

POTENCIAS DE EXPONENTE NATURAL

Concepto de potencia

Una potencia es una forma simplificada de escribir un producto de factores iguales.

Por ejemplo, 4^3 es una potencia:

$$4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4$$

↖ exponente
↘ 3 veces

↙ base

El factor que se repite se llama base y el número de veces que aparece la base como factor se llama exponente.

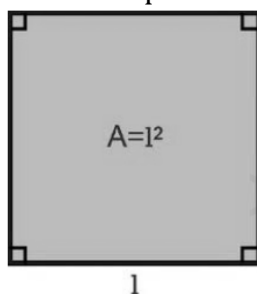
En general, a^n

↖ Exponente
↘ Base

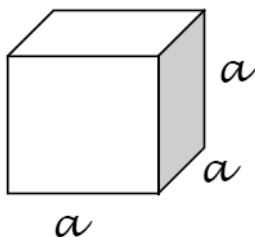
$$a^n = a \cdot \dots \cdot a$$

n veces

Las potencias de exponente 2 se leen “elevado al cuadrado” por su relación con un cuadrado ya que el área, A, de un cuadrado se calcula multiplicando lado por lado, o sea $A = 1 \cdot 1 = 1^2$.



Las potencias de exponente 3 se leen “elevado al cubo” por su relación con un cubo ya que el volumen, V, de un cubo es $V = a \cdot a \cdot a = a^3$.



Actividades resueltas

1) El edificio de enfrente de un instituto tiene 6 filas de ventanas. Cada fila tiene 6 ventanas y cada ventana tiene 6 cristales.

- a) Expresa en forma de potencia el número total de cristales que tiene el edificio
- b) Calcula cuántos cristales hay en total haciendo las cuentas.

Resolución

a) $6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3$ b) $6 \cdot 6 = 36$; $36 \cdot 6 = 216$ cristales

2) En una pequeña parcela hay 8 olivos. En cada olivo hay 8 ramas y cada rama tiene 8 hojas.

- a) Expresa en forma de potencia el número total de hojas que hay.
- b) Calcula cuántas hojas hay en total.

Resolución

a) $8 \cdot 8 \cdot 8 = 8^3$ b) $8 \cdot 8 = 64$; $64 \cdot 8 = 512$ hojas

Potencias de base negativa y exponente natural

- Base negativa y exponente par

Observa:

$$(-3)^2 = \overbrace{(-3)(-3)}^{\text{n}^\circ \text{ par de factores negativos}} = +3.3 = 3^2 = 9$$

$$(-3)^4 = \overbrace{(-3)(-3)(-3)(-3)}^{\text{n}^\circ \text{ par de factores negativos}} = +3.3.3.3 = 3^4 = 81, \text{ etc}$$

Luego, si la base es negativa y el exponente es par el resultado de la potencia es positivo.

En general, si n es par, $\boxed{(-a)^n = a^n}$

- Base negativa y exponente impar

Observa:

$$(-2)^3 = \overbrace{(-2)(-2)(-2)}^{\text{n}^\circ \text{ impar de factores negativos}} = -2.2.2 = -2^3 = -8$$

$$(-2)^5 = \overbrace{(-2)(-2)(-2)(-2)(-2)}^{\text{n}^\circ \text{ impar de factores negativos}} = -2.2.2.2.2 = -2^5 = -243, \text{ etc}$$

Luego, si la base es negativa y el exponente es impar el resultado de la potencia es negativo.

En general, si n es impar, $\boxed{(-a)^n = -a^n}$

Potencias de base - 1

Observa, $(-1)^2 = 1$, $(-1)^3 = -1$, $(-1)^4 = 1$, etc. En general, $\boxed{(-1)^n = \begin{cases} 1, & \text{si n es par} \\ -1, & \text{si n es impar} \end{cases}}$

Ejemplos: $(-1)^{34827} = -1$ (pues el exponente es impar) $(-1)^{63952} = 1$ (pues el exponente es par)

Actividad resuelta

Determina el valor de x: a) $(-3)^x = 81$ b) $(-2)^7 = x$ c) $(-1)^{16} = x$ d) $(-5)^x = -125$

Resolución

a) $x = 4$ b) $x = -128$ c) $x = 1$ d) $x = 3$

Opuesta de una potencia

Para calcular la opuesta de una potencia primero se calcula la potencia y luego se le cambia de signo

Ejemplos:

$$-3^2 = -9 \qquad -(-3)^2 = -9 \qquad -2^3 = -8 \qquad -(-2)^3 = -(-8) = 8$$

Operaciones con números enteros y potencias

Para realizar operaciones combinadas se sigue el siguiente orden:

1º) Se calculan las potencias

2º) Se hacen las multiplicaciones y divisiones

3º) Se hacen las sumas y restas

Si hubiese paréntesis, debemos hacer en primer lugar las operaciones de dentro de los paréntesis siguiendo el orden anterior.

