CÁLCULO DE RADICALES

Cuadrados perfectos

Se llaman cuadrados perfectos a los resultados de calcular los cuadrados de los números naturales

En esta tabla tienes los 15 primeros cuadrados perfectos:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Cuadrados perfectos	1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	7^2	8^2	9^2	10^2	11^2	12^2	13^2	14^2	15^2
	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225

Raíz cuadrada exacta de un número

La raíz cuadrada de un número es otro número que multiplicado por sí mismo (o sea elevado al cuadrado) nos dé el número inicial.

Una raíz cuadrada es exacta cuando el resultado es un número entero.

Podemos observar que sólo es exacta la raíz cuadrada de un cuadrado perfecto:

$$\sqrt{1^2}=\sqrt{1}=1 \quad \sqrt{2^2}=\sqrt{4}=2 \quad \sqrt{3^2}=\sqrt{9}=3 \quad \sqrt{4^2}=\sqrt{16}=4 \text{ , etc.}$$

Hay algunos problemas que se resuelven hallando la raíz cuadrada.

Por ejemplo, si quieres construir un cuadrado que tenga 64 cm^2 de superficie, el lado debe medir $\sqrt{64}=8$ cm

Actividades resueltas

1) Ordena de mayor a menor las siguientes raíces: $\sqrt{400}$, $\sqrt{36}$, $\sqrt{100}$, $\sqrt{25}$

Resolución

$$\sqrt{400}>\sqrt{100}>\sqrt{36}>\sqrt{25}$$

2) Juan tiene un solar rectangular de 50 m de largo y 18 m de ancho. Teresa tiene otro solar cuadrado de la misma superficie que el de Juan. ¿Cuánto medirá el lado del cuadrado?

Resolución

Superficie del solar de Juan = 50 . 18 = 900. Luego, la superficie del solar de Teresa también es 900.
Por tanto, el lado $\sqrt{900}=30$ m

3) Pedro ha colocado sus 64 cromos formando un cuadrado. Calcula cuántos cromos ha puesto en cada lado del cuadrado indicando la operación que hay que hacer.

Resolución

La raíz cuadrada de 64 es 8. Luego, debe poner 8 cromos en cada lado

4) En una sala de conferencias hay 400 butacas colocadas formando un cuadrado.
¿Cuántas butacas hay en cada lado del cuadrado?

Resolución

La raíz cuadrada de 400 es 20. Luego, debe poner 20 butacas en cada lado

Raíz cuadrada entera de un número

Si una raíz cuadrada no es exacta se puede calcular de forma aproximada.

Por ejemplo, $\sqrt{18} \approx 4$ pues $4^2 = 16$ y 16 es el cuadrado perfecto más próximo a 18 menor que 18.

La diferencia $18 - 4^2 = 2$ se llama resto de la raíz cuadrada.

Raíces cúbicas

La raíz cúbica de un número es otro número que elevado al cubo nos dé el número inicial.

Por ejemplo, si quieres construir un cubo de 8 cm^3 de volumen, su arista debe medir $\sqrt[3]{8} = 2$ cm

Actividad resuelta

Una enorme pecera cúbica de cristal tiene una capacidad para 27000 litros de agua. ¿Cuántos m^2 de cristal se necesitarían para construir cada cara?

Resolución

27000 litros = 27000 dm^3. La raíz cúbica de 27000 es 30, luego, la arista del cubo es 30 dm = 3 m.

La superficie de una cara es $3^2 = 9$ m^2. Luego, la superficie del cubo (pecera) es $6.9 = 54$ m^2.

Se necesitarían entonces 54 m^2 de cristal.

Operaciones combinadas (potencias y raíces) con números enteros

Para realizar operaciones combinadas con números naturales debemos tener en cuenta que el orden en que se hacen las operaciones es:

- Potencias y raíces, de izquierda a derecha
- Multiplicaciones y divisiones, de izquierda a derecha
- Sumas y restas, de izquierda a derecha.

