Funciones lineales o de proporcionalidad directa

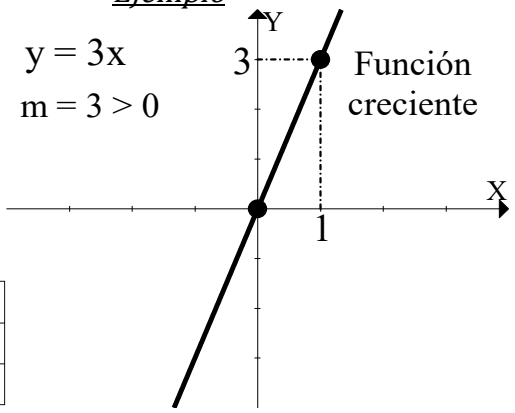
Son aquellas cuya fórmula es del tipo $y = mx$, siendo $m \neq 0$. Por ejemplo, $y = 3x$, $y = -2x$ son funciones lineales.

La gráfica de las funciones lineales es una recta que pasa por el origen de coordenadas $O(0, 0)$, pues en la fórmula si $x = 0 \rightarrow y = m.0 = 0$.
Para dibujar la gráfica de las funciones lineales sólo necesitamos calcular otro punto distinto del $(0, 0)$

El coeficiente de la x, es decir m, se llama pendiente de la recta y nos indica la inclinación de la recta:

- Si $m > 0$ la recta está inclinada hacia la derecha y, por tanto, la función es creciente.

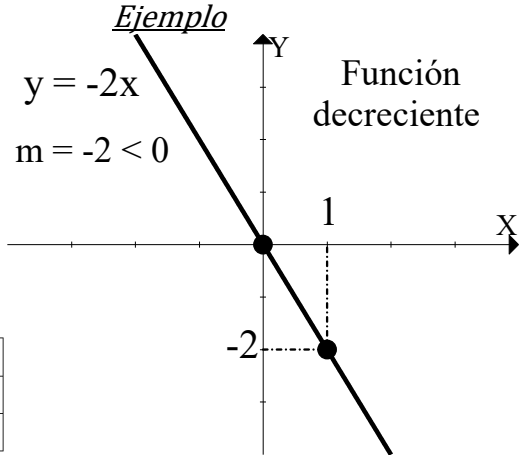
Ejemplo



x	y = 3x
0	0
1	3

- Si $m < 0$ la recta está inclinada hacia la izquierda y, por tanto, la función es decreciente

Ejemplo



x	y = – 2x
0	0
1	– 2

Observa que para dibujar la gráfica de las funciones lineales sólo necesitamos calcular otro punto distinto del $(0, 0)$

Hay que tener en cuenta que cuanto mayor es la pendiente, en valor absoluto, mayor es la inclinación de la recta. Por ejemplo, la recta $y = -7x$ tiene mayor inclinación que la recta $y = -4x$ porque $7 > 4$.

Si dos magnitudes "x" e "y" son d.p., entonces la función que relaciona a "x" e "y" es lineal y su pendiente es la constante de proporcionalidad.

Ejemplo:

Si x = kg de manzanas, y = precio. Suponiendo que 2 kg de manzanas valgan 6 €.

Como las magnitudes son d.p. podemos establecer una proporción $\frac{y}{x} = \frac{6}{2} = 3$.

Por tanto, despejando, $y = 3x$.

La función lineal $y = mx$, con $m > 0$, también se llama <u>función de proporcionalidad directa</u>.
En este caso, "x" e "y" representan magnitudes directamente proporcionales: al aumentar "x" también aumenta "y" en la misma proporción.

<u>Ejemplos</u>

1) La función dada por la siguiente tabla representa a una función de proporcionalidad directa, pues las magnitudes "x" e "y" son d.p. La fórmula que relaciona las magnitudes es $y = 200x$

x = grosor del libro (cm)	1	2	3	4	5	6	7
y = nº de páginas	200	400	600	800	1 000	1 200	1 400

2) Si x = kg de manzanas, y = precio. Suponiendo que 2 kg de manzanas valgan 6 €.

Como las magnitudes son d.p. podemos establecer una proporción $\frac{y}{x} = \frac{6}{2} = 3$.

Por tanto, despejando, $y = 3x$.

