

Operaciones en el conjunto de los números racionales Q

Operación	Ejemplo
<p>Suma</p> $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{bd}$	<p>a) $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 5 + 3 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{22}{15}$</p> <p>b) $\frac{7}{24} + \frac{11}{36} = \frac{7 \cdot 3 + 11 \cdot 2}{72} = \frac{43}{72}$</p> <p>¡OJO! Observa como en este ejemplo el denominador común no es el producto de los denominadores sino el M.C.M. de 24 y 36. De esta manera las operaciones serán mucho más sencillas.</p>
<p>Resta (diferencia)</p> $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{bd}$	<p>$\frac{8}{3} - \frac{6}{4} = \frac{8 \cdot 4 - 6 \cdot 3}{3 \cdot 4} = \frac{14}{12} = \frac{7}{6}$</p> <p>¡OJO! El resultado siempre hay que simplificarlo. Para ello se divide el numerador y el denominador entre el M.C.D. de ambos. En este caso hemos dividido entre 2 ya que M.C.D.(14, 12) = 2.</p>
<p>Producto (multiplicación)</p> $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$	<p>$\frac{4}{5} \cdot \frac{15}{8} = \frac{60}{40} = \frac{3}{2}$</p>
<p>Cociente (división)</p> $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}, \text{ o bien } \frac{a/b}{c/d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$ <p>Observación: la fracción d/c se llama inversa de c/d (al multiplicarlas el resultado es 1). Pues bien, para dividir dos fracciones, se multiplica la primera por la inversa de la segunda.</p>	<p>$\frac{15}{7} : \frac{5}{2} = \frac{30}{35} = \frac{6}{7}$, o lo que es lo mismo,</p> <p>$\frac{15/7}{5/2} = \frac{\text{extremos}}{\text{medios}} = \frac{15 \cdot 2}{7 \cdot 5} = \frac{30}{35} = \frac{6}{7}$</p>
<p>Potencia (de exponente entero positivo o cero)</p> $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}{b \cdot b \cdot \dots \cdot b} = \frac{a^n}{b^n}; \left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$	<p>$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$</p>
<p>Potencia (de exponente entero negativo)</p> $a^{-1} = \frac{1}{a}; a^{-n} = \frac{1}{a^n}; \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}; \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$ <p>Observación: para hacer una potencia de exponente negativo se cambia la base por su fracción inversa (en este caso a/b por b/a) y el exponente negativo se cambia a positivo. Así pues el resultado es la potencia de base la fracción inversa elevada al exponente pero positivo.</p>	<p>$\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{3^4}{2^4} = \frac{81}{16}$</p> <p>¡OBSERVA! El resultado obtenido (81/16) es la fracción inversa del resultado obtenido anteriormente (16/81), que era la misma potencia pero de exponente positivo.</p>

Es **importante** recordar que la **jerarquía entre las operaciones** es la siguiente:

- **Primero:** corchetes y paréntesis.
- **Segundo:** productos y divisiones.
- **Tercero:** sumas y restas.

Así no cometeremos errores a la hora de efectuar operaciones más extensas. Por ejemplo:

$$\frac{\left[\left(\frac{2}{3} + \frac{4}{5}\right) : \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right)\right] \cdot \left(\frac{-3}{2} + \frac{5}{3}\right)}{\frac{4}{3} - \frac{5}{2}} = \frac{\left[\left(\frac{10+12}{15}\right) : \left(\frac{3-4}{6}\right)\right] \cdot \left(\frac{-9+10}{6}\right)}{\frac{8-15}{6}} = \frac{\left(\frac{22}{15} : \frac{-1}{6}\right) \cdot \frac{1}{6}}{\frac{-7}{6}} = \frac{\frac{132}{-15} \cdot \frac{1}{6}}{\frac{-7}{6}} = \frac{\frac{132}{-90}}{\frac{-7}{6}} = \frac{792}{630} = \frac{44}{35}$$