Si hubiese paréntesis se empieza realizando las operaciones que hay dentro de ellos

Actividades resueltas

1) Calcula $(-2)^4 + (-9 - 12:2^2).(-1 - 2^2) - \sqrt[3]{56+8}.[-5 - (-2)]$

Resolución

$-16 + (-9 - 3).(-1 - 4) - 4.[-5 - (-2)] = -16 + (-12).(-5) - 4.(-3) = -16 + 60 + 12 = 56$

2) Calcula $\sqrt[3]{-12 + \sqrt{6 + 2\sqrt{15 + 10}}}$

Resolución

$\sqrt[3]{-12 + \sqrt{6 + 2.5}} = \sqrt[3]{-12 + 4} = -2$

Concepto de radical. Elementos

Si tienes que resolver la ecuación $x^5 = 40$, para calcular la "x" hay que hallar una raíz: $x = \sqrt[5]{40}$

$\sqrt[5]{40}$ se llama radical (5 es el índice y 40 es el radicando).

En general, $\sqrt[n]{a}$ con $n \geq 2$ se llama radical o raíz de índice "n" y radicando "a". El índice, n, es un número natural mayor que 1.

Si el índice es 2, se llama raíz cuadrada y se expresa de forma simplificada así: $\sqrt{a}$

Relación entre las potencias y radicales

$\left(\sqrt[5]{3^{-2}}\right)^5 \xrightarrow{\text{por definición de radical}} 3^{-2}$ y por otra parte $\left(3^{\frac{-2}{5}}\right)^5 \xrightarrow{\text{potencia de una potencia}} 3^{\frac{-2}{5}\cdot 5} = 3^{-2}$

Luego, por la unicidad del radical, $\sqrt[5]{3^{-2}} = 3^{\frac{-2}{5}}$.

En general, un radical se puede expresar como una potencia de exponente una fracción cuyo denominador es el índice de la raíz y el numerador el exponente del radicando:

$$\boxed{\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}}$$

Recíprocamente, una potencia de exponente una fracción se puede expresar como un radical cuyo índice es el denominador y cuyo exponente del radicando es el numerador:

$$\boxed{a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}}$$

Si el exponente del radicando es múltiplo del índice el radical se convierte en una potencia de exponente entero. Ejemplos:

$$\sqrt[3]{2^{18}} = 2^{18/3} = 2^6 = 64 \qquad \sqrt[5]{x^{40}} = x^{40/5} = x^8$$

Cuando el exponente y el índice coinciden podemos simplificarlos:

Observa: $\sqrt[n]{a^n} = a^{n/n} = a^1 = a \Rightarrow \boxed{\sqrt[\cancel{n}]{a^{\cancel{n}}} = a}$ Por ejemplo, $\sqrt[6]{2^6} = 2$

Actividad resuelta

Halla a) $27^{2/3}$ b) $81^{3/4}$ c) $512^{-2/3}$

Resolución

a) $(3^3)^{2/3} = 3^2 = 9$ b) $(3^4)^{3/4} = 3^3 = 27$ c) $\sqrt[3]{512^{-2}} = \sqrt[3]{(2^9)^{-2}} = \sqrt[3]{2^{-18}} = 2^{-6} = \frac{1}{64}$

Número de soluciones de un radical

Dependiendo del índice, si es par o impar, y del radicando, si es positivo o negativo, un radical puede tener 2, 1 o ninguna solución:

	Índice par	Índice impar
Radicando positivo	2 soluciones opuestas. Por ejemplo, $\sqrt[4]{81} = \pm 3$	1 solución positiva. Por ejemplo, $\sqrt[3]{125} = 5$
Radicando negativo	Ninguna solución. Por ejemplo,	1 solución negativa. Por ejemplo, $\sqrt[3]{-8} = -2$

Cálculo de radicales con la calculadora

Los radicales se pueden hallar con la calculadora científica (CASIO).

El proceso es: índice $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\wedge}$ radicando $\boxed{=}$

Ejemplo: $\sqrt[3]{100} \Rightarrow 3$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\wedge}$ 100 $\boxed{=}$ Nos da 4.641588834….., que es un número irracional.

Actividad resuelta

Indica cuántas soluciones tienen los siguientes radicales y calcúlalas. Si no fuesen exactas, usa la calculadora científica y redondea a dos cifras decimales:

a) $\sqrt{81}$ b) $\sqrt[4]{16}$ c) $\sqrt{-9}$ d) $\sqrt[3]{8}$ e) $\sqrt[3]{-27}$ f) $\sqrt[4]{-625}$ g) $\sqrt[5]{-120}$ h) $\sqrt[3]{-975}$ i) $\sqrt[7]{416}$

Resolución

a) dos, ± 9 b) dos, ± 2 c) ninguna d) una, 2 e) una, -3 f) ninguna g) una, $-2{,}61$ h) una, $-9{,}92$ i) una, 2,37

EQUIVALENCIA DE RADICALES

Radicales equivalentes

Son los que tienen el mismo valor. Por ejemplo, $+\sqrt[4]{16}$ y $+\sqrt{4}$ son equivalentes, pues $+\sqrt[4]{16} = +\sqrt{4} = 2$
Dos radicales son equivalentes si es posible expresarlos como potencias iguales.

