Solución al problema de “suma de radicales casi pi”

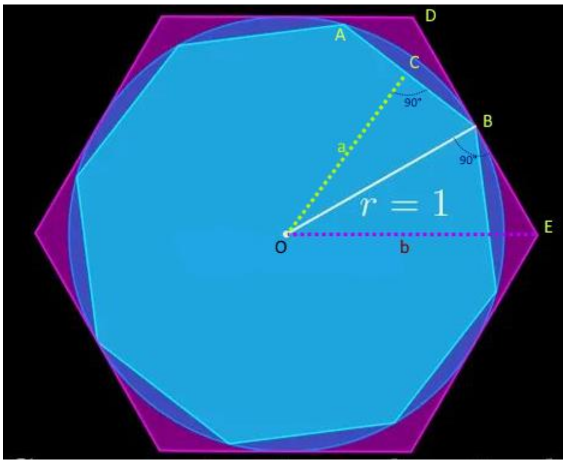
Enunciado:

Solución:

$r = 1$ es:

a) La apotema del hexágono regular.
b) El radio del círculo.
c) El segmento que une cada vértice del octógono regular con su centro.

Obsérvese como queda la situación:



El hexágono regular tiene por lado DE que es igual a ***b*** (al ser el triángulo ODE equilátero). O sea que BE = ***b/2***.

Por Pitágoras: $r^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2=b^2 \Rightarrow 1+\frac{b^2}{4}=b^2 \Rightarrow \frac{3b^2}{4}=1 \Rightarrow b^2=\frac{4}{3} \Rightarrow b=\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}$

Por lo que el ***área del hexágono regular es***: $\frac{Perímetro\ x\ apotema}{2}=\frac{6b\cdot 1}{2}=3b=\mathbf{2\cdot\sqrt{3}}$

El octógono regular tiene por lado AB = 2CB y tiene como apotema ***a***.

Por Pitágoras: $a^2+CB^2=1 \Rightarrow CB=\sqrt{1-a^2}$

Y el lado del octógono será: $AB=2\cdot CB=2\sqrt{1-a^2}$

Por lo que el área del octógono regular es: $\frac{Perímetro\ x\ apotema}{2}=\frac{16\sqrt{1-a^2}\cdot a}{2}=8a\sqrt{1-a^2}$

Por otra parte, en el triángulo rectángulo OCB, el ángulo $\hat{O}=\frac{360°}{16}=22´5°$ y el ángulo $\hat{B}=90°-22´5°=$ $67´5°$. Luego: $sen\ \hat{B}=a \Rightarrow a=sen\left(\frac{135°}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-\cos 135°}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

Así pues, el ***área del octógono regular es:*** $8a\sqrt{1-a^2}=8\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\sqrt{1-\frac{2+\sqrt{2}}{4}}=4\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}=$

$$=2\cdot\sqrt{(2+\sqrt{2})\cdot(2-\sqrt{2})}=2\cdot\sqrt{4-2}=2\cdot\sqrt{2}$$

El área del círculo es: $\pi\cdot r^2=\pi$

El área del círculo se podrá aproximar por el promedio de las áreas anteriores, es decir:

$$\pi\approx\frac{\mathbf{2\cdot\sqrt{3}+2\cdot\sqrt{2}}}{\mathbf{2}}=\mathbf{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

Ahora vamos a aproximar dicho valor a las diezmilésimas (por redondeo):

```
√2+√3
                3.14626437
```

, que redondeado a las diezmilésimas nos queda: $V_{ap}=3´1463$

Una cota del error absoluto sería:

$E_a = |V_r - V_{ap}| = |\pi - 3´1463| = 0´004707 \ldots < 0´005 = \varepsilon$ (cota del error absoluto)

Y finalmente la cota del error relativo sería:

$E_r = \frac{\varepsilon}{V_{ap} - \varepsilon} < \frac{0´005}{3´1463 - 0´005} = \frac{50}{31413} = 0´0015916 \ldots <$ **$0´0016$ (cota del error relativo)**

En forma de porcentaje: <u>0´16 % (cota del error relativo)</u>