Ejemplos:

$$1) 1 + 7 \cdot (-2)^3 - 4 - 54 : 3^2 = 1 + 7 \cdot (-8) - 4 - 54 : 9 = 1 - 56 - 4 - 6 = -65$$

$$2) 2 \cdot (-3) - 30 : (-1 - 3^2) = 2 \cdot (-3) - 30 : (-1 - 9) = 2 \cdot (-3) - 30 : (-10) = -6 + 3 = -3$$

$$3) 5 \cdot 2^3 - 15 : (7 - 36 : 3^2) + 13^1 = 5 \cdot 8 - 15 : (7 - 36 : 9) + 13 = 40 - 15 : (7 - 4) + 13 = 40 - 15 : 3 + 13 = 40 - 5 + 13 = 48$$

PROPIEDADES DE LAS POTENCIAS

Producto de potencias de la misma base

$$\text{Observa: } 2^5 \cdot 2^3 = \overbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}^{5 \text{ veces}} \cdot \overbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}^{3 \text{ veces}} = \overbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}^{8 \text{ veces}} = 2^8 = 2^{5+3}$$

Para multiplicar potencias de la misma base se deja la misma base y se suman los exponentes

$$\boxed{a^m a^n = a^{m+n}}$$

Nota : No hay propiedades para la suma o resta de potencias. Por ejemplo:

$$2^3 + 2^2 \neq 2^5 \text{ ya que } 8 + 4 \neq 32 \qquad 2^3 - 2^2 \neq 2^1 \text{ ya que } 8 - 4 \neq 2$$

División de potencias de la misma base

$$\text{Observa: } 2^7 : 2^4 = \frac{2^7}{2^4} = \frac{\overbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}^{7 \text{ veces}}}{\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{4 \text{ veces}}} = \frac{\cancel{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}^4 \cdot \overbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}^3}{\cancel{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_4} = \overbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}^3 = 2^3 = 2^{7-4}$$

Para dividir potencias de la misma base se deja la misma base y se restan los exponentes

$$\boxed{a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$$

Potencias de exponente cero

Observa $\left\{ \begin{array}{l} \frac{2^3}{2^3} = 2^{3-3} = 2^0 \\ \frac{2^3}{2^3} = \frac{8}{8} = 1 \end{array} \right. \Rightarrow 2^0 = 1$ En general, un número elevado a 0 es igual a 1: $\boxed{a^0 = 1}$

Potencia de una potencia

Observa: $(3^2)^5 = \overbrace{3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2}^{5 \text{ veces}} = \overbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}^{10 \text{ veces}} = 3^{10} = 3^{2 \cdot 5}$

Para calcular la potencia de una potencia se deja la misma base y se multiplican los exponentes:

$$\boxed{(a^m)^n = a^{mn}}$$

Producto y división de potencias del mismo exponente

Observa: $2^3 \cdot 5^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) = (2 \cdot 5)^3$. $x^2 \cdot y^2 = x \cdot x \cdot y \cdot y = x \cdot y \cdot x \cdot y = (x \cdot y)^2$.

Para multiplicar potencias del mismo exponente se multiplican las bases y se deja el mismo exponente:

$$\boxed{a^m b^m = (ab)^m}$$

Observa: $\frac{3^4}{5^4} = \frac{\overbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}^{4 \text{ veces}}}{\overbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}^{4 \text{ veces}}} = \frac{\overbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}^{4 \text{ veces}}}{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = \left(\frac{3}{5}\right)^4$.

Para dividir potencias del mismo exponente se dividen las bases y se deja el mismo exponente:

$$\boxed{\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m}$$

Nota: no hay propiedades para que no tengan nada en común, como por ejemplo : $2^3 \cdot 5^2 \neq 10^5$ ya que $8 \cdot 25 \neq 100\,000$. En estos casos, hay que calcular cada potencia y luego operar.

Potencia de un producto

Observa: $(3 \cdot 5)^4 = \overbrace{(3 \cdot 5) \cdot (3 \cdot 5) \cdot (3 \cdot 5) \cdot (3 \cdot 5)}^{4 \text{ veces}} = \overbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}^{4 \text{ veces}} \cdot \overbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}^{4 \text{ veces}} = 3^4 5^4$.

Para calcular la potencia de un producto se eleva cada factor al exponente de la potencia:

$$\boxed{(ab)^m = a^m b^m}$$

Actividades resueltas

1) Usa propiedades de las potencias para simplificar:

a) $5^{12} \cdot 5^7 \cdot 5 \cdot 5^4 \rightarrow 5^{24}$

b) $17^{43} : 17^{24} \rightarrow 17^{19}$

c) $(7^9)^6 \rightarrow 7^{54}$

d) $2^{12} \cdot 5^{12} \rightarrow 10^{12} = 1\ 000\ 000\ 000\ 000$

e) $14^5 : 7^5 \rightarrow 2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$

e) $x^2y^2 \rightarrow (xy)^2$

f) $m^5n^5 \rightarrow (mn)^5$

g) $a^4b^4c^4d^4 \rightarrow (abcd)^4$

h) $\frac{15^6}{3^6} \rightarrow \left(\frac{15}{3}\right)^6 = 5^6 = 15625$

i) $\frac{6^7}{(-6)^7} \rightarrow \left(\frac{6}{-6}\right)^7 = (-1)^7 = -1$

j) $[(-2)^3 3^3]^2 \rightarrow [(-6)^3]^2 = (-6)^6 = 46656$

k) $5^{35} : (5^4)^7 \cdot 5^{10} \rightarrow 5^{35} : 5^{28} \cdot 5^{10} = 5^7 \cdot 5^{10} = 5^{17}$