Amplificación de radicales

Como si en una potencia de exponente fraccionario amplificamos la fracción se obtiene una potencia idéntica a la inicial, se puede amplificar un radical multiplicando el índice y el exponente por el mismo número natural. Al amplificar un radical se obtiene otro radical equivalente al inicial.

Ejemplo: $\sqrt[3]{6^2} = \sqrt[3.5]{6^{2.5}} = \sqrt[15]{6^{10}}$

Simplificación de radicales

Como si en una potencia de exponente fraccionario simplificamos la fracción se obtiene una potencia idéntica a la inicial, se puede simplificar un radical dividiendo el índice y el exponente por el mismo divisor común. Al simplificar un radical se obtiene otro radical equivalente al inicial.

Ejemplo: $\sqrt[12]{5^8} = \sqrt[12:4]{5^{8:4}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$

Actividad resuelta

Simplifica los siguientes radicales: a) $\sqrt[12]{5^8}$ b) $\sqrt[3]{2^{12}}$

Resolución

a) $\sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$ b) $2^{12/3} = 2^4 = 16$

Reducción de radicales a mínimo común índice

Dados varios radicales de distinto índice reducirlos a común índice consiste en obtener radicales equivalentes de índice común.
Usando la reducción de raíces a común denominador, esto, se traduce en que para reducir radicales a mínimo común índice se toma como índice común el mcm de los índices. El común índice se divide entre cada índice y el resultado se multiplica por el exponente del radicando.

Ejemplo: $\sqrt[6]{3}$ y $\sqrt[8]{5^7}$; $\text{mcm}(6, 8) = 24 \rightarrow \sqrt[24]{3^4}$ y $\sqrt[24]{5^{21}}$

Comparación de radicales

Si tienen el mismo índice, es mayor el que tenga mayor radicando. Por ejemplo, $\sqrt[5]{37} > \sqrt[5]{35}$
Cuando no tengan el mismo índice, se reducen a común índice y se aplica la regla anterior.

Actividad resuelta

Ordena de menor a mayor: a) $\sqrt[5]{8}$, $\sqrt[3]{4}$ b) $\sqrt[4]{2^6}$, $\sqrt[8]{2^3}$, $\sqrt{3}$ y $\sqrt[3]{6^5}$ c) $2^{3/4}$, $5^{3/2}$ y $6^{1/3}$

Resolución

a) $\sqrt[15]{2^9}, \sqrt[15]{2^{10}} \Rightarrow \sqrt[5]{8} < \sqrt[3]{4}$

b) $\sqrt[24]{2^{36}}, \sqrt[24]{2^9}, \sqrt[24]{3^{12}}, \sqrt[24]{6^{40}} \Rightarrow \sqrt[8]{2^3} < \sqrt{3} < \sqrt[4]{2^6} < \sqrt[3]{6^5}$

c) $\sqrt[12]{2^9}, \sqrt[12]{5^{18}}, \sqrt[12]{6^4} \Rightarrow 2^{3/4} < 6^{1/3} < 5^{3/2}$

OPERACIONES CON RADICALES

Producto y división de radicales

Para multiplicar o dividir raíces del mismo índice se deja el mismo índice y su multiplican o dividen los radicandos.

$\boxed{\sqrt[n]{a}\ \sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}}$ $\boxed{\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}}$. *Ejemplos*: $\sqrt[3]{2}\ \sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{2.5}=\sqrt[3]{10}$ $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{7}{3}}$

Si tienen distinto índica se reducen a común índica y se aplican las reglas anteriores

Potencia de un radical

Para calcular la potencia de una raíz se deja el mismo índice y el radicando se eleva al exponente.

$\boxed{\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}}$. Por ejemplo, $\left(\sqrt[5]{2}\right)^3=\sqrt[5]{2^3}$.