<u>Funciones afines no constantes</u>

Son aquellas cuya fórmula es del tipo $y = mx + n$, siendo $m, n \neq 0$.
Por ejemplo, $y = 2x - 5$, $y = -3x + 1$ son funciones afines no constantes.

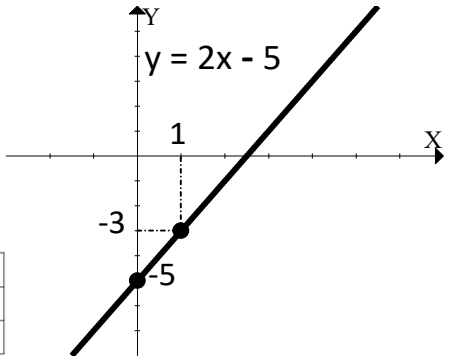
La gráfica de estas funciones es una <u>recta que NO pasa por el origen de coordenadas</u> O(0, 0), pues en la fórmula si $x = 0 \rightarrow y = m.0 + n = n \neq 0$. Luego, la recta para por el punto (0, n)

El coeficiente de la x, es decir m, se llama <u>pendiente de la recta</u> y tiene el mismo significado que en las funciones lineales

El término independiente, la n, se llama *<u>ordenada en el origen</u>* y se corresponde con el punto de corte de la recta con el eje Y, pues la recta pasa por el punto (0, n).

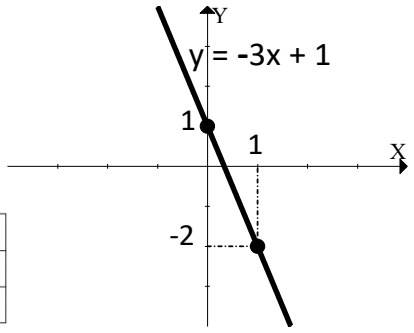
<u>Ejemplos:</u>

x	y = 2x – 5
0	– 5
1	– 3



La pendiente es 2 y la ordenada en el origen −5

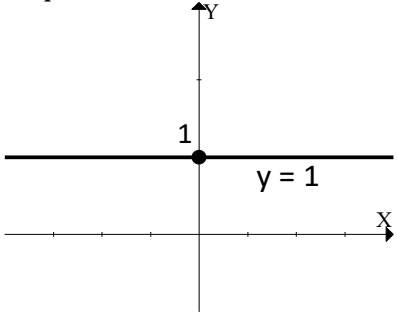
x	y = –3x + 1
0	1
1	– 2

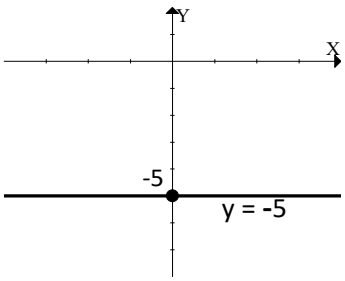


La pendiente es –3 y la ordenada en el origen 1

<u>Funciones constantes</u>

Son aquellas cuya fórmula es del tipo $\mathbf{y = n}$. La gráfica de una función constante es una línea horizontal y su pendiente es cero.





La función constante $y = 0$ corresponde al eje X

Cálculo de los puntos de corte de una recta con los ejes de coordenadas

- Para calcular el punto donde corta una recta al eje X tenemos que hallar los valores de x que hacen que y sea igual a cero. Para ello, sustituimos en la fórmula de la función la "y" por 0.
Ten en cuenta que, si la función es lineal, el punto de corte es el (0, 0) como ya hemos visto.
Si es afín no constante, $y = mx + n$ tendríamos que resolver la ecuación $mx + n = 0$.

- Para calcular el punto donde corta una recta al eje Y ten en cuenta que si la función es lineal, el punto de corte es el (0, 0) como ya hemos visto y si es afín, $y = mx + n$ ó $y = n$, el punto de corte es (0, n), como ya hemos visto también.

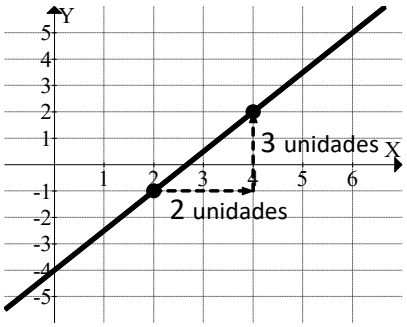
Cálculo de la pendiente de una recta

Para calcular la pendiente de una recta se determinan dos puntos de la recta, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$.