l) $2^{17} : (2^3)^5 \cdot 2^{19} \rightarrow 2^{17} : 2^{15} \cdot 2^{19} = 2^2 \cdot 2^{19} = 2^{21}$

m) $(3a^4)^2 \cdot (2a^3)^3 \cdot (2a)^5 \rightarrow 3^2(a^4)^2 \cdot 2^3(a^3)^3 \cdot 2^5a^5 = 9a^8 \cdot 8a^9 \cdot 32a^5 = 9 \cdot 8 \cdot 32 \cdot a^{8+9+5} = 2304a^{22}$

n) $\frac{(8x^3)^2}{(2x)^5} \rightarrow \frac{8^2(x^3)^2}{2^5x^5} = \frac{64x^6}{32x^5} = \frac{64}{32} \frac{x^6}{x^5} = 2x^{6-5} = 2x^1 = 2x$

ñ) $x^{16}y^3x^5y^5x(y^2)^7 \rightarrow x^{16}x^5x \cdot y^3y^5y^{14} = x^{16+5+1} y^{3+5+14} = x^{22}y^{22} = (xy)^{22}$

2) Desarrolla las potencias:

a) $(5ab)^3 \rightarrow 5^3a^3b^3 = 125a^3b^3$

b) $(-2x^3)^2 \rightarrow (-2)^2(x^3)^2 = 4x^6$

c) $(-2xy^2z)^5 \rightarrow (-2)^5x^5(y^2)^5z^5 = -32x^5y^{10}z^5$

d) $(-5xy^3z)^4 \rightarrow (-5)^4x^4y^{12}z^4 = 625x^4y^{12}z^4$

POTENCIAS DE EXPONENTE NEGATIVO

Veamos ahora como se pueden calcular potencias cuando el exponente es un número entero negativo de forma que se sigan cumpliendo las propiedades de las potencias.

Empecemos con un caso concreto, por ejemplo 3^{-2} .

Observa: $3^{-2} = \frac{3^0}{3^2} = \frac{1}{3^2}$ En general: $a^{-m} = \frac{a^0}{a^m} = \frac{1}{a^m} \Rightarrow \boxed{a^{-m} = \frac{1}{a^m}}$

Casos especiales:

$7^{-1} = \frac{1}{7^1} = \frac{1}{7} \Leftarrow$ Inverso de 7. En general, $\boxed{a^{-1} = \frac{1}{a} \Leftarrow}$ inverso de a

$\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{2^{-1}}{3^{-1}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \Leftarrow$ inverso de $\frac{2}{3}$. En general, $\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a} \Leftarrow}$ inverso de $\frac{a}{b}$

$\left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \left[\left(\frac{3}{5}\right)^{-1}\right]^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{5^2}{3^2} = \frac{25}{9}$. En general, $\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m}$

Uso de la calculadora científica para calcular potencias

Cualquier potencia se puede hallar. Por ejemplo, 2^{15} se calcula así con la calculadora científica CASIO:

2 \square_{\wedge} 15 $\square_{=}$. El resultado es 32 768

Actividades resueltas

1) Usando la definición de potencia de exponente negativo calcula las siguientes potencias dejando el resultado en forma de fracción irreducible o como un número entero

a) $\left(\frac{-3}{2}\right)^{-4}$ b) 2^{-3} c) $-\left(\frac{-3}{5}\right)^{-2}$ d) $(-5)^{-3}$ e) $\left(\frac{-1}{2}\right)^{-5}$ f) $-(-3)^{-2}$ g) $\left(\frac{-1}{4}\right)^{-3}$

Resolución

a) $\left(\frac{2}{-3}\right)^4 = \frac{16}{81}$ b) $\frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ c) $-\left(\frac{5}{-3}\right)^2 = -\frac{25}{9}$ d) $\frac{1}{(-5)^3} = \frac{-1}{125}$

e) $\left(\frac{2}{-1}\right)^5 = (-2)^5 = -32$ f) $-\frac{1}{(-3)^2} = -\frac{1}{9}$ g) $\left(\frac{4}{-1}\right)^3 = (-4)^3 = -64$

2) Transforma en un producto: a) $\frac{x}{y^3}$ b) $\frac{3a^2b}{5a^{-3}b^4}$

Resolución a) xy^{-3} b) $3a^2b(5a^{-3}b^4)^{-1} = 3a^2b5^{-1}a^3b^{-4} = 2.5^{-1}a^5b^{-3}$

3) Aplica propiedades de las potencias para reducir la expresión $\frac{5^7 \cdot 125^4}{5^{20}}$ a una única potencia. Calcula después la potencia dejando el resultado en forma de fracción irreducible.