En particular, $\boxed{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=\sqrt[n]{a^n}=a}$. Por ejemplo, $\left(\sqrt[7]{3}\right)^7=\sqrt[7]{3^7}=3$

Raíz de un radical

Para calcular la raíz de una raíz se multiplican los índices y se deja el mismo radicando.

$\boxed{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}}$. Por ejemplo, $\sqrt[3]{\sqrt{5}}=\sqrt[6]{5}$

Raíz de un producto y de un cociente

Para calcular la raíz de un producto o un cociente se halla la raíz de cada término.

$\boxed{\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\ \sqrt[n]{b}}$ $\boxed{\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}}$. *Ejemplos*: $\sqrt[3]{2.5}=\sqrt[3]{2}.\sqrt[3]{5}$ $\sqrt{\dfrac{7}{3}}=\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$

Actividades resueltas

1) Usando las reglas para operar con radicales, completa los huecos:

a) $6\sqrt[4]{7}-8\sqrt[4]{7}+5\sqrt[4]{7}=\boxed{3}\sqrt[4]{7}$ b) $-7\sqrt[3]{5}-5\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{5}+14\sqrt[3]{5}=\boxed{\sqrt[3]{5}}$

c) $\sqrt{7}\ .\ \sqrt{175}=\sqrt{\boxed{1225}}=\boxed{35}$ d) $\dfrac{\sqrt[3]{-48}}{\sqrt[3]{6}}=\sqrt[\boxed{3}]{\boxed{-8}}=\boxed{-2}$ e) $\left(\sqrt{3}\right)^4=\sqrt{\boxed{3^4}}=\boxed{9}$

f) $\sqrt[5]{\sqrt{1024}}=\sqrt[\boxed{5}]{\boxed{2^{10}}}=\boxed{4}$ g) $\sqrt{2}\ .\ \sqrt{50}=\sqrt{\boxed{100}}=\boxed{10}$ h) $\dfrac{\sqrt[3]{-40}}{\sqrt[3]{5}}=\sqrt[\boxed{3}]{\boxed{-8}}=\boxed{-2}$

i) $\left(\sqrt[5]{2}\right)^{10}=\sqrt[5]{\boxed{2^{10}}}=\boxed{4}$ j) $\sqrt[3]{\sqrt{729}}=\sqrt[\boxed{6}]{\boxed{3^6}}=\boxed{3}$

k) $\sqrt{63}\ .\ \sqrt{28}=\sqrt{\boxed{1764}}=\boxed{42}$ l) $\dfrac{\sqrt[5]{-4096}}{\sqrt[5]{4}}=\sqrt[\boxed{5}]{\boxed{-1024}}=\boxed{-4}$

m) $\left(\sqrt[3]{7}\right)^6=\sqrt[3]{\boxed{7^6}}=\boxed{49}$ n) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{11^{-30}}}=\sqrt[\boxed{15}]{\boxed{11^{-30}}}=\boxed{\dfrac{1}{121}}$

Extracción de factores de la raíz

Para extraer factores de una raíz se factoriza el radicando y, si es posible, se expresan como potencia de exponente el índice de la raíz los factores de la descomposición.

Después se usa la siguiente regla $\sqrt[n]{a^n b} = \sqrt[n]{a^n}\ \sqrt[n]{b} = a\sqrt[n]{b} \Rightarrow \boxed{\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}}$

Actividad resuelta

Extrae factores de la raíz:

1) $\sqrt{3^2 5} \to 3\sqrt{5}$ 2) $\sqrt[3]{5^8} \to \sqrt[3]{5^3 5^3 5^2} = 5.5\sqrt[3]{5^2} = 25\sqrt[3]{25}$

3) $\sqrt{5^8 7^5 11^7} \to \sqrt{5^2.5^2.5^2.5^2.7^2.7^2.7.11^2.11^2.11^2.11} = 5^4 7^2 11^3\sqrt{77}$

4) $\sqrt{2^6.5^3.7} = \sqrt{\left(2^3\right)^2.5^2.5.7} = 2^3.5\sqrt{5.7} = 40\sqrt{35}$ 5) $\sqrt[3]{40} = \sqrt[3]{2^3 5} = \sqrt[3]{2^3}\sqrt[3]{5} = 2\sqrt[3]{5}$

6) $\sqrt[3]{864} \xrightarrow{\text{factorizando}} \sqrt[3]{2^5 3^3} = \sqrt[3]{2^5}\ \sqrt[3]{3^3} = \sqrt[3]{2^3 2^2}\ \sqrt[3]{3^3} = 2\sqrt[3]{2^2}\ 3 = 6\sqrt[3]{2^2} = 6\sqrt[3]{4}$

Introducción de factores en la raíz

Para introducir un factor dentro de la raíz hay que elevarlo al índice de la raíz.

