrópica. Para ello consideremos la formulación no conservativa de la ecuación [1.1], a saber

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^N f'_j(u) \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0 \quad [1.6]$$

Observación:

Si u es solución clásica, las dos formulaciones (conservativa y no conservativa) son equivalentes, pero esta equivalencia no se da en el sentido de las distribuciones.

Si multiplicamos [1.6] por la derivada de una función regular $U(u)$ obtenemos

$$U'(u) \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^N U'(u) f'_j(u) \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0 \quad [1.7]$$

DEFINICIÓN 1.8

Sean Ω convexo, $U : \Omega \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ convexa y $F = (F_j)$ con $F_j : \Omega \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq N$. Diremos que (U, F) es un par de entropía si

$$F'_j(u) = U'(u)f'_j(u), \quad 1 \leq j \leq N, \quad [1.8]$$

en tal caso, U se denomina entropía de [1.6] y F flujo de entropía.

Observación:

Nos restringimos a funciones de entropía convexas, aunque podríamos no incluir esta restricción. No obstante en este problema escalar que estudiamos, la convexidad de U se convierte en una condición necesaria y suficiente para la entropía.

TEOREMA 1.9

Si U es estrictamente convexa, entonces U es entropía de [1.6].

Luego, si encontramos un par de entropía (U, F) , entonces [1.7] se puede escribir

$$\frac{\partial U(u)}{\partial t} + \sum_{j=1}^N F'_j(u) \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0 \quad [1.9]$$

Con la propiedad de que cualquier solución de [1.6] es solución de [1.9], para cualesquiera (U, F) pares de entropía.

DEFINICIÓN 1.10

Diremos que u es solución entrópica de [1.6] si satisface

$$\frac{\partial U(u)}{\partial t} + \sum_{j=1}^N F'_j(u) \frac{\partial u}{\partial x_j} \leq 0, \quad \forall (U, F) \text{ par de entropía.} \quad [1.10]$$

La propiedad [1.10] se llama condición de entropía.

1.1.1 El problema viscoso

Los resultados que siguen son relativos al problema viscoso ($\varepsilon > 0$) dado por

$$\begin{cases} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + \nabla \cdot f(u_\varepsilon) - \varepsilon \Delta u_\varepsilon = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \times (0, +\infty) \\ u_\varepsilon(x, 0) = u_0(x) & \text{en } \mathbb{R}^N \end{cases} \quad [1.11]$$

DEFINICIÓN 1.11

Sea Ω un abierto de \mathbb{R}^N y $v \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Llamamos *variación total* de v en Ω a

$$\text{VT}_\Omega(v) = \sup_{\substack{\varphi \in C_0^1(\Omega)^N \\ \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1}} \int_\Omega v \nabla \varphi \, dx.$$

DEFINICIÓN 1.12

Diremos que $v \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ es una *función de variación acotada* en Ω (se notará $\text{VA}(\Omega)$) si

$$\text{VT}_\Omega(v) < +\infty$$

Veamos ahora un resultado que nos da la existencia, unicidad y regularidad de la solución del problema viscoso (su demostración puede consultarse en [3])

TEOREMA 1.13 (existencia unicidad regularidad)

Si $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap \text{VA}(\mathbb{R}^N)$. Entonces

(a) [1.11] admite una única solución $u_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^N \times (0, T))$, $\forall T > 0$.

(b) $\forall t \geq 0$

1. $\|u_\varepsilon(\cdot, t)\|_\infty \leq \|u_0\|_\infty$,
2. $\|\nabla u_\varepsilon(\cdot, t)\|_{L^1} \leq \text{VT}(u_0)$,
3. $\left\| \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(\cdot, t) \right\|_{L^1} \leq C \text{VT}(u_0)$,
4. $\int_{\mathbb{R}^N} u_\varepsilon(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x) dx$,

donde en 3, $C > 0$ es una constante.

El siguiente resultado nos asegura la convergencia de la solución del problema viscoso a la solución de entropía del problema de Burgers cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.

TEOREMA 1.14

Supongamos que [1.6] admite un par de entropía. Sea (u_ε) una sucesión de soluciones de [1.11] tales que

(a) $\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N \times [0, +\infty))} \leq C$, con $C > 0$ constante independiente de ε .

(b) $u_\varepsilon \rightarrow u$ c.p.d. en $\mathbb{R}^N \times [0, +\infty)$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$

Entonces u es solución de [1.6] y satisface la condición de entropía en el sentido de las distribuciones.

1.1.2 Existencia y unicidad de solución del problema de Burgers

TEOREMA 1.15

Sea $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap \text{VA}(\mathbb{R}^N)$ y $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N)$.

Entonces u es la única solución del problema de Burgers, con

$$(a) \ u \in L^\infty(\mathbb{R}^N \times (0, +\infty)) \cap \mathcal{C}^0([0, T], L^1(\mathbb{R}^N)), \quad \forall T \geq 0.$$

$$(b) \ \forall t \geq 0$$

- | | |
|---|--|
| 1. $u(\cdot, t) \in \text{VA}(\mathbb{R}^N)$ | 2. $\ u(\cdot, t)\ _{L^\infty} \leq \ u_0\ _{L^\infty}$ |
| 3. $\text{VT}(u(\cdot, t)) \leq \text{VT}(u_0)$ | 4. $\int_{\mathbb{R}^N} u(x, t_2) - u(x, t_1) dx \leq C \cdot \text{VT}(u_0) t_2 - t_1 ,$
$\forall t_1, t_2 \geq 0.$ |

Demostración: (Véase Godlewski-Raviart [3])

□

Capítulo 2

El problema de Burgers

2.1 Formulación del problema

En esta sección se considera el problema no lineal

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [f(u)] - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad [2.1]$$

que constituye el problema viscoso.

Para resolver este problema podemos discretizar primero con respecto a la variable t , generando así una sucesión de problemas estacionarios. Podemos utilizar distintos esquemas, por ejemplo el siguiente: Para una talla de discretización en tiempo $\Delta t > 0$ se ponen

$$t_n = n\Delta t \quad \text{y} \quad u^n(x) \simeq u(x, n\Delta t)$$

de tal manera que

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + \frac{d}{dx} [f(u^{n+1})] - \nu \frac{d^2 u^{n+1}}{dx^2} = 0$$

Por otra parte, en la práctica u_0 es de soporte compacto. Así, sin más que tomar un R adecuado, podemos reescribir la condición inicial

$$u^{n+1}(-R) = u^{n+1}(R) = 0$$

Así, la semidiscretización en tiempo de [2.1] conduce al problema estacionario para u^{n+1}

$$\begin{cases} \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + \frac{d}{dx} [f(u^{n+1})] - \nu \frac{d^2 u^{n+1}}{dx^2} = 0 \\ u^{n+1}(-R) = u^{n+1}(R) = 0 \end{cases} \quad [2.2]$$

el cual, puede transformarse en un problema sobre $[0,1]$ mediante un cambio de variables

$$\begin{cases} \frac{u^{n+1}}{\Delta t} + \frac{d}{dx} [f(u^{n+1})] - \nu \frac{d^2 u^{n+1}}{dx^2} = \frac{u^n}{\Delta t} \\ u^{n+1}(0) = u^{n+1}(1) = 0 \end{cases} \quad [2.3]$$

Dediquémonos al estudio de la ecuación de Burgers viscosa y estacionaria

$$\begin{cases} \alpha u + \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (u^2) - \nu \frac{d^2 u}{dx^2} = f \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad [2.4]$$

donde $f \in L^2(0,1)$ (o bien $f \in H^{-1}(0,1)$).

2.2 Formulación variacional

Multiplicando la ecuación diferencial del problema [2.4] por funciones test $v \in \mathcal{D}(0,1)$ e integrando por partes, se deduce

$$\alpha \int_0^1 uv \, dx + \int_0^1 u \frac{du}{dx} v \, dx + \nu \int_0^1 \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} \, dx = \int_0^1 f v \, dx$$

por densidad de $\mathcal{D}(0,1)$ en $H_0^1(0,1)$, se deduce la formulación variacional de [2.1]

$$\begin{cases} \text{Hallar } u \in H_0^1(0,1) \text{ tal que} \\ \alpha \int_0^1 uv \, dx + \int_0^1 u \frac{du}{dx} v \, dx + \nu \int_0^1 \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} \, dx = \int_0^1 f v \, dx \\ \forall v \in H_0^1(0,1) \end{cases} \quad [2.5]$$

Veamos que cada uno de los términos de [2.5] tiene sentido:

1. Si $f \in H^{-1}(0,1)$ entonces obtendremos el mismo problema con $\langle f, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1}$ en el segundo miembro de la ecuación.
2. Dado que $u, v \in H_0^1(0,1)$ se tiene

$$u, v \in L^2(0,1) \quad \text{y} \quad \frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx} \in L^2(0,1)$$

Por otra parte sabemos por los resultados de inyección en los espacios de Sobolev que

$$H_0^1(0,1) \hookrightarrow L^4(0,1) \implies u, v \in L^4(0,1)$$

De manera que podemos aplicar la desigualdad de Hölder a las integrales que aparecen en [2.5]

$$\begin{aligned}\int_0^1 uv \, dx &\leq \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \\ \int_0^1 u \frac{du}{dx} v \, dx &\leq \|u\|_{L^4} \left\| \frac{du}{dx} \right\|_{L^2} \|v\|_{L^4} \leq C \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{L^4} \\ \int_0^1 \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} \, dx &\leq \left\| \frac{du}{dx} \right\|_{L^2} \left\| \frac{dv}{dx} \right\|_{L^2} \leq C \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1} \\ \int_0^1 fv \, dx &\leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2}\end{aligned}$$

2.3 Existencia de solución del problema de Burgers variacional

El carácter no lineal del problema [2.5] es la principal dificultad del mismo. La existencia de solución de [2.5] está basada en una técnica de punto fijo. Haremos uso del siguiente resultado debido a Schauder

TEOREMA 2.1 (Schauder)

Sean:

X un espacio de Banach

$M \subset X$ un convexo, cerrado y $M \neq \emptyset$

$F : X \rightarrow X$ operador compacto y tal que $F(M) \subset M$

Entonces:

$$\exists x \in M \quad \text{tal que} \quad F(x) = x$$

Vamos a demostrar el siguiente resultado:

TEOREMA 2.2

El problema [2.5] admite solución $u \in H_0^1(0, 1)$

Demostración.

Para asegurar la existencia de solución vamos a proceder como sigue:

1. Se construye un operador T a través de un problema lineal.

2. A ese problema lineal aplicaremos el teorema de Lax-Milgram que nos dará la existencia y unicidad de solución y, por tanto, que el operador está bien definido.
3. Se aplica el teorema de Schauder al operador T para obtener la existencia de un punto fijo que será solución de [2.5].

1. Construcción del operador T

Se considera el operador

$$\begin{aligned} T : H_0^1(0,1) &\longmapsto H_0^1(0,1) \\ w &\longmapsto T(w) = u \end{aligned} \quad [2.6]$$

donde u es la única solución del problema lineal:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } u \in H_0^1(0,1) \text{ tal que} \\ \alpha \int_0^1 uv \, dx + \frac{1}{3} \int_0^1 u \frac{dw}{dx} v \, dx + \frac{2}{3} \int_0^1 w \frac{du}{dx} v \, dx + \nu \int_0^1 \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} \, dx = \int_0^1 fv \, dx \\ \forall v \in H_0^1(0,1) \end{array} \right. \quad [2.7]$$

2. Aplicación del Teorema de Lax-Milgram

Se aplica el teorema de Lax-Milgram a los datos siguientes

- ▷ $V = H_0^1(0,1)$ con la norma:

$$\|v\|_{H_0^1(0,1)} = \left(\int_0^1 \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx \right)^{1/2}$$

▷ $a_w(u, v) = \alpha \int_0^1 uv \, dx + \frac{1}{3} \int_0^1 u \frac{dw}{dx} v \, dx + \frac{2}{3} \int_0^1 w \frac{du}{dx} v \, dx + \nu \int_0^1 \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} \, dx$

▷ $L(v) = \int_0^1 fv \, dx$

Veamos que se cumplen las hipótesis del teorema de Lax-Milgram

- (a) Dadas $u, v, w \in H_0^1(0,1)$, como ya hemos visto antes, tiene sentido escribir cada una de las integrales

$$\int_0^1 uv \, dx \quad \int_0^1 u \frac{dw}{dx} v \, dx \quad \int_0^1 w \frac{du}{dx} v \, dx \quad \int_0^1 \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} \, dx$$

luego $a_w(u, v)$ está bien definida.

(b) L es lineal y continua:

$$|L(v)| \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq C \|v\|_{H_0^1}$$

(c) $a_w(\cdot, \cdot)$ es bilineal y continua:

$$|a_w(u, v)| \leq C \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1}$$

(d) $a_w(\cdot, \cdot)$ es V-elíptica:

$$a_w(v, v) = \alpha \int_0^1 v^2 dx + \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{dw}{dx} v^2 dx + \frac{2}{3} \int_0^1 \frac{dv}{dx} w v dx + \nu \int_0^1 \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx,$$

obsérvese que

$$\frac{2}{3} \int_0^1 \frac{dv}{dx} w v dx = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{dv^2}{dx} w dx,$$

integrando por partes

$$\frac{1}{3} \int_0^1 \frac{dv^2}{dx} w dx = -\frac{1}{3} \int_0^1 \frac{dw}{dx} v^2 dx,$$

por tanto

$$a_w(v, v) = \alpha \int_0^1 v^2 dx + \nu \int_0^1 \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx \geq \nu \int_0^1 \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx = \nu \|v\|_{H_0^1(0,1)}^2$$

con lo cual tenemos la V-elipticidad de $a_w(\cdot, \cdot)$.

En conclusión [2.7] tiene solución y ésta es única, y por tanto el operador T está bien definido.

3. Aplicación del Teorema de Schauder

(A) Veamos en primer lugar que el operador T es compacto, es decir:

$$\boxed{\begin{aligned} \forall (w_n) \subset H_0^1(0, 1), w \in H_0^1(0, 1) \quad \text{con} \quad w_n \rightharpoonup w \text{ débil en } H_0^1(0, 1) &\implies \\ &\implies T(w_n) \longrightarrow T(w) \text{ fuerte en } H_0^1(0, 1) \end{aligned}}$$

Sea $u_n = T(w_n)$, o lo que es lo mismo u_n es solución del problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } u_n \in H_0^1(0, 1) \text{ tal que} \\ \alpha \int_0^1 u_n v dx + \frac{1}{3} \int_0^1 u_n \frac{dw_n}{dx} v dx + \frac{2}{3} \int_0^1 w_n \frac{du_n}{dx} v dx + \\ \quad + \nu \int_0^1 \frac{du_n}{dx} \frac{dv}{dx} dx = \int_0^1 f v dx \quad \forall v \in H_0^1(0, 1) \end{array} \right. \quad [2.8]$$

Si tomamos $v = u_n$

$$\alpha \int_0^1 |u_n|^2 dx + \nu \int_0^1 \left(\frac{du_n}{dx} \right)^2 dx = \int_0^1 f u_n dx \quad [2.9]$$

luego:

$$\nu \|u_n\|_{H_0^1}^2 \leq a_w(u_n, u_n) = \int_0^1 f u_n dx \leq \|f\|_{L^2} \|u_n\|_{L^2} \leq C \|f\|_{L^2} \|u_n\|_{H_0^1}$$

de donde se deduce que

$$\forall n \geq 0 \quad \|u_n\|_{H_0^1} \leq \frac{C}{\nu} \|f\|_{L^2}$$

Luego, existen $u^* \in H_0^1(0, 1)$ y una subsucesión $(u_m) \subset (u_n)$ tales que

$$u_m \rightharpoonup u^* \text{ débil en } H_0^1(0, 1) \quad [2.10]$$

En particular

$$\int_0^1 u_m v dx \longrightarrow \int_0^1 u^* v dx \quad [2.11]$$

Además por [2.10] tenemos que

$$u_m \longrightarrow u^* \text{ fuerte en } L^2(0, 1)$$

y como

$$\frac{dw_m}{dx} \rightharpoonup \frac{dw}{dx} \text{ débil en } L^2(0, 1)$$

se deducen

$$\int_0^1 \frac{du_m}{dx} \frac{dv}{dx} dx \longrightarrow \int_0^1 \frac{du^*}{dx} \frac{dv}{dx} dx \quad [2.12]$$

y

$$\int_0^1 \frac{dw_m}{dx} v u_m dx \longrightarrow \int_0^1 \frac{dw}{dx} v u^* dx \quad [2.13]$$

Observación:

Notese que también hemos usado que $H_0^1(0, 1) \hookrightarrow C^0([0, 1])$, con lo que $v \in L^\infty(0, 1)$.

También:

$$\left. \begin{array}{l} w_n \longrightarrow w \text{ fuerte en } L^2 \\ \frac{du_m}{dx} \rightharpoonup \frac{du^*}{dx} \text{ en } L^2 \end{array} \right\} \implies \int_0^1 \frac{du_m}{dx} v w_m dx \longrightarrow \int_0^1 \frac{du^*}{dx} v w dx$$

Por todo lo anterior, u^* satisface la relación

$$\begin{aligned} \alpha \int_0^1 u^* v \, dx + \frac{1}{3} \int_0^1 u^* \frac{dw}{dx} v \, dx + \frac{2}{3} \int_0^1 w \frac{du^*}{dx} v \, dx + \nu \int_0^1 \frac{du^*}{dx} \frac{dv}{dx} \, dx &= \\ &= \int_0^1 f v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(0, 1) \end{aligned}$$

Puesto que [2.8] admite una única solución, se tiene

$$u^* = T(w) = u$$

luego, en realidad, es toda la sucesión (u_n) la que converge débil a u ,

$$T(w_n) \rightharpoonup T(w) \text{ débil en } H_0^1(0, 1)$$

Ahora nos queda probar que la convergencia es, de hecho, fuerte en $H_0^1(0, 1)$.

Para ello consideremos de nuevo [2.9], es decir

$$\underbrace{\alpha \int_0^1 |u_n|^2 \, dx}_{\downarrow n \rightarrow \infty} + \nu \int_0^1 \left(\frac{du_n}{dx} \right)^2 \, dx = \underbrace{\int_0^1 f u_n \, dx}_{\downarrow n \rightarrow \infty}$$

$$\alpha \int_0^1 u^2 \, dx \qquad \qquad \int_0^1 f u \, dx$$

de donde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu \int_0^1 \left(\frac{du_n}{dx} \right)^2 \, dx = \int_0^1 f u \, dx - \alpha \int_0^1 u^2 \, dx \tag{2.14}$$

De igual modo, si hacemos lo mismo con $v = u$ obtendremos

$$\alpha \int_0^1 u^2 \, dx + \nu \int_0^1 \left(\frac{du}{dx} \right)^2 \, dx = \int_0^1 f u \, dx \tag{2.15}$$

por consiguiente, de [2.14] y [2.15]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \left(\frac{du_n}{dx} \right)^2 \, dx = \int_0^1 \left(\frac{du}{dx} \right)^2 \, dx \tag{2.16}$$

en definitiva:

$$\left. \begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u \text{ en } H_0^1(0, 1) \\ \|u_n\|_{H_0^1} &\longrightarrow \|u\|_{H_0^1} \end{aligned} \right\} \implies u_n \longrightarrow u \text{ en } H_0^1(0, 1)$$

o lo que es lo mismo:

$$T(w_n) \longrightarrow T(w)$$

(B) Para aplicar el teorema de Schauder veamos que

$$\exists M \text{ una bola cerrada } \subset H_0^1(0, 1) \text{ tal que } T(M) \subset M$$

Tomando $v = u$ en [2.8] y se deduce

$$\nu \|u\|_{H_0^1}^2 \leq a_w(u, u) = \int_0^1 f u \, dx \leq C \|f\|_{L^2} \|u\|_{H_0^1}$$

es decir

$$\|T(w)\|_{H_0^1} \leq \frac{C}{\nu} \|f\|_{L^2}$$

Luego, si definimos M como

$$M = \left\{ v \in H_0^1(0, 1) \mid \|v\|_{H_0^1} \leq \frac{C}{\nu} \|f\|_{L^2} \right\}$$

se tiene $T(M) \subset M$.

Nos encontramos, por consiguiente, en las condiciones del teorema de Schauder.

