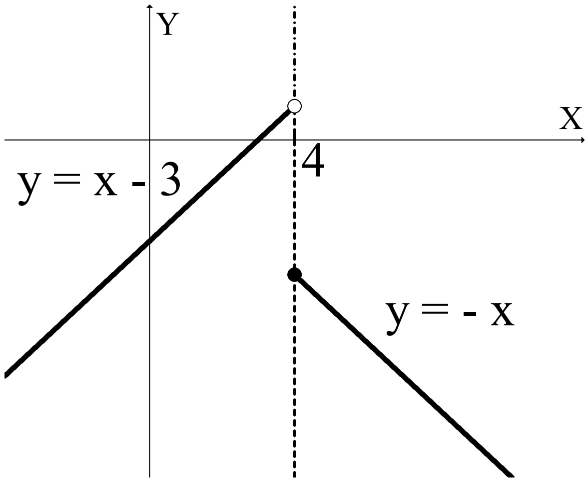
Concepto de función definida a trozos

Una función definida a trozos o por intervalos es aquella cuya fórmula está formada por dos o más expresiones, cada una definida en un intervalo diferente.

Por ejemplo, f(x) = $\begin{cases} x-3, si\ x<4 \\ -x, si\ x \geq 4 \end{cases}$ es una función definida en dos intervalos:

En el intervalo $(-\infty\ ,4\ )$ la gráfica es la semirrecta abierta y = x – 3 de extremo A(4, 1)

En el intervalo $[\ 4\ ,\infty)$ la gráfica es la semirrecta cerrada y = –x de extremo B(4, – 4)



Actividades resueltas

1) Calcula el dominio de definición de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-5}{2x-1}\ ,\ si\ \ x\leq 0 \\ \dfrac{x^2+2x}{x-2}\ ,\ si\ x>0 \end{cases}$

Resolución

$\dfrac{x-5}{2x-1}$ no se puede calcular cuando $2x-1=0$, o sea si $x=\dfrac{1}{2}$. Pero como esta expresión se define para $x\leq 0$ siempre se podrá calcular para estos valores

$\dfrac{x^2+2x}{x-2}$ no se puede calcular cuando $x-2=0$, o sea si $x=2$.

Por tanto, $D(f)=R-\{2\}$

b) $g(x)=\begin{cases} \dfrac{3x-1}{2x-1}\ ,\ si\ \ x<-1 \\ x^2-4,\ si\ x>-1 \end{cases}$

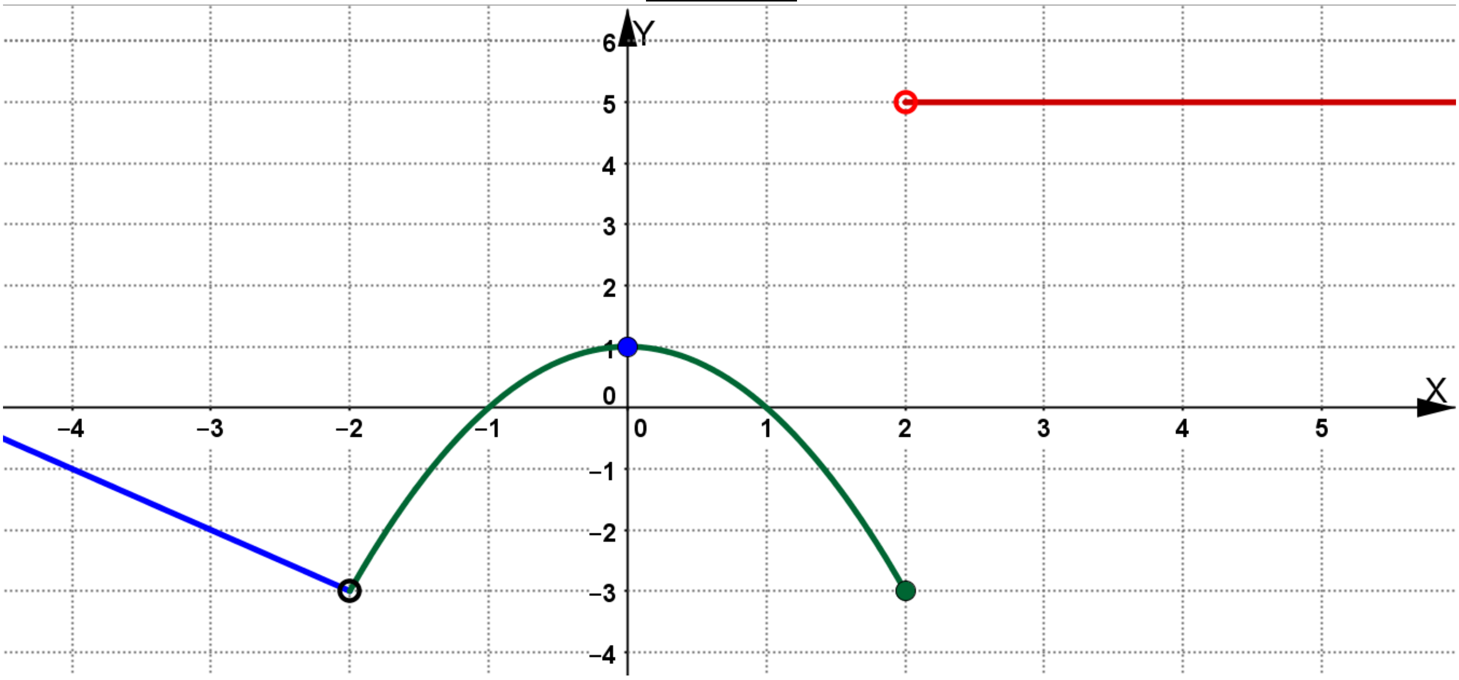
Resolución

$\dfrac{3x-1}{2x-1}$ no se puede calcular cuando $2x-1=0$, o sea si $x=\dfrac{1}{2}$. Pero como esta expresión se define para $x<-1$ siempre se podrá calcular para este valor. Por otra parte, $\nexists\ g(-1)\Rightarrow D(g)=R-\{-1\}$

2) Dibuja la gráfica de las siguientes funciones:

$$a)\ f(x) = \begin{cases} -5-x\ ,\ si\ \ x < -2 \\ 1-x^2\ ,\ si\ -2 < x \leq 2 \\ 5\ ,\ si\ x > 2 \end{cases}$$

Resolución



$$b)\ f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x}\ ,\ si\ x \leq 1 \\ x^2-4x+5\ ,\ si\ x > 1 \end{cases}$$

Resolución

Primer trozo: $f(x) = \frac{2}{x}$, para $x \leq 1$, intervalo $(-\infty, 1]$. Es un **trozo de hipérbola**.

Se hace una tabla de valores tomando el extremo del intervalo (el 1) y algunos valores más del intervalo, o sea, valores menores que 1

$x \leq 1$	1	-1	$\frac{1}{2}$	-2
$y = \frac{2}{x}$	$y = \frac{2}{1} = 2$	$y = \frac{2}{-1} = -2$	$y = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$	$y = \frac{2}{-2} = -1$
	punto final del trozo de hipérbola: (1, 2) incluido en el trozo de hipérbola	punto (−1, −2)	punto (2, 4)	punto (−2, −1)

2º trozo: $f(x) = x^2 - 4x + 5$, para $x > 1$, intervalo $(1, \infty)$. Es un **trozo de parábola**.