Entonces la pendiente es $m = \dfrac{\text{lo que varía la y}}{\text{lo que varía la x}} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Ejemplos

1) La pendiente de la recta que pasa por los puntos P(8, –1) y Q(4, 2) es $m = \dfrac{2-(-1)}{4-8} = \dfrac{3}{-4} = \dfrac{-3}{4}$

2) La pendiente de la recta dibujada 

es $\mathbf{m = \dfrac{Variación\ de\ y}{Variación\ de\ x}} = \dfrac{3}{2}$

La pendiente del ejemplo anterior es positiva que se corresponde con que la gráfica es creciente.
Como la pendiente es m = 1,5 y la ordenada en el origen es n =– 4, la fórmula de la función es:

$y = mx + n \rightarrow y = 1{,}5x - 4$

Cuando la recta es decreciente la pendiente que se obtiene es negativa pues la y disminuye y por tanto la variación de y es un número negativo

Si la función es constante, la pendiente vale 0 pues la gráfica es una recta horizontal

Ecuaciones de la recta

La ecuación general o implícita de una recta es del tipo $ax + by = c$, es decir una ecuación lineal con dos incógnitas.

Toda ecuación lineal con dos incógnitas da lugar a una función del tipo $y = mx + n$

Por ejemplo, la ecuación $3x - 2y = 1$, da lugar a la función $y = \dfrac{3x-1}{2}$, que corresponde a la función afín $y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{2}$, cuya pendiente es $\dfrac{3}{2}$ y ordenada en el origen $\dfrac{-1}{2}$

Ecuación de una recta en forma punto-pendiente: Si conocemos un punto de la recta $P(x_0, y_0)$ y la pendiente "m" podemos calcular la ecuación de la recta mediante la fórmula: $\boxed{y = m(x - x_0) + y_0}$ llamada ecuación de la recta en forma punto-pendiente

Por ejemplo, si la recta pasa por el punto P(–3, 5) y la pendiente es m = – 2 , la ecuación de la recta es: $y = -2(x + 3) + 5 \rightarrow y = -2x - 6 + 5 \rightarrow y = -2x - 1$

Actividades resueltas

Halla los puntos de corte con los ejes de coordenadas de la recta que pasa por los puntos P(–2, 3) y Q(–1, – 2) y dibújala.

Resolución

pendiente: $m = \frac{-2-3}{-1-(-2)} = \frac{-5}{1} = -5 \Rightarrow \begin{matrix} m = -5 \\ (x_0, y_0) = (-2, 3) \end{matrix}, r: y - 3 = -5(x+2) \Rightarrow r: y = -5x - 7$

Punto de corte con el eje X : $0 = -5x - 7 \rightarrow x = \frac{-7}{5} \Rightarrow P(\frac{-7}{5}, 0)$

Punto de corte con el eje Y : $y = -5.0 - 7 = -7 \Rightarrow Q(0, -7)$

2) Al apuntarnos en un gimnasio, hemos tenido que pagar una cantidad fija en concepto de matrícula. Después tendremos que ir pagando las mensualidades.
Si estamos 6 meses, nos gastaremos en total 246 €, y si estamos 15 meses, nos costará 570 €.
Calcula cuánto nos gastaríamos en total si estuviéramos yendo durante un año

Resolución

x = nº de meses y = precio en €.

x = nº de meses	6	15
y = precio (en €)	246	570

Como la relación entre x e y es de tipo lineal, hallamos la ecuación de la recta que relaciona x con y:

pendiente: $m = \frac{570-246}{15-6} = \frac{324}{9} = 36 \Rightarrow \begin{matrix} m = 36 \\ (x_0, y_0) = (6, 246) \end{matrix}, r: y - 246 = 36(x-6) \Rightarrow r: y = 36x + 30$

1 año = 12 meses. El precio al cabo de 1 año es $y = 36 \cdot 12 + 30 = 462$ €

2ª Solución: x = nº de meses, y = precio en €. La gráfica es una recta que pasa por P(6, 246) Q(15,570)

$Como \overrightarrow{d_r} \ // \ \overrightarrow{PQ} = (9,324) \rightarrow m_r = \frac{324}{9} = 36 \Rightarrow r: y - 246 = 36(x-6) \Rightarrow r: y = 36x + 30$

Entonces, 1 año = 12 meses; el precio es $y = 36 \cdot 12 + 30 = 462$ €

Otra Solución

Sea x = nº de meses, y = precio, en €. La fórmula que relaciona x con y es afín.