Resolución

$$\frac{5^7 \cdot (5^3)^4}{5^{20}} = \frac{5^7 \cdot 5^{12}}{5^{20}} = \frac{5^{19}}{5^{20}} = 5^{-1} = \frac{1}{5}$$

4) Usando propiedades de las potencias reduce lo máximo posible: a) $\left(\frac{a^3 b^{-4}}{a^4 b^{-1}}\right)^{-3}$ b) $\frac{(x^{-4})^{-1} y^2}{(x^{-3} y^2)^2 y^{-2}}$

Resolución

a) $\left(\frac{a^3 b^{-4}}{a^4 b^{-1}}\right)^{-3} = (a^{-1} b^{-3})^{-3} = a^3 b^9$ b) $\frac{x^4 y^2}{x^{-6} y^4 y^{-2}} = \frac{x^4 y^2}{x^{-6} y^2} = x^{10}$

5) Aplica propiedades de las potencias para reducir lo máximo posible. Después calcula dejando el resultado como fracción irreducible o como un número entero:

a) $\frac{3^{-5} \cdot 4^{-5}}{(-6)^{-5}}$ b) $\frac{-(-2)^9 (-2)^{16} (-2)}{[(-2)^4]^3 [(-2)^2]^6}$ c) $\frac{2^7 \cdot 8^4}{2^{20}}$ d) $\frac{16^{-2} \cdot 3^{-3} \cdot 4^2}{27^{-2} \cdot 6^3 \cdot 2^{-3}}$

Resolución

a) $\frac{12^{-5}}{(-6)^{-5}} = (-2)^{-5} = \frac{-1}{32}$ b) $\frac{-(-2)^{26}}{(-2)^{12} (-2)^{12}} = \frac{-(-2)^{26}}{(-2)^{24}} = -(-2)^2 = -4$

c) $\frac{2^7 \cdot (2^3)^4}{2^{20}} = \frac{2^7 \cdot 2^{12}}{2^{20}} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$ d) $\frac{(2^4)^{-2} 3^{-3} (2^2)^2}{(3^3)^{-2} (2 \cdot 3)^3 2^{-3}} = \frac{2^{-8} 3^{-3} 2^4}{3^{-6} 2^3 3^3 2^{-3}} = \frac{2^{-4} 3^{-3}}{2^0 3^{-3}} = 2^{-4} = \frac{1}{16}$

6) Transforma en una sola potencia y después calcula el valor de dicha potencia dando el resultado en

forma de fracción irreducible: $\frac{4^{-2} \cdot 8 \cdot 32^{-1}}{16^3 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^5}$

Resolución

$\frac{(2^2)^{-2} 2^3 (2^5)^{-1}}{(2^4)^3 \left(\frac{1}{2^3}\right)^5} = \frac{2^{-4} 2^3 2^{-5}}{2^{12} 2^{-15}} = 2^{-4+3-5-12+15} = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

Operaciones combinadas

Para realizar operaciones combinadas con números enteros en los que aparezcan potencias debemos tener en cuenta que primero se calculan las potencias, luego las multiplicaciones y divisiones, de izquierda a derecha y al final las sumas y restas.

Actividad resuelta

Realiza las siguientes operaciones dejando el resultado en forma de fracción irreducible

a) $(-4)^{-1} - (-2)^{-1} + (2 \cdot 3^{-1})^{-2} - (-1)^{-824}$ b) $(3 \cdot 2^{-3} - 5 \cdot 2^0) : (2^{-2} + 6^{-1})$

c) $\frac{1}{2} \cdot 3^{-1} - 1 : \left(\frac{-4}{3}\right)^{-2}$ d) $5 \cdot 6^{-1} - 1 : \left(\frac{-3}{2}\right)^{-2}$

Resolución a) $\frac{-1}{4} - \frac{-1}{2} + (2 \cdot \frac{1}{3})^{-2} - 1 = \frac{-1}{4} - \frac{-1}{2} + \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} - 1 = \frac{-1}{4} - \frac{-1}{2} + \frac{9}{4} - 1 = \frac{3}{2}$

b) $\left(\frac{3}{8} - 5\right) : \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right) = \frac{-37}{8} : \frac{5}{12} = \frac{-111}{10}$ c) $\frac{11}{23} - 1 : \frac{9}{16} = \frac{1}{6} - \frac{16}{9} = \frac{-29}{18}$

d) $5 \cdot \frac{1}{6} - 1 : \left(\frac{2}{-3}\right)^2 = \frac{5}{6} - 1 : \frac{4}{9} = \frac{5}{6} - \frac{9}{4} = \frac{10}{12} - \frac{27}{12} = \frac{-17}{12}$

NOTACIÓN CIENTÍFICA

Potencias de base 10

Observa: $10^1 = 10$ $10^2 = 10 \cdot 10 = 100$ $10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1\ 000$ etc .

Para calcular una potencia de base 10 y exponente natural se pone un 1 y se añaden tantos ceros como indica el exponente. *Ejemplo:* $10^8 = 100\ 000\ 000$. En general, la regla es

$$10^m = \underbrace{10\dots\dots0}_{m \text{ ceros}}$$

Observa: $10^{-1} = \frac{1}{10^1} = \frac{1}{10} = 0,1$ $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0,01$ $10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0,001$ etc .

Para calcular una potencia de base 10 y exponente negativo se pone un 1 y se anteponen tantos ceros como indica el exponente.

$$10^{-m} = \underbrace{0,\dots\dots01}_{m \text{ ceros}} \cdot \textit{Ejemplo: } 10^{-7} = 0,000\ 0001$$

Actividad resuelta

Escribe en forma de potencia de base 10: a) $1\ 000\ 000\ 000 = 10^{\square}$ b) $100\ 000\ 000\ 000 = 10^{\square}$

Resolución a) 10^9 b) 10^{12}

Producto de un número por una potencia de base 10

Observa $35 \cdot 10 = 350$; $35 \cdot 10^2 = 35 \cdot 100 = 3\ 500$; $35 \cdot 10^3 = 35\ 000$; etc.