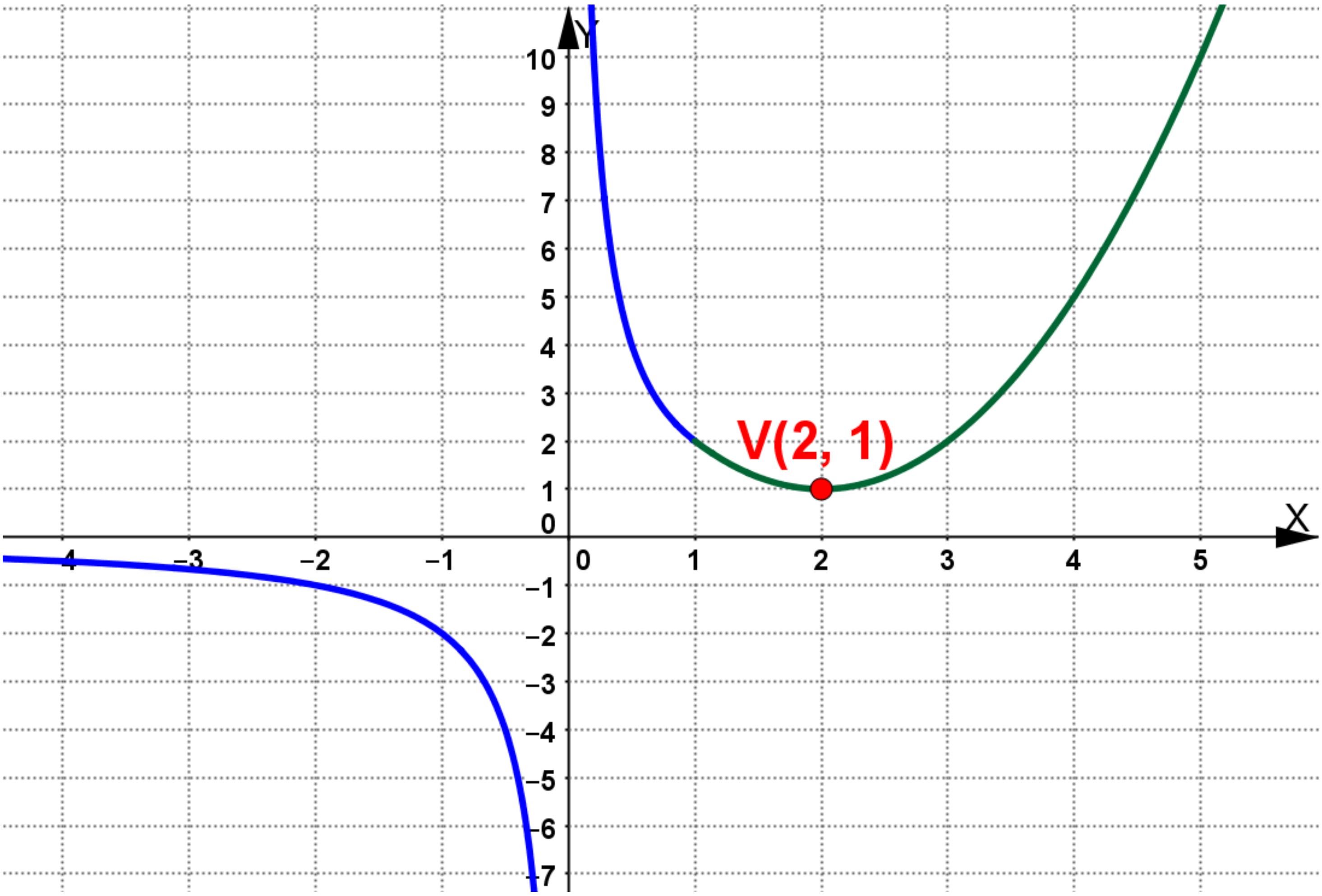
- Calculamos el vértice de la parábola $V(x_v, y_v)$: $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2.1} = 2$, $y_v = 2^2 - 4.2 + 5 = 4 - 8 + 5 = 1$

El vértice es $V(2, 1)$

Si x_v no estuviese en el intervalo $(1, \infty)$ entonces el vértice no pertenecería al trozo de parábola que tenemos que dibujar y no habría que representarlo.

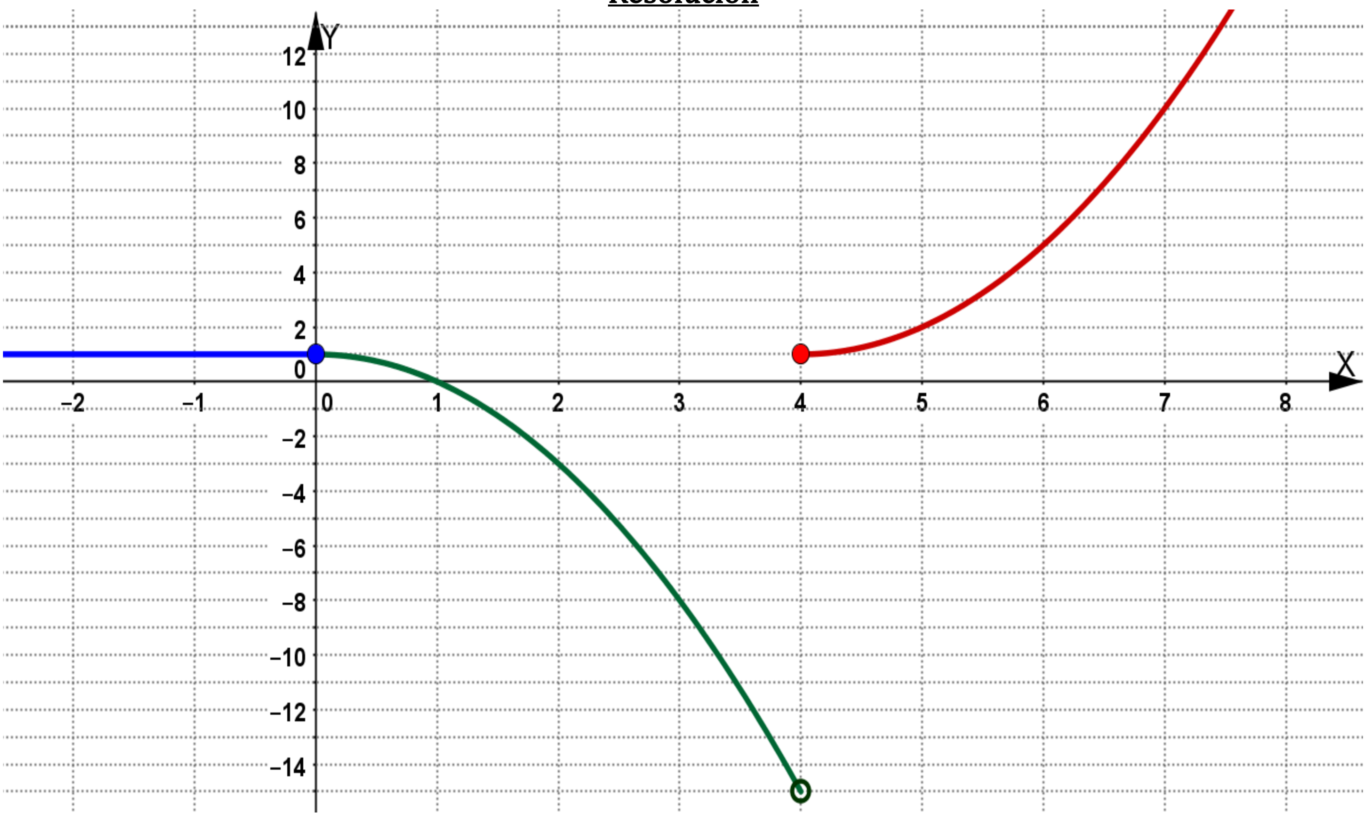
- Se hace una tabla de valores tomando x_v , el extremo del intervalo (el 1) y algún otro punto a la dcha de x_v.

$x > 1$	2	1	3
$y = x^2 - 4x + 5$	1	$y = 1^2 - 4.1 + 5 = 2$	$y = 3^2 - 4.3 + 5 = 2$
	V(2, 1)	punto inicial del trozo de parábola: (1, 2) excluido del trozo de parábola	punto (3, 2)



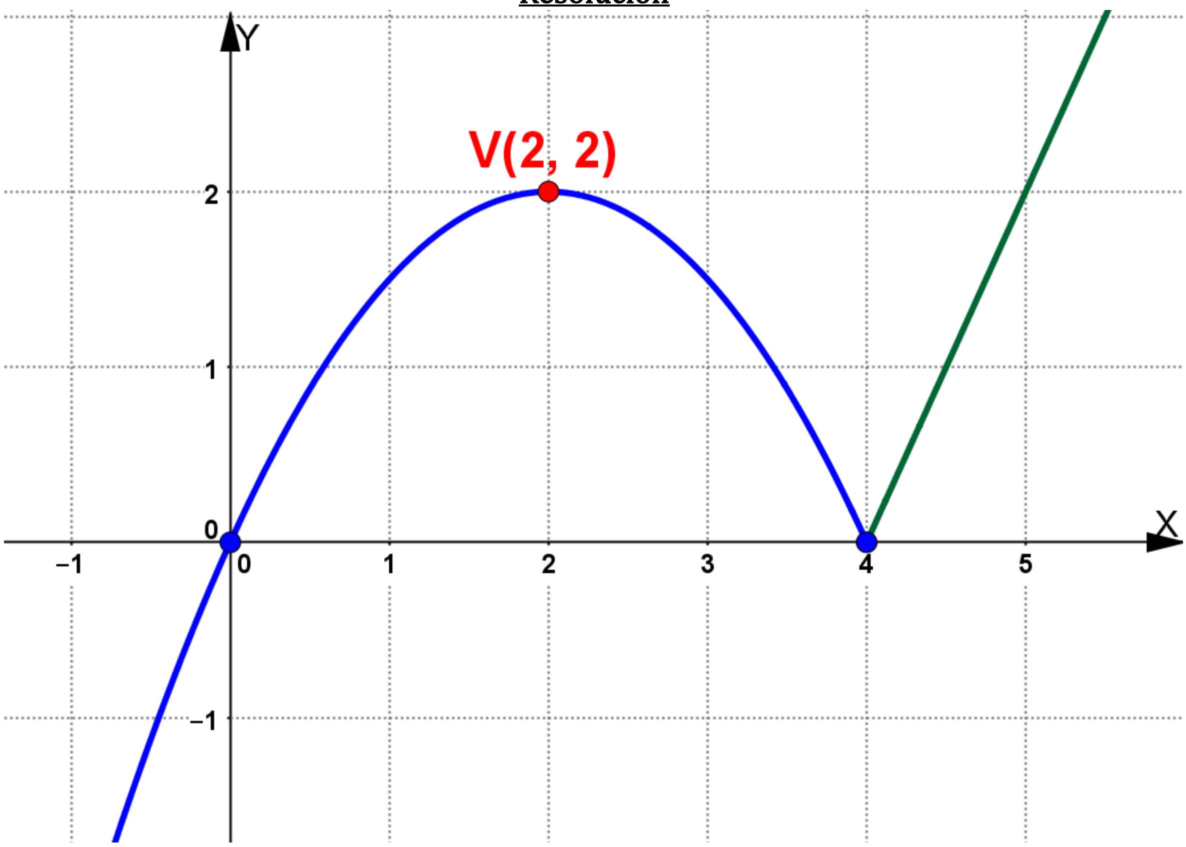
c) $f(x)=\begin{cases}1\ ,\ \text{si } x\le 0\\ -x^2+1\ ,\ \text{si } 0<x<4\\ x^2-8x+17\ ,\ \text{si } x\ge 4\end{cases}$