Si $x = 6 \rightarrow y = 246$. Luego, la recta pasa por el punto A(6, 246)

Si $x = 15 \rightarrow y = 570$. Luego, la recta pasa por el punto B(15, 570)

Pendiente de la recta: $m = \frac{570-246}{15-6} = 36$

Ecuación de la recta punto-pendiente: $y = m(x - x_0) + y_0$.

Usamos que la recta pasa por A(6, 246), luego $x_0 = 6$, $y_0 = 246$ y tiene pendiente $m = 36$

$y = 36(x - 6) + 246 \rightarrow y = 36x + 30$

Entonces, como 1 año = 12 meses $\Rightarrow x = 12 \rightarrow y = 36 \cdot 12 + 30 = 462$ €

3) Un muelle mide 7 cm cuando colgamos de él un peso de 10 gramos y mide 13 cm cuando colgamos de él 80 gramos. Calcula cuánto medirá si colgamos de él 50 gramos. Redondea el resultado a las centésimas.

Resolución

Sea x = peso en gramos, y = longitud en cm. La fórmula que relaciona x con y es afín.

Si $x = 10 \rightarrow y = 7$. Luego, la recta pasa por el punto A(10, 7)

Si $x = 80 \rightarrow y = 13$. Luego, la recta pasa por el punto B(80, 13)

$$\text{Pendiente de la recta: } m = \frac{13-7}{80-10} = \frac{6}{70} = \frac{3}{35}$$

Ecuación de la recta punto-pendiente: $y = m(x - x_0) + y_0$. Usamos que la recta pasa por A(10, 7), luego $x_0 = 10, y_0 = 7$ y tiene pendiente $m = \frac{3}{35} \Rightarrow y = \frac{3}{35}(x - 10) + 7$

$$\text{Para 50 gramos} \Rightarrow x = 50 \rightarrow y = \frac{3}{35}(50 - 10) + 7 = \frac{120}{35} + 7 = \frac{73}{7} \cong 10,43 \text{ cm}$$

Interpolación y extrapolación lineal

Supongamos que una función viene dada en forma de tabla o que sólo conocemos algunos puntos de su gráfica y queremos averiguar puntos que no se encuentren en la tabla o gráfica. En estos casos, se usa la interpolación y extrapolación.

La interpolación consiste en hallar un valor comprendido entre dos datos de la tabla o de la gráfica.

La extrapolación consiste en hallar un valor NO comprendido entre los datos de la tabla o gráfica.

La interpolación o extrapolación es lineal si para averiguar los datos desconocidos usamos una línea recta.

La estimación del dato desconocido por interpolación o extrapolación lineal será muy fiable si los puntos se concentran en torno a una recta y el dato desconocido está muy próximo a alguno de los datos dados.

Actividades resueltas

1) La evolución del crecimiento de una planta viene dada por la siguiente tabla

Semana	Altura (mm)
1	8
2	20
3	60
4	80
6	100
8	140

Mediante interpolación o extrapolación lineal, según el caso, estima la altura de la planta en la semana 5 y en la semana 9.

Resolución

- Para estimar la altura de la planta en la semana 5 usamos interpolación lineal porque la semana 5 está comprendida entre las semanas 4 y 6.