En general, para multiplicar un número natural por una potencia de base 10 se añaden tantos ceros como indica el exponente.

Para multiplicar cualquier número natural o decimal por una potencia de base 10 se desplaza la coma tantos lugares como indica el exponente, hacía adelante si el exponente es positivo y hacía atrás si es negativo. *Ejemplos:* $3,25 \cdot 10^3 = 3250$ $3,25 \cdot 10^{-3} = 0,00325$

Observa que:

$$3,25 \cdot 10^{-3} = \frac{3,25}{10^3} \text{ luego multiplicar por } 10^{-n} \text{ equivale a dividir entre } 10^n.$$

$$\frac{3,25}{10^{-3}} = 3,25 : \frac{1}{10^3} = 3,25 \cdot 10^3 \text{ luego dividir entre } 10^{-n} \text{ equivale a multiplicar por } 10^n.$$

División de un número terminado en ceros entre una potencia de base 10

Observa:

$$5\ 207\ 000\ 000 : 10^5 = 5\ 207\ 000\ 000 : 100\ 000 = 52\ 070 \qquad 470\ 000 : 10^4 = 470\ 000 : 10\ 000 = 47.$$

En general, para dividir un número natural entre una potencia de base 10 se eliminan tantos ceros como indica el exponente.

Expresiones de números muy grandes

Un número con “muchos” ceros se puede expresar como un producto de un número natural por una potencia de base 10. Por ejemplo, $70\ 400\ 000\ 000 = 704.100\ 000\ 000 = 704.10^8$

Este tipo de expresiones permite comparar números muy grandes de forma sencilla.
 Por ejemplo, $24.10^{12} > 24.10^7$, pues $12 > 7$ $19.10^{40} > 17.10^{40}$ pues $19 > 17$

Actividad resuelta

Expresa las siguientes cantidades como un número natural por una potencia de base 10:

- a) La distancia de la Tierra al Sol, 150 millones de kilómetros
- b) La población de la Tierra, seis mil millones de habitantes
- c) El radio de la Tierra, 6 400 000 m

Resolución a) $150\ 000\ 000 = 15.10^7$ b) $6\ 000\ 000\ 000 = 6.10^9$ c) 64.10^5

Notación científica para números “grandes”

La expresión $2,5 \cdot 10^7$ consta de un número decimal con una cifra entera no nula y una potencia de base 10. Se dice que es una expresión en **notación científica**.

Un número está escrito en notación científica si es de la forma **$A \cdot 10^n$** , siendo A un número con una cifra entera no nula, llamado coeficiente y el exponente n un número entero, llamado orden de magnitud.
Ejemplos: $2,5 \cdot 10^7$ y $1,75 \cdot 10^{-6}$ son expresiones en notación científica.

La notación científica nos ayuda a poder expresar de forma más sencilla cantidades demasiado pequeñas o demasiado grandes.

Esta notación no solamente abrevia la expresión del número, sino que además es muy útil en los cálculos. Esta notación se llama científica porque su uso se ha generalizado modernamente en muchas ciencias, tales como Física, Química, Astronomía, Biología y otras.

La velocidad de la luz, las distancias de unas estrellas a otras, las deudas públicas de algunos países, son cantidades que requieren grandes números para su representación (en términos de unidades usuales). El peso de un átomo, la longitud de una onda luminosa, el diámetro de la órbita de un electrón, son cantidades que, por el contrario, requieren números muy pequeños para su representación.

Veamos con algunos ejemplos como expresar números en notación científica:

Para números “muy grandes”:

$$\overbrace{378\ 500\ 000\ 000}^{11\ \text{cifras}} = \underbrace{3,785}_{\text{Notación científica}} \cdot 10^{11} \rightarrow \text{Orden de magnitud: } 11$$

Observa: $378\ 500\ 000\ 000 = 3,785 \cdot 10^{11} = 37,85 \cdot 10^{10} = \dots$

Para números “muy pequeños”:

$$\overbrace{0,000\ 000\ 000\ 00706}^{12\ \text{ceros}} = \underbrace{7,06}_{\text{Notación científica}} \cdot 10^{-12} \rightarrow \text{Orden de magnitud: } -12$$

Notación científica en la calculadora

Las expresiones de un número por una potencia de 10 se pueden introducir en la calculadora científica CASIO usando la tecla EXP. El proceso es coeficiente [EXP] exponente [=].

Por ejemplo, la forma de introducir $2,756 \cdot 10^{-12}$ es: 2.756 [EXP] [-] 12 [=].

Aparecerá en la pantalla 2.756×10^{-12} que significa $2,756 \cdot 10^{-12}$.

Comparación de números en notación científica

El orden de magnitud indica lo grande o pequeño que es un número: Si el exponente es positivo el número es “grande” y si es negativo es “pequeño”

Dados dos números, es mayor el que tenga mayor orden de magnitud

Ejemplos: $3,5 \cdot 10^{15} > 8,7 \cdot 10^{12}$ $1,35 \cdot 10^{-6} > 4 \cdot 10^{-7}$.