Resolución



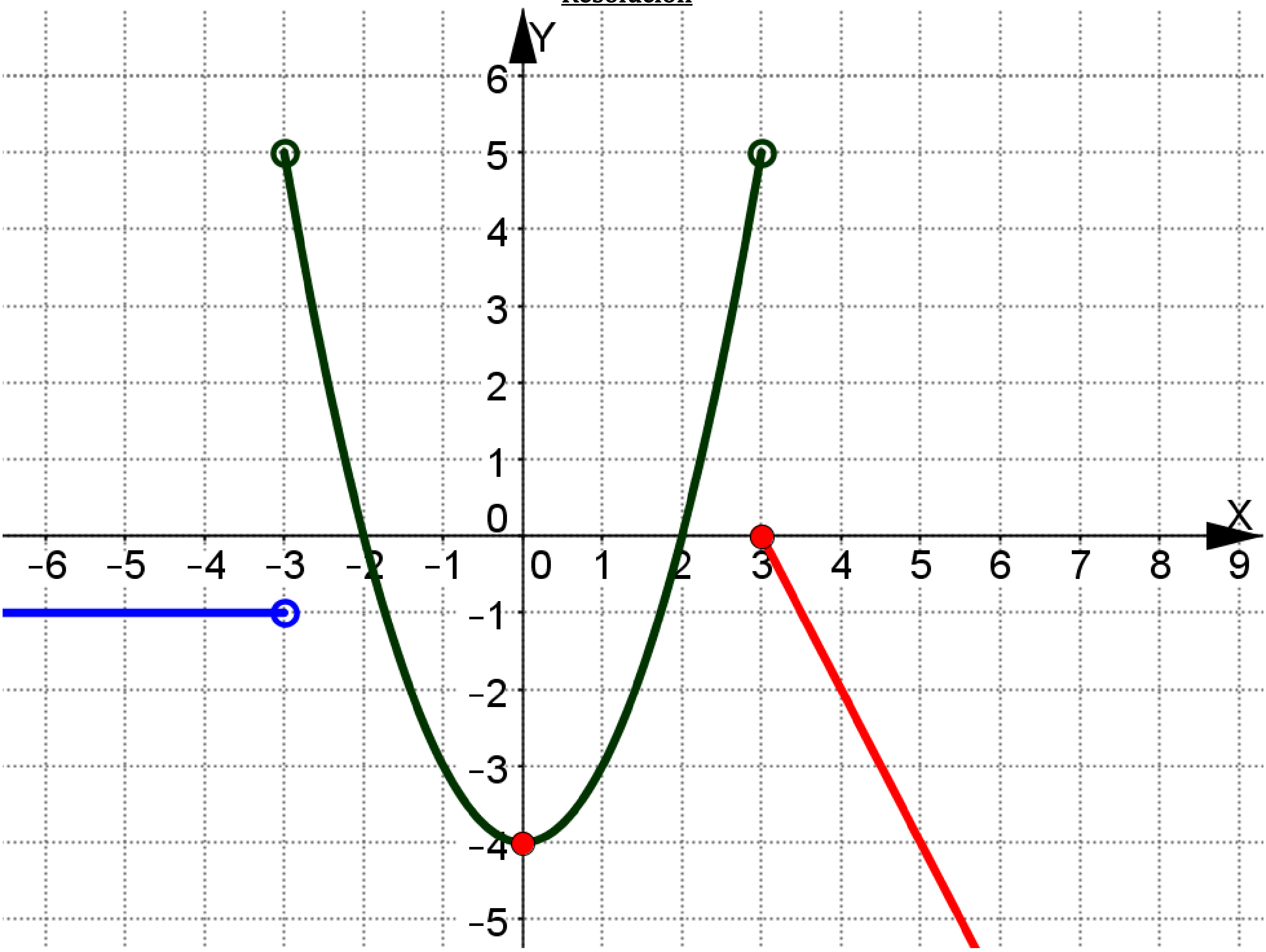
d) $f(x)=\begin{cases}2x-\dfrac{x^2}{2}\ ,\ \text{si } x\le 4\\ 2x-8\ ,\ \text{si } x>4\end{cases}$

Resolución



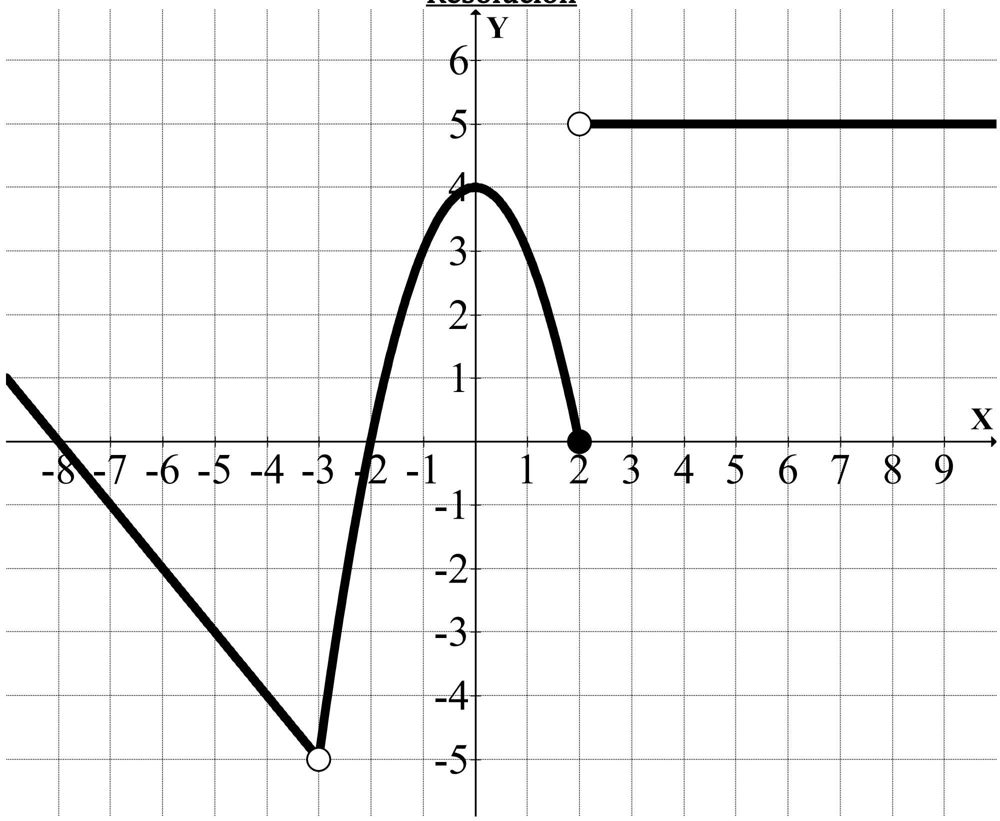
$$e)\ f(x)=\begin{cases}-1,\ \text{si } x<-3\\ x^2-4,\ \text{si } -3<x<3\\ 6-2x,\ \text{si } x\geq 3\end{cases}$$

Resolución



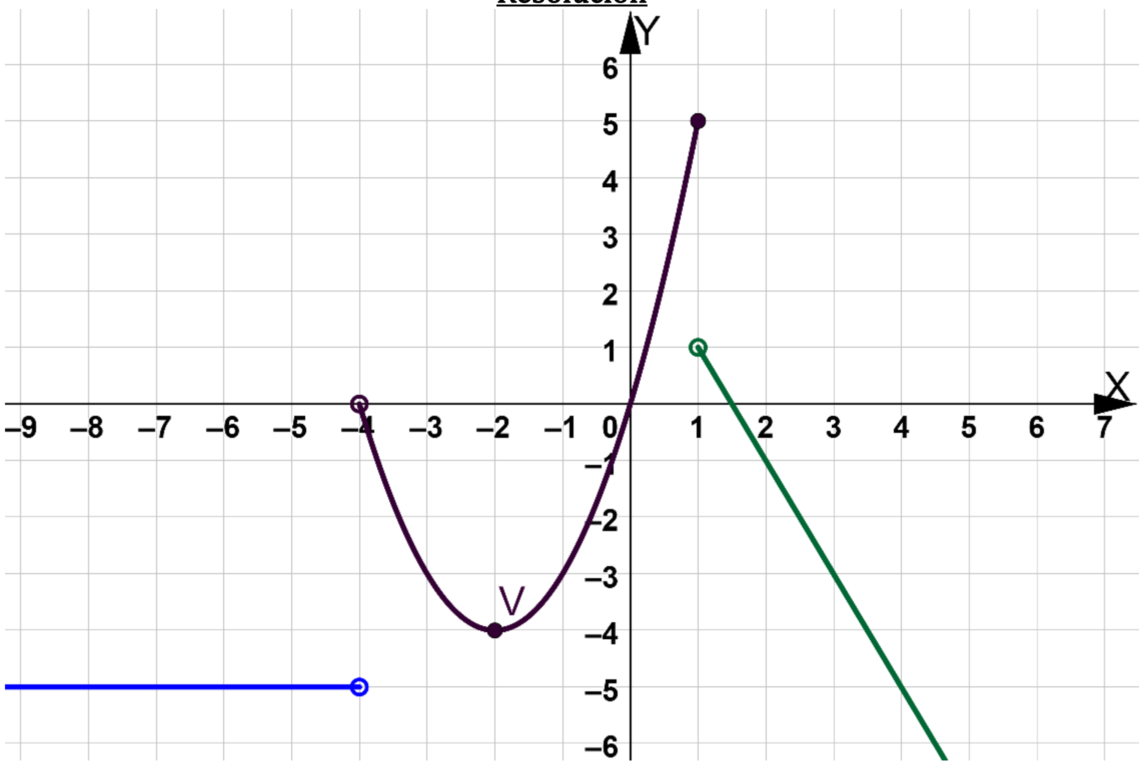
f) $f(x)=\begin{cases} -x-8, \text{ si } x<-3 \\ 4-x^2, \text{ si } -3<x\le 2 \\ 5, \text{ si } x>2 \end{cases}$