Recta r que pasa por los puntos (4, 80) y (6, 100):

$$\text{pendiente: } m = \frac{100-80}{6-4} = \frac{20}{2} = 10 \Rightarrow \overset{m=10}{(x_0, y_0) = (4, 80)}, \; r: y - 80 = 10(x - 4) \Rightarrow r: y = 10x + 40$$

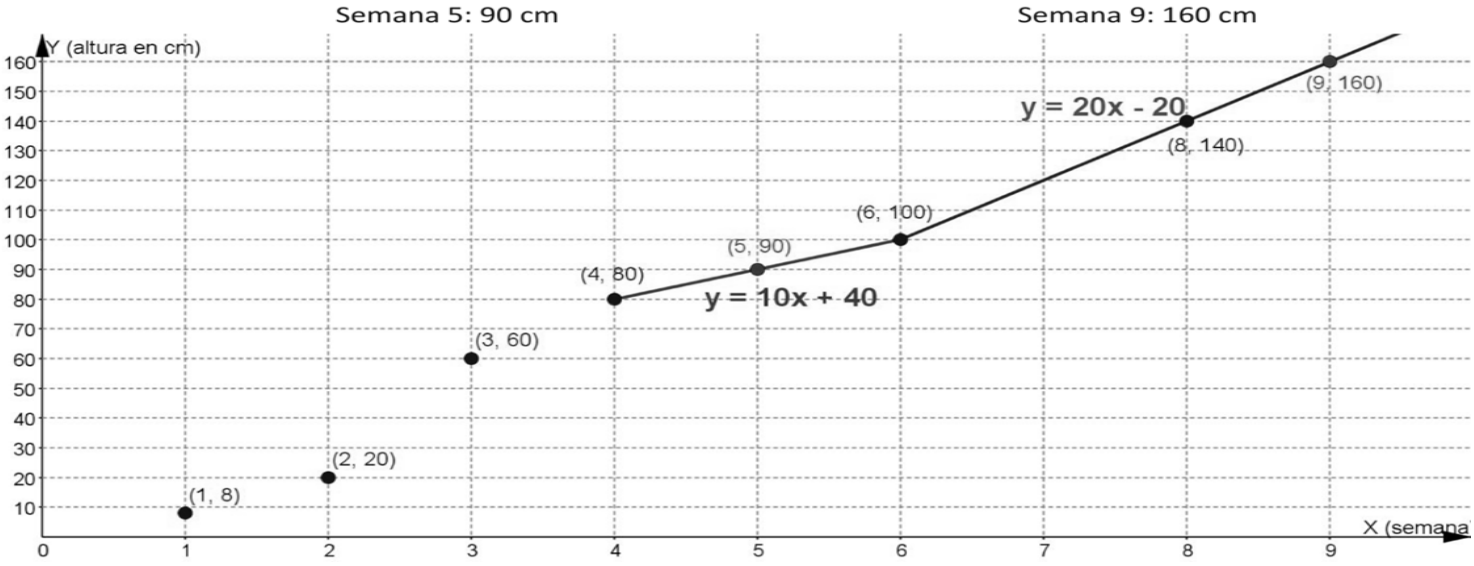
Para $x = 5$, $y = 10.5 + 40 = 90$. Luego, estimamos que la altura de la planta en la semana 5 es 90 cm

- Para estimar la altura de la planta en la semana 9 usamos extrapolación lineal porque la semana 9 no está comprendida entre las semanas que aparecen en la tabla.
Usamos entonces las semanas más próximas a la semana 9, que son las semanas 6 y 8.
Recta s que pasa por los puntos (6, 100) y (8, 140):

$$\text{pendiente}: m = \frac{140-100}{8-6} = \frac{40}{2} = 20 \Rightarrow \begin{matrix} m = 20 \\ (x_0, y_0) = (6, 100) \end{matrix}, \quad s: y - 100 = 20(x-6) \Rightarrow s: y = 20x - 20$$

Para $x = 9$, $y = 20.9 - 20 = 160$. Luego, estimamos que la altura en la semana 9 es 160 cm.

