Estudio de la continuidad de la función en el punto $x = 2$:

Comprobemos, como primera medida, que la función está definida en $x = 2$.

Para $x = 2$, tenemos que determinar $f(2) = 3\cdot 2 + 2 = 6 + 2 = 8$, luego existe.

Calculamos, entonces los límites laterales de la función para $x = 2$.

Limite por la izquierda: $\lim_{x\to 2} x^3 = 2^3 = 8$

Limite por la derecha: $\lim_{x\to 2} 3x + 2 = 3\cdot 2 + 2 = 6 + 2 = 8$

Los límites laterales, existen, son finitos y coinciden.

Veamos si coincide, el límite de la función con el valor de la función en $x = 2$.

$$f(2) = 8 = \lim_{x\to 2} f(x)$$

Luego, como se cumplen las tres condiciones, la función es continua en $x = 2$.

3.2. Propiedades de las funciones continuas

Las funciones polinómicas, racionales, con radicales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas serán siempre continuas en su dominio.

Por lo tanto, presentarán discontinuidades en aquellos puntos en los que no esté definida y, por lo tanto, no pertenezcan a su dominio.

Operaciones de funciones continuas

Sean las funciones $f(x)$ y $g(x)$ continuas en el punto $x = a$, entonces podemos afirmar que:

$f(x) + g(x)$ es continua en $x = a$.

$f(x)\cdot g(x)$ es continua en $x = a$.

$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ es continua en $x = a$, si $g(a)\neq 0$.

$f(g(x))$ es continua en $x = a$, si f es continua en $g(a)$.

Actividades resueltas

- Las funciones polinómicas son funciones continuas en todo $\Re$.

Basta comprobar que la función $f(x) = x$, la función $f(x) = a$ son funciones continuas para comprobar que cualquier función polinómica es suma y producto de estas funciones.

- Las funciones racionales son continuas en todo $\Re$ salvo para los valores que anulan al denominador. Estudia la continuidad de $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-4}$.

En efecto, las funciones racionales son cociente de funciones polinómicas, que son continuas en toda la recta real. La función $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-4}$ es continua en $\Re - \{2, -2\}$, pues el denominador se anula en dichos valores.

Autor: Luis Ángel Morales García
Revisora: Raquel Hernández
Ilustraciones: Elaboración propia

3.3. Tipos de discontinuidad

Existen varios tipos de discontinuidades de las funciones, que se expresan en el cuadro siguiente:

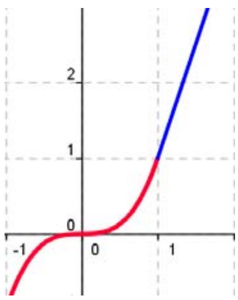
<table>
<tr><td rowspan="2">EVITABLES
(Existen los límites laterales y son finitos e iguales)</td><td colspan="2">No existe imagen $f(a)$ en el punto</td></tr>
<tr><td colspan="2">La imagen $f(a)$ existe pero no coincide con los límites laterales</td></tr>
<tr><td rowspan="3">INEVITABLES
Los límites laterales no existen, bien porque alguno es infinito o porque son distintos, o alguno de los límites laterales no existe.</td><td rowspan="2">De primera especie</td><td>De salto finito (Límites laterales finitos pero distintos)</td></tr>
<tr><td>De salto infinito (Alguno (o los dos) límites laterales son infinitos)</td></tr>
<tr><td>De segunda especie</td><td>No existe alguno de los límites laterales.</td></tr>
</table>

Las **discontinuidades evitables**, se llaman así porque se pueden solventar mediante la redefinición de la función en el punto, bien porque no estuviera definida, bien porque no coincidiera la imagen con los límites laterales, que existen, coinciden y son finitos.

Las **discontinuidades inevitables** vienen dadas porque:

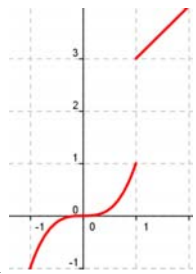
- los límites laterales existen, son finitos y no coinciden (de **primera especie** de salto finito). Salto es igual a $\lim_{x \to a^+} f(x) - \lim_{x \to a^-} f(x)$
- existen pero alguno es infinito (de primera especie de salto infinito). Salto infinito.
- o no existe alguno de los límites laterales o los dos (de **segunda especie**).