Resolución



g) $f(x)=\begin{cases} -5, \text{ si } x<-4 \\ x^2+4x, \text{ si } -4<x\le 1 \\ 3-2x, \text{ si } x>1 \end{cases}$

Resolución



h) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{-3}{x}, \text{ si } x\le -1\\ x^2-2x-3, \text{ si } -1<x<4\\ 6-x, \text{ si } 4\le x\le 7\end{cases}$

Resolución

- Para $x\le -1 \to$ rama de la hipérbola $y=\dfrac{-3}{x}$

x	-1	-3
$y=\dfrac{-3}{x}$	$\dfrac{-3}{-1}=3$	$\dfrac{-3}{-3}=1$

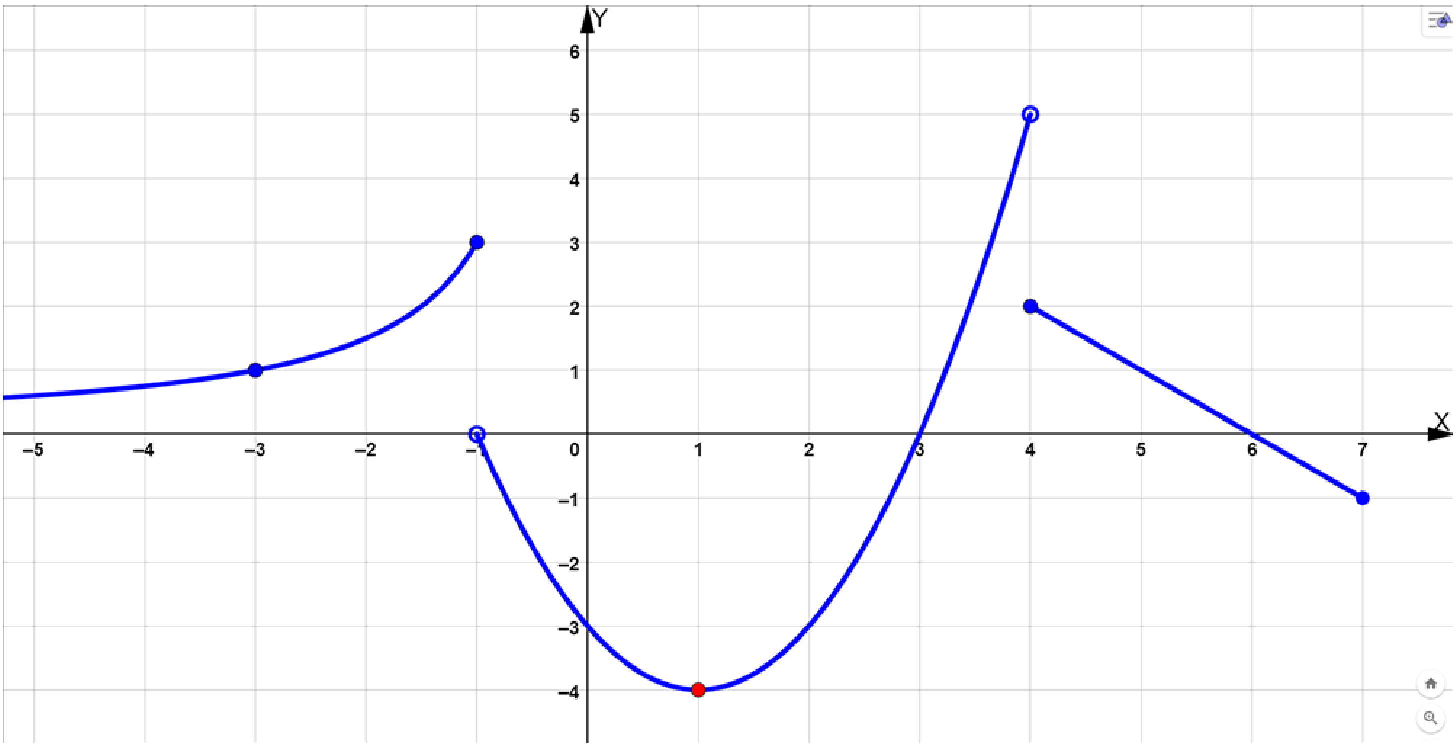
- Para $-1<x<4 \to$ trozo de parábola

Vértice: $x_v=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{2}{2.1}=1$; $y_v=f(1)=1^2-2.1-3=1-2-3=-4 \Rightarrow V(1,-4)$

x	-1	4
$y=x^2-2x-3$	$(-1)^2-2.(-1)-3=1+2-3=0$	$4^2-2.4-3=16-8-3=5$

- Para $4\le x\le 7 \to$ semirrecta $y=6-x$

x	4	7
$y=6-x$	$6-4=2$	$6-7=-1$



i) $f(x)=\begin{cases} 1, \text{ si } x<-4 \\ -x^2-2x+3, \text{ si } -4<x\leq 0 \\ \dfrac{2}{x}, \text{ si } x>0 \end{cases}$

Resolución

- Para $x<-4 \rightarrow$ semirrecta horizontal $y=1$

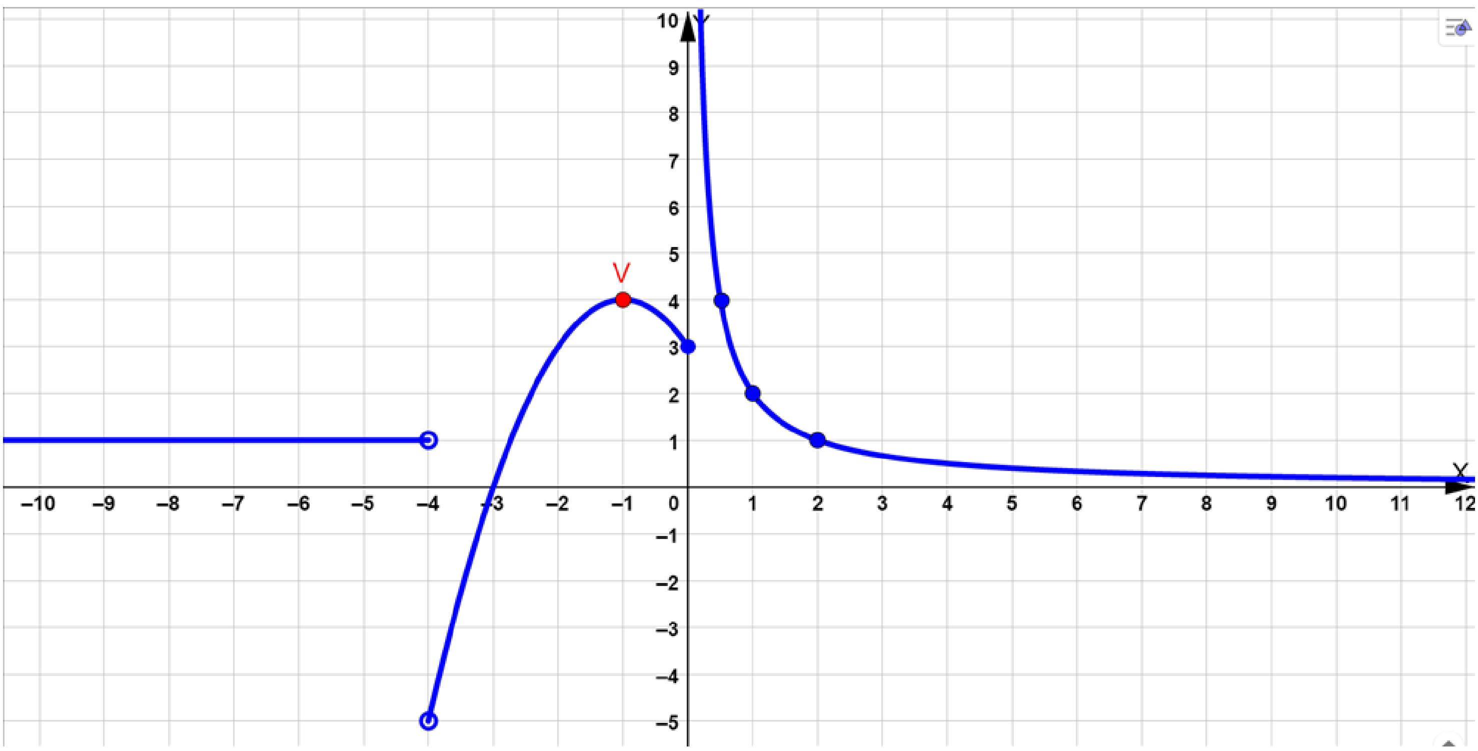
- Para $-4<x\leq 0 \rightarrow$ trozo de parábola