Gráficamente sería de la siguiente forma:



2) Se ha medido la temperatura del aire para distintas altitudes en un lugar determinado de la Tierra obteniéndose los siguientes resultados:

x = altitud (en metros)	100	200	350
y = temperatura (en ºC)	10	9,5	8

Mediante interpolación o extrapolación lineal, según el caso, estima la temperatura a los 400 m y a los 150 m

Resolución

- Para estimar la temperatura a los 400 m usamos extrapolación lineal porque 400 m no está comprendido entre las altitudes que aparecen en la tabla.
Usamos entonces las altitudes más próximas a 400 m, que son 200 m y 350 m.
Recta r que pasa por los puntos (200 ; 9,5) y (350, 8):

$$\text{pendiente}: m = \frac{8-9{,}5}{350-200} = \frac{-1{,}5}{150} = -0{,}01 \Rightarrow \begin{matrix} m = -0{,}01 \\ (x_0, y_0) = (350, 8) \end{matrix}, \quad r: y - 8 = -0{,}01(x-350) \Rightarrow s: y = -0{,}01x + 11{,}5$$

Para $x = 400$, $y = -0{,}01 \cdot 400 + 11{,}5 = 7{,}5$. Luego, estimamos que la temperatura es 7,5 ºC.

- Para estimar la temperatura a los 150 m usamos interpolación lineal porque 150 m está comprendido entre 100 m y 200 m.
Recta s que pasa por los puntos (100, 10) y (200 ; 9,5):

$$\text{pendiente}: m = \frac{9{,}5-10}{200-100} = \frac{-0{,}5}{100} = -0{,}005 \Rightarrow \begin{matrix} m = 1-0{,}005 \\ (x_0, y_0) = (100, 10) \end{matrix}, \quad s: y - 10 = -0{,}005(x-100) \Rightarrow s: y = -0{,}005x + 10{,}5$$

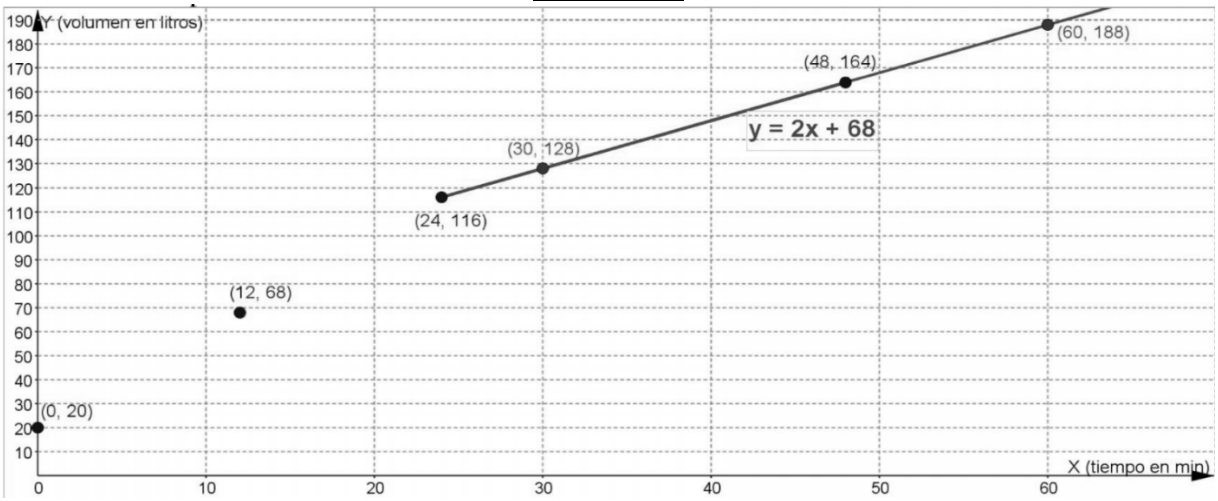
Para $x = 150$, $y = -0{,}005 \cdot 150 + 10{,}5 = 9{,}75$. Luego, estimamos que la temperatura es 9,75 ºC

3) Esta tabla representa el volumen de agua en un gran depósito a medida que se va llenando

Tiempo (minutos)	0	12	24	48
Volumen (litros)	20	68	116	164

Halla, mediante interpolación/extrapolación lineal, el volumen de agua que hay en el depósito a la media hora y a la hora de haber empezado.

Resolución



A la media hora, 128 *litros y a la hora*, 188 *litros*

Funciones de oferta y la demanda

La oferta es la cantidad de productos o servicios ofrecidos en el mercado.

La demanda es la cantidad de bienes o servicios que los compradores intentan adquirir en el mercado

La ley de la oferta y la demanda es el principio básico sobre el que se basa una economía de mercado.