Observa : $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n}\ \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b} \Rightarrow \boxed{a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}}$ *Ejemplo*: $2\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2^3 5} = \sqrt[3]{40}$

Actividad resuelta

Resuelve las siguientes operaciones dejando el resultado lo más simplificado posible:

a) $$\frac{\sqrt[9]{x^{-2}y^5}\ \sqrt[4]{(xy^2)^3}}{\sqrt{xy}\ \sqrt[3]{y\sqrt{x^{-1}}}}$$

Resolución

$$\frac{\sqrt[9]{x^{-2}y^5}\ \sqrt[4]{x^3y^6}}{\sqrt{xy}\ \sqrt[3]{\sqrt{y^2x^{-1}}}} = \frac{\sqrt[9]{x^{-2}y^5}\ \sqrt[4]{x^3y^6}}{\sqrt{xy}\ \sqrt[6]{y^2x^{-1}}} = \sqrt[36]{\frac{x^{-8}y^{20}x^{27}y^{54}}{x^{18}y^{18}y^{12}x^{-6}}} = \sqrt[36]{x^{-8+27-18+6}y^{20+54-18-12}} = \sqrt[36]{x^7y^{44}}$$

b) $$\frac{\sqrt[8]{a^3b}}{\left(\sqrt{b\sqrt{b}}\right)^6.\sqrt[3]{b^9}}$$

Resolución

$$\frac{\sqrt[8]{a^3b}}{\left(\sqrt{\sqrt{b^3}}\right)^6.\sqrt[3]{b^9}} = \frac{\sqrt[8]{a^3b}}{\sqrt[4]{b^{18}}.\sqrt[3]{b^9}} = \sqrt[24]{\frac{a^9b^3}{b^{108}b^{72}}} = \sqrt[24]{a^9\ b^{-177}} = \sqrt[8]{a^3\ b^{-59}} = \boxed{\sqrt[8]{\frac{a^3}{b^{59}}}}$$

Suma y resta de radicales

Para poder sumar o restar términos con raíces, todos los términos deben llevar la misma raíz.
Para realizar las sumas y restas se saca factor común el radical

La regla es: $\boxed{M\sqrt[n]{a} \pm N\sqrt[n]{a} = (M \pm N)\sqrt[n]{a}}$. Por ejemplo, $5\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{7} + 2\sqrt[3]{7} = (5-1+2)\sqrt[3]{7} = 6\sqrt[3]{7}$

Otro ejemplo: $3\sqrt[3]{5} - \sqrt{7} - 2\sqrt[3]{5} + 4\sqrt{7} \to \sqrt[3]{5} + 3\sqrt{7}$

Algunas veces es necesario extraer factores del radical para poder realizar las sumas/restas.

Actividades resueltas

1) Realiza las siguientes sumas y restas:

a) $\sqrt{3^2.5}-3\sqrt{5}\rightarrow 3\sqrt{5}-3\sqrt{5}=0$ b) $\sqrt{18}+\sqrt{2}\rightarrow\sqrt{2.3^2}+\sqrt{2}=3\sqrt{2}+\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

c) $6\sqrt[3]{108}-2\sqrt[3]{32}\rightarrow 6\sqrt[3]{2^2 3^3}-2\sqrt[3]{2^3 2^2}=6.3\sqrt[3]{2^2}-2.2\sqrt[3]{2^2}=14\sqrt[3]{4}$

d) $5\sqrt[3]{40}-3\sqrt[3]{135}\rightarrow 5\sqrt[3]{2^3 5}-3\sqrt[3]{3^3 5}=5.2\sqrt[3]{5}-3.3\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{5}$

e) $3x\sqrt[4]{16x}-5\sqrt[4]{x^5}\rightarrow 3x\sqrt[4]{2^4 x}-5\sqrt[4]{x^5}=6x\sqrt[4]{x}-5x\sqrt[4]{x^4 x}=x\sqrt[4]{x}=\boxed{\sqrt[4]{x^5}}$