En conclusión,

$$\exists u \in M \quad \text{tal que} \quad T(u) = u$$

o dicho de otro modo

$$\begin{aligned} & \exists u \in H_0^1(0, 1) \text{ tal que} \\ & \alpha \int_0^1 uv \, dx + \int_0^1 u \frac{du}{dx} v \, dx + \nu \int_0^1 \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} \, dx = \int_0^1 f v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(0, 1) \\ & \text{con } \|u\|_{H_0^1} \leq \frac{C}{\nu} \|f\|_{L^2} \end{aligned}$$

□

Observaciones:

1. La solución $u \in H_0^1(0, 1)$ que hemos encontrado es también solución fuerte del problema, es decir, $u \in H^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1)$ es solución de :

$$\begin{cases} \alpha u + \frac{1}{2} \frac{d}{dx}(u^2) - \nu \frac{d^2 u}{dx^2} = f \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad [2.17]$$

siendo la ecuación diferencial válida casi por doquier. Esto es una consecuencia de que $H_0^1(0, 1)$ es un álgebra.

2. El resultado que hemos obtenido podemos generalizarlo sin más que aplicar el *teorema de caracterización de H^{-k}* a nuestro caso y utilizar una expresión más general de $L(v)$:

$$L(v) = \int_0^1 f v \, dx + \int_0^1 g \frac{dv}{dx} \, dx \quad f, g \in L^2(0, 1) \quad [2.18]$$

2.4 Resolución numérica del problema de Burgers estacionario

2.4.1 Formulación del problema aproximado

Vamos a utilizar la técnica de los elementos finitos para obtener un problema en dimensión finita que sea una aproximación del problema variacional [2.5].

Sean $N > 0$, $h = \frac{1}{N+1}$, $x_i = ih$, $0 \leq i \leq N+1$.

Se considera la aproximación interna de $H_0^1(0, 1)$ dada por el subespacio V_{0h} definido por

$$V_{0h} = \left\{ v_h \in C^0([0, 1]) \mid v_h(0) = v_h(1) = 0 ; v_h \Big|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbf{P}_1, i = 0, 1, \dots, N \right\} \quad [2.19]$$

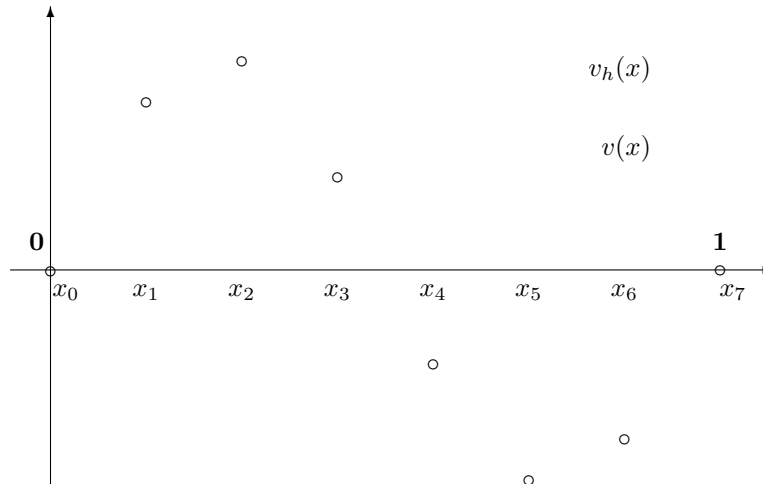


Figura 2.1 : Ejemplo de aproximación con $N = 6$

El conjunto de funciones:

$$B_{0h} = \{\omega_i\}_{i=1}^N \subset V_{0h} \quad \text{con} \quad \omega_i(x_j) = \delta_{ij} \quad i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$$

constituye una base del espacio V_{0h} .

Aplicando el método de Galerkin obtenemos el problema aproximado

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } u_h \in V_{0h} \text{ tal que} \\ \alpha \int_0^1 u_h v_h dx + \int_0^1 u_h \frac{du_h}{dx} v_h dx + \nu \int_0^1 \frac{du_h}{dx} \frac{dv_h}{dx} dx = \int_0^1 f_h v_h dx \\ \forall v_h \in V_{0h} \end{array} \right. \quad [2.20]$$

DEFINICIÓN 2.3

Se define el operador de proyección r_h mediante

$$\begin{array}{ccc} r_h : H_0^1(0,1) & \longmapsto & V_{0h} \\ v & \longmapsto & r_h(v) \end{array}$$

con

$$r_h(v)(x_i) = v(x_i), \quad \forall i = 1, \dots, N$$

DEFINICIÓN 2.4

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto. Se dice que la familia $\{\Omega_r\}_{r=1}^M$ es una partición de Ω si

- (i) $\Omega_r \subset \Omega$ es abierto, $\forall r = 1, \dots, M$.
- (ii) $\Omega_r \cap \Omega_s = \emptyset$, $\forall r, s = 1, \dots, M$, $r \neq s$
- (iii) $\Omega = \text{int} \left(\bigcup_{r=1}^M \overline{\Omega}_r \right)$

En el análisis de la convergencia de las soluciones discretas a la solución del problema [2.5] haremos uso del siguiente resultado

TEOREMA 2.5

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto acotado. Para cada $M \geq 1$, se considera $\{\Omega_r\}_{r=1}^M$ una partición de Ω , con $m(\Omega_i) = \int_{\Omega_i} dx > 0$, $dx = dx_1 \dots dx_n$. Sean $f \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, y

$$f_M = \sum_{i=1}^M \left[\frac{\int_{\Omega_i} f dx}{m(\Omega_i)} \chi_{\Omega_i} \right]. \text{ Supongamos que } \lim_{M \rightarrow \infty} \left[\sup_i (\text{diam}(\Omega_i)) \right] = 0. \text{ Entonces}$$

$$\lim_{M \rightarrow \infty} f_M = f \text{ en } L^p(\Omega).$$

Ahora podemos demostrar

TEOREMA 2.6

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|r_h(v) - v\|_{H_0^1} = 0$$

Demostración.

Será suficiente demostrar que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{d}{dx} r_h(v) - \frac{dv}{dx} \right\|_{L^2} = 0$$

Sea $e_i = [x_{i-1}, x_i]$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} r_h(v) &= \sum_{i=1}^{N+1} \left[\frac{r_h(v)(x_i) - r_h(v)(x_{i-1})}{h} \chi_{e_i} \right] = \sum_{i=1}^{N+1} \left[\frac{v(x_i) - v(x_{i-1})}{h} \chi_{e_i} \right] \\ &= \sum_{i=1}^{N+1} \left[\frac{\int_{x_{i-1}}^{x_i} v'(\xi) d\xi}{m(e_i)} \chi_{e_i} \right] = \sum_{i=1}^{N+1} \left[\frac{\int_{e_i} v'(\xi) d\xi}{m(e_i)} \chi_{e_i} \right] \end{aligned}$$

Aplicando ahora el teorema 2.5

$$\frac{d}{dx} r_h(v) \longrightarrow v' \text{ en } L^2(0, 1)$$

con lo cual

$$r_h(v) \longrightarrow v \text{ en } H_0^1(0, 1)$$

□

2.4.2 Resolución del problema aproximado

El resultado siguiente asegura la existencia de solución del problema aproximado.

TEOREMA 2.7

El problema [2.20] admite al menos una solución.

Demostración.

Sea el operador

$$\begin{aligned} T_h : V_{0h} &\longmapsto V_{0h} \\ w_h &\longmapsto T_h(w_h) = y_h \end{aligned} \tag{2.21}$$

donde y_h es la solución del problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } y_h \in V_{0h} \text{ tal que} \\ \alpha \int_0^1 y_h v_h dx + \frac{1}{3} \int_0^1 y_h \frac{dw_h}{dx} v_h dx + \frac{2}{3} \int_0^1 w_h \frac{dy_h}{dx} v_h dx + \\ \quad + \nu \int_0^1 \frac{dy_h}{dx} \frac{dv_h}{dx} dx = \int_0^1 f_h v_h dx \\ \forall v_h \in V_{0h} \end{array} \right. \quad [2.22]$$

Para resolver el problema [2.22], se siguen los mismos pasos que en el teorema 2.2. Por una aplicación directa del teorema de Lax-Milgram obtenemos

$$\exists! y_h \in V_{0h} \text{ solución de [2.22]}$$

Por otro lado como el espacio V_{0h} es de dimensión finita, usaremos el teorema del punto fijo de Brower, que no es más que la versión del teorema de Schauder finito dimensional.

TEOREMA 2.8 (Brower)

Sea X un espacio de dimensión finita, T un operador continuo de X en sí mismo y $B \subset X$ un convexo, cerrado y acotado tal que $T(B) \subset B$. Entonces:

$$\exists x \in B \text{ tal que } T(x) = x$$

La elección particular

- $T = T_h$
- $B = B_h = \left\{ v \in V_{0h} \mid \|v\|_{H_0^1} \leq \frac{C}{\nu} \|f\|_{L^2} \right\}$

permite concluir la existencia de, al menos, una solución $u_h \in V_{0h}$.

2.4.3 Estudio de la convergencia

En esta sección nos ocuparemos de analizar si la sucesión de soluciones (u_h) , que hemos obtenido para cada valor de h , converge de alguna forma a la solución de [2.5] cuando $h \mapsto 0$.

TEOREMA 2.9

Sea (u_h) la familia de soluciones obtenida. Entonces:

Se puede extraer una subsucesión $(u_{h'})$ tal que $\lim_{h' \rightarrow 0} \|u_{h'} - u\|_{H_0^1} = 0$
donde u es solución del problema [2.5].

Esto ocurre para todas las posibles u que sean puntos de acumulación de (u_h) .

Demostración.

Si tomamos $v_h = u_h$ en [2.20] obtenemos:

$$\int_0^1 u_h^2 \frac{du_h}{dx} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{du_h^3}{dx} dx = \frac{1}{3} (u_h^3(1) - u_h(0)) = 0 \quad [2.23]$$

Por lo tanto:

$$\alpha \int_0^1 u_h^2 dx + \nu \int_0^1 \left(\frac{du_h}{dx} \right)^2 dx = \int_0^1 f_h u_h dx \leq C \|f\|_{L^2} \|u_h\|_{H_0^1}$$

luego

$$\|u_h\|_{H_0^1} \leq \frac{C}{\nu} \|f\|_{L^2},$$

de donde se puede extraer una subsucesión $(u_{h'}) \subset (u_h)$ tal que:

$$u_{h'} \longrightarrow u^* \text{ en } H_0^1(0, 1)$$

lo cual implica

$$u_{h'} \longrightarrow u^* \text{ uniformemente en } [0, 1]$$

Sea $v \in H_0^1(0, 1)$, sabemos que:

$$r_h(v) \longrightarrow v \text{ en } H_0^1(0, 1)$$

Tomando $v_h = r_h(v)$ en [2.20] tenemos:

$$\alpha \int_0^1 u_{h'} r_h(v) dx + \int_0^1 u_{h'} \frac{du_{h'}}{dx} r_h(v) dx + \nu \int_0^1 \frac{du_{h'}}{dx} \frac{dr_h(v)}{dx} dx = \int_0^1 f_h r_h(v) dx, \quad \forall v \in V_{0h}$$

Teniendo en cuenta que:

1.

$$\left. \begin{array}{l} u_{h'} \longrightarrow u^* \text{ en } L^\infty(0, 1) \\ r_h(v) \longrightarrow v \text{ en } H_0^1(0, 1) \end{array} \right\} \implies \alpha \int_0^1 u_{h'} r_h(v) dx \longrightarrow \alpha \int_0^1 u^* v dx$$

2.

$$\left. \begin{array}{l} u_{h'} r_h(v) \longrightarrow u^* r_h(v) \text{ en } L^\infty(0, 1) \\ \frac{du_{h'}}{dx} \longrightarrow \frac{du^*}{dx} \text{ en } L^2(0, 1) \end{array} \right\} \implies \int_0^1 u_{h'} \frac{du_{h'}}{dx} r_h(v) dx \longrightarrow \int_0^1 u^* \frac{du^*}{dx} v dx$$

3.

$$\left. \begin{array}{l} u_{h'} \longrightarrow u^* \text{ en } L^\infty(0, 1) \\ \frac{dr_h(v)}{dx} \longrightarrow \frac{dv}{dx} \text{ en } L^2(0, 1) \end{array} \right\} \implies \int_0^1 u_{h'} \frac{dr_h(v)}{dx} dx \longrightarrow \int_0^1 u^* \frac{dv}{dx} dx$$

4.

$$\left. \begin{array}{l} f_h \longrightarrow f \quad \text{en } L^2(0, 1) \\ r_h(v) \longrightarrow v \quad \text{en } L^\infty(0, 1) \end{array} \right\} \implies \alpha \int_0^1 f_h r_h(v) dx \longrightarrow \alpha \int_0^1 f v dx$$

podemos pasar al límite y tenemos así que u^* es solución de [2.5].

Designemos pues $u = u^*$. Veamos por último que la convergencia $u_h \longrightarrow u$ es fuerte en $H_0^1(0, 1)$. En efecto, de [2.23] tenemos

$$\underbrace{\alpha \int_0^1 (u_h)^2 dx}_{\downarrow h \rightarrow 0} + \nu \int_0^1 \left(\frac{du_h}{dx} \right)^2 dx = \underbrace{\int_0^1 f u_h dx}_{\downarrow h \rightarrow 0}$$

$$\alpha \int_0^1 u^2 dx \qquad \qquad \qquad \int_0^1 f u dx$$

luego

$$\lim_{h \rightarrow 0} \nu \int_0^1 \left(\frac{du_h}{dx} \right)^2 dx = \int_0^1 f u dx - \alpha \int_0^1 u^2 dx$$

Dado que u es solución de [2.5] y aplicando de nuevo [2.23] tenemos:

$$\nu \int_0^1 \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx = \int_0^1 f u dx - \alpha \int_0^1 u^2 dx$$

por tanto

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u_h\|_{H_0^1} = \|u\|_{H_0^1}$$

es decir

$$u_h \longrightarrow u \text{ en } H_0^1(0, 1)$$

Que todos los puntos de acumulación son soluciones de [2.5] es evidente después de lo visto para una subsucesión convergente de (u_h) .

□

2.5 Cálculo de la solución aproximada

Consideremos el problema de Burgers [2.4] y el subespacio aproximante V_{0h} como en [2.19]. En este caso la formulación variacional aproximada del problema es

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } u_h \in V_{0h} \text{ tal que} \\ \alpha \int_0^1 u_h v_h dx + \int_0^1 u_h \frac{du_h}{dx} v_h dx + \nu \int_0^1 \frac{du_h}{dx} \frac{dv_h}{dx} dx = \int_0^1 f_h v_h dx \\ \forall v_h \in V_{0h} \end{array} \right. \quad [2.24]$$

donde $u_h = \sum_{i=1}^N u_i \omega_i$ y $\{\omega_i\}_{i=1}^N$ es una base de V_{0h} . El problema se puede escribir entonces

$$(BV)_h \left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } u_h \in V_{0h} \text{ tal que} \\ \alpha \int_0^1 u_h \omega_i dx + \int_0^1 u_h \frac{du_h}{dx} \omega_i dx + \nu \int_0^1 \frac{du_h}{dx} \frac{d\omega_i}{dx} dx = \int_0^1 f_h \omega_i dx \\ i = 1, \dots, N \end{array} \right. \quad [2.25]$$

que es un sistema no lineal con N ecuaciones en las incógnitas u_1, \dots, u_N . Por consiguiente, la solución de $(BV)_h$ sólo se realizará de forma aproximada a través de algún algoritmo iterativo.

En la sección que sigue se describen algunas técnicas de resolución (aproximada) de ecuaciones no lineales.

2.5.1 Método de Newton

Sean X e Y dos espacios de Banach, $\Omega \subset X$ abierto y $F : \Omega \subset X \mapsto Y$.

Se desea resolver el problema

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } u \in \Omega \text{ tal que} \\ F(u) = 0 \end{array} \right.$$

Definamos la familia $\{A_n(v)\}_{\substack{n \geq 0 \\ v \in \Omega}}$ donde $A_n(v) \in \text{Isom}(X, Y)$, $\forall v \in \Omega$ y $\forall n \geq 0$.

Entonces el algoritmo de Newton generalizado para la resolución (aproximada) de (P) viene dado por

$$(ANwG) \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad u_0 \in \Omega \\ (2) \quad u_{n+1} = u_n - [A_n(u_l)]^{-1} F(u_n), \quad \text{para algún } l, 0 \leq l \leq n. \end{array} \right.$$

Veamos un resultado que nos da la existencia y unicidad de solución, además de la convergencia del algoritmo (su demostración puede verse en [4, página 162]):

TEOREMA 2.10

Sean X, Y dos espacios de Banach, $\Omega \subset X$ abierto, $u_0 \in \Omega$ y $F : \Omega \subset X \mapsto Y$ una función. Supongamos que:

1. F es derivable en Ω .
2. $\exists M, \beta, r > 0$ tales que:

$$(H1) \quad \overline{B}_r = \overline{B(u_0, r)} \subset \Omega$$

$$(H2) \quad \sup_{v \in \overline{B}_r} \|[A_n(v)]^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y, X)} \leq M$$

$$(H3) \quad \sup_{\substack{v, v' \in \overline{B}_r \\ n \geq 0}} \|F'(v) - A_n(v')\|_{\mathcal{L}(X, Y)} \leq \frac{\beta}{M} \quad \beta \in (0, 1)$$

$$(H4) \quad \|F(u_0)\|_Y \leq \frac{r}{M}(1 - \beta)$$

Entonces

1. u_n está bien definida, es decir, $(u_n) \subset \overline{B}_r \subset \Omega$;
2. $u_n \longrightarrow u \in \Omega$ solución de (P) y es única en \overline{B}_r .
3. $\|u_n - u\| \leq \frac{\beta^n}{1 - \beta} \|u_0 - u\|$

Elijiendo convenientemente los isomorfismos $(A_n(v))$, se deducen diversos métodos de Newton. En efecto,

1. Si $A_n(v) = F'(v)$, $\forall n \geq 0$ y $l = n$:

$$(ANw) \begin{cases} (1) & u_0 \in \Omega \\ (2) & u_{n+1} = u_n - [F'(u_n)]^{-1} F(u_n) \end{cases}$$

2. Si $A_n(v) = F'(v)$, $\forall n \geq 0$ y $l = 0$:

$$(AQNW)_1 \begin{cases} (1) & u_0 \in \Omega \\ (2) & u_{n+1} = u_n - [F'(u_0)]^{-1} F(u_n) \end{cases}$$

3. Si $A_n(v) = A_0$, $\forall n \geq 0$ con A_0^{-1} “fácil” de calcular:

$$(AQNW)_2 \begin{cases} (1) & u_0 \in \Omega \\ (2) & u_{n+1} = u_n - A_0^{-1}F(u_n) \end{cases}$$

4. Si $A_n(v) = F'(v)$, $\forall n \geq 0$ y fijado p :

$$(AQNW)_3 \begin{cases} (1) & u_0 \in \Omega \\ (2) & u_{n+1} = u_n - [A_n(u_l)]^{-1} F(u_n) \\ & \text{donde } l = pE \left[\frac{n}{p} \right] \end{cases}$$

El caso 1 es el método de Newton usual. Nótese que en cada iteración es necesario actualizar la matriz $[F'(u_n)]^{-1}$; para simplificar esto, se introducen las variantes dadas en 2, 3 y 4.

Las variantes 2 y 3 se llaman método de Whittaker; en estos métodos se toma siempre el mismo isomorfismo a invertir para todas las iteraciones.

La variante 4 se llama método de cuasi-Newton; en este método, el isomorfismo a invertir es actualizado cada cierto número de iteraciones fijo.

Aplicación a un problema de optimización

Sea V un espacio de Banach, $\Omega \subset V$ abierto y convexo, y $J : \Omega \subset V \mapsto \mathbb{R}$ un funcional convexo y dos veces diferenciable en Ω (en el sentido de Fréchet). Se plantea el problema de optimización

$$\begin{cases} \text{Hallar } u \in \Omega \text{ tal que} \\ J(u) \leq J(v), \quad \forall v \in \Omega \end{cases} \quad [2.26]$$

Dado que J es diferenciable y convexo, el problema anterior es equivalente a

$$\begin{cases} \text{Hallar } u \in \Omega \text{ tal que} \\ J'(u) = 0 \end{cases} \quad [2.27]$$

Para construir una sucesión minimizante (u_n) , se considera el algoritmo de Newton

$$(ANwG) \begin{cases} (1) & u_0 \in \Omega \\ (2) & u_{n+1} = u_n - [A_n(u_l)]^{-1} J'(u_n), \quad 0 \leq l \leq n \end{cases}$$

donde $J'(u_n) \in V'$ y $A_n(u_l) \in \text{Isom}(V, V')$, $\forall n \geq 0$ y $\forall l$ con $0 \leq l \leq n$.