Este principio refleja la relación que existe entre la demanda de un producto y la cantidad ofrecida de ese producto teniendo en cuenta el precio al que se vende el producto.

Así, según el precio que haya en el mercado de un bien, las empresas están dispuestas a fabricar un número determinado de ese bien.

Al igual que los demandantes están dispuestos a comprar un número determinado de ese bien, dependiendo del precio.

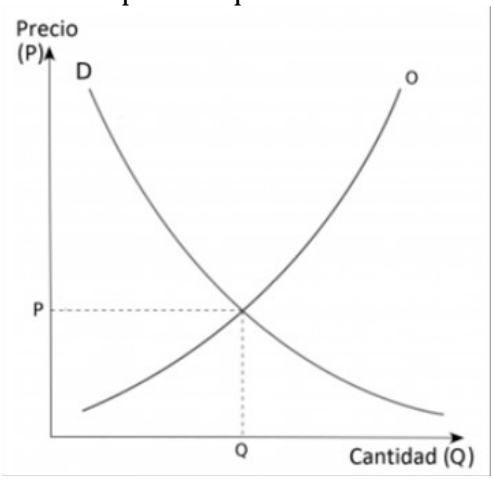
El punto donde existe un equilibrio porque los demandantes están dispuestos a comprar las mismas unidades que las empresas quieren fabricar, por el mismo precio, se llama equilibrio de mercado o punto de equilibrio.

Cuando existe exceso de oferta, el precio al que se están ofreciendo los productos es mayor que el precio de equilibrio.

Por tanto, la cantidad ofrecida es mayor que la cantidad demandada. Con lo consiguiente, los oferentes bajarán los precios para aumentar las ventas.

Por el lado contrario, cuando existe escasez de productos, significa que el precio del bien ofrecido es menor que el precio de equilibrio. La cantidad demandada es mayor que la cantidad ofrecida. De modo que las empresas aumentarán el precio, dado que hay muchos compradores para pocas unidades del bien para que el número de demandantes disminuya, y se establezca el punto de equilibrio.

Trasladando a un gráfico los comportamientos de la oferta y demanda que acabamos de ver, se comprende que la curva de oferta (O, línea azul) sea creciente y la curva de demanda (D, línea roja) sea decreciente. El punto donde se cruzan es el punto equilibrio de mercado.



Actividades resueltas

Las curvas de oferta y demanda de mercado de un determinado producto son, respectivamente:

$$O = 50P - 100 \qquad D = 20900 - 100P$$

a) Calcula el precio de equilibrio de mercado, P, y la cantidad que se intercambia a dicho precio.

Resolución

$$O = D \Rightarrow 50P - 100 = 20900 - 100P \rightarrow 150P = 21000 \rightarrow P = 140$$

Cantidad intercambiada: $Q(O) = 50 \,.\, 140 - 100 = 6900$ que coincide con $Q(D) = 20900 - 100 \,.\, 140 = 6900$

O sea, 6900 unidades intercambiadas a un precio de 140.

b) Determina las cantidades ofrecidas y demandadas a precios de 160 € y 120 € e indica si hay un exceso de oferta o demanda

Resolución

Si el precio es 160 €: $D(160) = 4900$ $O(160) = 7900 \Rightarrow$ Hay un exceso de oferta

Si el precio es 120 €: $D(120) = 8900$ $O(120) = 5900 \Rightarrow$ Hay un exceso de demanda

2) Sean "D" y "O" la demanda y la oferta de un determinado bien, y P el precio del mismo.
Si las funciones de oferta (O) y demanda (D) se representan de la siguiente manera

$$O = 50P - 300 \qquad D = 150 - 10P$$

a) Calcula el precio de equilibrio de dicho bien
b) Explica que ocurriría si el precio fuera superior y si fuera inferior. Calcula la demanda y oferta para cada uno de los precios anteriormente analizados.

Resolución

a) $O = D$; $50P - 300 = 150 - 10P$; $60P = 450$; $P = 7{,}5$

b)
Si el precio es, por ejemplo, 5 €: $D(5) = 100$ $O(5) = -50 \Rightarrow$ Hay un exceso de demanda

Si el precio es, por ejemplo, 10 €: $D(10) = 50$ $O(10) = 200 \Rightarrow$ Hay un exceso de oferta