

Solución al problema de “suma de radicales casi pi”

Enunciado:

¿Por qué es $\sqrt{2} + \sqrt{3} \approx \pi$?



- El área del **hexágono** es $2\sqrt{3}$.
- El área del **octágono** es $2\sqrt{2}$.
- El promedio de estas áreas es $\sqrt{2} + \sqrt{3}$
- El área del **círculo** es π .

Demostrar que efectivamente las áreas que se dicen son esas y ver cómo podemos aproximar el número π como la suma que se dice, dando una cota del error relativo cometido si dicha aproximación la redondeamos a las diezmilésimas.

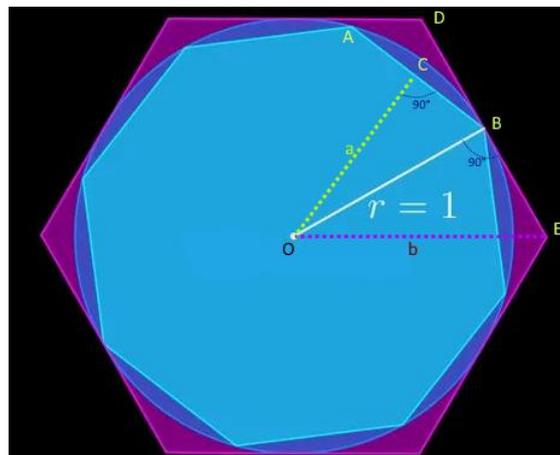
Como π esta atrapado entre los valores de las áreas del hexágono y del octágono, debe ser cercano al valor promedio de ambas áreas $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

Solución:

$r = 1$ es:

- La apotema del hexágono regular.
- El radio del círculo.
- El segmento que une cada vértice del octógono regular con su centro.

Obsérvese como queda la situación:



El hexágono regular tiene por lado DE que es igual a b (al ser el triángulo ODE equilátero). O sea que $BE = b/2$.

Por Pitágoras: $r^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = b^2 \Rightarrow 1 + \frac{b^2}{4} = b^2 \Rightarrow \frac{3b^2}{4} = 1 \Rightarrow b^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow b = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

Por lo que el área del hexágono regular es: $\frac{\text{Perímetro} \times \text{apotema}}{2} = \frac{6b \cdot 1}{2} = 3b = 2 \cdot \sqrt{3}$

El octógono regular tiene por lado $AB = 2CB$ y tiene como apotema a .

Por Pitágoras: $a^2 + CB^2 = 1 \Rightarrow CB = \sqrt{1 - a^2}$

Y el lado del octógono será: $AB = 2 \cdot CB = 2\sqrt{1 - a^2}$

Por lo que el área del octógono regular es: $\frac{\text{Perímetro} \times \text{apotema}}{2} = \frac{16\sqrt{1 - a^2} \cdot a}{2} = 8a\sqrt{1 - a^2}$

Por otra parte, en el triángulo rectángulo OCB, el ángulo $\hat{O} = \frac{360^\circ}{16} = 22'5''$ y el ángulo $\hat{B} = 90^\circ - 22'5'' =$

$67'5''$. Luego: $\text{sen } \hat{B} = a \Rightarrow a = \text{sen} \left(\frac{135^\circ}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos 135^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$

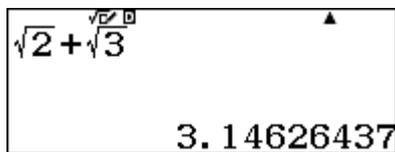
Así pues, el área del octógono regular es: $8a\sqrt{1 - a^2} = 8 \cdot \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{2 + \sqrt{2}}{4}} = 4 \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} =$
 $= 2 \cdot \sqrt{(2 + \sqrt{2}) \cdot (2 - \sqrt{2})} = 2 \cdot \sqrt{4 - 2} = 2 \cdot \sqrt{2}$

El área del círculo es: $\pi \cdot r^2 = \pi$

El área del círculo se podrá aproximar por el promedio de las áreas anteriores, es decir:

$$\pi \approx \frac{2 \cdot \sqrt{3} + 2 \cdot \sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$$

Ahora vamos a aproximar dicho valor a las diezmilésimas (por redondeo):



, que redondeado a las diezmilésimas nos queda: $V_{ap} = 3'1463$

Una cota del error absoluto sería:

$$E_a = |V_r - V_{ap}| = |\pi - 3'1463| = 0'004707 \dots < 0'005 = \varepsilon \text{ (cota del error absoluto)}$$

Y finalmente la cota del error relativo sería:

$$E_r = \frac{\varepsilon}{V_{ap-\varepsilon}} < \frac{0'005}{3'1463-0'005} = \frac{50}{31413} = 0'0015916 \dots < 0'0016 \text{ (cota del error relativo)}$$

En forma de porcentaje: 0'16 % (cota del error relativo)



profes.mates.jac