Aplicando el teorema 2.10, se deduce inmediatamente el

TEOREMA 2.11

Sean V un espacio de Banach, $\Omega \subset V$ abierto, $J : \Omega \subset V \mapsto \mathbb{R}$ y $u_0 \in \Omega$. Supongamos que:

1. J es 2 veces diferenciable Fréchet en Ω .
2. $\exists M, \beta, r > 0$ tales que:

$$(H1). \quad \overline{B}_r = \overline{B(u_0, r)} \subset \Omega$$

$$(H2). \quad \sup_{v \in \overline{B}_r} \|[A_n(v)]^{-1}\|_{\mathcal{L}(V', V)} \leq M$$

$$(H3). \quad \sup_{\substack{v, v' \in \overline{B}_r \\ n \geq 0}} \|J''(v) - A_n(v')\|_{\mathcal{L}(V, V')} \leq \frac{\beta}{M} \quad \beta \in (0, 1)$$

$$(H4). \quad \|J'(u_0)\|_{V'} \leq \frac{r}{M}(1 - \beta)$$

Entonces:

1. u_n está bien definida (es decir, $u_n \in \overline{B}_r \subset \Omega$)
2. $u_n \longrightarrow u \in \Omega$ solución de [2.27] y ésta es única en \overline{B}_r .
3. $\|u_n - u\| \leq \frac{\beta^n}{1 - \beta} \|u_0 - u\| \quad \beta \in (0, 1)$

Un caso particular

Si consideramos el caso $A_n = J''$ y $l = n$, tenemos (ANw) . Pero dada la dificultad de trabajar con $[J''(u_n)]^{-1}$, consideremos un caso particular de $(AQNw)_2$ en el que $A_0 = \frac{1}{\rho} \mathbf{I}_y$ V es un espacio de Hilbert

$$\begin{cases} (1) & u_0 \in \Omega \\ (2) & u_{n+1} = u_n - \rho J'(u_n) \end{cases} \quad [2.28]$$

Como V es un espacio de Hilbert, por el teorema de Riesz

$$\exists \sigma : V' \mapsto V \quad \text{lineal, continua, biyectiva e isométrica.}$$

así la ecuación (2) de [2.28] hay que entenderla como

$$\begin{cases} (1) & u_0 \in \Omega \\ (2) & u_{n+1} = u_n - \rho \sigma(J'(u_n)) \end{cases} \quad [2.29]$$

Por comodidad en la notación identificaremos $\sigma(J'(v))$ y escribiremos simplemente 2.28 con $J'(v)$. Definamos ahora el operador:

$$\begin{aligned} T_\rho : V &\longmapsto V \\ v &\longmapsto T_\rho(v) = v - \rho J'(v) \end{aligned} \quad [2.30]$$

Así el problema [2.28] quedará:

$$\begin{cases} (1) & u_0 \in \Omega \\ (2) & u_{n+1} = T_\rho(u_n) \end{cases} \quad [2.31]$$

Con lo que basta demostrar que T_ρ es contractiva para ciertos valores de ρ . A tal efecto se tiene el

TEOREMA 2.12 (Punto fijo de Banach)

Sea (E, d) un espacio métrico completo y $T : E \longmapsto E$ contractiva, es decir, existe $\alpha \in [0, 1)$ tal que

$$d(T(x), T(y)) \leq \alpha d(x, y) \quad \forall x, y \in E.$$

Entonces:

$$\exists! x^* \in E \quad \text{tal que} \quad T(x^*) = x^*$$

Además, la sucesión definida mediante $x_0 \in E$ dado y $x_{n+1} = T(x_n)$ para $n \geq 0$, satisface

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*, \quad d(x_n, x^*) \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} d(x_1, x_0) \quad \text{y} \quad d(x_n, x^*) \leq \alpha^n d(x_0, x^*).$$

TEOREMA 2.13

Sea V un espacio de Hilbert y $J : V \longmapsto \mathbb{R}$ 2 veces diferenciable en V .

Supongamos que $\exists \gamma, M > 0$ tales que:

$$(H1). \quad J''(v; \phi, \phi) \geq \gamma \|\phi\|^2, \quad \forall \phi \in V, \quad \forall v \in V$$

$$(H2). \quad \text{Sup}_{\phi, \psi \in V} \frac{\|J''(v; \phi, \psi)\|}{\|\phi\| \|\psi\|} \leq M, \quad \forall v \in V$$

Entonces

$$\forall \rho \in \left(0, \frac{2\gamma}{M^2}\right) \quad \text{el operador } T_\rho \text{ definido en [2.30] es contractivo.}$$

Como aplicación del teorema 2.12, se tiene:

$$1. \quad \exists! u \in V \quad \text{tal que} \quad T_\rho(u) = u$$

2. Puesto que T_ρ es contractiva se tiene además la estimación

$$d(u_n, u) \leq \gamma^n d(u_0, u)$$

En particular, si $\gamma \in (0, 1)$, obtenemos

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{en } V.$$

3. Tenemos la convergencia para cualquier u_0 que tomemos.

Método de Newton en dimensión finita

Sea $F : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}^N$ derivable. Se considera el problema

$$\begin{cases} \text{Hallar } x \in \mathbb{R}^N \text{ tal que} \\ F(x) = 0 \end{cases} \quad [2.32]$$

El método de Newton se escribe entonces

$$(ANw) \begin{cases} (1) & u_0 \in \mathbb{R}^N \\ & \text{Para } n \geq 0 \\ (2) & F'(u_n)w_n = -F(u_n) \\ (3) & u_{n+1} = u_n + w_n. \end{cases}$$

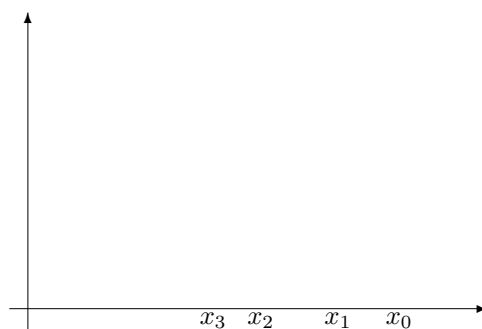


Figura 2.2 : Ejemplo con $N = 1$.

En cuanto a la convergencia podemos usar el teorema 2.10, que nos asegura, bajo ciertas condiciones, la existencia y unicidad de la solución de [2.32], y que $x_n \longrightarrow x$ geométricamente.

Aplicación a la resolución del problema $(BV)_h$

Si aplicamos el algoritmo (ANw) a $(BV)_h$ tenemos:

- $v \in V_{0h} \implies v \simeq (v_1, \dots, v_N)^T \in \mathbb{R}^N$
- $F(v) = (F_1(v), \dots, F_N(v))^T \in \mathbb{R}^N$ donde

$$F_i(v) = \alpha \int_0^1 v \omega_i dx + \int_0^1 v \frac{dv}{dx} \omega_i dx + \nu \int_0^1 \frac{dv}{dx} \frac{d\omega_i}{dx} dx - \int_0^1 f_h \omega_i dx$$

- $\langle F'_i(u), v \rangle = \alpha \int_0^1 v \omega_i dx + \int_0^1 v \frac{du}{dx} \omega_i dx + \int_0^1 u \frac{dv}{dx} \omega_i dx + \nu \int_0^1 \frac{dv}{dx} \frac{d\omega_i}{dx} dx$

y el algoritmo quedaría:

1. $u_h^0 \in V_{0h}$

2. Dados $n \geq 0$ y u_h^n , se calcula $\delta^n \in V_{0h}$ solución de

$$\begin{aligned} & \alpha \int_0^1 \delta^n \omega_i dx + \int_0^1 \delta^n \frac{du_h^n}{dx} \omega_i dx + \int_0^1 u_h^n \frac{d\delta^n}{dx} \omega_i dx + \nu \int_0^1 \frac{d\delta^n}{dx} \frac{d\omega_i}{dx} dx = \\ & = - \left[\alpha \int_0^1 u_h^n \omega_i dx + \int_0^1 u_h^n \frac{du_h^n}{dx} \omega_i dx + \nu \int_0^1 \frac{du_h^n}{dx} \frac{d\omega_i}{dx} dx - \int_0^1 f_h \omega_i dx \right], \quad 1 \leq i \leq N \end{aligned}$$

3. $u_h^{n+1} = u_h^n + \delta^n$

Observaciones:

1. Tenemos que resolver sistemas de matriz $F'(u_h^n) \in \mathcal{M}_{N \times N}$ que cambia en cada etapa.
2. Las matrices son tridiagonales no simétricas.

2.5.2 Matriz de preconditionamiento

Sea $J : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}$ derivable. Se considera el problema de optimización

$$\begin{cases} \text{Hallar } x \in \mathbb{R}^N \text{ tal que} \\ J(x) \leq J(y), \quad \forall y \in \mathbb{R}^N \end{cases} \quad [2.33]$$

TEOREMA 2.14 (Existencia)

Sean $U \subset \mathbb{R}^N$ cerrado y no vacío y $J : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}$ una función continua y coercitiva (si U no está acotado). Entonces existe al menos un elemento u tal que

$$J(u) = \inf_{v \in U} J(v).$$

Si además J es estrictamente convexo, la solución es única.

Demostración: [4, pág 175]

□

TEOREMA 2.15 (Condición necesaria y suficiente)

Sean V un espacio normado, $U \subset V$ convexo y $J : U \subset V \mapsto \mathbb{R}$ una función convexa y derivable en $u \in U$. Entonces

$$J(u) = \inf_{v \in U} J(v) \iff J'(u)(v - u) \geq 0, \quad \forall v \in U$$

Demostración: [4, pág. 156]

□

En las condiciones del teorema si $U = V = \mathbb{R}^N$ la condición necesaria y suficiente es

$$J'(u) = 0.$$

Pasamos por tanto al estudio del problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } x \in \mathbb{R}^N \text{ tal que} \\ J'(x) = 0 \end{array} \right. \quad \text{con} \quad J'(y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial J(y)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial J(y)}{\partial x_N} \end{bmatrix}$$

Vamos a construir una sucesión (x_n) que tienda a la solución x . Si utilizamos el método de Newton tenemos

$$(ANw) \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad x_0 \in \mathbb{R}^N \\ (2) \quad J''(x_n)(x_{n+1} - x_n) = -J'(x_n) \end{array} \right.$$

donde $J''(y) = \left(\frac{\partial^2 J(y)}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq N} \in \mathcal{M}_{N \times N}$ es la matriz hessiana de J .

Habitualmente, los sistemas de ecuaciones dados en $(ANw)(2)$ están mal condicionados por lo que es conveniente utilizar una técnica de preconditionamiento que viene dada a través de una matriz $S \in \mathcal{M}_{N \times N}$ que llamaremos *matriz de preconditionamiento*.

Por ejemplo supongamos que deseamos resolver el siguiente sistema $Ax = b$ en \mathbb{R}^N . Si A está mal condicionada, podemos sustituir el sistema por otro equivalente $SAx = Sb$, donde ahora SA esté mucho mejor condicionada.

Observaciones:

1. En los problemas (ANw) S va a permanecer constante en todas las iteraciones.
2. Se elegirá S simétrica y definida positiva. De esta manera podemos factorizar S usando el método de Choleski al principio del algoritmo, obteniendo así un considerable ahorro de cálculo.

Elección de la matriz de preconditionamiento

Procuraremos tomar S lo más sencilla posible. Una elección clásica de S es

$$S = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{NN} \end{pmatrix} \quad \text{definida positiva.}$$

Caso particular

Consideremos el problema

$$(P) \begin{cases} \text{Hallar } x \in \mathbb{R}^N \text{ tal que} \\ Ax + \Psi(x) = b \end{cases}$$

donde:

- $A \in \mathcal{M}_{N \times N}$ simétrica y definida positiva,
- $\Psi : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}^N$ definida por $\Psi(y) = \{\phi(y_i)\}_{i=1}^N \quad \forall y = \{y_i\}_{i=1}^N \in \mathbb{R}^N$,
- $\phi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continua y creciente,

por tanto, (P) es un sistema no lineal y monótono que admite una única solución.

Si $F(y) = Ay + \Psi(y) - b$. Es fácil de comprobar que $F(y) = J'(y)$ donde:

$$J(y) = \frac{1}{2} (Ay, y) - (b, y) + \sum_{j=1}^N \Phi(y_j)$$

con Φ la primitiva de ϕ que se anula en 0:

$$\Phi(t) = \int_0^t \phi(\xi) d\xi.$$

Sea entonces el problema:

$$(M) \begin{cases} \text{Hallar } x \in \mathbb{R}^N \text{ tal que} \\ J(x) \leq J(y) \quad \forall y \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

Aplicando el teorema 2.14 tenemos la existencia y unicidad de solución de (M) , pues

1. $U = V = \mathbb{R}^N$.
2. J es un funcional estrictamente convexo y derivable.

luego tenemos la existencia y unicidad de solución de (P) . Además por el teorema 2.15 (P) y (M) son equivalentes.

Si además ϕ es derivable, entonces $J \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^N)$; en este caso la elección natural de la matriz de preconditionamiento es $S = A$, si A es fácilmente invertible.

2.5.3 Método de mínimos cuadrados

Sea V un espacio de Hilbert real, dotado de un producto escalar (\cdot, \cdot) , con $\|\cdot\|$ la norma asociada.

Para un operador (no lineal en general) $\mathcal{A} : V \mapsto V'$, se desea resolver la ecuación

$$\begin{cases} \text{Hallar } u \in V \text{ tal que} \\ \mathcal{A}(u) = 0 \end{cases} \quad [2.34]$$

Denotemos $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la dualidad $V'V$, $\|\cdot\|_*$ la norma en el dual, es decir

$$\|f\|_* = \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{|\langle f, v \rangle|}{\|v\|}$$

Para resolver el problema [2.34] el problema de optimización

$$\begin{cases} \text{Hallar } u \in V \text{ tal que} \\ \|\mathcal{A}(u)\|_* \leq \|\mathcal{A}(v)\|_* \quad \forall v \in V \end{cases} \quad [2.35]$$

y, claramente, toda solución de [2.34] lo es de [2.35]. Recíprocamente, si [2.34] admite solución, entonces toda solución de [2.35] también lo es de [2.34]. No obstante, no es la versión [2.35] la que nos interesará ya que en a mayoría de los casos la norma dual $\|\cdot\|_*$ no es fácilmente manejable. Por esa razón introducimos el isomorfismo de dualidad entre V y V' .

DEFINICIÓN 2.16

Llamamos *isomorfismo de dualidad* al operador $S : V \mapsto V'$ que cumple

$$(v, w) = \langle Sv, w \rangle \quad \forall v, w \in V$$

Algunas propiedades inmediatas del operador S así definido son:

1. $\langle Sv, v \rangle = \|v\|^2 \quad \forall v \in V$
2. $\langle f, S^{-1}f \rangle = \|f\|_*^2 \quad \forall f \in V'$
3. $\|Sv\|_* = \|v\|$ y $\|S^{-1}f\| = \|f\|_*$

Consideremos ahora el problema

$$\begin{cases} \text{Dado } v \in V, \text{ hallar } y_v \in V \text{ tal que} \\ Sy_v = \mathcal{A}(v) \end{cases} \quad [2.36]$$

Dado que $\|\mathcal{A}(v)\|_* = \|Sy_v\|_* = \|y_v\|$, si definimos

$$J(v) = \frac{1}{2}\|y_v\|^2$$

podemos plantear el problema [2.35] de forma equivalente como el problema de mínimos cuadrados siguiente

$$\begin{cases} \text{Hallar } u \in V \text{ tal que} \\ J(u) \leq J(v), \quad \forall v \in V \end{cases} \quad [2.37]$$

y ahora J sólo hace referencia a la norma sobre V (y no a la de V').

El apartado siguiente describe algunos algoritmos destinados a aproximar la solución de problemas del tipo [2.37].

2.5.4 Métodos del gradiente conjugado

Sean V un espacio de Hilbert y $J : V \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable. Se pretende construir una sucesión minimizante para [2.37]. Para ello podemos usar los métodos del gradiente conjugado. Una formulación general de todos estos métodos es la siguiente:

- (AG) {
- INICIO
- (1) Elegir $u_0 \in V$ arbitrario.
 - (2) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } d_0 \in V \text{ tal que} \\ (d_0, v) = \langle J'(u_0), v \rangle \quad \forall v \in V \end{array} \right.$
 - (3) $w_0 = d_0$
- DESCENSO Dados $n \geq 0$ y $u_n, d_n, w_n \in V$:
- (4) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } \rho_n \in \mathbb{R}^+ \text{ tal que} \\ J(u_n - \rho_n w_n) = \inf_{\rho > 0} J(u_n - \rho w_n) \end{array} \right.$
 - (5) $u_{n+1} = u_n - \rho_n w_n$
- NUEVA DIRECCIÓN DE DESCENSO
- (6) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } d_{n+1} \in V \text{ tal que} \\ (d_{n+1}, v) = \langle J'(u_{n+1}), v \rangle \quad \forall v \in V \end{array} \right.$
 - (7) Si $d_{n+1} = 0$, parar; u_{n+1} es solución.
 - (8) $\gamma_n = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{algoritmo del gradiente con paso óptimo (AGPO).} \\ \frac{(d_{n+1}, d_{n+1})}{\|d_n\|^2} & \text{algoritmo del gradiente de Fletcher-Reeves (AGFR).} \\ \frac{(d_{n+1} - d_n, d_{n+1})}{\|d_n\|^2} & \text{algoritmo del gradiente de Polack-Ribiere (AGPR).} \end{array} \right.$
 - (9) $w_{n+1} = d_{n+1} + \gamma_n w_n$
- Volver a la etapa (4), con $n + 1$ en lugar de n .

Si usamos (AGPO) el número de iteraciones puede dispararse como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.17

Sea $J : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ definida por:

$$J(v_1, v_2) = \frac{1}{2} (\alpha_1 v_1^2 + \alpha_2 v_2^2) \text{ con } 0 < \alpha_1 < \alpha_2$$

luego $J(v) = \frac{1}{2}(Av, v)$ donde $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}$.

Aplicamos el algoritmo tomando como direcciones d_n justamente los $J'(u_n)$. Si se hacen los cálculos y se dibujan las curvas de nivel de J

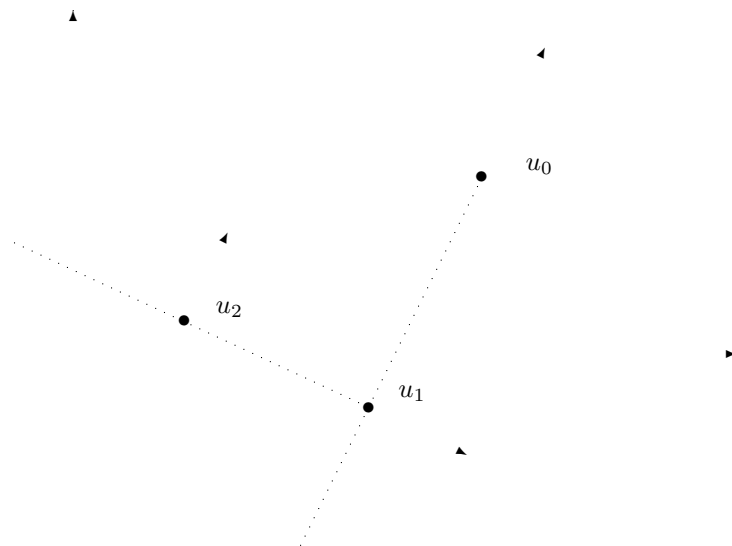


Figura 2.3

se observa que para cualquier $u_0 = (u_{01}, u_{02})$ tal que $u_{01}u_{02} \neq 0$ no hay convergencia en un número finito de pasos.

Si $J(x, y) = \frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{1}$, es evidente que la solución del problema de mínimos es $u^* = (0, 0)$.

Veamos qué resultados numéricos¹, se obtienen para cada uno de los métodos anteriores.

¹Se han obtenido sin error de redondeo, usando el programa de cálculo simbólico Maple V.