Si tienen el mismo orden de magnitud, es mayor el que tenga mayor coeficiente

Ejemplos: $3,75 \cdot 10^7 > 2,25 \cdot 10^7$ $9,45 \cdot 10^{-4} > 7,2 \cdot 10^{-4}$.

Si tienen el mismo orden de magnitud, es mayor el que tenga mayor coeficiente

Ejemplo: $3,75 \cdot 10^7 > 2,25 \cdot 10^7$, pues $3,75 > 2,25$

Cifras significativas

Las cifras significativas de un número son todas las cifras que se conocen con seguridad en una medida, o de las que existe una cierta certeza.

El número de cifras significativas en un número decimal es el número de cifras sin contar ceros a la izquierda. Ejemplo: 2,78; 0,554 y 0,00390 tienen tres cifras significativas.

El número de cifras significativas en un número entero es el número de cifras sin contar ceros a la derecha. Ejemplo: 20047000000, 13524000 y 4030100000 tienen cinco cifras significativas.

Cuando el número está escrito en notación científica, el número de cifras significativas es el número de cifras del coeficiente.

Actividades resueltas

1) Expresa en notación científica e indica el orden de magnitud:

a) La masa del planeta Marte, 642 000 000 000 000 000 000 000 kg

Resolución $6,42 \cdot 10^{23}$, orden de magnitud : 23

b) El diámetro del ADN: 0,0000000002 mm **Resolución** $2 \cdot 10^{-10}$, orden de magnitud : -10

2) Expresa las siguientes cantidades en notación científica y después indica cuál es la menor. Indica también el número de cifras significativas de cada número.

a) La masa de Saturno: 568 000 000 000 000 000 000 000 kg y la de Neptuno: 10 200 000 000 000 000 000 000 000 kg

b) El diámetro de un microbio: 0,000 004 cm y el de un virus: 0,000 000 28 cm

Resolución

a) $5,68 \cdot 10^{26}$ y $1,02 \cdot 10^{28}$; la menor es la masa de Saturno; ambas tiene 3 cifras significativas

b) $4 \cdot 10^{-6}$ (1 cifra significativa) y $2,8 \cdot 10^{-7}$ (2 cifras significativas) ; la menor es el diámetro del virus

3) Las expresiones $40 \cdot 10^{-36}$ y $0,05 \cdot 10^{64}$ no están escritas correctamente en notación científica. Explica por qué, escríbelas correctamente e indica el número de cifras significativas.

Resolución

La primera porque tiene 2 cifras enteras; lo correcto sería $4 \cdot 10^{-35}$; 1 cifra significativa

La segunda porque la parte entera es cero; lo correcto sería $5 \cdot 10^{62}$; 1 cifra significativa

Operaciones con números en notación científica

Suma y resta

Observa:

$$2,5 \cdot 10^4 - 2 \cdot 10^4 + 0,25 \cdot 10^4 = (2,5 - 2 + 0,25) \cdot 10^4 = 0,75 \cdot 10^4$$

$$2,5 \cdot 10^{-4} - 2 \cdot 10^{-4} + 0,25 \cdot 10^{-4} = (2,5 - 2 + 0,25) \cdot 10^{-4} = 0,75 \cdot 10^{-4}$$

En general, $A \cdot 10^m \pm B \cdot 10^m = (A \pm B) \cdot 10^m$

Si no aparece la misma potencia de 10, los transformamos y luego usamos la regla anterior

Ejemplo:

$$0,87 \cdot 10^{-4} + 0,000000042 \cdot 10^5 - 52,3 \cdot 10^{-7} \rightarrow 0,87 \cdot \frac{10^{-4}}{10^7 \cdot 10^{-7}} + 0,000000042 \cdot \frac{10^5}{10^7 \cdot 10^{-7}} - 52,3 \cdot 10^{-7} =$$

$$= (0,87 \cdot 10^{-4} \cdot 10^7 + 0,000000042 \cdot 10^5 \cdot 10^7 - 52,3) \cdot 10^{-7} = (870 + 42000 - 52,3) \cdot 10^{-7} = 42817,7 \cdot 10^{-7}$$

Actividad resuelta

Completa las siguientes sumas y restas:

a) $4,52 \cdot 10^{-7} - 1,25 \cdot 10^{-7} + 2,75 \cdot 10^{-7}$ **Resolución** $(4,52 - 1,25 + 2,75) \cdot 10^{-7} = 6,02 \cdot 10^{-7}$

b) $225,6 \cdot 10^{-9} + 0,45 \cdot 10^{-7}$

Resolución

$$225,6 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-7} + 0,45 \cdot 10^{-7} = 2,256 \cdot 10^{-7} + 0,45 \cdot 10^{-7} = 2,706 \cdot 10^{-7}$$

c) $872\,000\,000 - 1,234 \cdot 10^9$

Resolución

$$8,72 \cdot 10^8 - 1,234 \cdot 10^9 = 8,72 \cdot 10^8 - 1,234 \cdot 10^1 \cdot 10^8 = 8,72 \cdot 10^8 - 12,34 \cdot 10^8 = -3,62 \cdot 10^8$$

d) $9,15 \cdot 10^5 + 0,25 \cdot 10^6 - 7,8 \cdot 10^4$

Resolución

$$9,15 \cdot 10^1 \cdot 10^4 + 0,25 \cdot 10^2 \cdot 10^4 - 7,8 \cdot 10^4 = 91,5 \cdot 10^4 + 25 \cdot 10^4 - 7,8 \cdot 10^4 = 108,7 \cdot 10^4$$