Vértice: $x_v=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{2}{2.(-1)}=-1$; $y_v=f(-1)=-(-1)^2-2.(-1)+3=-1+2+3=4 \Rightarrow V(-1,\ 4)$

x	-4	0
$y=-x^2-2x+3$	$-(-4)^2-2.(-4)+3=-16+8+3=-5$	$-0^2-2.0+3=3$

- Para $x>0 \rightarrow$ rama de la hipérbola $y=\dfrac{2}{x}$

x	1	2	$\frac{1}{2}$
$y=\dfrac{2}{x}$	$\dfrac{2}{1}=2$	$\dfrac{2}{2}=1$	$\dfrac{2}{\frac{1}{2}}=4$



j) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{-x}{2}-1, \text{ si } x\le -2\\ 1-x^2, \text{ si } -2<x<3\\ x^2-8x+15, \text{ si } x>3\end{cases}$

Resolución

- Para $x<-2 \rightarrow$ semirrecta $y=\dfrac{-x}{2}-1$

x	-2	-4
$y=\dfrac{-x}{2}-1$	$\dfrac{-(-2)}{2}-1=0$	$\dfrac{-(-4)}{2}-1=1$

- Para $-2<x<3 \rightarrow$ trozo de parábola

Vértice: $x_v=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{0}{2.(-1)}=0$; $y_v=f(0)=1-0^2=1-0=1 \Rightarrow V(0,1)$

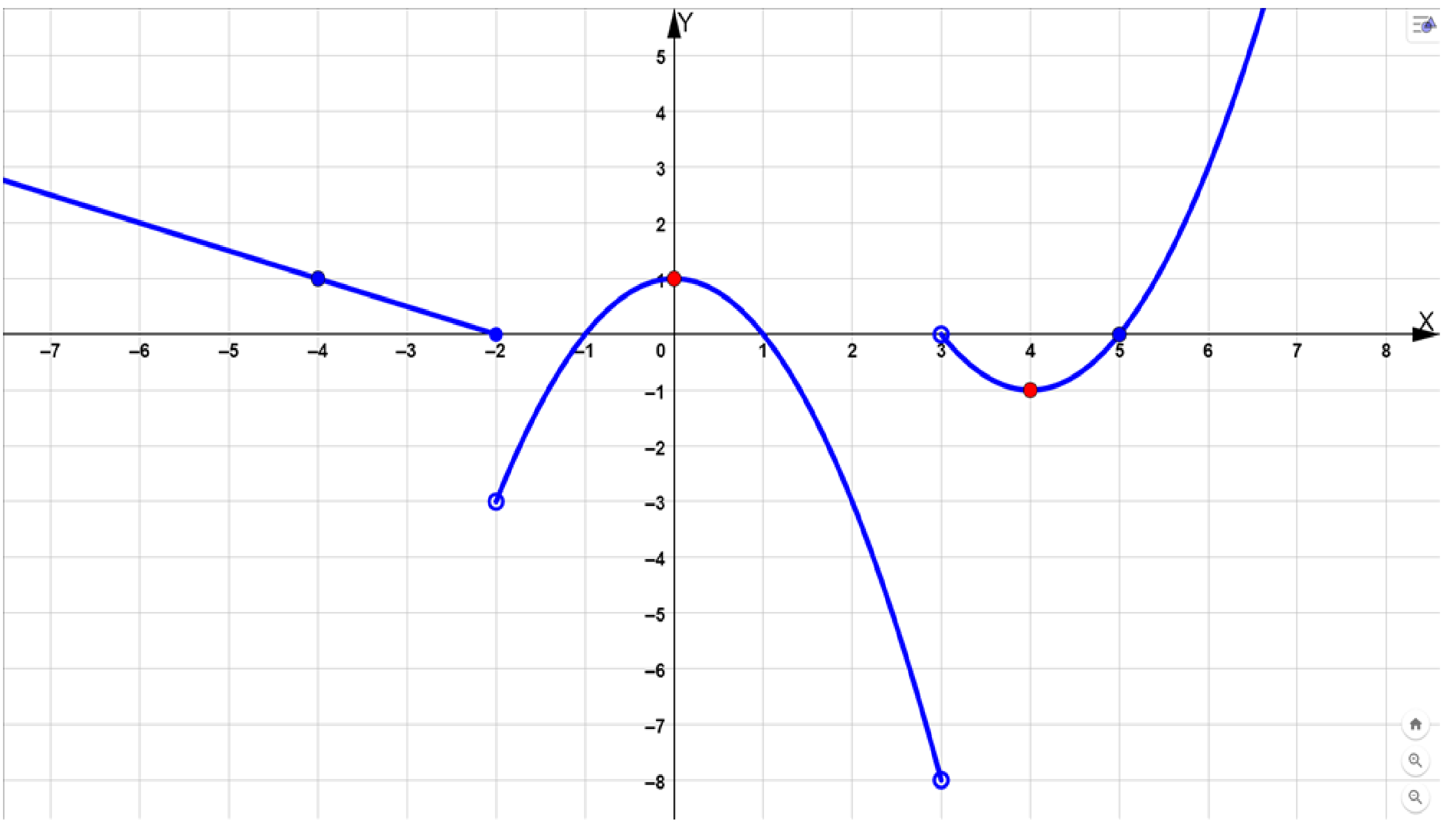
x	-2	3
$y=1-x^2$	$1-(-2)^2=1-4=-3$	$1-3^2=1-9=-8$

- Para $x>3 \rightarrow$ trozo de parábola

Vértice: $x_v=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{0}{2.(-1)}=0$; $y_v=f(0)=1-0^2=1-0=1 \Rightarrow V(0,1)$

x	3	5
$y=x^2-8x+15$	$3^2-8.3+15=9-24+15=0$	$5^2-8.5+15=25-40+15=0$

Vértice: $x_v=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{8}{2.1}=4$; $y_v=f(4)=4^2-8.4+15=16-32+15=-1 \Rightarrow V(4,-1)$



k) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{-3}{x}, \text{ si } x\le -1 \\ x^2-2x-3, \text{ si } -1<x<4 \\ 6-x, \text{ si } 4\le x\le 7 \end{cases}$

Resolución

- Para $x\le -1 \rightarrow$ rama de la hipérbola $y=\dfrac{-3}{x}$

x	-1	-3
$y=\dfrac{-3}{x}$	$\dfrac{-3}{-1}=3$	$\dfrac{-3}{-3}=1$

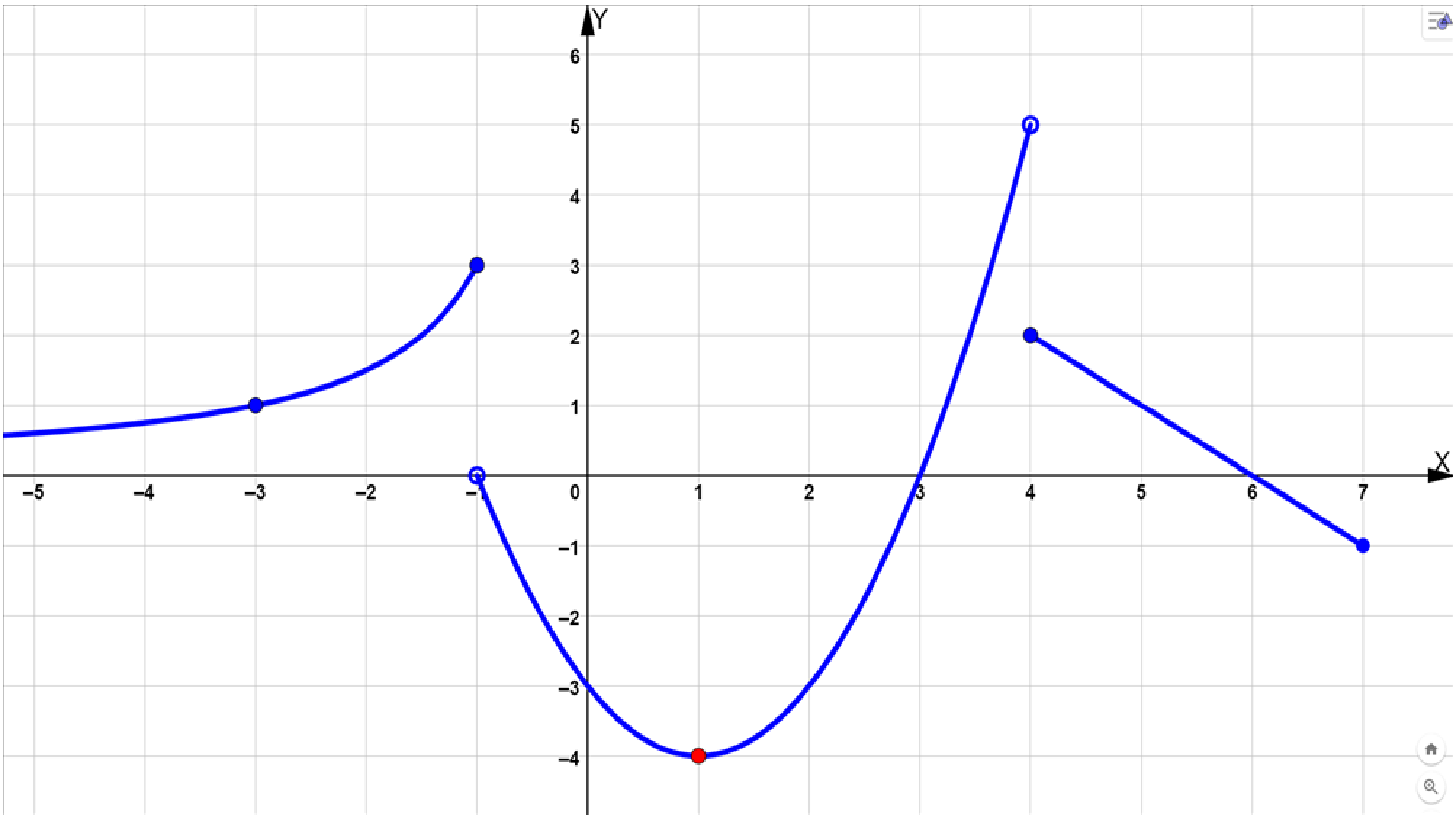
- Para $-1<x<4 \rightarrow$ trozo de parábola