Resultados numéricos obtenidos con (AGPO).			
Iteración	u_n		$ u^* - u_n $
	Coordenada x	Coordenada y	
0.	10.	2.	10.19803903
1.	8.780487805	-.4390243902	8.791456561
2.	5.644599303	1.128919861	5.756384401
3.	4.956233534	-.2478116767	4.962424958
4.	3.186150129	.6372300259	3.249248337
5.	2.797595235	-.1398797618	2.801090047
6.	1.798454080	.3596908160	1.834070490
7.	1.579130412	-.07895652058	1.581103092
8.	1.015155265	.2030310529	1.035259301
9.	.8913558421	-.04456779211	.8924693413
10.	.5730144699	.1146028940	.5843623929
11.	.5031346565	-.02515673283	.5037631822
12.	.3234437078	.06468874155	.3298491555
13.	.2839993532	-.01419996766	.2843541307
14.	.1825710127	.03651420255	.1861866313
15.	.1603062551	-.008015312755	.1605065128
16.	.1030540211	.02061080423	.1050948930
17.	.09048645758	-.004524322879	.09059949503
18.	.05816986559	.01163397312	.05932185596
19.	.05107597954	-.002553798977	.05113978465
20.	.03283455828	.006566911655	.03348481068
30.	.001881467701	.0003762935401	.001918728104
40.	.0001078108217	.00002156216434	.0001099458967
50.	.000006177716086	.000001235543217	.000006300058974

Resultados numéricos obtenidos con (AGFR).			
Iteración	u_n		$ u^* - u_n $
	Coordenada x	Coordenada y	
0.	10.	2.	10.19803903
1.	8.780487805	-.4390243902	8.791456561
2.	0.	0.	0.

Resultados numéricos obtenidos con (AGPR).			
Iteración	u_n		$ u^* - u_n $
	Coordenada x	Coordenada y	
0.	10.	2.	10.19803903
1.	8.780487805	-.4390243902	8.791456561
2.	0.	0.	0.

2.5.5 Aplicación del (AGPR) a la ecuación de Burgers

Vamos a usar el Algoritmo del Gradiente de Polack-Ribiere, que hemos descrito antes, para resolver el problema de Burgers cuya formulación variacional es

$$\begin{cases} \text{Hallar } u \in H_0^1(0, 1) \text{ tal que} \\ \alpha \int_0^1 uv \, dx + \int_0^1 u \frac{du}{dx} v \, dx + \nu \int_0^1 \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} \, dx = \int_0^1 f v \, dx \\ \forall v \in H_0^1(0, 1) \end{cases} \quad [2.38]$$

que es un problema del tipo [2.34] con

$$\langle \mathcal{A}(u), v \rangle = \alpha \int_0^1 uv \, dx + \int_0^1 u \frac{du}{dx} v \, dx + \nu \int_0^1 \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} \, dx - \int_0^1 f v \, dx$$

Vamos a fijar ahora un producto escalar en $H_0^1(0, 1)$ tomando la parte bilineal del problema, es decir

$$(u, v)_{H_0^1} = \alpha \int_0^1 uv \, dx + \nu \int_0^1 \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} \, dx$$

Definimos entonces el isomorfismo de dualidad

$$\langle S(v), w \rangle = \alpha \int_0^1 vw \, dx + \nu \int_0^1 \frac{dv}{dx} \frac{dw}{dx} \, dx$$

por tanto

$$J(v) = \frac{\alpha}{2} \int_0^1 y_v^2 \, dx + \frac{\nu}{2} \int_0^1 \left(\frac{dy_v}{dx} \right)^2 \, dx$$

donde, a cada v se le asocia y_v solución de [2.36], es decir

$$\begin{cases} \text{Hallar } y_v \in H_0^1(0, 1) \text{ tal que} \\ \alpha \int_0^1 y_v w \, dx + \nu \int_0^1 \frac{dy_v}{dx} \frac{dw}{dx} \, dx = \alpha \int_0^1 vw \, dx + \int_0^1 v \frac{dv}{dx} w \, dx + \\ + \nu \int_0^1 \frac{dv}{dx} \frac{dw}{dx} \, dx - \int_0^1 f w \, dx, \quad \forall w \in H_0^1(0, 1) \end{cases} \quad [2.39]$$

Además

$$\langle J'(v), w \rangle = \alpha \int_0^1 y_v w \, dx + \nu \int_0^1 \frac{dy_v}{dx} \frac{dw}{dx} \, dx + \int_0^1 y_v \frac{dy_v}{dx} w \, dx + \int_0^1 y_v v \frac{dw}{dx} \, dx$$

El algoritmo queda entonces

INICIO

(1) Elegir $u_0 \in H_0^1(0, 1)$ arbitrario.

$$(2.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } y_0 \in H_0^1(0, 1) \text{ tal que} \\ \alpha \int_0^1 y_0 w \, dx + \nu \int_0^1 \frac{dy_0}{dx} \frac{dw}{dx} \, dx = \alpha \int_0^1 u_0 w \, dx + \int_0^1 u_0 \frac{du_0}{dx} w \, dx + \\ \quad + \nu \int_0^1 \frac{du_0}{dx} \frac{dw}{dx} \, dx - \int_0^1 f w \, dx \quad \forall w \in H_0^1(0, 1) \end{array} \right.$$

$$(2.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } g_0 \in H_0^1(0, 1) \text{ tal que} \\ \alpha \int_0^1 g_0 v \, dx + \nu \int_0^1 \frac{dg_0}{dx} \frac{dv}{dx} \, dx = \alpha \int_0^1 y_0 v \, dx + \nu \int_0^1 \frac{dy_0}{dx} \frac{dv}{dx} \, dx + \\ \quad + \int_0^1 y_0 \frac{du_0}{dx} v \, dx + \int_0^1 y_0 u_0 \frac{dv}{dx} \, dx \quad \forall v \in H_0^1(0, 1) \end{array} \right.$$

(3) $w_0 = g_0$ DESCENSO Dados $n \geq 0$ y $u_n, g_n, w_n \in H_0^1(0, 1)$, $w_n \neq 0$,

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } \rho_n \in \mathbb{R}^+ \text{ tal que} \\ J(u_n - \rho_n w_n) = \inf_{\rho > 0} J(u_n - \rho w_n) \end{array} \right.$$

(5) $u_{n+1} = u_n - \rho_n w_n$

NUEVA DIRECCIÓN DE DESCENSO

$$(6.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } y_{n+1} \in H_0^1(0, 1) \text{ tal que} \\ \alpha \int_0^1 y_{n+1} w \, dx + \nu \int_0^1 \frac{dy_{n+1}}{dx} \frac{dw}{dx} \, dx = \alpha \int_0^1 u_{n+1} w \, dx + \int_0^1 u_{n+1} \frac{du_{n+1}}{dx} w \, dx + \\ \quad + \nu \int_0^1 \frac{du_{n+1}}{dx} \frac{dw}{dx} \, dx - \int_0^1 f w \, dx \quad \forall w \in H_0^1(0, 1) \end{array} \right.$$

$$(6.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } g_{n+1} \in H_0^1(0, 1) \text{ tal que} \\ \alpha \int_0^1 g_{n+1} v \, dx + \nu \int_0^1 \frac{dg_{n+1}}{dx} \frac{dv}{dx} \, dx = \alpha \int_0^1 y_{n+1} v \, dx + \nu \int_0^1 \frac{dy_{n+1}}{dx} \frac{dv}{dx} \, dx + \\ \quad + \int_0^1 y_{n+1} \frac{du_{n+1}}{dx} v \, dx + \int_0^1 y_{n+1} u_{n+1} \frac{dv}{dx} \, dx \quad \forall v \in H_0^1(0, 1) \end{array} \right.$$

Si $g_{n+1} = 0$, parar; u_{n+1} es la solución.

$$(7) \quad \gamma_n = \frac{(g_{n+1} - g_n, g_{n+1})_{H_0^1}}{\|g_n\|_{H_0^1}^2}$$

(8) $w_{n+1} = g_{n+1} + \gamma_n w_n$ Volver a la etapa (4), con $n + 1$ en lugar de n .

PARTE II

**MÉTODOS PARA LA
RESOLUCIÓN DE LAS
ECUACIONES DE
NAVIER-STOKES**

Capítulo 3

Introducción

Las ecuaciones de Navier-Stokes aparecen en la mecánica de medios continuos cuando se estudia el comportamiento de un fluido que fluye a lo largo de un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N=2$ ó 3), durante un intervalo de tiempo $[0, T)$. Por tratarse de un fenómeno de la mecánica de medios continuos, se supone la existencia de funciones “regulares” que describen las magnitudes físicas que intervienen en las ecuaciones, a saber:

- $\rho \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega} \times [0, T))$, $\rho > 0$, la *densidad de masa*.
- $\vec{u} \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega} \times [0, T); \mathbb{R}^N)$, el *campo de velocidades*.
- $\omega \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega} \times [0, T))$, $\omega > 0$, la *densidad de energía interna por unidad de masa*.

Las ecuaciones que ligan estas magnitudes se deducen a partir de leyes de conservación y leyes de comportamiento (véase [5]).

3.1 Descripción de algunas situaciones físicas y de su expresión en términos de ecuaciones en derivadas parciales

De la ley de conservación de masa obtenemos la ecuación

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad \text{en } \Omega \times (0, T). \quad [3.1]$$

De la ley de conservación de movimiento se deduce

$$\rho \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right] - \nabla \cdot \tilde{\sigma} = \rho \vec{f} \quad \text{en } \Omega \times (0, T). \quad [3.2]$$

con $\tilde{\sigma} \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega} \times [0, T]; \mathcal{L}_s(\mathbb{R}^N))$ el *tensor de esfuerzos* y $\vec{f} \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega} \times [0, T]; \mathbb{R}^N)$ la función de *densidad de esfuerzos exteriores*; aquí $\mathcal{L}_s(\mathbb{R}^N)$ representa el conjunto de las matrices simétricas.

De la ley de conservación de la energía se tiene

$$\rho \left[\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \omega \right] = -\nabla \cdot \vec{q} + \tilde{\sigma} : \nabla \vec{u} \quad \text{en } \Omega \times (0, T), \quad [3.3]$$

con $\vec{q} \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega} \times [0, T]; \mathbb{R}^N)$ el *flujo de calor*.

Hemos llegado al sistema [3.1]-[3.3] que tiene $(N+2)$ ecuaciones con $\frac{N(N+5)}{2} + 2$ incógnitas: $\rho, \omega, u_i, q_i, \sigma_{ij}$ ($i \leq j$).

Para obtener un sistema con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas imponemos ciertas restricciones en función del medio.

3.1.1 Fluido ideal, incompresible y homogéneo.

En este caso tenemos

- $\tilde{\sigma} = -p\mathbf{I}$, con $p \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega} \times [0, T])$ la *presión*.
- $\nabla \cdot \vec{u} = 0$, en $\Omega \times (0, T)$.
- $\rho(x, t) = \rho_0$, en $\Omega \times (0, T)$.

Obtenemos así el sistema de ecuaciones en derivadas parciales (ecuaciones de Euler incompresibles)

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + \frac{1}{\rho_0} \nabla p = \vec{f} & \text{en } \Omega \times (0, T) \\ \nabla \cdot \vec{u} = 0 & \text{en } \Omega \times (0, T). \end{cases}$$

Observaciones:

1. Si suponemos ρ_0 un dato conocido, el sistema tiene $(N+1)$ ecuaciones y $(N+1)$ incógnitas: u_i y p .
2. La ecuación de la energía queda *desacoplada* y ω puede calcularse a partir de \vec{u} .
3. Este sistema modela problemas en los que el término de viscosidad es despreciable frente a los de convección (*convección dominante*).

3.1.2 Fluido newtoniano viscoso (con viscosidad constante), incompresible y homogéneo.

Vamos a suponer ahora que el campo de velocidades es de la forma $\vec{u} \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega} \times [0, T]; \mathbb{R}^N)$, y que existen $p \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega} \times [0, T])$ presión dinámica y $\mu > 0$ viscosidad dinámica, tales que

$$\tilde{\sigma} = -p\mathbf{I} + \mu \left(\nabla \vec{u} + \nabla \vec{u}^t - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \vec{u})\mathbf{I} \right).$$

De nuevo $\nabla \cdot \vec{u} = 0$ y $\rho(x, t) = \rho_0$ en $\Omega \times (0, T)$.

Obtenemos así el sistema de ecuaciones en derivadas parciales

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} - \frac{\mu}{\rho_0} \Delta \vec{u} + \frac{1}{\rho_0} \nabla p = \vec{f} & \text{en } \Omega \times (0, T) \\ \nabla \cdot \vec{u} = 0 & \text{en } \Omega \times (0, T). \end{cases}$$

Observaciones:

1. Si suponemos que ρ_0 y μ son datos conocidos, el sistema tiene $(N + 1)$ ecuaciones y $(N + 1)$ incógnitas: u_i y p .
2. Como en el caso anterior la ecuación de la energía queda *desacoplada* y ω puede calcularse a partir de \vec{u} .
3. Éste es un modelo mucho más realista que el anterior.

3.1.3 Fluido newtoniano viscoso, incompresible y no homogéneo

Razonando como en el caso anterior llegamos al sistema de ecuaciones en derivadas parciales siguiente

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 & \text{en } \Omega \times (0, T). \\ \rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right) - \mu (\nabla \vec{u} + \nabla \vec{u}^t) + \nabla p = \rho \vec{f} & \text{en } \Omega \times (0, T) \\ \nabla \cdot \vec{u} = 0 & \text{en } \Omega \times (0, T). \end{cases}$$

Si suponemos que μ es un dato conocido, el sistema tiene $(N + 2)$ ecuaciones y $(N + 2)$ incógnitas: ρ , u_i y p .

3.1.4 Fluido newtoniano viscoso, compresible y no homogéneo

Es un modelo que tiene validez para la casi totalidad de los problemas en los que el medio es un gas, y por consiguiente, es de gran interés.

De nuevo supondremos $\vec{u} \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega} \times [0, T]; \mathbb{R}^N)$, que existe $p \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega} \times [0, T])$, y ahora tenemos que la viscosidad dinámica es $\mu_* \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$, de forma que

$$\tilde{\sigma} = -p\mathbf{I} + \mu_*(\rho, \omega) \left(\nabla \vec{u} + \nabla \vec{u}^t - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \vec{u})\mathbf{I} \right).$$

Si suponemos que μ_* es un dato, tenemos como antes $(N + 2)$ ecuaciones [3.1]-[3.3] y $(2N + 3)$ incógnitas: q_i , u_i , ρ , ω y p . Para igualar el número de incógnitas y de ecuaciones se recurre a la termodinámica; introduciendo

- $\theta \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega} \times [0, T])$, $\theta > 0$, la *temperatura*.
- $\chi_* \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$, $\chi_* > 0$ la *conductividad térmica*.
- $c_* \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$, $c_* > 0$, el *calor específico*.

De manera que $\vec{q} = -\chi_*(\rho, \omega)\nabla\theta$, y que $\omega = c_*(\rho)\theta$.

Podemos admitir que la conductividad térmica χ_* y el calor específico c_* pueden determinarse de forma experimental. Además, la ley de los gases perfectos relaciona la presión con las otras tres magnitudes mediante

$$p = \frac{R}{c_*(\rho)}\rho\omega,$$

con $R > 0$ la constante del gas.

Finalmente tenemos el sistema de ecuaciones en derivadas parciales

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad \text{en } \Omega \times (0, T). \\ \rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right) - \\ \quad - \nabla \cdot \left[\mu_*(\rho, c_*(\rho)\theta) \left(\nabla \vec{u} + \nabla \vec{u}^t - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \vec{u})\mathbf{I} \right) \right] + \nabla p = \rho \vec{f} \quad \text{en } \Omega \times (0, T) \\ c_*(\rho)\rho \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \theta \right) - \nabla \cdot (\chi_*(\rho, c_*(\rho)\theta)\nabla \theta) - \\ \quad - \mu_*(\rho, c_*(\rho)\theta) \left(\nabla \vec{u} + \nabla \vec{u}^t - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \vec{u})\mathbf{I} \right) : \nabla \vec{u} = 0 \quad \text{en } \Omega \times (0, T) \\ \nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad \text{en } \Omega \times (0, T), \end{array} \right.$$

que es un sistema de $(N + 3)$ ecuaciones con $(N + 3)$ incógnitas: ρ , θ , ω y u_i .

3.2 Elección de las dimensiones físicas

Si tomamos como magnitudes características:

- $\mathcal{L} \equiv$ longitud característica (por ejemplo, el diámetro de Ω),
- $\mathcal{U} \equiv$ velocidad característica (por ejemplo, la media de las velocidades iniciales o $|\vec{u}_\infty|$),

entonces las nuevas variables y funciones vienen dadas por

$$x^* = \frac{x}{\mathcal{L}}, \quad t^* = \frac{t}{(\mathcal{L}/\mathcal{U})}, \quad \vec{u}^* = \frac{\vec{u}}{\mathcal{U}}, \quad p^* = \frac{p}{\rho_0 \mathcal{U}^2},$$

las cuales ya no poseen dimensión física alguna. En estas nuevas variables, en el caso de un fluido viscoso, incompresible y homogéneo, tenemos las ecuaciones en derivadas parciales sin dimensiones físicas siguientes

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{u}^*}{\partial t^*} + (\vec{u}^* \cdot \nabla^*) \vec{u}^* - \frac{1}{Re} \Delta^* \vec{u}^* + \nabla^* p^* = \vec{f}^* & \text{en } \Omega^* \times (0, T^*) \\ \nabla^* \cdot \vec{u}^* = 0 & \text{en } \Omega^* \times (0, T^*), \end{cases}$$

donde $\vec{f}^*(x^*, t^*) = \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{U}^2} \vec{f}(x, t)$, $T^* = \frac{T\mathcal{L}}{\mathcal{U}}$, $\nu = \frac{\mu}{\rho_0}$ es el coeficiente de viscosidad y $Re = \frac{\mathcal{U}\mathcal{L}}{\nu} \equiv \frac{\mathcal{U}\mathcal{L}\rho_0}{\mu}$ es el número de Reynolds.

Gracias al principio de semejanza de Reynolds:

“ Si Ω_1 y Ω_2 tienen geometrías semejantes, de forma que las respectivas velocidades características \mathcal{U}_1 y \mathcal{U}_2 y las viscosidades ν_1 y ν_2 son tales que

$$Re_1 \equiv \frac{\mathcal{U}_1 \mathcal{L}_1}{\nu_1} = \frac{\mathcal{U}_2 \mathcal{L}_2}{\nu_2} \equiv Re_2,$$

entonces, (\vec{u}_1^*, p_1^*) y (\vec{u}_2^*, p_2^*) resuelven el mismo problema. En consecuencia, es posible obtener (\vec{u}_1, p_1) a partir de (\vec{u}_2, p_2) mediante un cambio de variables”.

es posible resolver problemas en las condiciones que nos interesen siempre que Re no cambie. Por ejemplo, para dominios muy grandes podemos pasar a dominios más pequeños mediante un cambio de variables, resolver el problema y deshacer el cambio de variables para obtener la solución en el dominio inicial.

Además, la experiencia muestra que muchas situaciones

- Si Re es “pequeño” el flujo es laminar, es decir, organizado en capas que se deslizan unas sobre otras.

- Si Re es “grande” el flujo es turbulento, es decir, completamente irregular en espacio y en tiempo.

En los capítulos siguientes vamos a estudiar el caso de un fluido viscoso, incompresible y homogéneo. A este sistema de ecuaciones le añadiremos condiciones de contorno de tipo Dirichlet, resultando el problema

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} - \frac{\mu}{\rho_0} \Delta \vec{u} + \frac{1}{\rho_0} \nabla p = \vec{f} & \text{en } \Omega \times (0, T) \\ \nabla \cdot \vec{u} = 0 & \text{en } \Omega \times (0, T) \\ \vec{u}(x, t) = \vec{g}(x, t) & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T) \\ \vec{u}(x, 0) = \vec{u}_0(x) & \text{en } \Omega, \end{array} \right. \quad [3.4]$$

con \vec{g} la traza de una función que, eventualmente, depende del tiempo y cumple la condición de compatibilidad

$$\int_{\partial\Omega} \vec{g} \cdot \vec{n} \, dS = 0 \text{ en } (0, T),$$

donde $\vec{n} = \vec{n}(x)$ es el vector normal, unitario y exterior a Ω . Y \vec{u}_0 es el campo de velocidades inicial sobre Ω , que es compatible la condición de incompresibilidad, es decir, $\nabla \cdot \vec{u}_0 = 0$.