El conjunto de los números reales

Conjuntos numéricos		
El conjunto de los números naturales : \mathbb{N}	$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$	
El conjunto de los números enteros : \mathbb{Z}	$\mathbb{Z} = \{\dots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$	
El conjunto de los números racionales : \mathbb{Q} (fracciones)	$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \text{ con } q \neq 0 \right\}$	
<p>Propiedad: todo número racional es entero, decimal exacto o decimal periódico (puro o mixto)</p> <p>Importante: debes recordar de cursos anteriores cómo se expresa un decimal exacto, periódico puro o periódico mixto en forma de fracción. Por ejemplo:</p> $1,65 = \frac{165-1}{99} = \frac{164}{99} ; 5,639 = \frac{5639-56}{990} = \frac{5583}{990} = \frac{1861}{330}$	$\frac{10}{-5} = -2 \text{ (entero); } \frac{13}{8} = 1,625 \text{ (decimal exacto);}$ $\frac{-14}{9} = 1,555\dots = 1,\widehat{5} \text{ (decimal periódico puro);}$ $\frac{19}{12} = 1,58333\dots = 1,5833 \text{ (decimal periódico mixto)}$	
El conjunto de los números irracionales : \mathbb{I} . Está formado por todos aquellos números reales que no son racionales. Tienen infinitas cifras decimales pero no forman período.	$1,2345679101112131415161718192021\dots$ $\sqrt{2} = 1,4142136\dots$ $\pi = 3,14155927\dots$	
<p>Representación de los números reales:</p>		
Intervalos y semirrectas		
Intervalo abierto: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$	Números que están comprendidos entre a y b	
Intervalo cerrado: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$	Números comprendidos entre a y b , incluidos éstos	
Intervalos semiabiertos	$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$	Números mayores que a y menores o iguales que b
	$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$	Números mayores o iguales que a y menores que b
Semirrectas	$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$	Números menores que a
	$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$	Números menores que a , incluido el propio a
	$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$	Números mayores que a
	$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$	Números mayores que a , incluido el propio a

Propiedades de las potencias. Igualdades notables

Propiedades de las potencias	
<p>Producto de potencias de la misma base es igual a la base elevada a la suma de los exponentes:</p> $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$(2x^3y^2)(-3x^2z^3)(-4yz^2) = 24x^3x^2y^2yz^3z^2 = 24x^5y^3z^5$
<p>Cociente de potencias de la misma base es igual a la base elevada a la diferencia de los exponentes:</p> $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\frac{12a^3x^5}{28ax^3} = \frac{12}{28} \cdot \frac{a^3}{a} \cdot \frac{x^5}{x^3} = \frac{3}{7}a^2x^2$
<p>Potencia de un producto es igual al producto de las potencias:</p> $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$(-2xyzp)^3 = (-2)^3 x^3 y^3 z^3 p^3 = -8x^3 y^3 z^3 p^3$
<p>Potencia de un cociente es igual al cociente de las potencias:</p> $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\left(\frac{-3ab}{2xy}\right)^3 = \frac{(-3ab)^3}{(2xy)^3} = \frac{-3^3 a^3 b^3}{2^3 x^3 y^3} = \frac{-27a^3 b^3}{8x^3 y^3}$
<p>Potencia de una potencia es igual a la base elevada al producto de los exponentes:</p> $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	$\left(-\frac{2}{3}x^2z^4\right)^3 = -\left(\frac{2}{3}\right)^3 (x^2)^3 (z^4)^3 = -\frac{8}{27}x^6z^{12}$
Igualdades notables	
<p>Cuadrado de una suma es igual al cuadrado del primero más dos veces el primero por el segundo, más el cuadrado del segundo:</p> $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ <p>¡OJO! No confundir la igualdad anterior con esta otra, que es errónea: $(a+b)^2 = a^2 + b^2$</p>	<p>a) $(2x+3)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = 4x^2 + 12x + 9$</p> <p>b) $\left(\frac{5}{x} + 2x\right)^2 = \left(\frac{5}{x}\right)^2 + 2 \cdot \frac{5}{x} \cdot 2x + (2x)^2 = \frac{25}{x} + 20 + 4x^2$</p>
<p>Cuadrado de una diferencia es igual al cuadrado del primero menos dos veces el primero por el segundo, más el cuadrado del segundo</p> $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ <p>¡OJO! No confundir la igualdad anterior con esta otra, que es errónea: $(a-b)^2 = a^2 - b^2$</p>	<p>a) $(5b-3)^2 = (5b)^2 - 2 \cdot 5b \cdot 3 + 3^2 = 25b^2 - 30b + 9$</p> <p>b) $\left(6x - \frac{x^2}{2}\right)^2 = (6x)^2 - 2 \cdot 6x \cdot \frac{x^2}{2} + \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 = 36x^2 - 6x^3 + \frac{x^4}{4}$</p>
<p>Suma por diferencia es igual a diferencia de cuadrados:</p> $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$	$(4x+2y)(4x-2y) = (4x)^2 - (2y)^2 = 16x^2 - 4y^2$

¡Recuerda!

Cuando el signo de la base de una potencia es negativo, entonces:

- ✓ Si el exponente es **par** el resultado es positivo.
- ✓ Si el exponente es **impar** el resultado es negativo.