Vértice: $x_v=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{2}{2.1}=1$; $y_v=f(1)=1^2-2.1-3=1-2-3=-4 \Rightarrow V(1,-4)$

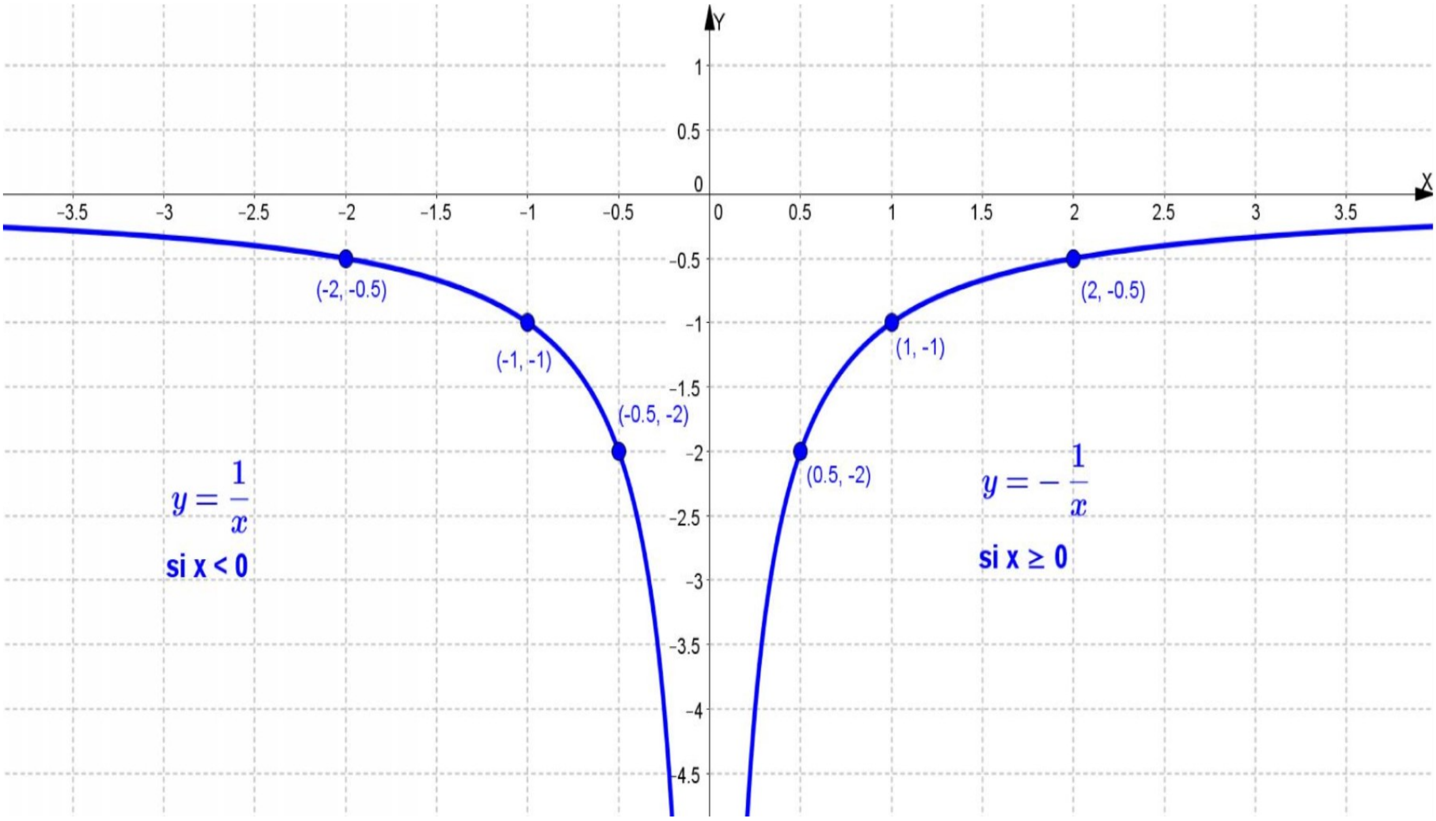
x	-1	4
$y=x^2-2x-3$	$(-1)^2-2.(-1)-3=1+2-3=0$	$4^2-2.4-3=16-8-3=5$

- Para $4\le x\le 7 \rightarrow$ semirrecta $y=6-x$

x	4	7
$y=6-x$	$6-4=2$	$6-7=-1$

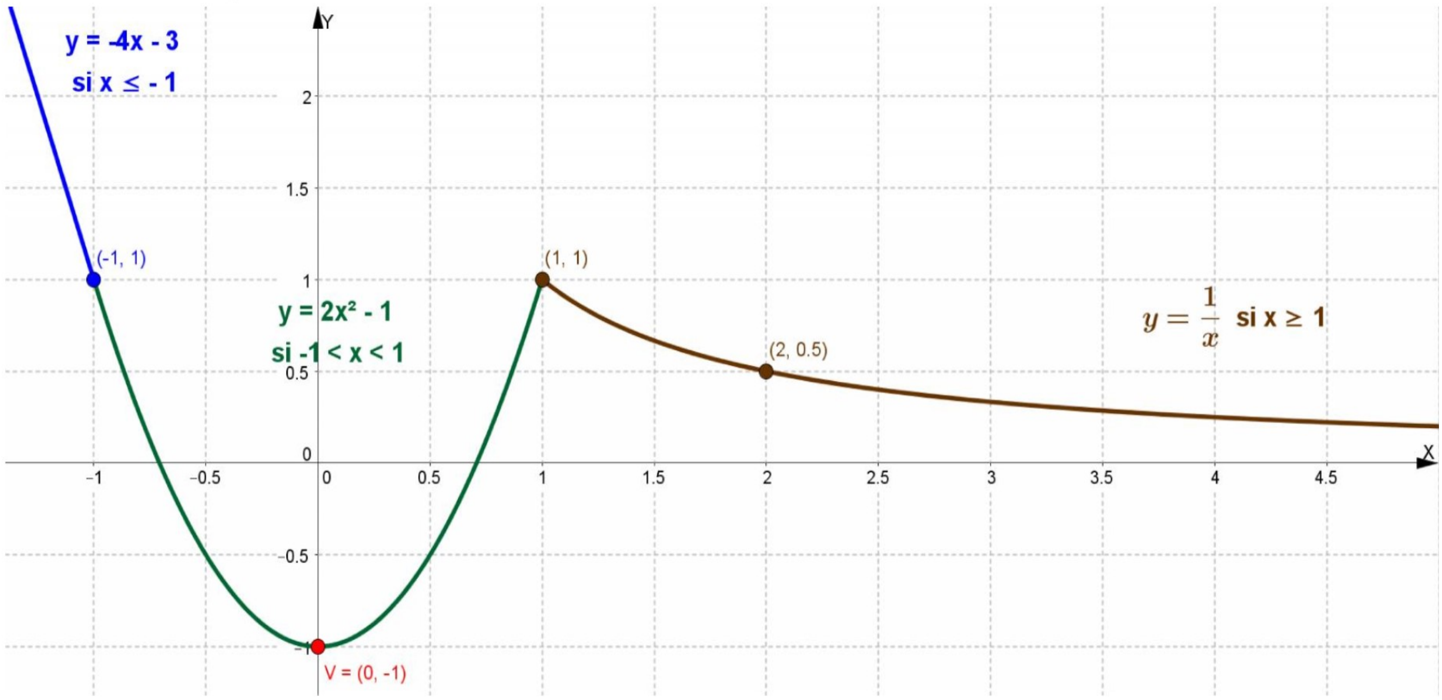


l) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\ , \text{si } x < 0 \\ -\dfrac{1}{x}\ , \text{si } x \geq 0 \end{cases}$