3.3 Existencia, unicidad y regularidad de la solución.

En lo que sigue, $\Omega \in \mathbb{R}^N$ designará un dominio acotado con frontera suficientemente regular. Consideremos los espacios

$$\mathcal{V}_0 = \left\{ v \in \mathcal{D}(\Omega)^N \mid \nabla \cdot v = 0 \right\}, \quad H = \overline{\mathcal{V}_0}^{L^2(\Omega)^N} = \left\{ v \in L^2(\Omega)^N, \nabla \cdot v = 0, v \cdot \vec{n} = 0 \right\},$$

$$V_0 = \overline{\mathcal{V}_0}^{H^1(\Omega)^N} = \left\{ v \in H_0^1(\Omega)^N, \nabla \cdot v = 0 \right\}.$$

(véase por ejemplo [6, página 26]). Podemos deducir la formulación variacional del problema [3.4], que resulta ser equivalente al problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Dados } \vec{f} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)^N) \text{ y } \vec{u}_0 \in H \\ \text{Hallar } \vec{u} \in L^2(0, T; V_0) \cap L^\infty(0, T; H) \text{ tal que} \\ \left\langle \frac{d\vec{u}}{dt}, \vec{v} \right\rangle_{V_0'V_0} + \nu a(\vec{u}, \vec{v}) + b(\vec{u}, \vec{u}, \vec{v}) = \langle \vec{f}, \vec{v} \rangle_{H^{-1}H_0^1} \quad \forall \vec{v} \in V_0, \\ \vec{u}(0) = \vec{u}_0 \end{array} \right. \quad [3.5]$$

con

$$a(u, v) = \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} dx \quad u, v \in V,$$

y

$$b(u, v, w) = \sum_{i,k=1}^N \int_{\Omega} u_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} w_i dx.$$

El siguiente resultado puede consultarse en [7]:

TEOREMA 3.1 *En estas condiciones*

(a) *si $N = 2$ el problema [3.5] tiene una única solución.*

(b) *si $N = 3$ el problema [3.5] tiene solución.*

(c) *si $N = 2$ con $\vec{f}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial t} \in L^2(0, T; V_0')$, $\vec{f}(0) \in H$, $\vec{u}_{0i} \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $\vec{u}_0 \in V_0$.
Entonces la solución del problema [3.5] que existe por (a), verifica*

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \in L^2(0, T; V_0) \cap L^\infty(0, T; H).$$

Capítulo 4

Métodos de Descomposición de Operadores

Consideremos el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + \mathcal{A}(u) = f & \text{en } (0, T) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad [4.1]$$

donde $\mathcal{A} : H \mapsto H$, y H un espacio de Hilbert.

Con objeto de resolver numéricamente un problema del tipo [4.1], se introducen los denominados *métodos de descomposición de operadores*. Estos métodos consisten en descomponer \mathcal{A} en suma de dos operadores

$$\boxed{\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2}$$

de tal manera que \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 sean más “sencillos” de tratar por separado.

Ejemplo 4.1

Dado el problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + u^3 = f & \text{en } \Omega \times (0, T) \\ u = g_0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{en } \Omega \end{cases}$$

Tomemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= -\Delta \\ \mathcal{A}_2 &: \varphi \mapsto \varphi^3 \end{aligned}$$

Con lo cual hemos descompuesto el operador inicial en dos operadores más “sencillos”. El método de Peaceman-Rachford o el θ -esquema son métodos que utilizan esta descomposición del operador, aunque de distinta manera. Estos métodos se describen en las secciones que siguen.

Observación:

Recordemos algunos esquemas de resolución de [4.1] y su orden de precisión:

1. Euler explícito (orden 1)

$$\begin{cases} (1) & u^0 = u_0 \\ (2) & \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + A(u^n) = f^n \end{cases}$$

2. Euler implícito (orden 1)

$$\begin{cases} (1) & u^0 = u_0 \\ (2) & \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + A(u^{n+1}) = f^{n+1} \end{cases}$$

3. Crank-Nicolson (implícito, orden 2)

$$\begin{cases} (1) & u^0 = u_0 \\ (2) & \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + \frac{1}{2}(A(u^{n+1}) + A(u^n)) = \frac{f^{n+1} + f^n}{2} \end{cases}$$

o bien la siguiente variante, que sólo realiza una evaluación de f en cada iteración (implícito, de orden 2)

$$\begin{cases} (1) & u^0 = u_0 \\ (2) & \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + \frac{1}{2}(A(u^{n+1}) + A(u^n)) = f^{n+1/2} \end{cases}$$

4.1 Método de Peaceman-Rachford

El método consiste en aplicar el siguiente esquema basado en la separación de operadores:

$$\begin{array}{c} \text{-----|-----|-----} \\ n\Delta t \qquad (n + 1/2)\Delta t \qquad (n + 1)\Delta t \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \quad u^0 = u_0 \\ \text{Dados } n \geq 0 \text{ y } u^n, \text{ calculamos } u^{n+1/2} \text{ y luego } u^{n+1} \text{ mediante} \\ (2) \quad \frac{u^{n+1/2} - u^n}{\Delta t/2} + A_1(u^{n+1/2}) + A_2(u^n) = f^{n+1/2} \\ (3) \quad \frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\Delta t/2} + A_1(u^{n+1/2}) + A_2(u^{n+1}) = f^{n+1} \end{array} \right. \quad [4.2]$$

Obsérvese que (2) aproxima sobre el primer subintervalo de manera explícita para A_2 e implícita para A_1 , mientras que (3) lo hace en el segundo subintervalo de manera explícita para A_1 e implícita para A_2 .

Ejemplo 4.2

Podemos aplicar este método a la ecuación del calor

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Delta \varphi = 0 \quad \text{en } \Omega \times (0, T) \\ \varphi(x, 0) = \varphi_0(x) \quad \text{en } \Omega \\ \varphi = g \quad \text{sobre } \partial\Omega \times [0, T] \end{array} \right. \quad [4.3]$$

En este caso podemos descomponer el operador laplaciano como

$$-\Delta = \underbrace{-\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}}_{A_1} - \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}}_{A_2}.$$

Con lo cual el método queda

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \varphi^0 = u_0 \\ \text{Dados } n \geq 0 \text{ y } \varphi^n, \text{ calculamos } \varphi^{n+1/2} \text{ y luego } \varphi^{n+1} \text{ mediante} \\ (2) \quad \frac{\varphi^{n+1/2} - \varphi^n}{\Delta t/2} - \frac{\partial^2 \varphi^{n+1/2}}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 \varphi^n}{\partial x_2^2} \\ (3) \quad \frac{\varphi^{n+1} - \varphi^{n+1/2}}{\Delta t/2} - \frac{\partial^2 \varphi^{n+1}}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 \varphi^{n+1/2}}{\partial x_1^2} \end{array} \right.$$

Si $\Omega = (0, 1)^2$ y se discretiza usando diferencias finitas, por ejemplo con N nodos interiores por dirección, convertimos (2) y (3) en dos sistemas de ecuaciones cuyas matrices son tridiagonales e idénticas. Por tanto, el algoritmo se reduce a resolver una serie de sistemas cuya matriz es siempre la misma y tridiagonal. El esquema resultante es el método de las direcciones alternadas.

Si el problema [4.3] se aproxima directamente por el método de diferencias finitas, se deduce una sucesión de sistemas lineales con la misma matriz, pero de orden $N^2 \times N^2$. El esquema de direcciones alternadas evita tener que resolver sistemas de gran talla.

4.1.1 Estudio de la convergencia y del comportamiento asintótico

En el caso trivial supondremos $H = \mathbb{R}^N$, $f = 0$, u_0 y $A \in \mathcal{M}_{N \times N}$ matriz simétrica y definida positiva. Entonces la solución exacta de

$$(E) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + Au = 0 & \text{en } (0, T) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad [4.4]$$

viene dada por

$$u(t) = e^{-tA}u_0$$

Sean $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_i \leq \dots \leq \lambda_N$ los autovalores de A y $\{w_i\}_{i=1}^N$ base de autovectores asociados. Entonces

$$u_i(t) = e^{-\lambda_i t}u_0 \quad \forall i = 1, \dots, N$$

con $u_0 = (u_{01}, u_{02}, \dots, u_{0N})^T$ y $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_N(t))^T$ están expresadas con respecto a la base $\{w_i\}_{i=1}^N$.

En el método de Peaceman-Rachford descrito en [4.2] tomando $f = 0$, $A_1 = \alpha A$ y $A_2 = \beta A$ con $\alpha + \beta = 1$ y $0 < \alpha, \beta < 1$, también podemos escribir [4.2] como

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \quad u^0 = u_0 \\ \text{Dados } n \geq 0 \text{ y } u^n, \text{ calculamos } u^{n+1/2} \text{ y luego } u^{n+1} \\ (2) \quad u^{n+1/2} + \alpha \frac{\Delta t}{2} Au^{n+1/2} = u^n - \beta \frac{\Delta t}{2} Au^n \\ (3) \quad u^{n+1} + \beta \frac{\Delta t}{2} Au^{n+1} = u^{n+1/2} - \alpha \frac{\Delta t}{2} Au^{n+1/2} \end{array} \right. \quad [4.5]$$

donde (2) y (3) son sistemas de ecuaciones, con matrices $\mathbf{I} + \alpha \frac{\Delta t}{2} A$ y $\mathbf{I} + \beta \frac{\Delta t}{2} A$, respectivamente, las cuales, se pueden factorizar utilizando el método de Choleski para los dos sistemas. Pero tomaremos $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ para tener así la misma matriz para ambos sistemas. Se deduce entonces que

$$u^{n+1} = \left(\mathbf{I} + \frac{\Delta t}{4} A \right)^{-1} \left(\mathbf{I} - \frac{\Delta t}{4} A \right) \left(\mathbf{I} + \frac{\Delta t}{4} A \right)^{-1} \left(\mathbf{I} - \frac{\Delta t}{4} A \right) u^n;$$

puesto que todas estas matrices conmutan, podemos escribir que

$$u^{n+1} = \left(\mathbf{I} + \frac{\Delta t}{4} A \right)^{-2} \left(\mathbf{I} - \frac{\Delta t}{4} A \right)^2 u^n.$$

Finalmente,

$$\boxed{u^n = \left(\mathbf{I} + \frac{\Delta t}{4} A \right)^{-2n} \left(\mathbf{I} - \frac{\Delta t}{4} A \right)^{2n} u^0} \quad [4.6]$$

Si $T > 0$ es fijo, con $T = n\Delta t$, entonces $\Delta t \rightarrow 0$ equivale a $n \rightarrow +\infty$.

Veamos que la sucesión u^n que hemos definido es convergente. Si escribimos [4.6] en la base $\{w_i\}_{i=1}^N$ tenemos

$$u_i^n = \left(\frac{1 - \frac{\Delta t}{4} \lambda_i}{1 + \frac{\Delta t}{4} \lambda_i} \right)^{2n} u_{i0}, \quad 1 \leq i \leq N. \quad [4.7]$$

Si definimos la función

$$R(x) = \left(\frac{1 - \frac{x}{4}}{1 + \frac{x}{4}} \right)^2 = 1 - x + \frac{x^2}{2} + x^3 O(1) = e^{-x} + x^3 O(1)$$

tenemos de [4.7] que

$$\begin{aligned} u_i^n &= (R(\lambda_i \Delta t))^n u_{i0} = \left(e^{-\lambda_i \Delta t} + (\lambda_i \Delta t)^3 O(1) \right)^n u_{i0} = \\ &= e^{-\lambda_i n \Delta t} \left(1 + e^{\lambda_i \Delta t} (\lambda_i \Delta t)^3 O(1) \right)^n u_{i0} = \\ &= e^{-\lambda_i T} \left(1 + (\Delta t)^2 O(\Delta t) \right)^n u_{i0}, \quad 1 \leq i \leq N, \end{aligned}$$

luego

$$|u_i^n - u_i(T)| = O(|\Delta t|^2),$$

es decir, el esquema es de segundo orden.

4.1.2 Elección del Δt óptimo

Queremos encontrar el Δt_{opt} para el cual la solución estacionaria $u = 0$, se alcance lo más rápidamente posible. En la figura 4.1 se han representado, para cada i , las curvas $|R(\Delta t \lambda_i)|$

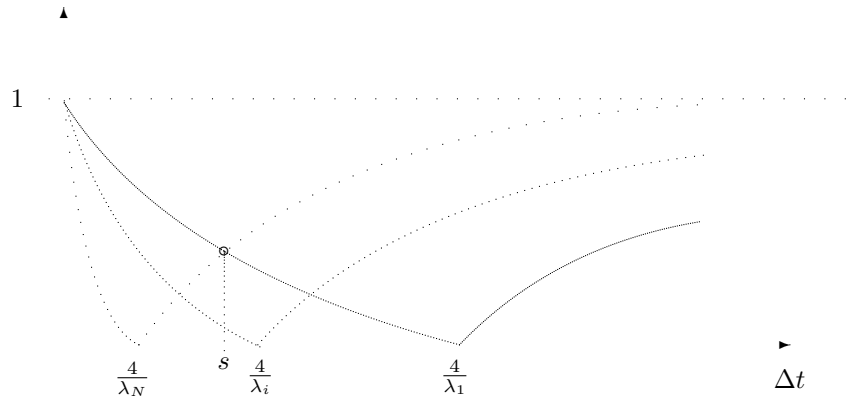


Figura 4.1

Se deduce entonces que

$$\Delta t_{\text{opt}} = \min_{\Delta t} \left(\sup_i \left| \frac{1 - \frac{\Delta t}{4} \lambda_i}{1 + \frac{\Delta t}{4} \lambda_i} \right| \right) = s = \frac{4}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_N}} \quad [4.8]$$

Para este Δt_{opt} se tiene de [4.7] que

$$\|u^n - u\| \leq \left(\frac{\sqrt{\frac{\lambda_N}{\lambda_1}} - 1}{\sqrt{\frac{\lambda_N}{\lambda_1}} + 1} \right)^{2n} \|u_0 - u\| \quad [4.9]$$

Observación:

Si $\lambda_N \gg \lambda_1$ el esquema no está bien adaptado.

4.2 Descomposición del operador usando θ -esquemas

Seguimos suponiendo $H = \mathbb{R}^N$, $f = 0$, u_0 y $A \in \mathcal{M}_{N \times N}$ matriz simétrica y definida positiva. Y queremos resolver el mismo problema

$$(E) \begin{cases} \frac{du}{dt} + A(u) = 0 & \text{en } (0, T) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad [4.10]$$

cuya solución exacta es

$$u(t) = e^{-tA}u_0$$

4.2.1 Descripción del método

La partición del intervalo es ahora

$$n\Delta t \qquad (n + \theta)\Delta t \qquad (n + 1 - \theta)\Delta t \qquad (n + 1)\Delta t$$

y

$$A_1 = \alpha A \qquad \text{y} \qquad A_2 = \beta A$$

con

$$0 < \alpha, \beta < 1 \qquad \text{y} \qquad \alpha + \beta = 1.$$

Además consideramos

$$\theta \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \qquad \text{y} \qquad \theta' = 1 - 2\theta.$$

El θ -esquema consiste en

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \quad u^0 = u_0 \\ \text{Dados } n \geq 0 \text{ y } u^n, \text{ calculamos } u^{n+1} \\ (2) \quad \frac{u^{n+\theta} - u^n}{\theta\Delta t} + A_1(u^{n+\theta}) + A_2(u^n) = f^{n+\theta} \\ (3) \quad \frac{u^{n+1-\theta} - u^{n+\theta}}{(1-2\theta)\Delta t} + A_1(u^{n+\theta}) + A_2(u^{n+1-\theta}) = f^{n+1-\theta} \\ (4) \quad \frac{u^{n+1} - u^{n+1-\theta}}{\theta\Delta t} + A_1(u^{n+1}) + A_2(u^{n+1-\theta}) = f^{n+1} \end{array} \right. \quad [4.11]$$

4.2.2 Estudio de la estabilidad, convergencia y comportamiento asintótico

Ahora tenemos que

$$u^{n+1} = \begin{aligned} & (\mathbf{I} + \alpha\theta\Delta tA)^{-1} (\mathbf{I} - \beta\theta\Delta tA) \\ & (\mathbf{I} + \beta\theta'\Delta tA)^{-1} (\mathbf{I} - \alpha\theta'\Delta tA) \\ & (\mathbf{I} + \alpha\theta\Delta tA)^{-1} (\mathbf{I} - \beta\theta\Delta tA) u^n \end{aligned}$$

y si hacemos la diagonalización de la matriz, tenemos que, respecto de una base de autovectores podemos escribir cada componente como

$$u_i^{n+1} = \frac{(1 - \beta\theta\Delta t\lambda_i)^2 (1 - \alpha\theta'\Delta t\lambda_i)}{(1 + \alpha\theta\Delta t\lambda_i)^2 (1 + \beta\theta'\Delta t\lambda_i)} u_i^n$$

Definimos ahora la función

$$R(x) = \frac{(1 - \beta\theta x)^2 (1 - \alpha\theta' x)}{(1 + \alpha\theta x)^2 (1 + \beta\theta' x)}$$

asociada a este esquema, cuya representación gráfica es

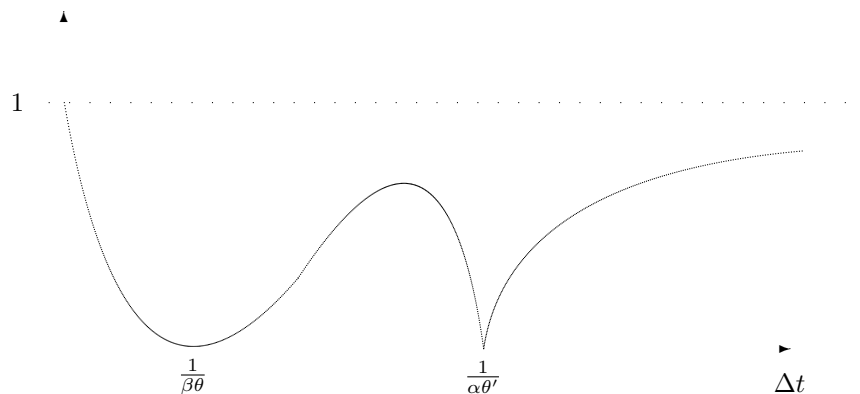


Figura 4.2

Observaciones:

1. Puesto que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |R(x)| = \frac{\beta}{\alpha},$$

si queremos que el esquema sea estable debemos tomar

$$\boxed{\beta \leq \alpha}$$

2. En cuanto a la precisión del esquema, si observamos que

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} + x^3 O(1)$$

$$R(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} \cdot \{1 + (\beta^2 - \alpha^2)(2\theta^2 - 4\theta + 1)\} + x^3 O(1)$$

podemos decir que el esquema es en general de orden 1, y de orden 2 si $\alpha = \beta$ y/o $\theta = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. Si $\alpha\theta = \beta\theta'$ entonces sólo hay que hacer una descomposición de Choleski en cada iteración.

Por tanto vamos a considerar

$$\theta = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{y} \quad \alpha\theta = \beta\theta',$$

con lo cual

$$\alpha = \frac{1 - 2\theta}{1 - \theta}, \quad \beta = \frac{\theta}{1 - \theta} \quad \text{y} \quad \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$$

Capítulo 5

Método de Descomposición de Operadores aplicado a las ecuaciones de Navier-Stokes

Veamos ahora la aplicación del esquema de Peaceman-Rachford y del θ -esquema a las ecuaciones de Navier-Stokes y estudiemos detalladamente como resolver las dificultades que aparecen.

5.1 Esquema de Peaceman-Rachford

Consideremos el problema de Navier-Stokes (véase la sección 3.1.2)

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} - \nu \Delta \vec{u} + \nabla p = \vec{f} & \text{en } \Omega \times (0, T) \\ \nabla \cdot \vec{u} = 0 & \text{en } \Omega \times (0, T) \\ \vec{u} = \vec{g} & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T) \\ \vec{u}(x, 0) = \vec{u}_0(x) & \text{en } \Omega \end{array} \right. \quad [5.1]$$

Por comodidad, notaremos \vec{u} , \vec{f} , \vec{g} y \vec{u}_0 como u , f , g y u_0 .