Radicales

$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow a = b^n$ <p>$\sqrt[n]{a}$ es el radical, a el radicando y n el índice de la raíz.</p>	<p>Si $a \geq 0$, existe cualquiera que sea a.</p> <p>Si $a < 0$, $\sqrt[n]{a}$ solo existe para valores impares de n.</p>
<p>Forma exponencial: $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$; $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$</p>	$\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}, \text{ ya que } \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 2^{\frac{3}{3}} = 2$
Propiedades de los radicales	
<p>Radicales equivalentes: $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$</p>	$\sqrt[8]{81} = \sqrt[8]{3^4} = \sqrt[2 \cdot 4]{3^4} = \sqrt{3}$ <p>Reducir a índice común $\sqrt{2}$ y $\sqrt[3]{2}$:</p> $\sqrt{2} = \sqrt[2 \cdot 3]{2^3} = \sqrt[6]{8}; \sqrt[3]{2} = \sqrt[3 \cdot 2]{2^2} = \sqrt[6]{4}$
<p>Potencia de un radical: $(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}$</p>	$(\sqrt[6]{2})^4 = \sqrt[6]{2^4} = \sqrt[3]{2}$
<p>Raíz de una raíz: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$</p>	$\sqrt[3]{\sqrt[4]{9}} = \sqrt[24]{9} = \sqrt[24]{3^2} = \sqrt[12]{3}$
<p>Raíz de un producto: $\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$</p>	$\sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 2} = \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{2} = 3 \sqrt[3]{2}$ <p>(en este ejemplo la propiedad se ha utilizado dos veces)</p>
<p>Raíz de un cociente: $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$</p>	$\frac{\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt{9}}{\sqrt[6]{6}} = \frac{\sqrt[6]{(12)^2} \cdot \sqrt[6]{9^3}}{\sqrt[6]{6}} = \sqrt[6]{\frac{(2^2 \cdot 3)^2 \cdot (3^2)^3}{2 \cdot 3}} =$ $= \sqrt[6]{\frac{2^2 \cdot 3^2 \cdot 3^6}{2 \cdot 3}} = \sqrt[6]{2 \cdot 3^7} = \sqrt[6]{4374}$ <p>(observa cómo se han utilizado en este ejemplo varias de las propiedades anteriores para simplificar)</p>
<p>Suma de radicales: dos expresiones con radicales se dicen <i>semejantes</i> si la raíz que aparece en ambas tiene el mismo índice y el mismo radicando (por ejemplo $5\sqrt{2}$ y $-3\sqrt{2}$ son radicales semejantes). Solamente se pueden sumar (o restar) expresiones con radicales que sean semejantes.</p>	$\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{75} = \sqrt{2^2 \cdot 3} + \sqrt{3^3} - \sqrt{5^2 \cdot 3} =$ $= 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 5\sqrt{3} = (2 + 3 - 5)\sqrt{3} = 0\sqrt{3} = 0$
Racionalización de denominadores	
<p>Con una raíz cuadrada en el denominador: se multiplica arriba y abajo por la misma raíz.</p>	$\frac{3}{5\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{5\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{5 \cdot 3} = \frac{\sqrt{3}}{5}$
<p>Con una raíz de índice n en el denominador: se multiplica arriba y abajo por otra raíz de índice n de tal manera que se complete el radicando con una potencia de exponente n.</p>	$\frac{2}{\sqrt[3]{2}} = \frac{2\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2^2}} = \frac{2\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{2\sqrt[3]{4}}{2} = \sqrt[3]{4}$
<p>Con una suma o diferencia de raíces cuadradas en el denominador: se multiplica arriba y abajo por la expresión conjugada del denominador.</p>	$\frac{3}{\sqrt{6} - \sqrt{3}} = \frac{3(\sqrt{6} + \sqrt{3})}{(\sqrt{6} - \sqrt{3})(\sqrt{6} + \sqrt{3})} = \frac{3(\sqrt{6} + \sqrt{3})}{6 - 3} = \sqrt{6} + \sqrt{3}$