Discontinuidad evitable



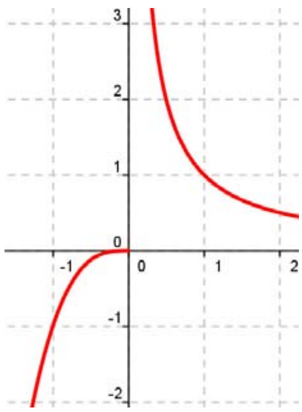
$$f(x) = \begin{cases} x^3 & si\ x < 1 \\ 3x-2 & si\ x > 1 \end{cases}$$

Discontinuidad de primera especie salto finito



$$f(x) = \begin{cases} x^3 & si\ x < 1 \\ x+2 & si\ x \geq 1 \end{cases}$$

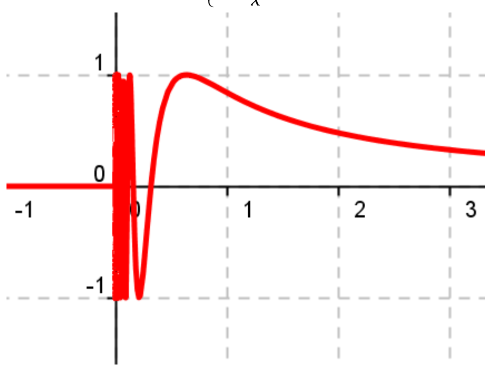
Discontinuidad de primera especie salto infinito



$$f(x) = \begin{cases} x^3 & si\ x < 0 \\ \frac{1}{x} & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

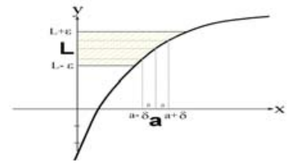
Discontinuidad de segunda especie

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \leq 0 \\ sen\frac{1}{x} & si\ x > 0 \end{cases}$$



Autor: Luis Ángel Morales García
Revisora: Raquel Hernández
Ilustraciones: Elaboración propia

RESUMEN

		Ejemplos
Definición de límite	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow$ Para todo ε > 0, existe un δ > 0 tal que, siempre que $\lvert x - a\rvert < \delta$, se cumple $\lvert f(x) - L\rvert < \varepsilon$.	
Límite lateral a la derecha	$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$ el valor de $f(x)$ cuando x tiende a a, siempre que se cumpla la condición $x > a$	La función $f(x) = \begin{cases} x^3 & si\ x < 2 \\ 3x+2 & si\ x \geq 2 \end{cases}$ tiene de límite lateral a la izquierda 8, y de límite lateral a la derecha también 8, pues $\lim\limits_{x\to 2} x^3 = 2^3 = 8$ $\lim\limits_{x\to 2} 3x+2 = 3\cdot 2+2 = 6+2 = 8$
Límite lateral a la izquierda	$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$ el valor de $f(x)$ cuando x tiende a a, siempre que se cumpla la condición $x < a$	
Existencia de límite	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$	La función $f(x) = \begin{cases} x^3 & si\ x < 2 \\ 3x+2 & si\ x \geq 2 \end{cases}$ tiene límite en $x = 2$
Asíntotas	Si $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = K$ hay una asíntota horizontal $y = K$. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ hay una asíntota vertical $x = a$.	$f(x) = \dfrac{1}{x} \to$ asíntota horizontal, $y = 0$ y asíntota vertical $x = 0$
Propiedades de los límites	$\lim\limits_{x\to a} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$ $\lim\limits_{x\to a} (f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$ $\lim\limits_{x\to a} (K\cdot f(x)) = K\cdot \lim\limits_{x\to a} f(x)$ $\lim\limits_{x\to a} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ si $g(a) \neq 0$.	
Continuidad de una función en un punto	Una función $f(x)$ es continua en el punto $x = a$, si para cualquier ε > 0, existe un δ > 0 tal que siempre que $\lvert x - a\rvert < \delta$, se cumple que $\lvert f(x) - f(a)\rvert < \varepsilon$.	La función $f(x) = \begin{cases} x^3 & si\ x < 2 \\ 3x+2 & si\ x \geq 2 \end{cases}$ es continua en $x = 2$
Propiedades de las funciones continuas	La suma y el producto de funciones continuas es una función continua. El cociente de funciones continuas es una función continua si no se anual el denominador.	Los polinomios son funciones continuas en $\Re$ $f(x) = \dfrac{1}{x}$ es continua en $\Re - \{0\}$
Tipos de discontinuidad	Evitable. De primera especie de salto finito. De primera especie de salto infinito. De segunda especie	$f(x) = \begin{cases} x^3 & si\ x < 2 \\ 3x+2 & si\ x > 2 \end{cases}$ evitable en $x = 2$ $f(x) = \dfrac{1}{x}$ de primera especie con salto infinito en $x = 0$

Autor: Luis Ángel Morales García
Revisora: Raquel Hernández
Ilustraciones: Elaboración propia

EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

Límites

1. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x+3}{x^2-9}$

b) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2-9}{x-3}$

c) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^3+27}{x^2+3x}$

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^2+x-2}$

e) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+8}{-x-2}$

f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{3+x}-4}{x-1}$

g) $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{x^3+8x-2}{-x^2-2x+3}$

2. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^3+8}{-x-2}$

b) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^3+8}{-x^5-2}$

c) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{3x^3+8}{-x^3-2}$

d) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{3x}{x^2-4}-\dfrac{2}{x+2}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{3x}{x^2-4}-\dfrac{x-3}{x+2}\right)$

f) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\sqrt{3x-1}-\sqrt{x^2-2x}\right)$

g) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x-2}\right)$

h) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{x-2}-\sqrt{x+2}}\right)$

BY NC SA

3. Determina las asíntotas de las funciones siguientes:

a) $f(x)=\dfrac{x^2-2|x|}{x-3}$

b) $f(x)=\dfrac{5}{x^2-4}$

c) $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4}$

d) $f(x)=\dfrac{x^2-5x}{x^2-1}$

e) $f(x)=\dfrac{-5x}{(x-1)^2}$

f) $f(x)=\dfrac{-5x^2-5}{(x-1)^2}$

g) $f(x)=\ln\dfrac{-5x}{(x-1)^2}$

h) $f(x)=\sqrt{\dfrac{-5x}{(x-1)^2}}$

Continuidad

4. Estudia la continuidad de las funciones siguientes, indicando en cada caso el tipo de discontinuidad.

a) $f(x)=\begin{cases} 3^x & x<-2 \\ 4-x^2 & -2\le x\le 1 \\ \log_2 x & x>1 \end{cases}$ b) $g(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & x<0 \\ x^2-3x & 0\le x<3 \\ \sqrt{x-3} & x\ge 3 \end{cases}$ c) $h(x)=|x^2-5x|$

5. Estudia la continuidad de las funciones siguientes, indicando en cada caso el tipo de discontinuidad.

a) $f(x)=|x^2-25|$ b) $g(x)=2-\dfrac{|x|}{x}$ c) $h(x)=\dfrac{x^2-2|x|}{x-3}$

6. Estudia la continuidad de las funciones siguientes, indicando en cada caso el tipo de discontinuidad.

a) $f(x)=\dfrac{3x+5}{x^2-4x+3}$ b) $g(x)=\dfrac{7x+2}{x^2+x}$ c) $h(x)=\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-2x-3}$

7. Estudia la continuidad de las funciones siguientes, indicando en cada caso el tipo de discontinuidad.

a) $f(x)=\sqrt{x^2-x-6}$ b) $g(x)=\sqrt{\dfrac{2-x}{x^2-4}}$ c) $h(x)=\sqrt{\dfrac{3-x}{x^2-3x}}$

8. Estudia la continuidad de las funciones siguientes, indicando en cada caso el tipo de discontinuidad.

Autor: Luis Ángel Morales García
Revisora: Raquel Hernández
Ilustraciones: Elaboración propia

a) $f(x)=\ln\left(\frac{4-x}{x-5}\right)$ b) $g(x)=\ln\left(-x^2-x+2\right)$ c) $h(x)=\ln\left(\frac{9-x^2}{(x-3)^2}\right)$

9. Estudia la continuidad de las funciones siguientes, indicando en cada caso el tipo de discontinuidad.

d) $f(x)=e^{\frac{x^2-9}{7+x}}$ $g(x)=e^{\sqrt{x-5}}$ $h(x)=2^{\frac{\sqrt{x-1}}{x^2-1}}$

10. Dada la función $f(x)=\begin{cases} 3-x^2 & x<0 \\ 2+e^x & x\geq 0 \end{cases}$

a) Estudia su continuidad
b) Representa su gráfica

11. Dada la función $f(x)=\begin{cases} 3-x^2 & x<2 \\ k+x & x\geq 2 \end{cases}$

a) Determina el valor de *k* para que la función sea continua en toda la recta real
b) Representa su gráfica

12. Dada la función $f(x)=\begin{cases} x-3 & \cdots x<-1 \\ x^2-5 & -1\leq x<1 \\ \frac{2}{x} & x\geq 1 \end{cases}$

a) Estudia su continuidad
b) Representa su gráfica

13. Dada la función $f(x)=\begin{cases} 4-x^2 & x<2 \\ x^2-4 & x\geq 2 \end{cases}$

a) Estudia su continuidad
b) Representa su gráfica

14. Esboza la gráfica de la función $f(x)=\frac{x}{x^2-25}$ indicando sus asíntotas y sus puntos de discontinuidad.

15. Esboza la gráfica de la función $f(x)=\frac{x^2}{x^2-25}$ indicando sus asíntotas y sus puntos de discontinuidad.

Autor: Luis Ángel Morales García
Revisora: Raquel Hernández
Ilustraciones: Elaboración propia