En este caso el operador a descomponer es

$$A(u, p) = (u \cdot \nabla)u - \nu \Delta u + \nabla p$$

La descomposición del operador que hacemos es la siguiente

$$\begin{aligned} A_1(u, p) &= -\frac{\nu}{2} \Delta u + \nabla p \\ A_2(u, p) &= -\frac{\nu}{2} \Delta u + (u \cdot \nabla)u \end{aligned}$$

de tal manera que al aplicar el esquema obtenemos

$$(1) \quad u^0 = u_0$$

Dados $n \geq 0$ y u^n . Calculemos $u^{n+1/2}$ y luego u^{n+1} mediante

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{u^{n+1/2} - u^n}{\Delta t/2} - \frac{\nu}{2} \Delta u^{n+1/2} + \nabla p^{n+1/2} = f^{n+1/2} + \frac{\nu}{2} \Delta u^n - (u^n \cdot \nabla) u^n \\ \nabla \cdot u^{n+1/2} = 0 \\ u^{n+1/2} \Big|_{\partial\Omega} = g^{n+1/2} \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\Delta t/2} - \frac{\nu}{2} \Delta u^{n+1} + (u^{n+1} \cdot \nabla) u^{n+1} = f^{n+1} + \frac{\nu}{2} \Delta u^{n+1/2} - \nabla p^{n+1/2} \\ u^{n+1} \Big|_{\partial\Omega} = g^{n+1} \end{cases}$$

Observaciones:

1. u^{n+1} no satisface la condición de incompresibilidad nula, no obstante, si el esquema converge, es de esperar que $\nabla \cdot u^{n+1}$ sea tan pequeño como lo es Δt .
2. Podemos cambiar (3) por

$$(3') \quad \begin{cases} \frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\Delta t/2} - \frac{\nu}{2} \Delta u^{n+1} + (u^{n+1/2} \cdot \nabla) u^{n+1} = f^{n+1} + \frac{\nu}{2} \Delta u^{n+1/2} - \nabla p^{n+1/2} \\ u^{n+1} \Big|_{\partial\Omega} = g^{n+1} \end{cases}$$

obteniendo así un problema lineal en u^{n+1} , pero con la dificultad de tener que resolver un problema elíptico cuyo operador cambia en cada etapa.

3. En la práctica ya no se utiliza este esquema, se utiliza el θ -esquema.

5.2 El θ -esquema

La descomposición del operador viene dada ahora por

$$\begin{aligned} A_1(u, p) &= -\alpha\nu\Delta u + \nabla p \\ A_2(u, p) &= -\beta\nu\Delta u + (u \cdot \nabla)u \end{aligned}$$

con $0 < \alpha, \beta < 1$ y $\alpha + \beta = 1$.

Si aplicamos el θ -esquema [4.11] obtendremos

$$(1) \quad u^0 = u_0$$

Dados $n \geq 0$ y u^n :

Calculamos $(u^{n+\theta}, p^{n+\theta})$ tal que

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{u^{n+\theta} - u^n}{\theta\Delta t} - \alpha\nu\Delta u^{n+\theta} + \nabla p^{n+\theta} = f^{n+\theta} + \beta\nu\Delta u^n - (u^n \cdot \nabla)u^n \\ \nabla \cdot u^{n+\theta} = 0 \\ u^{n+\theta}|_{\partial\Omega} = g^{n+\theta} \end{cases}$$

Calculamos ahora $u^{n+1-\theta}$ tal que

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{u^{n+1-\theta} - u^{n+\theta}}{(1-2\theta)\Delta t} - \beta\nu\Delta u^{n+1-\theta} + (u^{n+1-\theta} \cdot \nabla)u^{n+1-\theta} = f^{n+1-\theta} + \alpha\nu\Delta u^{n+\theta} - \nabla p^{n+\theta} \\ u^{n+1-\theta}|_{\partial\Omega} = g^{n+1-\theta} \end{cases}$$

Calculamos finalmente (u^{n+1}, p^{n+1}) tal que

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{u^{n+1} - u^{n+1-\theta}}{\theta\Delta t} - \alpha\nu\Delta u^{n+1} + \nabla p^{n+1} = f^{n+1} + \beta\nu\Delta u^{n+1-\theta} - (u^{n+1-\theta} \cdot \nabla)u^{n+1-\theta} \\ \nabla \cdot u^{n+1} = 0 \\ u^{n+1}|_{\partial\Omega} = g^{n+1} \end{cases}$$

Observación:

Los problemas (2) y (4) coinciden con un problema del tipo

$$(S) \begin{cases} \alpha u - \nu \Delta u + \nabla p = f & \text{en } \Omega \\ \nabla \cdot u = 0 & \text{en } \Omega \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

mientras que (3) es un problema no lineal del tipo

$$(NL) \begin{cases} \alpha u - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla)u = f & \text{en } \Omega \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

Luego dediquémonos al estudio de los problemas (S) y (NL).

5.3 Resolución del problema de Stokes (S)

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $g = 0$.¹

$$(S) \begin{cases} \alpha u - \nu \Delta u + \nabla p = f & \text{en } \Omega \\ \nabla \cdot u = 0 & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

con $f \in H^{-1}(\Omega)^N$, $\alpha \geq 0$, $\nu > 0$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio acotado con $\partial\Omega$ suficientemente regular.

5.3.1 Formulación variacional de (S)

Consideremos los espacios de funciones \mathcal{V}_0 y V_0 definidos por

$$\mathcal{V}_0 = \left\{ v \in \mathcal{D}(\Omega)^N \mid \nabla \cdot v = 0 \right\}, \quad V_0 = \left\{ v \in H_0^1(\Omega)^N \mid \nabla \cdot v = 0 \right\},$$

V_0 es un espacio de Hilbert con el producto escalar habitual en $H_0^1(\Omega)^N$. Apliquemos la primera ecuación (como distribución) a $\varphi \in \mathcal{V}_0$

$$\langle \alpha u, \varphi \rangle - \nu \langle \Delta u, \varphi \rangle + \langle \nabla p, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle$$

es decir

$$\alpha \langle u, \varphi \rangle + \nu \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle - \langle p, \nabla \cdot \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle$$

¹ya que existe $G \in H^1(\Omega)^N$ tal que $G|_{\partial\Omega} = g$

o bien

$$\alpha \int_{\Omega} u \varphi \, dx + \nu \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi \, dx = \int_{\Omega} f \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{V}_0$$

Por densidad y continuidad, se deduce la formulación variacional de (S)

$$(SV) \begin{cases} \text{Hallar } u \in V_0 \text{ tal que} \\ \alpha \int_{\Omega} u \varphi \, dx + \nu \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi \, dx = \int_{\Omega} f \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in V_0 \end{cases}$$

Recíprocamente, si $u \in V_0$ cumple (SV), entonces gracias al lema de De Rham existe $p \in L^2(\Omega)$ tal que el par (u, p) es solución de (S). Este resultado puede enunciarse de la siguiente manera

TEOREMA 5.1

Sean $\nu > 0$ y $\alpha > -\lambda_1 \nu$, donde λ_1 es el primer autovalor del operador $-\Delta : H_0^1(\Omega)^N \mapsto H^{-1}(\Omega)^N$. Entonces para cada $f \in H^{-1}(\Omega)^N$ existe una única $u \in V_0$ solución de (SV). Además, existe un única $p \in L_0^2(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) \mid \int_{\Omega} v \, dx = 0 \right\}$ tal que el par (u, p) satisface el problema (S). La aplicación

$$f \in H^{-1}(\Omega)^N \mapsto (u, p) \in V_0 \times L_0^2(\Omega)$$

es lineal y continua, esto es, existe una constante $C = C(\nu, \Omega)$ tal que

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)^N} + \|p\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{H^{-1}(\Omega)^N}$$

Demostración: véase Girault-Raviart [6]

□

5.3.2 Descripción de un método iterativo para resolver (S)

Dadas $f \in H^{-1}(\Omega)^N$ y $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)^N$ tal que $\int_{\Omega} g n \, dS = 0$. El algoritmo consiste básicamente en primero suponer conocida la presión p^n para calcular u^n y luego calcular la nueva p^{n+1} a partir de u^n .

Para calcular u necesitaremos resolver un problema de la forma

$$\begin{cases} \alpha u - \nu \Delta u = f - \nabla p \\ u|_{\partial\Omega} = g \end{cases}$$

que es un problema de Dirichlet.

Apliquémoslo a la resolución de (S)

$$(1) \quad p^0 \in L_0^2$$

Dados $n \geq 0$ y p^n , calculamos $u^n \in H^1(\Omega)^N$

$$(2) \quad \begin{cases} \alpha u^n - \nu \Delta u^n = f - \nabla p^n \\ u^n|_{\partial\Omega} = g \end{cases}$$

Calculamos ahora $p^{n+1} \in L_0^2(\Omega)$

$$(3) \quad p^{n+1} = p^n - \rho \nabla \cdot u^n, \quad \rho > 0$$

Observación:

La condición de incompresibilidad $\nabla \cdot u = 0$ no aparece explícitamente en el algoritmo, pero si éste es convergente hacia (u, p) , (por (3)) verificará

$$p = p - \rho \nabla \cdot u \quad \implies \quad \nabla \cdot u = 0$$

Estudiemos la convergencia del algoritmo (1)-(3). Para ello se enuncia previamente un resultado auxiliar cuya demostración puede consultarse en [6].

LEMA 5.2 (Magens-Stampacchia)

Sea $\Omega \in \mathbb{R}^N$ un abierto, acotado y conexo. Entonces, existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|q\|_{0,2} \leq C \|\nabla q\|_{-1,2}$$

TEOREMA 5.3

Supongamos que $0 < \rho < \frac{2\nu}{N}$. Entonces $u^n \longrightarrow u$ en $H^1(\Omega)^N$ y $p^n \longrightarrow p$ en $L_0^2(\Omega)$, donde el par (u, p) es solución de (S).

Demostración.

Sean $\bar{u}^n = u^n - u$, $\bar{p}^n = p^n - p$.

Entonces \bar{u}^n es solución de

$$\begin{cases} \text{Hallar } \bar{u}^n \in H_0^1(\Omega)^N \text{ tal que} \\ \alpha \int_{\Omega} \bar{u}^n \cdot v \, dx + \nu \int_{\Omega} \nabla \bar{u}^n \nabla v \, dx = \int_{\Omega} \bar{p}^n \nabla \cdot v \, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)^N \end{cases}$$

y, por otra parte,

$$\bar{p}^{n+1} = \bar{p}^n - \rho \nabla \cdot \bar{u}^n. \quad [5.2]$$

Como $p, p_0 \in L_0^2(\Omega)$, se tiene $p^n \in L_0^2(\Omega)$, $\forall n \geq 0$, pues $\nabla \cdot u^n \in L_0^2(\Omega)$; luego también es $\bar{p}^n \in L_0^2(\Omega)$, $\forall n \geq 0$. Así, de [5.2], se deduce

$$\|\bar{p}^{n+1}\|_{0,2}^2 = \|\bar{p}^n\|_{0,2}^2 - 2\rho \int_{\Omega} \nabla \cdot \bar{u}^n \bar{p}^n dx + \rho^2 \|\nabla \cdot \bar{u}^n\|_{0,2}^2,$$

es decir

$$\begin{aligned} \|\bar{p}^n\|_{0,2}^2 - \|\bar{p}^{n+1}\|_{0,2}^2 &= 2\rho \int_{\Omega} \nabla \cdot \bar{u}^n \bar{p}^n dx - \rho^2 \|\nabla \cdot \bar{u}^n\|_{0,2}^2 = \\ &= 2\rho \left(\alpha \|\bar{u}^n\|_{0,2}^2 + \nu \|\nabla \bar{u}^n\|_{0,2}^2 \right) - \rho^2 \|\nabla \cdot \bar{u}^n\|_{0,2}^2 \end{aligned} \quad [5.3]$$

Por otro lado, si $v \in H^1(\Omega)$ es

$$\|\nabla \cdot v\|_{0,2}^2 \leq N \|\nabla v\|_{0,2}^2 \leq \frac{N}{\nu} \left(\alpha \int_{\Omega} |v|^2 dx + \nu \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \right),$$

consecuentemente

$$\|\bar{p}^n\|_{0,2}^2 - \|\bar{p}^{n+1}\|_{0,2}^2 \geq \rho \left(2 - \rho \frac{N}{\nu} \right) \left(\alpha \int_{\Omega} |\bar{u}^n|^2 dx + \nu \int_{\Omega} |\nabla \bar{u}^n|^2 dx \right) \quad [5.4]$$

Por hipótesis $0 < \rho < \frac{2\nu}{N}$, de donde $\rho \left(2 - \rho \frac{N}{\nu} \right) > 0$, es decir,

$$\|\bar{p}^n\|_{0,2}^2 - \|\bar{p}^{n+1}\|_{0,2}^2 \geq \rho \left(2 - \rho \frac{N}{\nu} \right) \left(\alpha \int_{\Omega} |\bar{u}^n|^2 dx + \nu \int_{\Omega} |\nabla \bar{u}^n|^2 dx \right) > 0. \quad [5.5]$$

Luego $\|\bar{p}^n\|_{0,2}^2$ es monótona decreciente y acotada inferiormente por cero. Así $\|\bar{p}^n\|_{0,2}^2 \longrightarrow \tau$. Volviendo otra vez a [5.5], se sigue que

$$\alpha \int_{\Omega} |\bar{u}^n|^2 dx + \nu \int_{\Omega} |\nabla \bar{u}^n|^2 dx \longrightarrow 0, \quad [5.6]$$

es decir, $u^n \longrightarrow u$ en $H^1(\Omega)^N$ -fuerte.

Veamos ahora la convergencia de \bar{p}^n a cero. Sabemos que

$$\alpha u^n - \nu \Delta u^n = f - \nabla p^n$$

y que

$$\alpha u - \nu \Delta u = f - \nabla p, \text{ en } H^{-1}(\Omega)^N.$$

Restando las dos ecuaciones

$$\alpha(u^n - u) - \nu \Delta(u^n - u) = -\nabla(p^n - p), \text{ en } H^{-1}(\Omega)^N$$

y como $(u^n - u) \longrightarrow 0$ fuerte en $H^1(\Omega)$, se sigue

$$\alpha(u^n - u) - \nu \Delta(u^n - u) \longrightarrow 0 \quad \text{fuerte en } H^{-1}(\Omega)^N,$$

con lo cual

$$\nabla(p^n - p) \longrightarrow 0 \text{ fuerte en } H^{-1}(\Omega)^N.$$

Aplicando ahora el lema 5.2, se deduce finalmente

$$p^n - p \longrightarrow 0 \text{ fuerte en } L_0^2(\Omega).$$

□

Observaciones:

1. La convergencia es fuerte en $H_0^1(\Omega)^N \times L_0^2(\Omega)$.
2. Se tiene la convergencia $\forall p^0 \in L_0^2(\Omega)$.
3. En la práctica generalmente se escoge $\rho = \frac{\nu}{N}$.
4. Se puede tomar ρ que dependa de n y que sea la elección óptima en cada etapa.

5.3.3 Resolución de (S) usando el método del gradiente conjugado

Queremos resolver el problema de Stokes estacionario

$$(S) \begin{cases} \alpha u - \nu \Delta u + \nabla p = f & \text{en } \Omega \\ \nabla \cdot u = 0 & \text{en } \Omega \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

con $f \in H^{-1}(\Omega)^N$ y $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)^N$ tal que $\int_{\partial\Omega} g \, ndS = 0$.

Lo que vamos a hacer es construir un método iterativo sobre p , de tal manera que (S) pueda formularse como un problema variacional sobre el espacio $L_0^2(\Omega) = \left\{ q \in L^2(\Omega) \mid \int_{\Omega} q \, dx = 0 \right\}$.

Definamos el operador

$$\begin{aligned} A : L_0^2(\Omega) &\longmapsto L_0^2(\Omega) \\ q &\longmapsto Aq = \nabla \cdot u_q \end{aligned} \tag{5.7}$$

donde u_q es la única solución del problema lineal

$$\begin{cases} \alpha u_q - \nu \Delta u_q = -\nabla q & \text{en } \Omega \\ u_q = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{5.8}$$

cuya formulación variacional es

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } u_q \in H_0^1(\Omega)^N \text{ tal que} \\ \alpha \int_{\Omega} u_q v \, dx + \nu \int_{\Omega} \nabla u_q \nabla v \, dx = \int_{\Omega} q \nabla \cdot v \, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)^N. \end{array} \right. \quad [5.9]$$

Observación:

Dado que

$$\int_{\Omega} Aq \, dx = \int_{\Omega} \nabla \cdot u_q = \int_{\partial\Omega} u_q \cdot \vec{n} \, d\gamma = 0,$$

el operador A realmente aplica $L_0^2(\Omega)$ en $L_0^2(\Omega)$

Definimos entonces $a : L_0^2(\Omega) \times L_0^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$a(p, q) = \int_{\Omega} Apq \, dx = \int_{\Omega} \nabla \cdot u_p q \, dx, \quad \forall p, q \in L_0^2(\Omega)$$

PROPOSICIÓN 5.4

a es bilineal, continua y simétrica sobre $L_0^2(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$, y $L_0^2(\Omega)$ -elíptica.

Demostración.

1. Bilinealidad. Debido a la linealidad del problema [5.8] y a la definición de a .
2. Continuidad.

$$|a(p, q)| \leq \|q\|_{0,2} \|Ap\|_{0,2} = \|q\|_{0,2} \|\nabla \cdot u_p\|_{0,2} \leq C_1 \|q\|_{0,2} \|u_p\|_{1,2} \leq C_2 \|q\|_{0,2} \|p\|_{0,2}$$

3. Simetría.

$$a(p, q) = \int_{\Omega} Apq \, dx = \int_{\Omega} \nabla \cdot u_p q \, dx =$$

puesto que u_p es solución de [5.9] asociada a p tenemos

$$= \alpha \int_{\Omega} u_q u_p \, dx + \nu \int_{\Omega} \nabla u_q \nabla u_p \, dx =$$

a su vez, u_q es solución de [5.9] asociada a q , luego

$$= \int_{\Omega} \nabla \cdot u_q p \, dx = a(q, p)$$

4. $L_0^2(\Omega)$ -elipticidad.

Sabemos que

$$a(p, p) = \alpha \int_{\Omega} |u_q|^2 \, dx + \nu \int_{\Omega} |\nabla u_q|^2 \, dx = \|u_q\|_{1,2}^2.$$

Consideremos el problema

$$\begin{cases} (\alpha \mathbf{I} - \nu \Delta) u_q = -\nabla q & \text{en } \Omega \\ u_q = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

Puesto que el operador $(\alpha \mathbf{I} - \nu \Delta)$ es un isomorfismo entre $H_0^1(\Omega)^N$ y $H^{-1}(\Omega)^N$, entonces

$$\exists C \text{ tal que } \|u_q\|_{1,2}^2 \geq C \|\nabla q\|_{-1,2}^2 \geq C' \|q\|_{0,2}^2.$$

la última desigualdad debida al lema 5.2.

COROLARIO 5.5 *A es un automorfismo de $L_0^2(\Omega)$.*

Volvamos ahora a considerar el sistema (3), del cual sabemos admite una única solución $(u, p) \in H^1(\Omega)^N \times L_0^2(\Omega)$. Construyamos algoritmos para aproximar esta solución.

Sea $u_0 \in H^1(\Omega)^N$ la única solución de

$$\begin{cases} \alpha u_0 - \nu \Delta u_0 = f & \text{en } \Omega \\ u_0 = g & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

Si definimos $\bar{u} = u - u_0$ tenemos que

$$\begin{cases} \alpha \bar{u} - \nu \Delta \bar{u} = -\nabla p & \text{en } \Omega \\ \bar{u} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Por lo que se deduce de la definición del operador A que

$$\nabla \cdot \bar{u} = Ap,$$

y como $\nabla \cdot u = 0$, lo que nos queda es la ecuación

$$(E) \quad \boxed{Ap = -\nabla \cdot u_0}$$

que es la que debemos resolver, pues una vez conocida p es fácil calcular u .

Observaciones:

1. El cálculo de u_0 consiste en resolver un problema de Dirichlet para el operador $\alpha \mathbf{I} - \nu \Delta$.

2. Como $A : L_0^2(\Omega) \mapsto L_0^2(\Omega)$ es un automorfismo, entonces (E) tiene una única solución.
3. La dificultad se encuentra en que no se conoce explícitamente el operador A .

Si hacemos la formulación variacional de (E) tenemos

$$\begin{cases} \text{Hallar } p \in L_0^2(\Omega) \\ a(p, q) = - \int_{\Omega} \nabla \cdot u_0 q \, dx, \quad \forall q \in L_0^2(\Omega) \end{cases}$$

Para resolver este problema usaremos el algoritmo que se describe a continuación.