Producto y cociente

Observa:

$$(32,5 \cdot 10^7)(8,5 \cdot 10^4) = (32,5 \cdot 8,5) \cdot 10^{7+4} = 276,25 \cdot 10^{11}$$

$$(32,5 \cdot 10^{-7})(8,5 \cdot 10^4) = (32,5 \cdot 8,5) \cdot 10^{-7+4} = 276,25 \cdot 10^{-3}$$

$$\frac{0,5 \cdot 10^{-6}}{0,125 \cdot 10^{-2}} = \frac{0,5}{0,125} \cdot \frac{10^{-6}}{10^{-2}} = (0,5 : 0,125) \cdot 10^{-6-(-2)} = 4 \cdot 10^{-4}$$

En general:

Para multiplicar este tipo de expresiones, se multiplican los números por una parte y las potencias de 10 por otra. $(A \cdot 10^m) \cdot (B \cdot 10^n) = (A \cdot B) \cdot 10^{m+n}$

Para dividir este tipo de expresiones, se dividen los números por una parte y las potencias de 10 por otra.

$$\frac{A \cdot 10^m}{B \cdot 10^n} = (A : B) \cdot 10^{m-n}$$

Potencia

Observa: $(0,25 \cdot 10^{-3})^{-2} = 0,25^{-2} \cdot (10^{-3})^{-2} = 16 \cdot 10^6$. En general, $(A \cdot 10^m)^n = A^n \cdot 10^{mn}$

Actividades resueltas

1) Usando las reglas para operar con números en notación científica, realiza y deja el resultado en notación científica:

a) $(0,75 \cdot 10^{-15}) \cdot (3 \cdot 10^{12}) \rightarrow 2,25 \cdot 10^{-3} = 0,00225$

b) $7 \cdot 10^8 - 3 \cdot 10^8 + 10^8 \rightarrow 5 \cdot 10^8 = 500\,000\,000$

c) $(3 \cdot 10^{-2})^2 \rightarrow 9 \cdot 10^{-4} = 0,0009$

2) Completa: $\frac{7,5 \cdot 10^{-10} \cdot 12,25 \cdot 10^4}{0,5 \cdot 10^{-3} \cdot 75 \cdot 10^{-5}} = \frac{\boxed{} \cdot 10^{\boxed{}}}{\boxed{} \cdot 10^{\boxed{}}} = \boxed{} \cdot 10^{\boxed{}} = \boxed{}$

Resolución: $\frac{91,875 \cdot 10^{-6}}{37,5 \cdot 10^{-8}} = 2,45 \cdot 10^2 = 245$

3) Realiza las siguientes operaciones. Da el resultado en forma de notación científica y también su desarrollo. Comprueba tus respuestas usando tu calculadora científica:

a)
$$\frac{0,000\ 000\ 000\ 0025 \cdot (7\ 200\ 000 - 400\ 000)}{(0,002)^2}$$

Resolución

$$\frac{2,5 \cdot 10^{-12} (7,2 \cdot 10^6 - 4 \cdot 10^5)}{(2 \cdot 10^{-3})^2} = \frac{2,5 \cdot 10^{-12} \cdot 6,8 \cdot 10^6}{4 \cdot 10^{-6}} = \frac{1,7 \cdot 10^{-5}}{4 \cdot 10^{-6}} = 4,25 = 4,25 \cdot 10^0$$

b)
$$\frac{30000 \cdot (5 \cdot 10^{-2} + 30,25 \cdot 10^{-3} - 0,2 \cdot 10^{-1})}{(4 \cdot 10^{-7}) : (5 \cdot 10^{-6})}$$

Resolución

$$\frac{3 \cdot 10^4 (5 \cdot 10^{-2} + 30,25 \cdot 10^{-3} - 0,2 \cdot 10^{-1})}{8 \cdot 10^{-2}} = \frac{3 \cdot 10^4 \cdot 6,025 \cdot 10^{-2}}{8 \cdot 10^{-2}} = \frac{1,8075 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^{-2}} = 22593,75 = 2,259375 \cdot 10^4$$

c)
$$\frac{30000 \cdot (5 \cdot 10^{-2} + 30,25 \cdot 10^{-3} - 0,2 \cdot 10^{-1})}{(4 \cdot 10^{-7}) : (5 \cdot 10^{-6})}$$