Notación científica

Definición	
<p>Un número está expresado en notación científica si se escribe como el producto de un número mayor o igual que 1 y menor estrictamente que 10, y una potencia de 10.</p> <p>Si un número está expresado en notación científica al exponente entero al que está elevado la potencia de 10 se le llama orden de magnitud.</p>	$0,000000034 = \frac{34}{100000000} = 34 \cdot 10^{-8} = 3,4 \cdot 10^{-7}$
	$26531000000 = 2,6531 \cdot 10^{10}$
	$947855,36 = 9,4785536 \cdot 10^5$
Suma y resta en notación científica	
<p>Para sumar y restar números expresados en notación científica es necesario que todos estén expresados con el mismo orden de magnitud. Es habitual escribirlos en el mayor de los órdenes de magnitud que aparezca en dichas sumas o restas.</p>	$5,3 \cdot 10^{12} - 3 \cdot 10^{11} = 5,3 \cdot 10^{12} - 0,3 \cdot 10^{12} =$ $= (5,3 - 0,3) \cdot 10^{12} = 5 \cdot 10^{12}$
	$3 \cdot 10^{-5} + 8,2 \cdot 10^{-6} = 3 \cdot 10^{-5} + 0,82 \cdot 10^{-5} =$ $= (3 + 0,82) \cdot 10^{-5} = 3,82 \cdot 10^{-5}$
Producto y división en notación científica	
<p>Para multiplicar y dividir números expresados en notación científica se opera con las potencias de 10 por un lado (aplicando las propiedades de las potencias), y el resto de la expresión por el otro.</p>	$(3,5 \cdot 10^7) \cdot (4 \cdot 10^8) = (3,5 \cdot 4) \cdot (10^7 \cdot 10^8) =$ $= 14 \cdot 10^{15} = 1,4 \cdot 10^{16}$
	$(1,2 \cdot 10^7) : (5 \cdot 10^{-6}) = (1,2 : 5) \cdot (10^7 : 10^{-6}) =$ $= 0,24 \cdot 10^{13} = 2,4 \cdot 10^{12}$
Cifras significativas	
<p>Recibe el nombre de cifra significativa todo dígito (exceptuando el cero cuando se utiliza para situar el punto decimal) cuyo valor se conoce con seguridad. El número 2,503 tiene cuatro cifras significativas. El número 0,00103 tiene tres cifras significativas; los tres primeros ceros no son cifras significativas ya que simplemente sitúan el punto decimal. En notación científica este último número se escribe $1,03 \cdot 10^{-3}$.</p>	<p>Por ejemplo, expresemos el resultado de la operación</p> $\frac{(7,2 \cdot 10^{-6})^3}{5,3 \cdot 10^{-9}}$ <p>en notación científica con tres cifras significativas:</p> $\frac{(7,2 \cdot 10^{-6})^3}{5,3 \cdot 10^{-9}} = \frac{(7,2)^3 \cdot (10^{-6})^3}{5,3 \cdot 10^{-9}} = \frac{373,248 \cdot 10^{-18}}{5,3 \cdot 10^{-9}} =$ $= \frac{373,248}{5,3} \cdot \frac{10^{-18}}{10^{-9}} = 70,4 \cdot 10^{-9} = 7,04 \cdot 10^{-8}$

Aproximaciones y errores

Orden de aproximación	
Se dice que de un número real tomamos una aproximación de orden n cuando se trata de un número racional con n cifras decimales.	$\frac{3\sqrt{5}}{4} = 1,7$ (Aproximación de orden 1). $\frac{3\sqrt{5}}{4} = 1,677$ (Aproximación de orden 3).
Métodos de aproximación	
<p>Por defecto o truncamiento: se eliminan las cifras decimales a partir del orden considerado.</p> <p>Por exceso: se eliminan las cifras decimales hasta el orden considerado y se añade una cifra</p> <p>Redondeo: se eliminan todas las cifras decimales a partir del orden indicado y, si la cifra siguiente al orden considerado es mayor o igual que 5, se añade una unidad a la última cifra</p>	<p>Aproximar 5,245848 hasta el orden 3 (milésimas). O lo que es lo mismo, aproximar 5,245848 con cuatro cifras significativas.</p> <p>Truncamiento: 5,245</p> <p>Por exceso: 5,246</p> <p>Redondeo: 5,246</p>
Error absoluto. Cota del error absoluto	
<p>Error absoluto (E_a) de una medida aproximada es el valor absoluto de la diferencia entre el valor real (V_r) y el valor aproximado (V_a):</p> $E_a = V_r - V_a $ <p>El valor real o exacto es, en la mayoría de los casos, desconocido. Por tanto, también se desconoce el error absoluto. Lo importante es poder acotarlo, diciendo que el error absoluto es menor que... Una cota del error absoluto se obtiene a partir de la última cifra significativa utilizada.</p>	<p>El error absoluto que se comete al redondear 5,245848 a las milésimas es:</p> $E_a = V_r - V_a = 5,245848 - 5,246 = 0,000152$ <p>Si una piscina tiene una capacidad de 719 m^3, la última cifra significativa (el 9) designa unidades de m^3. El error absoluto es menor que medio metro cúbico: $E_a < 0,5 \text{ m}^3$</p>
Error relativo. Cota del error relativo	
<p>Error relativo (E_r) es el cociente entre el error absoluto y el valor real:</p> $E_r = \left \frac{E_a}{V_r} \right $ <p>El error relativo es tanto menor cuantas más cifras significativas se usan.</p>	<p>Veamos un par de ejemplos basados en los dos ejemplos anteriores.</p> <p>El error relativo que se comente al redondear 5,245848 a las milésimas es:</p> $E_r = \left \frac{E_a}{V_r} \right = \left \frac{0,000152}{5,245848} \right = 0,000028975$ <p>Al tomar como capacidad de la piscina 719 m^3, el error relativo que se comete es menor que:</p> $E_r < \frac{0,5}{719} = 0,0007$