Algoritmo del Gradiente Conjugado

Queremos resolver

$$\begin{cases} \text{Hallar } p \in L_0^2(\Omega) \\ \int_{\Omega} Ap q \, dx = - \int_{\Omega} \nabla \cdot u_0 q \, dx, \quad \forall q \in L_0^2(\Omega) \end{cases}$$

$$(1) \quad p^0 \in L_0^2(\Omega)$$

$$(2) \quad \begin{cases} \alpha u^0 - \nu \Delta u^0 = f - \nabla p^0 \\ u^0|_{\partial\Omega} = g \end{cases}$$

$$(3) \quad g^0 = \nabla \cdot u^0$$

$$(4) \quad w^0 = g^0$$

Dados $n \geq 0$, u^n , p^n , g^n y w^n

Vamos a calcular $u^{n+1} \in H^1(\Omega)^N$ y p^{n+1} , g^{n+1} , $w^{n+1} \in L_0^2(\Omega)$:

$$(5) \quad \begin{cases} \chi^n \in H_0^1(\Omega)^N \\ \alpha \chi^n - \nu \Delta \chi^n = -\nabla w^n \end{cases}$$

$$(6) \quad \rho_n = \frac{\int_{\Omega} |g^n|^2 dx}{\int_{\Omega} \nabla \chi^n w^n dx}$$

$$(7) \quad p^{n+1} = p^n - \rho_n w^n$$

$$(8) \quad u^{n+1} = u^n - \rho_n \chi^n$$

$$(9) \quad g^{n+1} = g^n - \rho_n \nabla \cdot \chi^n$$

$$(10) \quad \gamma_n = \frac{\|g^{n+1}\|^2}{\|g^n\|^2}$$

$$(11) \quad w^{n+1} = g^{n+1} + \gamma_n w^n$$

$n = n + 1$ y volver a (5).

El algoritmo se detendrá si se cumple alguna condición, que habrá de ser introducida. Por ejemplo, si $\|\chi^n\|_{1,2}$ es pequeña.

5.4 Estudio y Resolución del problema (NL)

Queremos estudiar el problema

$$(NL) \begin{cases} \alpha u - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla)u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

con $f \in (H^{-1}(\Omega))^N$ y $N \leq 4$.

En lugar de estudiar (NL), vamos a considerar el problema modificado que se obtiene al añadir el término $\frac{1}{2}(\nabla \cdot u)u$ a la ecuación diferencial. El problema queda

$$\begin{cases} \alpha u - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \frac{1}{2}(\nabla \cdot u)u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad [5.10]$$

Naturalmente, los problemas [5.10] y (NL) no coinciden, sin embargo, los dos problemas forman parte de un algoritmo en el que es de esperar que $\nabla \cdot u$ sea pequeña. Por consiguiente, es razonable suponer que la “pequeña perturbación” que supone la adición del término $\frac{1}{2}(\nabla \cdot u)u$ en [5.10] tenga una influencia prácticamente despreciable. Además, al pasar al problema discreto ya no se tiene la propiedad

$$b(u, v, v) = 0, \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega)^N.$$

Lo que haremos será considerar una nueva

$$\tilde{b}(u, v, w) = \frac{1}{2}(b(u, v, w) - b(u, w, v))$$

que en continuo tiene las siguientes propiedades:

1. $\tilde{b}(u, v, w) = b(u, v, w)$, $\forall u, v, w \in H_0^1(\Omega)^N$, $\nabla \cdot u = 0$.
2. $\tilde{b}(u, v, v) = 0$.

En la versión discreta de la formulación variacional aparece el término $\tilde{b}(u_h, u_h, v_h)$. Dado que en general $\nabla \cdot u_h \neq 0$, tenemos

$$\begin{aligned} \tilde{b}(u_h, v_h, w_h) &= \frac{1}{2}(b(u_h, v_h, w_h) - b(u_h, w_h, v_h)) = \\ &= \frac{1}{2}(b(u_h, v_h, w_h) + b(u_h, v_h, w_h) + (\nabla \cdot u_h) u_h v_h) = \\ &= b(u_h, v_h, w_h) + \frac{1}{2}(\nabla \cdot u_h) u_h v_h \end{aligned}$$

Esto sugiere que se añada el término $\frac{1}{2}(\nabla \cdot u)u$.

5.4.1 Formulación variacional (NLV)

Si multiplicamos la ecuación de [5.10] por funciones $v \in \mathcal{D}(\Omega)^N$ e integramos en Ω tenemos

$$\alpha \int_{\Omega} uv \, dx - \nu \int_{\Omega} \Delta uv \, dx + \int_{\Omega} (u \cdot \nabla)u v \, dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \cdot u)u v \, dx = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega)^N,$$

de donde

$$\alpha \int_{\Omega} uv \, dx + \nu \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx + \int_{\Omega} (u \cdot \nabla)u v \, dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \cdot u)u v \, dx = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega)^N.$$

Por densidad de $\mathcal{D}(\Omega)^N$ en $H_0^1(\Omega)^N$ podemos pasar al límite sin ningun problema en la parte lineal, y en la parte no lineal podemos aplicar la inyección continua $H_0^1(\Omega)^N \hookrightarrow L^4(\Omega)^N$ por la cual $\frac{1}{2}(\nabla \cdot u)u \in L^{\frac{4}{3}}(\Omega)^N$ y $(u \cdot \nabla)u \in L^{\frac{4}{3}}(\Omega)^N$. Obteniendo así el problema

$$(NLV) \begin{cases} \text{Hallar } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tal que} \\ \alpha \int_{\Omega} uv \, dx + \nu \int_{\Omega} \nabla \cdot u \nabla \cdot v \, dx + \int_{\Omega} (u \cdot \nabla)u v \, dx + \\ + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \cdot u)u v \, dx = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

PROPOSICIÓN 5.6

El problema (NLV) admite al menos una solución.

Demostración

Vamos a aplicar una técnica de punto fijo usando el teorema de Schauder.

1. Construyamos una aplicación

$$\begin{aligned} T : H_0^1(\Omega) &\longmapsto H_0^1(\Omega) \\ w &\longmapsto u = u(w) = T(w) \end{aligned} \tag{5.11}$$

donde u es solución del problema

$$(P)_w \begin{cases} \text{Hallar } u \in H_0^1(\Omega)^N \text{ tal que} \\ \alpha \int_{\Omega} uv \, dx + \nu \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx + \int_{\Omega} (w \cdot \nabla)u v \, dx + \\ + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \cdot w)u v \, dx = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)^N \end{cases}$$

es decir, fijado $w \in H_0^1(\Omega)^N$, lo que tenemos es un problema de la forma

$$(P)_w \begin{cases} \text{Hallar } u \in H_0^1(\Omega)^N \text{ tal que} \\ a_w(u, v) = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)^N \end{cases}$$

Podemos aplicar el teorema de Lax-Milgram, pues a_w es

(a) bilineal (evidente).

(b) continua sobre $H_0^1(\Omega)^N \times H_0^1(\Omega)^N$, pues la parte $\alpha \int_{\Omega} uv \, dx + \nu \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx$ es continua, y

$$\left| \int_{\Omega} (w \cdot \nabla) uv \, dx \right| = \left| \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} w_j \frac{\partial u}{\partial x_j} v_i \, dx \right| \leq$$

dado que $w_j \in L^4(\Omega)$, $\frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^2(\Omega)$ y $v_i \in L^4(\Omega)$,

$$\leq C \|u\|_{1,2} \left(\sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} |w_j v_i|^2 \, dx \right) \leq C' \|u\|_{1,2} \|w\|_{0,4} \|v\|_{0,4} \leq$$

como $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$,

$$\leq C'' \|w\|_{0,4} \|u\|_{1,2} \|v\|_{1,2}.$$

Además podemos acotar

$$\left| \int_{\Omega} (\nabla \cdot w) u v \, dx \right| \leq C \|w\|_{1,2} \|u\|_{0,4} \|v\|_{0,4} \leq C' \|w\|_{1,2} \|u\|_{1,2} \|v\|_{1,2}.$$

Luego $a_w(\cdot, \cdot)$ es continua sobre $H_0^1(\Omega)^N \times H_0^1(\Omega)^N$.

(c) $a_w(\cdot, \cdot)$ es $H_0^1(\Omega)^N$ -elíptica. En efecto,

$$a_w(v, v) = \underbrace{\alpha \int_{\Omega} |v|^2 \, dx + \nu \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx}_{\simeq \|v\|_{1,2}^2} + \int_{\Omega} (w \cdot \nabla) v v \, dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \cdot w) v v \, dx$$

Veamos que

$$\int_{\Omega} (w \cdot \nabla) v v \, dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \cdot w) v v \, dx = 0, \quad \forall w, v \in H_0^1(\Omega)^N \quad [5.12]$$

Vamos a demostrarlo en $\mathcal{D}(\Omega)^N$, por densidad y continuidad pasaremos a $H_0^1(\Omega)^N$.

Así, si $w, v \in \mathcal{D}(\Omega)^N$ tenemos

$$\int_{\Omega} (w \cdot \nabla) v v \, dx = \int_{\Omega} \sum_i \sum_j w_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_i \, dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_i \sum_j w_j \frac{\partial v_i^2}{\partial x_j} \, dx =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_i \sum_j v_i^2 \frac{\partial w_j}{\partial x_j} dx.$$

Por tanto,

$$\int_{\Omega} (w \cdot \nabla) v v dx = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_i v_i^2 \sum_j \frac{\partial w_j}{\partial x_j} dx = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \cdot w) |v|^2 dx.$$

Hemos probado así [5.12] y, por consiguiente, que $a_w(\cdot, \cdot)$ es $H_0^1(\Omega)^N$ -elíptica.

En definitiva, podemos usar el teorema de Lax-Milgram, que nos asegura la existencia y unicidad de solución de $(P)_w$ y, en consecuencia, T está bien definida.

2. Veamos ahora que T envía $H_0^1(\Omega)^N$ al interior de una bola cerrada de $H_0^1(\Omega)^N$. Pues, si $T(w) = u$, entonces

$$C' \|u_0\|_{1,2}^2 \leq a_w(u, u) = \langle f, u \rangle \leq \|f\|_* \|u\|_{0,2} \leq C \|f\|_* \|u\|_{1,2},$$

con lo cual

$$\|u\|_{1,2} \leq C'' \|f\|_*, \quad \forall w \in H_0^1(\Omega)^N.$$

3. Veamos por último que T es compacto.

Hay que probar que $\forall (w_n) \subset H_0^1(\Omega)^N$ tal que $w_n \rightharpoonup w$ débil en $H_0^1(\Omega)^N$ se tiene que $T(w_n) = u_n \rightharpoonup T(w) = u^*$ fuerte en $H_0^1(\Omega)^N$.

Sabemos que $\|u_n\| \leq C \|f\|_*$ y, por tanto, que

$$\exists (u_m) \subset (u_n) \text{ tal que } u_m \rightharpoonup u^* \text{ en } H_0^1(\Omega)^N \text{-débil.}$$

Por comodidad seguiremos notando (u_m) como (u_n) . Donde cada u_n es la solución del problema

$$(P)_w \begin{cases} \text{Hallar } u_n \in H_0^1(\Omega)^N \text{ tal que} \\ \alpha \int_{\Omega} u_n v dx + \nu \int_{\Omega} \nabla u_n \nabla v dx + \int_{\Omega} (w_n \cdot \nabla) u_n v dx + \\ \quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \cdot w_n) u_n v dx = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)^N \end{cases}$$

para cada w_n . Como $u_n \rightharpoonup u^*$ en $H_0^1(\Omega)^N$ -débil, y dado que $H_0^1(\Omega)^N \hookrightarrow L^4(\Omega)^N$ con continuidad, podemos deducir que $u_n \rightharpoonup u^*$ en $L^4(\Omega)^N$ -débil. Así,

$$\alpha \int_{\Omega} u_n v dx + \nu \int_{\Omega} \nabla u_n \nabla v dx \longrightarrow \alpha \int_{\Omega} u^* v dx + \nu \int_{\Omega} \nabla u^* \nabla v dx. \quad [5.13]$$

Por otra parte,

$$\int_{\Omega} (w_n \cdot \nabla) u_n v \, dx = \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} w_{nj} \frac{\partial u_{ni}}{\partial x_j} v_i \, dx. \quad [5.14]$$

Sea ahora $v_i \in \mathcal{D}(\Omega)$. Sabemos que

$$w_{nj} \longrightarrow w_j \text{ en } L^2(\Omega)\text{-fuerte}, \quad [5.15]$$

$$\frac{\partial u_{ni}}{\partial x_j} \longrightarrow \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} \text{ en } L^2(\Omega)\text{-débil}, \quad [5.16]$$

luego

$$w_{nj} v_i \longrightarrow w_j v_i \text{ en } L^2(\Omega)\text{-fuerte}. \quad [5.17]$$

De [5.16] y [5.17] se tiene que

$$\int_{\Omega} (w_n \cdot \nabla) u_n v \, dx \longrightarrow \int_{\Omega} (w \cdot \nabla) u^* v \, dx. \quad [5.18]$$

De igual modo se llega a

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \cdot w_n) u_n v \, dx \longrightarrow \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \cdot w) u^* v \, dx \quad [5.19]$$

Podemos deducir de [5.13], [5.18] y [5.19] que u^* es la solución del problema

$$\begin{cases} \text{Hallar } u^* \in H_0^1(\Omega)^N \text{ tal que} \\ \alpha \int_{\Omega} u^* v \, dx + \nu \int_{\Omega} \nabla u^* \nabla v \, dx + \int_{\Omega} (w \cdot \nabla) u^* v \, dx + \\ \quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \cdot w) u^* v \, dx = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega)^N, \end{cases}$$

es decir, $u^* = T(w) = u$.

Hemos llegado a que toda (u_m) , subsucesión de (u_n) , tiene el mismo punto de acumulación u . Por consiguiente, toda la sucesión converge a u en $H_0^1(\Omega)^N$ -débil.

Probemos por último que $u_n \longrightarrow u$ en $H_0^1(\Omega)^N$ -fuerte. Para ello sólo falta demostrar la convergencia de las normas, es decir, que $\|u_n\|_{1,2} \longrightarrow \|u\|_{1,2}$.

Sin más que tomar $v = u_n$ en (P_w) , se tiene

$$\alpha \int_{\Omega} |u_n|^2 \, dx + \nu \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 \, dx + 0 = \langle f, u_n \rangle,$$

y como $\langle f, u_n \rangle \longrightarrow \langle f, u \rangle$, se sigue que $u_n \longrightarrow u$ en $H_0^1(\Omega)^N$ -fuerte.

Esto concluye la demostración de que T es compacto.

Podemos concluir que $T : \mathcal{B} \mapsto \mathcal{B}$, con $\mathcal{B} = \{v \in H_0^1(\Omega)^N \mid \|v\|_{1,2} \leq C''\|f\|_*\}$ que es una bola cerrada. Aplicando ahora el teorema de Schauder, se tiene que T admite al menos un punto fijo en $\mathcal{B} \subset H_0^1(\Omega)^N$, dicho punto fijo es solución de (NLV).

□

5.4.2 Resolución por mínimos cuadrados y gradiente conjugado

Recordemos que por razones puramente teóricas se introdujo el término $\frac{1}{2}u(\nabla \cdot u)$, pero la práctica nos demuestra que desde el punto de vista numérico carece de influencia. Por consiguiente, el problema que vamos a aproximar vuelve a ser

$$(NL) \begin{cases} \alpha u - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla)u = f & \text{en } \Omega \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

Mínimos cuadrados

Vamos a formular (NL) como un problema de mínimos cuadrados. Para ello, definamos primero

$$V_g = \left\{ v \in H^1(\Omega)^N \mid v = g \text{ sobre } \partial\Omega \right\}.$$

Obsérvese que para $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ se tiene $V_g \neq \emptyset$.

A cada $v \in V_g$ le podemos asociar z solución de

$$\begin{cases} \alpha z - \nu \Delta z = \alpha v - \nu \Delta v + (v \cdot \nabla)v - f & \text{en } \Omega \\ z = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad [5.20]$$

Nótese que

$$z = 0 \iff v \text{ es solución de (NL)}.$$

La idea entonces es encontrar una z que sea nula, o en todo caso, que sea lo más pequeña posible en $H_0^1(\Omega)^N$. Planteamos entonces el siguiente problema de control óptimo

$$(M) \begin{cases} \text{Hallar } u \in V_g \text{ tal que} \\ J(u) \leq J(v), \quad \forall v \in V_g. \end{cases}$$

con $J(v) = \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} |z|^2 dx + \frac{\nu}{2} \int_{\Omega} |\nabla z|^2 dx$, donde z es la solución de [5.20] asociada a v .

Algoritmo del gradiente conjugado

Aplicamos el algoritmo del gradiente conjugado para aproximar la solución del problema de mínimos (M).

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{INICIO} \\
 (1) \quad \text{Elegir } u_0 \in V_g. \\
 (2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } d_0 \in H_0^1(\Omega)^N \text{ tal que} \\ \alpha \int_{\Omega} d_0 v \, dx + \nu \int_{\Omega} \nabla d_0 \nabla v \, dx = \langle J'(u_0), v \rangle \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)^N \end{array} \right. \\
 (3) \quad w_0 = d_0 \\
 \text{DESCENSO} \quad \text{Dados } n \geq 0 \text{ y } u_n, d_n, w_n, z_n : \\
 (4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } \rho_n \in \mathbb{R}^+ \text{ tal que} \\ J(u_n - \rho_n w_n) = \inf_{\rho > 0} J(u_n - \rho w_n) \end{array} \right. \\
 (5) \quad u_{n+1} = u_n - \rho_n w_n \text{ y después calculamos } z_{n+1}. \\
 \text{NUEVA DIRECCIÓN DE DESCENSO} \\
 (6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } d_{n+1} \in H_0^1(\Omega)^N \text{ tal que} \\ \alpha \int_{\Omega} d_{n+1} v \, dx + \nu \int_{\Omega} \nabla d_{n+1} \nabla v \, dx = \langle J'(u_{n+1}), v \rangle \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)^N \end{array} \right. \\
 (8) \quad \gamma_n = \frac{\alpha \int_{\Omega} d_{n+1} (d_{n+1} - d_n) \, dx + \nu \int_{\Omega} \nabla d_{n+1} \nabla (d_{n+1} - d_n) \, dx}{\alpha \int_{\Omega} |d_n|^2 \, dx + \nu \int_{\Omega} |\nabla d_n|^2 \, dx} \\
 (9) \quad w_{n+1} = d_{n+1} + \gamma_n w_n \\
 \text{Volver a la etapa (4), con } n + 1 \text{ en lugar de } n.
 \end{array} \right\} (AG)$$

Observaciones:

1. En el contexto de los problemas de evolución se elegirá u_0 como el campo de velocidades obtenido en la resolución del problema de Stokes.
2. Veremos en el siguiente apartado, que la etapa (4) consiste en calcular un mínimo de un polinomio de tercer grado.
3. Podemos utilizar distintos criterios de parada:
 - Parar si $\|g_n\| < \varepsilon$, o bien $\frac{\|g_n\|}{\|g_0\|} < \varepsilon$.
 - Parar si $\frac{|J(u_n)|}{|J(u_0)|} < \varepsilon$.

Esta última es más exigente.

Cálculo de $J'(v)$ y ρ_n

Empecemos por ver detalladamente el cálculo de $J'(v)$.