Resolución

$$\begin{aligned} &= \frac{3 \cdot 10^4 (5 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-1} + 30,25 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-1} - 0,2 \cdot 10^{-1})}{0,8 \cdot 10^{-1}} = \frac{3 \cdot 10^4 (0,5 \cdot 10^{-1} + 0,3025 \cdot 10^{-1} - 0,2 \cdot 10^{-1})}{0,8 \cdot 10^{-1}} = \\ &= \frac{3 \cdot 10^4 \cdot 0,6025 \cdot 10^{-1}}{0,8 \cdot 10^{-1}} = 2,259375 \cdot 10^4 = 22593,75 \end{aligned}$$

d)
$$\frac{0,000\ 000\ 000\ 0025 \cdot (7\ 200\ 000 - 400\ 000)}{(0,002)^2}$$

Resolución

$$\frac{2,5 \cdot 10^{-12} \cdot (7,2 \cdot 10^6 - 4 \cdot 10^5)}{(2 \cdot 10^{-3})^2} = \frac{2,5 \cdot 10^{-12} \cdot (7,2 \cdot 10^6 - 0,4 \cdot 10^6)}{(2 \cdot 10^{-3})^2} = \frac{2,5 \cdot 10^{-12} \cdot 6,8 \cdot 10^6}{4 \cdot 10^{-6}} = \frac{17 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 10^{-6}} = 4,25$$

e)
$$\frac{30000 \cdot (5 \cdot 10^{-2} + 30,25 \cdot 10^{-3} - 0,2 \cdot 10^{-1})}{(4 \cdot 10^{-7}) : (5 \cdot 10^{-6})}$$

Resolución

$$\begin{aligned} &= \frac{3 \cdot 10^4 (5 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-1} + 30,25 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-1} - 0,2 \cdot 10^{-1})}{0,8 \cdot 10^{-1}} = \frac{3 \cdot 10^4 (0,5 \cdot 10^{-1} + 0,3025 \cdot 10^{-1} - 0,2 \cdot 10^{-1})}{0,8 \cdot 10^{-1}} = \\ &= \frac{3 \cdot 10^4 \cdot 0,6025 \cdot 10^{-1}}{0,8 \cdot 10^{-1}} = 2,259375 \cdot 10^4 = 22593,75 \end{aligned}$$

4) El ser vivo más pequeño es un virus que pesa, aproximadamente, $2 \cdot 10^{-18}$ kg y el animal terrestre más grande es el elefante africano que puede llegar a pesar $6 \cdot 10^3$ kg. ¿Cuántas veces pesa más el elefante que el virus? (deja el resultado en notación científica)

Resolución $\frac{\text{peso del elefante}}{\text{peso del virus}} = \frac{6 \cdot 10^3 \text{ kg}}{2 \cdot 10^{-18} \text{ kg}} = 3 \cdot 10^{21}$. Luego, pesa $3 \cdot 10^{21}$ veces más

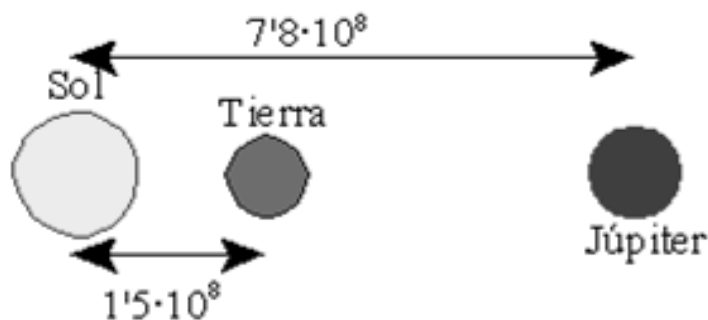
5) La masa de una protón es aproximadamente $1,7 \cdot 10^{-27}$ kg. Calcula la masa, en miligramos, de 250 000 trillones de protones. Debes dejar el resultado en notación científica

Resolución $1,7 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \xrightarrow{\cdot 10^6} 1,7 \cdot 10^{-21} \text{ mg}$. Masa pedida: $1,7 \cdot 10^{-21} \cdot 2,5 \cdot 10^5 \cdot 10^{18} = 4,25 \cdot 10^2 \text{ mg}$

6) La masa de un grano de arroz es, aproximadamente, $2000 \cdot 10^{-7}$ kg. Usa la operación adecuada para averiguar cuántos granos hay en un almacén que contiene $0,5 \cdot 10^8$ kg de arroz. Deja el resultado en notación científica.

Resolución $n^\circ \text{ de granos} = \frac{0,5 \cdot 10^8 \text{ kg}}{2000 \cdot 10^{-7} \text{ kg}} = (0,5 : 2000) \cdot 10^{8-(-7)} = 2,5 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{15} = 2,5 \cdot 10^{11} \text{ granos}$

7) La distancia de la Tierra al Sol es de $1,5 \cdot 10^8$ km y la de Júpiter al Sol de $7,8 \cdot 10^8$ km.



Si los tres cuerpos están alineados, como muestra el diagrama (el dibujo no está a escala)

a) ¿Cuál es la distancia entre la Tierra y Júpiter?

Resolución $7,8 \cdot 10^8 - 1,5 \cdot 10^8 = 6,3 \cdot 10^8 \text{ km}$

b) ¿Cuántas veces es mayor la distancia Júpiter-Sol que la distancia Tierra-Sol?

Resolución

$$\frac{\text{distancia Jupiter - Sol}}{\text{distancia Tierra - Sol}} = \frac{7,8 \cdot 10^8}{1,5 \cdot 10^8} = 5,2$$

distancia Jupiter - Sol = $5,2 \cdot$ distancia Tierra - Sol. Luego, la distancia es 5,2 veces mayor