f) $\sqrt{12}+2\sqrt{27}-\sqrt{3}\rightarrow\sqrt{2^2.3}+2\sqrt{3^2.3}-\sqrt{3}=2\sqrt{3}+2.3\sqrt{3}-\sqrt{3}=7\sqrt{3}=\sqrt{7^2.3}=\sqrt{147}$

g) $\sqrt[5]{192}+\sqrt[5]{1458}=\sqrt[5]{2^6 3}+\sqrt[5]{2.3^6}=\sqrt[5]{2^5 2.3}+\sqrt[5]{2.3^5.3}=2\sqrt[5]{2.3}+3\sqrt[5]{2.3}=5\sqrt[5]{6}$

h) $5\sqrt{18}-2\sqrt{8}-\sqrt[8]{16}\rightarrow 5\sqrt{2.3^2}-2\sqrt{2^2.2}-\sqrt[8]{2^4}=5.3\sqrt{2}-2.2\sqrt{2}-\sqrt{2}=\boxed{10\sqrt{2}=\sqrt{200}}$

i) $3\sqrt{20}+\sqrt{125}-\sqrt[4]{25}\rightarrow 3\sqrt{2^2.5}+\sqrt{5^2.5}-\sqrt[4]{5^2}=3.2\sqrt{5}+5\sqrt{5}-\sqrt{5}=\boxed{10\sqrt{5}=\sqrt{500}}$

2) Los beneficios de una empresa de videojuegos, en miles de euros, son $\sqrt{8}$ el primer mes y, al siguiente, $\sqrt{32}$. Halla los beneficios obtenidos en los dos meses, expresando el resultado en un solo radical.

Resolución

$$\sqrt{8}+\sqrt{32}=\sqrt{2^2 2}+\sqrt{2^2 2^2 2}=2\sqrt{2}+2.2\sqrt{2}=6\sqrt{2}\text{ miles de euros}$$

RACIONALIZACIÓN DE RADICALES

Racionalización de fracciones con radicales en el denominador: Racionalizar una fracción radical con alguna raíz en el denominador es transformarla en otra fracción equivalente pero que NO tenga ninguna raíz en el denominador. Veamos varios casos que se pueden presentar:

(A) *Racionalización con denominadores del tipo* $A\sqrt{B}$.

Ejemplo: $\dfrac{5a}{3\sqrt{b}}\xrightarrow{\text{Se multiplica por }\sqrt{b}}\dfrac{5a\ .\ \sqrt{b}}{3\sqrt{b}\ .\ \sqrt{b}}=\dfrac{5a\sqrt{b}}{3\left(\sqrt{b}\right)^2}=\dfrac{5a\sqrt{b}}{3b}$

(B) *Racionalización de fracciones con denominadores del tipo* $A\sqrt[n]{B}$

Ejemplos:

1) $\dfrac{2x}{3\sqrt[5]{y^2}}\xrightarrow{\text{Multiplico por }\sqrt[5]{y^3}}\dfrac{2x}{3\sqrt[5]{y^2}}.\dfrac{\sqrt[5]{y^3}}{\sqrt[5]{y^3}}=\dfrac{2x\sqrt[5]{y^3}}{3\sqrt[5]{y^5}}=\dfrac{2x\sqrt[5]{y^3}}{3y}$

2) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{3^7}}\xrightarrow{\text{Multiplico por }\sqrt[4]{3^{-3}}}\dfrac{1}{\sqrt[4]{3^7}}.\dfrac{\sqrt[4]{3^{-3}}}{\sqrt[4]{3^{-3}}}=\dfrac{\sqrt[4]{3^{-3}}}{\sqrt[4]{3^4}}=\dfrac{\sqrt[4]{3^{-3}}}{3}$

(C) *Racionalización de fracciones con denominadores binómicos con alguna raíz cuadrada*

En el denominador hay suma/resta de dos términos en los que aparece alguna raíz cuadrada

Por ejemplo, si la fracción es del tipo $\dfrac{N}{A\sqrt{B}+C\sqrt{D}}$ se multiplica numerador y denominador por