Sabemos que $J(v) = \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} |z|^2 dx + \frac{\nu}{2} \int_{\Omega} |\nabla z|^2 dx$, donde z es la solución de [5.20] asociada a v . Vamos a calcular

$$\langle J'(v), w \rangle = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{J(v+tw) - J(v)}{t},$$

con $J(v+tw) = \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} |z_{v+tw}|^2 dx + \frac{\nu}{2} \int_{\Omega} |\nabla z_{v+tw}|^2 dx$ y $J(v) = \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} |z_v|^2 dx + \frac{\nu}{2} \int_{\Omega} |\nabla z_v|^2 dx$, donde z_{v+tw} es la solución de [5.20] para $v = v + tw$. De manera que

$$\begin{aligned} J(v+tw) &= \frac{1}{2} \|z_{v+tw}\|^2 = \frac{1}{2} \langle \alpha z_{v+tw} - \nu \Delta z_{v+tw}, z_{v+tw} \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \langle \alpha(v+tw) - \nu \Delta(v+tw) + ((v+tw) \cdot \nabla)(v+tw) - f, z_{v+tw} \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \langle \alpha(v+tw) - \nu \Delta(v+tw) + (v \cdot \nabla)v + t[(w \cdot \nabla)v + (v \cdot \nabla)w] + t^2(w \cdot \nabla)w - f, z_{v+tw} \rangle. \end{aligned}$$

De forma análoga se tiene

$$J(v) = \frac{1}{2} \|z_v\|^2 = \frac{1}{2} \langle \alpha z_v - \nu \Delta z_v, z_v \rangle = \frac{1}{2} \langle \alpha v - \nu \Delta v + (v \cdot \nabla)v - f, z_v \rangle.$$

Así

$$\begin{aligned} \langle J'(v), w \rangle &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2t} \left[\alpha \int_{\Omega} v(z_{v+tw} - z_v) dx + \nu \int_{\Omega} \nabla(z_{v+tw} - z_v) \nabla v dx + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Omega} (v \cdot \nabla)v(z_{v+tw} - z_v) dx - \int_{\Omega} f(z_{v+tw} - z_v) dx + \right. \\ &\quad \left. + t \int_{\Omega} [\alpha w - \nu \Delta w + t(w \cdot \nabla)w] z_{v+tw} dx + \right. \\ &\quad \left. + t \int_{\Omega} [(v \cdot \nabla)w + (w \cdot \nabla)v] z_{v+tw} dx \right] \end{aligned} \quad [5.21]$$

De [5.20] tenemos

$$\begin{aligned} \alpha z_{v+tw} - \nu \Delta z_{v+tw} &= \alpha(v+tw) - \nu \Delta(v+tw) + ((v+tw) \cdot \nabla)(v+tw) - f = \\ &= (\alpha v - \nu \Delta v) + t(\alpha w - \nu \Delta w) + (v \cdot \nabla)v + t[(v \cdot \nabla)w + (w \cdot \nabla)v] + \\ &\quad + t^2(w \cdot \nabla)w - f \end{aligned}$$

y

$$\alpha z_v - \nu \Delta z_v = (\alpha v - \nu \Delta v) + (v \cdot \nabla)v - f. \quad [5.22]$$

Restando [5.22] y [5.22], resulta

$$\alpha(z_{v+tw} - z_v) - \nu \Delta(z_{v+tw} - z_v) = t(\alpha w - \nu \Delta w) + t[(v \cdot \nabla)w + (w \cdot \nabla)v] + t^2(w \cdot \nabla)w.$$

Sin más que tomar límite obtenemos

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|z_{v+tw} - z_v\|_{1,2} = 0. \quad [5.23]$$

Para calcular el límite de [5.21] vamos a agrupar algunos sumandos y haremos los cálculos de cada parte por separado.

- Veamos primero

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2t} \left[\alpha \int_{\Omega} v(z_{v+tw} - z_v) dx + \nu \int_{\Omega} \nabla(z_{v+tw} - z_v) \nabla v dx + \right. \\ & \left. + \int_{\Omega} (v \cdot \nabla)v(z_{v+tw} - z_v) dx - \int_{\Omega} f(z_{v+tw} - z_v) dx \right]. \end{aligned} \quad [5.24]$$

Obsérvese que

$$\begin{aligned} \langle \alpha z_v - \nu \Delta z_v, z_{v+tw} - z_v \rangle &= \langle \alpha z_v - \nu \Delta z_v, z_{v+tw} \rangle - \langle \alpha z_v - \nu \Delta z_v, z_v \rangle = \\ &= \alpha \int_{\Omega} z_v z_{v+tw} dx + \nu \int_{\Omega} \nabla z_v \nabla z_{v+tw} dx - \langle \alpha z_v - \nu \Delta z_v, z_v \rangle = \\ &= \langle \alpha z_{v+tw} - \nu \Delta z_{v+tw}, z_v \rangle - \langle \alpha z_v - \nu \Delta z_v, z_v \rangle = \end{aligned}$$

aplicando ahora que z_v y z_{v+tw} son soluciones de [5.20] asociadas respectivamente a v y a $v + tw$, tenemos

$$\begin{aligned} &= \langle \alpha(v + tw) - \nu \Delta(v + tw) + ((v + tw) \cdot \nabla)(v + tw) - f, z_v \rangle - \\ & \quad - \langle \alpha v - \nu \Delta v + (v \cdot \nabla)v - f, z_v \rangle = \end{aligned}$$

si desarrollamos obtenemos

$$\begin{aligned} & \alpha \int_{\Omega} v z_v dx + \nu \int_{\Omega} \nabla v \nabla z_v dx + t \left[\alpha \int_{\Omega} w z_v dx + \nu \int_{\Omega} \nabla w \nabla z_v dx \right] + \int_{\Omega} (v \cdot \nabla)w z_v dx + \\ & \quad + t \int_{\Omega} [(w \cdot \nabla)v + (v \cdot \nabla)w] z_v dx + t^2 \int_{\Omega} (w \cdot \nabla)w z_v dx - \int_{\Omega} f z_v dx - \\ & \quad - \alpha \int_{\Omega} v z_v dx - \nu \int_{\Omega} \nabla v \nabla z_v dx - \int_{\Omega} (v \cdot \nabla)w z_v dx + \int_{\Omega} f z_v dx = \end{aligned}$$

simplificando

$$= t \left[\alpha \int_{\Omega} w z_v dx + \nu \int_{\Omega} \nabla w \nabla z_v dx \right] + t \int_{\Omega} [(w \cdot \nabla)v + (v \cdot \nabla)w] z_v dx + t^2 \int_{\Omega} (w \cdot \nabla)w z_v dx.$$

Luego [5.24] es igual a

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{2t} \left[\alpha \int_{\Omega} w z_v dx + \nu \int_{\Omega} \nabla w \nabla z_v dx + \int_{\Omega} [(w \cdot \nabla)v + (v \cdot \nabla)w] z_v dx + t \int_{\Omega} (w \cdot \nabla)w z_v dx \right] = \\ & = \frac{1}{2} \left[\alpha \int_{\Omega} w z_v dx + \nu \int_{\Omega} \nabla w \nabla z_v dx + \int_{\Omega} [(w \cdot \nabla)v + (v \cdot \nabla)w] z_v dx \right]. \end{aligned} \quad [5.25]$$

- Veamos qué ocurre con el resto de los sumandos de [5.21]

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{2t} \left[\int_{\Omega} [\alpha w - \nu \Delta w + t(w \cdot \nabla)w] z_{v+tw} dx + \int_{\Omega} [(v \cdot \nabla)w + (w \cdot \nabla)v] z_{v+tw} dx \right] =$$

aplicando [5.23], llegamos a

$$= \frac{1}{2} \left[\alpha \int_{\Omega} w z_v dx + \nu \int_{\Omega} \nabla w \nabla z_v + \int_{\Omega} [(w \cdot \nabla)v + (v \cdot \nabla)w] z_v dx \right]. \quad [5.26]$$

De [5.25] y [5.26] obtenemos

$$\langle J'(v), w \rangle = \alpha \int_{\Omega} w z_v dx + \nu \int_{\Omega} \nabla w \nabla z_v + \int_{\Omega} [(w \cdot \nabla)v + (v \cdot \nabla)w] z_v dx \quad [5.27]$$

Observación:

Nótese que (6), del algoritmo del gradiente conjugado que hemos descrito antes, pasa a ser

$$(6) \begin{cases} \text{Hallar } d_{n+1} \in H_0^1(\Omega)^N \text{ tal que} \\ \alpha \int_{\Omega} d_{n+1} v dx + \nu \int_{\Omega} \nabla \cdot d_{n+1} \nabla \cdot v dx = \alpha \int_{\Omega} v z_{n+1} dx + \nu \int_{\Omega} \nabla v \nabla z_{n+1} dx + \\ \quad + \int_{\Omega} [(v \cdot \nabla)u_{n+1} + (u_{n+1} \cdot \nabla)v] z_{n+1} dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)^N \end{cases}$$

donde z_{n+1} es solución de

$$\begin{cases} \text{Hallar } z_{n+1} \in H_0^1(\Omega)^N \text{ tal que} \\ \alpha z_{n+1} - \nu \Delta z_{n+1} = \alpha u_{n+1} - \nu \Delta u_{n+1} + (u_{n+1} \cdot \nabla)u_{n+1} - f \end{cases}$$

Pero vamos a ver en el siguiente apartado una forma más sencilla de calcular z_{n+1} .

Cálculo de ρ_n , d_{n+1} y u_{n+1}

Supongamos conocidos w_n , z_n , d_n y u_n . Para calcular ρ_n tenemos que resolver el problema

$$\begin{cases} \text{Hallar } \rho_n \in \mathbb{R}^+ \text{ tal que} \\ J(u_n - \rho_n w_n) = \inf_{\rho > 0} J(u_n - \rho w_n) \end{cases} \quad [5.28]$$

Notemos $u_\rho = u_n - \rho w_n$. Entonces $J(u_\rho) = \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} |z_\rho|^2 dx + \frac{\nu}{2} \int_{\Omega} |\nabla z_\rho|^2 dx$, donde z_ρ es la solución de

$$\begin{cases} \text{Hallar } z_\rho \in H_0^1(\Omega)^N \text{ tal que} \\ \alpha z_\rho - \nu \Delta z_\rho = \alpha u_\rho - \nu \Delta u_\rho + (u_\rho \cdot \nabla)u_\rho - f \end{cases}$$

Sustituyendo u_ρ por $u_n - \rho w_n$ y agrupando tenemos

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } z_\rho \in H_0^1(\Omega)^N \text{ tal que} \\ \alpha z_\rho - \nu \Delta z_\rho = [\alpha u_n - \nu \Delta u_n + (u_n \cdot \nabla)u_n - f] - \\ \quad - \rho [\alpha w_n - \nu \Delta w_n + (w_n \cdot \nabla)u_n + (u_n \cdot \nabla)w_n] + \\ \quad + \rho^2 [(w_n \cdot \nabla)w_n] \end{array} \right.$$

Dada la linealidad del problema para z_ρ , tenemos que $z_\rho = z_0 - z_1\rho + z_2\rho^2$, donde z_0 , z_1 y z_2 son soluciones de

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } z_0 \in H_0^1(\Omega)^N \text{ tal que} \\ \alpha z_0 - \nu \Delta z_0 = \alpha u_n - \nu \Delta u_n + (u_n \cdot \nabla)u_n - f \end{array} \right. \quad [5.29]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } z_1 \in H_0^1(\Omega)^N \text{ tal que} \\ \alpha z_1 - \nu \Delta z_1 = \alpha w_n - \nu \Delta w_n + (w_n \cdot \nabla)u_n + (u_n \cdot \nabla)w_n \end{array} \right. \quad [5.30]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } z_2 \in H_0^1(\Omega)^N \text{ tal que} \\ \alpha z_2 - \nu \Delta z_2 = (w_n \cdot \nabla)w_n \end{array} \right. \quad [5.31]$$

respectivamente.

Observación:

Nótese que z_n es conocido y es la solución de [5.29], luego no habría que calcular z_0 y sólo tendríamos que tomar $z_0 = z_n$. Quedarían por resolver [5.30] y [5.31].

Para calcular ρ_n tendremos que minimizar el funcional $J(u_\rho)$ respecto a la variable ρ . Como $z_\rho = z_n - z_1\rho + z_2\rho^2$, entonces

$$\begin{aligned} J(u_\rho) &= \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} |z_n - z_1\rho + z_2\rho^2|^2 dx + \frac{\nu}{2} \int_{\Omega} |\nabla(z_n - z_1\rho + z_2\rho^2)|^2 dx = \\ &= \left[\frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} |z_n|^2 dx + \frac{\nu}{2} \int_{\Omega} |\nabla z_n|^2 dx \right] - \rho \left[\alpha \int_{\Omega} z_1 z_n dx + \nu \int_{\Omega} \nabla z_1 \nabla z_n dx \right] + \\ &\quad + \rho^2 \left[\frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} |z_1|^2 dx + \frac{\nu}{2} \int_{\Omega} |\nabla z_1|^2 dx + \alpha \int_{\Omega} z_2 z_n dx + \nu \int_{\Omega} \nabla z_2 \nabla z_n dx \right] - \\ &\quad - \rho^3 \left[\alpha \int_{\Omega} z_1 z_2 dx + \nu \int_{\Omega} \nabla z_1 \nabla z_2 dx \right] + \rho^4 \left[\frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} |z_2|^2 dx + \frac{\nu}{2} \int_{\Omega} |\nabla z_2|^2 dx \right] = \\ &= \mathcal{Z}_0 - \mathcal{Z}_1\rho + \mathcal{Z}_2\rho^2 - \mathcal{Z}_3\rho^3 + \mathcal{Z}_4\rho^4 \end{aligned}$$

Luego, conocidos z_1 y z_2 se pueden calcular los \mathcal{Z}_i , $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, (\mathcal{Z}_0 sólo depende de z_n que es conocida). Por consiguiente, resolver [5.28] se reduce a minimizar en \mathbb{R} un polinomio

de 4º grado.

Queremos minimizar

$$j(\rho) = \mathcal{Z}_0 - \mathcal{Z}_1\rho + \mathcal{Z}_2\rho^2 - \mathcal{Z}_3\rho^3 + \mathcal{Z}_4\rho^4$$

Para encontrar un ρ_n tal que $j'(\rho_n) = 0$, podemos usar un método de Newton

$$\begin{cases} (1) & \rho^0 = 0 \\ (2) & \rho^{n+1} = \rho^n - \frac{j'(\rho^n)}{j''(\rho^n)} \end{cases}$$

Si escribimos explícitamente las derivadas y operamos obtenemos el algoritmo

$$\begin{cases} (1) & \rho^0 = 0 \\ (2) & \rho^{n+1} = \rho^n - \frac{-\mathcal{Z}_1 + 2\mathcal{Z}_2\rho^n - 3\mathcal{Z}_3(\rho^n)^2 + 4\mathcal{Z}_4(\rho^n)^3}{2\mathcal{Z}_2 - 6\mathcal{Z}_3\rho^n + 12\mathcal{Z}_4(\rho^n)^2} \end{cases}$$

Observaciones:

1. Dado que $j(\rho)$ es un polinomio de 4º grado, tenemos asegurada la existencia pero no la unicidad de solución. En la práctica, usando el método del gradiente conjugado, el dato inicial u_0 está en la “vecindad” de la solución y por consiguiente ρ^0 está en la “vecindad” de ρ_n .
2. $z_{n+1} = z_n - z_1(\rho_n) + z_2(\rho_n)^2$.

Finalmente el algoritmo que resulta es

INICIO

(1) Elegir $u_0 \in V_g$.

$$(2.1) \quad \begin{cases} \text{Hallar } z_0 \in H_0^1(\Omega)^N. \\ \alpha \int_{\Omega} z_0 v dx + \nu \int_{\Omega} \nabla z_0 \nabla v dx = \alpha \int_{\Omega} u_0 v dx + \nu \int_{\Omega} \nabla u_0 \nabla v dx + \\ \quad + \int_{\Omega} (u_0 \cdot \nabla) u_0 v dx - \int_{\Omega} f v dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)^N \end{cases}$$

$$(2.2) \quad \begin{cases} \text{Hallar } d_0 \in H_0^1(\Omega)^N \text{ tal que} \\ \alpha \int_{\Omega} d_0 v dx + \nu \int_{\Omega} \nabla \cdot d_0 \nabla \cdot v dx = \alpha \int_{\Omega} v z_0 dx + \nu \int_{\Omega} \nabla v \nabla z_0 dx + \\ \quad + \int_{\Omega} [(v \cdot \nabla) u_0 + (u_0 \cdot \nabla) v] z_0 dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)^N \end{cases}$$

(3) $w_0 = d_0$ DESCENSO Dados $n \geq 0$ y u_n, d_n, w_n, z_n :

$$(4.1) \quad \begin{cases} \text{Hallar } z_1 \in H_0^1(\Omega)^N \text{ tal que} \\ \alpha z_1 - \nu \Delta z_1 = \alpha w_n - \nu \Delta w_n + (w_n \cdot \nabla) u_n + (u_n \cdot \nabla) w_n \\ \text{Hallar } z_2 \in H_0^1(\Omega)^N \text{ tal que} \\ \alpha z_2 - \nu \Delta z_2 = (w_n \cdot \nabla) w_n \end{cases}$$

$$(4.2) \quad \begin{cases} \mathcal{Z}_0 = \left[\frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} |z_n|^2 dx + \frac{\nu}{2} \int_{\Omega} |\nabla z_n|^2 dx \right] & \mathcal{Z}_1 = \left[\alpha \int_{\Omega} z_1 z_n dx + \nu \int_{\Omega} \nabla z_1 \nabla z_n dx \right] \\ \mathcal{Z}_2 = \left[\frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} |z_1|^2 dx + \frac{\nu}{2} \int_{\Omega} |\nabla z_1|^2 dx + \alpha \int_{\Omega} z_2 z_n dx + \nu \int_{\Omega} \nabla z_2 \nabla z_n dx \right] \\ \mathcal{Z}_3 = \left[\alpha \int_{\Omega} z_1 z_2 dx + \nu \int_{\Omega} \nabla z_1 \nabla z_2 dx \right] & \mathcal{Z}_4 = \left[\frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} |z_2|^2 dx + \frac{\nu}{2} \int_{\Omega} |\nabla z_2|^2 dx \right] \end{cases}$$

$$(4.3) \quad \begin{cases} \text{Hallar } \rho_n \in \mathbb{R}^+ \text{ límite de la sucesión} \\ (1) \quad \rho^0 = 0 \\ (2) \quad \rho^{n+1} = \rho^n - \frac{-\mathcal{Z}_1 + 2\mathcal{Z}_2 \rho^n - 3\mathcal{Z}_3 (\rho^n)^2 + 4\mathcal{Z}_4 (\rho^n)^3}{2\mathcal{Z}_2 - 6\mathcal{Z}_3 \rho^n + 12\mathcal{Z}_4 (\rho^n)^2} \end{cases}$$

$$(5) \quad \begin{cases} u_{n+1} = u_n - \rho_n w_n \\ z_{n+1} = z_n - z_1(\rho_n) + z_2(\rho_n)^2 \end{cases}$$

NUEVA DIRECCIÓN DE DESCENSO

$$(6) \quad \begin{cases} \text{Hallar } d_{n+1} \in H_0^1(\Omega)^N \text{ tal que} \\ \alpha \int_{\Omega} d_{n+1} v dx + \nu \int_{\Omega} \nabla \cdot d_{n+1} \nabla \cdot v dx = \alpha \int_{\Omega} v z_{n+1} dx + \nu \int_{\Omega} \nabla v \nabla z_{n+1} dx + \\ \quad + \int_{\Omega} [(v \cdot \nabla) u_{n+1} + (u_{n+1} \cdot \nabla) v] z_{n+1} dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)^N \end{cases}$$

$$(8) \quad \gamma_n = \frac{\alpha \int_{\Omega} d_{n+1} (d_{n+1} - d_n) dx + \nu \int_{\Omega} \nabla d_{n+1} \nabla (d_{n+1} - d_n) dx}{\alpha \int_{\Omega} |d_n|^2 dx + \nu \int_{\Omega} |\nabla d_n|^2 dx}$$

(9) $w_{n+1} = d_{n+1} + \gamma_n w_n$ Volver a la etapa (4.1), con $n + 1$ en lugar de n .

5.5 Observaciones finales

1. Nótese que, tanto en los algoritmos que hemos visto para los problemas del tipo (S) , como para los del tipo (NL) , los sistemas que hay que resolver tienen todos la misma matriz. De manera que podemos calcularla y factorizarla al principio del algoritmo.
2. Se conoce un resultado debido a M. Marín (véase [8]) en el que se demuestra que, para $\theta = \frac{1}{4}$, el θ -esquema es (al menos) condicionalmente estable.

Bibliografía

- [1] R. Témam. *Navier-Stokes equations*. North-Holland, 1977.
- [2] D. Euvrard. *Résolution Numérique des Équations aux Dérivées Partielles*. Masson, 1988.
- [3] E. Godlewski, P.A. Raviart. *Hyperbolic Systems of Conservation Laws*. Mathematiques et Applications No. 3-4, SMAI, Ellipses, 1990.
- [4] P.G. Ciarlet. *Introduction à l'Analyse Numérique Matricielle et à l'Optimisation*. Masson, 1988.
- [5] A.J. Chorin, J.E. Marsden. *A mathematical introduction to fluid mechanics*. Springer Verlag, New York, 1979.
- [6] V. Girault, P.A. Raviart. *Finite element methods for Navier-Stokes equation*. Springer-Verlag, 1986.
- [7] J. L. Lions. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Dunod, 1969.
- [8] M. Marín Beltrán. *Análisis numérico del problema incompresible de Navier-Stokes: métodos de tipo direcciones alternadas*. Tesis, Universidad de Sevilla, 1986.