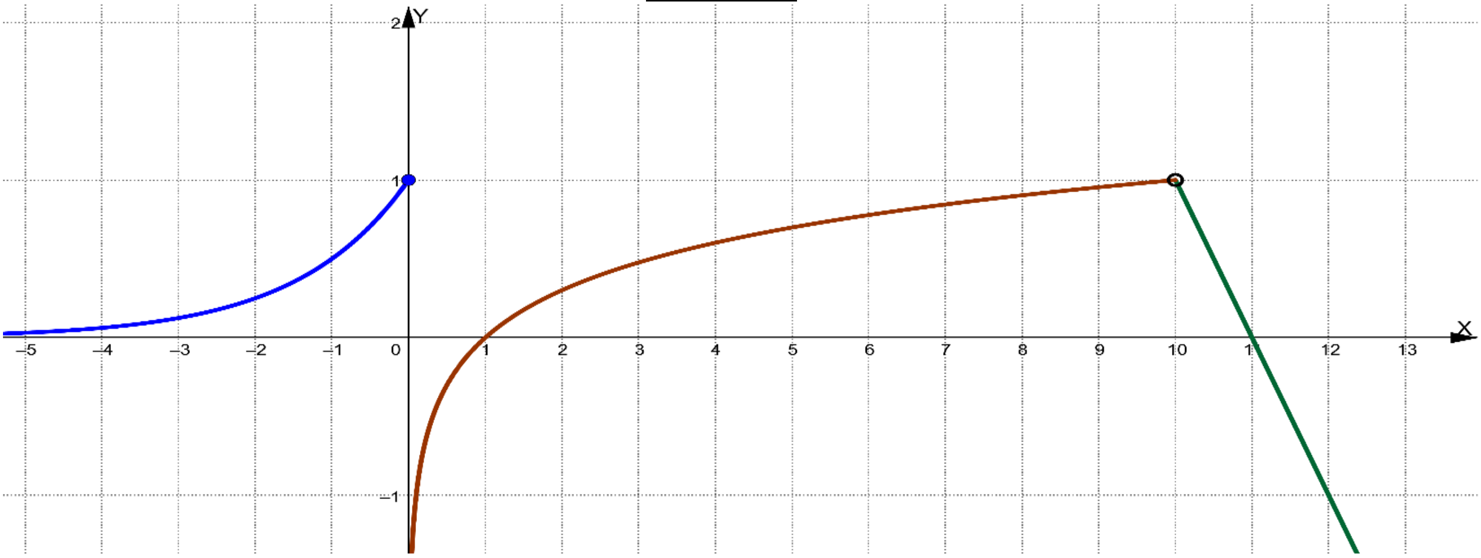
m) $f(x) = \begin{cases} -4x - 3\ , \text{si } x \leq -1 \\ 2x^2 - 1\ , \text{si } -1 < x < 1 \\ \dfrac{1}{x}\ , \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Resolución



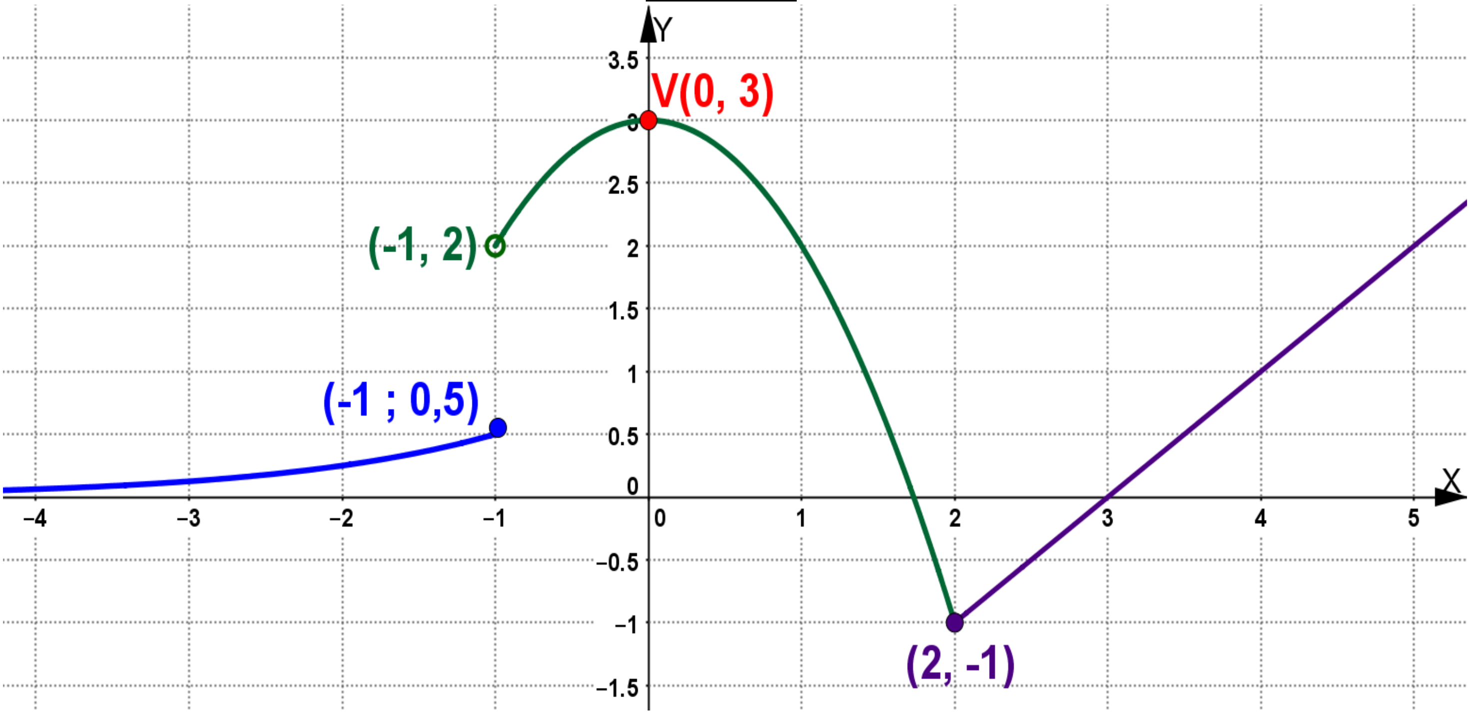
n) $f(x)=\begin{cases} 2^x, \text{ si } x\le 0 \\ \log x, \text{ si } 0<x<10 \\ -x+11, \text{ si } x>10 \end{cases}$

Resolución



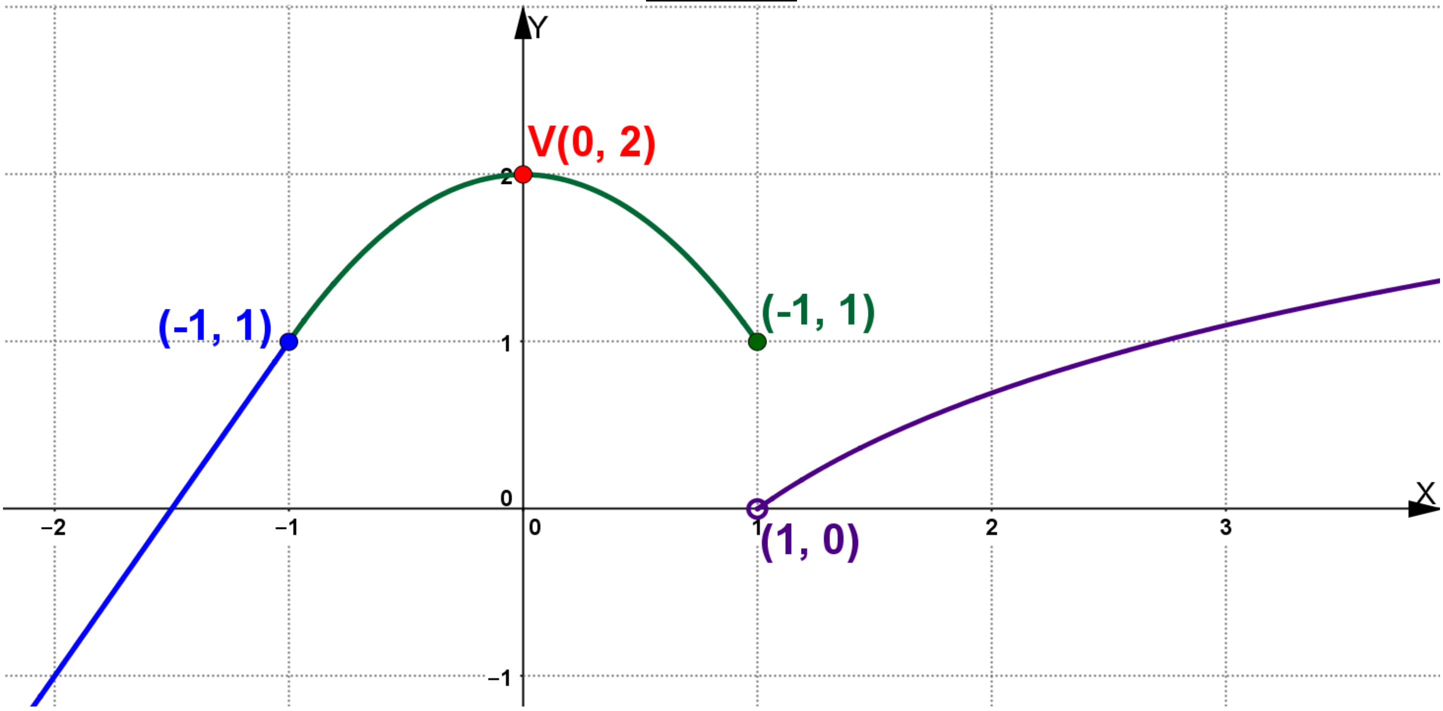
ñ) $f(x)=\begin{cases} 2^x, \text{ si } x\le -1 \\ -x^2+3, \text{ si } -1<x<2 \\ x-3, \text{ si } x\ge 2 \end{cases}$