$A\sqrt{B}-C\sqrt{D}$ y se llega así a una fracción sin raíz en el denominador: $\dfrac{N}{A\sqrt{B}+C\sqrt{D}}.\dfrac{A\sqrt{B}-C\sqrt{D}}{A\sqrt{B}-C\sqrt{D}}=$

$$\frac{N.(A\sqrt{B}-C\sqrt{D})}{(A\sqrt{B}+C\sqrt{D}).(A\sqrt{B}-C\sqrt{D})}=\frac{N.(A\sqrt{B}-C\sqrt{D})}{(A\sqrt{B})^2-(C\sqrt{D})^2}=\frac{N.(A\sqrt{B}-C\sqrt{D})}{A^2B-C^2D}$$

Si el denominador fuese una expresión del tipo $A\sqrt{B}-C\sqrt{D}$, se multiplicaría por $A\sqrt{B}+C\sqrt{D}$

Las expresiones $A\sqrt{B}+C\sqrt{D}$ y $A\sqrt{B}-C\sqrt{D}$ se dice que son <u>conjugadas</u>

Ejemplos:

1) $\dfrac{7}{3-\sqrt{2}}\xrightarrow{\text{Multiplico por } 3+\sqrt{2} \text{ (expresión conjugada)}}\dfrac{7}{3-\sqrt{2}}.\dfrac{3+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}=\dfrac{7(3+\sqrt{2})}{3^2-(\sqrt{2})^2}=\dfrac{7(3+\sqrt{2})}{7}=3+\sqrt{2}$

2) $\dfrac{\sqrt{15}}{3\sqrt{5}+5\sqrt{3}}\xrightarrow{\text{Se multiplica por } (3\sqrt{5}-5\sqrt{3})}\dfrac{\sqrt{15}.(3\sqrt{5}-5\sqrt{3})}{(3\sqrt{5}+5\sqrt{3}).(3\sqrt{5}-5\sqrt{3})}=\dfrac{3\sqrt{75}-5\sqrt{45}}{(3\sqrt{5})^2-(5\sqrt{3})^2}=\dfrac{15\sqrt{3}-15\sqrt{5}}{45-75}=\dfrac{15(\sqrt{3}-\sqrt{5})}{-30}$

Simplificando se obtiene: $\dfrac{-15(\sqrt{3}-\sqrt{5})}{30}=\dfrac{-(\sqrt{3}-\sqrt{5})}{2}=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$

3) $\dfrac{2}{1+\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\dfrac{2\left[(1+\sqrt{3})-\sqrt{2}\right]}{\left[(1+\sqrt{3})+\sqrt{2}\right]\left[(1+\sqrt{3})-\sqrt{2}\right]}=\dfrac{2+2\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{1+2\sqrt{3}+3-2}=\dfrac{2+2\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{2+2\sqrt{3}}=$

$$=\frac{1+\sqrt{3}-\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}=\frac{(1+\sqrt{3}-\sqrt{2})(1-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}=\frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$$

<u>**Actividad resuelta**</u>

Racionaliza:

a) $\dfrac{2+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\rightarrow\dfrac{2+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}.\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}+\sqrt{5^2}}{2\sqrt{5^2}}=\dfrac{2\sqrt{5}+5}{2.5}=\dfrac{2\sqrt{5}+5}{10}$

b) $\dfrac{12}{5\sqrt[4]{27}}\rightarrow\dfrac{12}{5\sqrt[4]{3^3}}=\dfrac{12}{5\sqrt[4]{3^3}}.\dfrac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{3}}=\dfrac{12\sqrt[4]{3}}{5\sqrt[4]{3^4}}=\dfrac{12\sqrt[4]{3}}{5.3}=\dfrac{12\sqrt[4]{3}}{15}\xrightarrow{:3}\dfrac{4\sqrt[4]{3}}{5}$

c) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}\rightarrow\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}.\dfrac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}=\dfrac{3\sqrt{6}+2\sqrt{3^2}+3\sqrt{2^2}+2\sqrt{6}}{(3\sqrt{2})^2-(2\sqrt{3})^2}=\dfrac{3\sqrt{6}+2.3+3.2+2\sqrt{6}}{18-12}=\boxed{\dfrac{12+5\sqrt{6}}{6}}$

d) $\dfrac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}\rightarrow\dfrac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}.\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}=\dfrac{(2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x})^2-2^2}=\dfrac{2(\sqrt{x})^2+4\sqrt{x}+\sqrt{x}+2}{x-4}=\boxed{\dfrac{2x+5\sqrt{x}+2}{x-4}}$