Resolución



o) $f(x)=\begin{cases} 2x+3, \text{ si } x\le -1 \\ -x^2+2, \text{ si } -1<x\le 1 \\ \ln x, \text{ si } x>1 \end{cases}$

Resolución

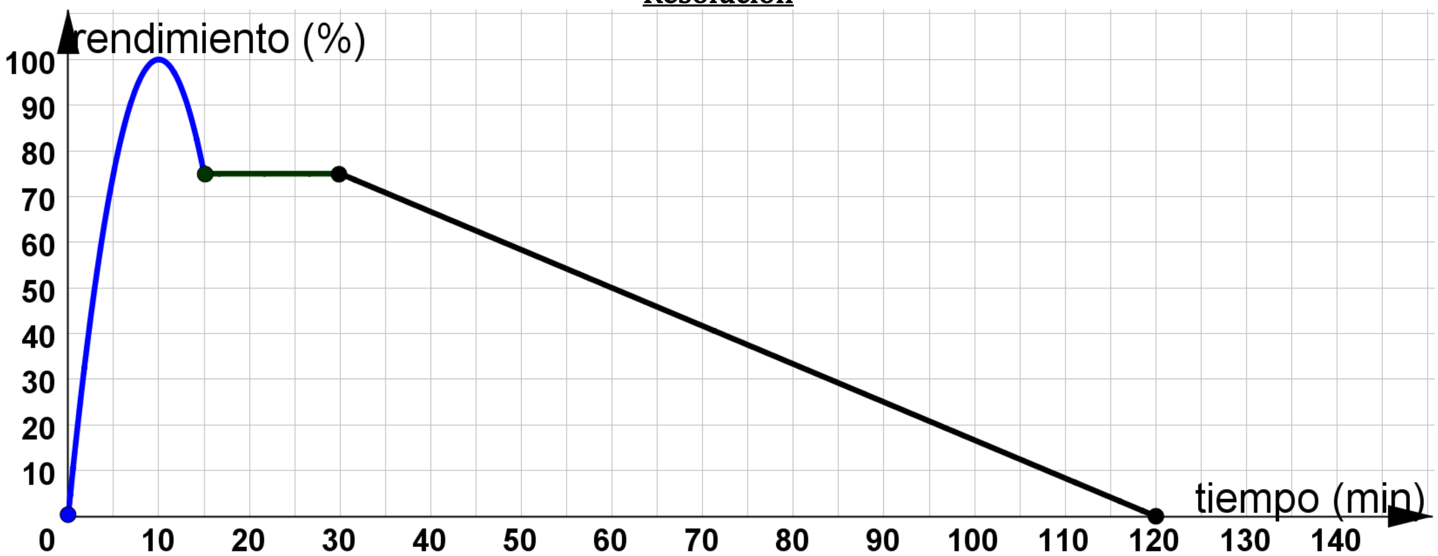


3) En un centro de entrenamiento de deportistas de alta competición han determinado que el rendimiento de uno de ellos (en %) en función del tiempo (en minutos) de esfuerzo muscular viene dado por la expresión:

$$f(t)=\begin{cases} -t(t-20)\ , & \text{si } 0\le t<15 \\ 75\ , \text{ si } & 15\le t<30 \\ 100-\dfrac{5}{6}t\ , & \text{si } 30\le t\le 120 \end{cases}$$

a) Representa gráficamente la función y estudia continuidad, monotonía y extremos.

Resolución



continua ; creciente en (0, 10), constante en (10, 30) y decreciente en (30, 120); el máximo relativo y absoluto es (5, 100); no tiene mínimo relativo; los mínimos absolutos son (0, 0) y (120, 0)

b) ¿En qué momento alcanza el deportista su máximo rendimiento?

Resolución

A los 5 minutos

c) Calcula el rendimiento del deportista en los siguientes tiempos: 12 min, 15 min, 20 min, 42 min

Resolución

$$t = 12 \Rightarrow -12(12 - 20) = 96\% \ ; t = 15 \Rightarrow 75\% \ ; \ t = 20 \Rightarrow 75\% \ ; \ t = 42 \Rightarrow 100 - \frac{5}{6}.42 = 65\%$$

d) ¿En qué momentos el rendimiento es del 51%?

Resolución

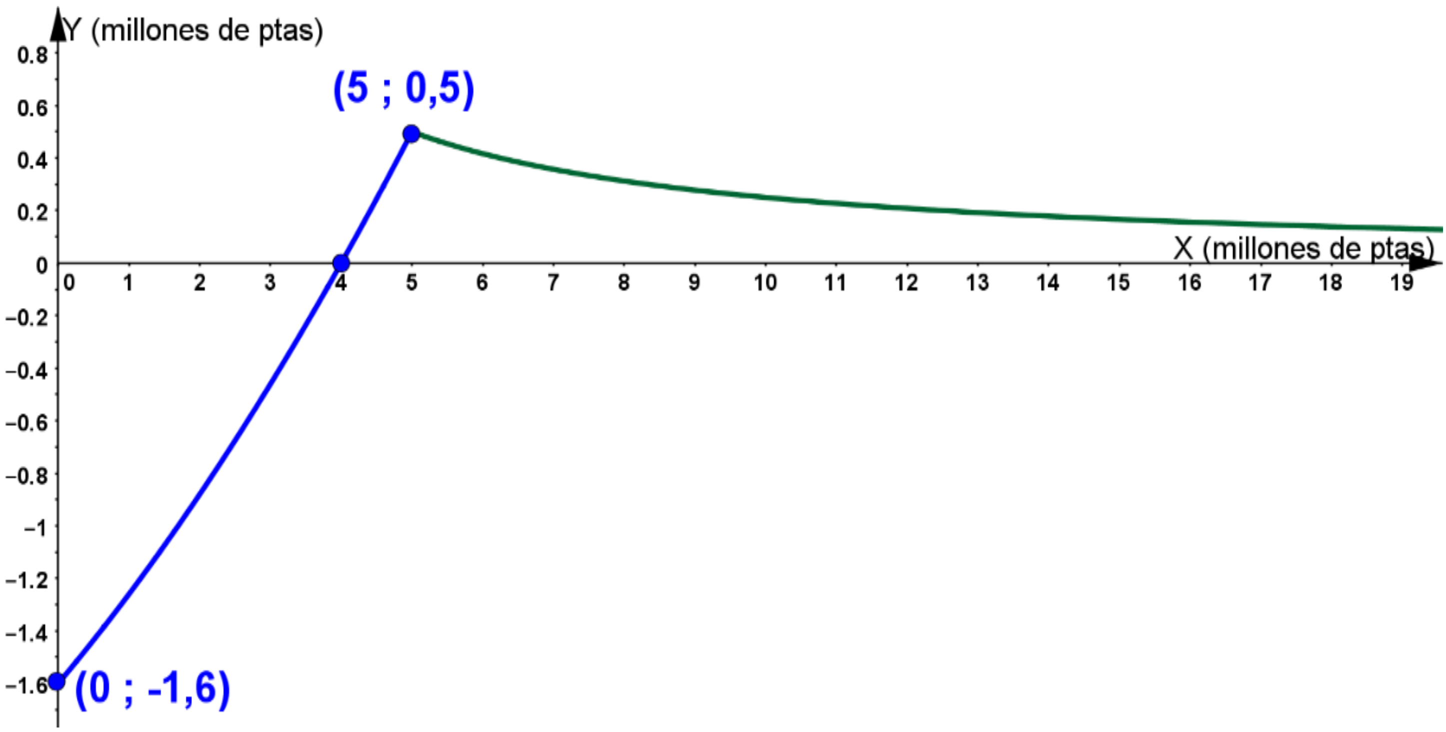
$$-t(t - 20) = 51 \Rightarrow -t2 + 20t - 51 = 0 \Rightarrow t = 3, t = 17 \text{ (no válido)} \ ; \ 100 - \frac{5}{6}t = 51 \Rightarrow \ t = 58{,}8$$

Luego, la respuesta es a los 3 min y a los 58,8 min (58 min 48 seg)

4) El estudio de la rentabilidad de una empresa revela que una inversión de x millones de euros produce una ganancia de $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{50} + \frac{8x}{25} - \frac{8}{5} \ , \ \text{si } 0 \leq x \leq 5 \\ \frac{5}{2x} \ , \ \text{si } x > 5 \end{cases}$ de millones de euros,

a) Representa la función f(x)

Resolución



b) Halla la inversión que produce máxima ganancia

Resolución

Corresponde al máximo de la función, 5 millones de euros

c) Halla el valor de la inversión que produce ganancia nula.

Resolución

Corresponde al punto de corte con el eje X, 4 millones de euros

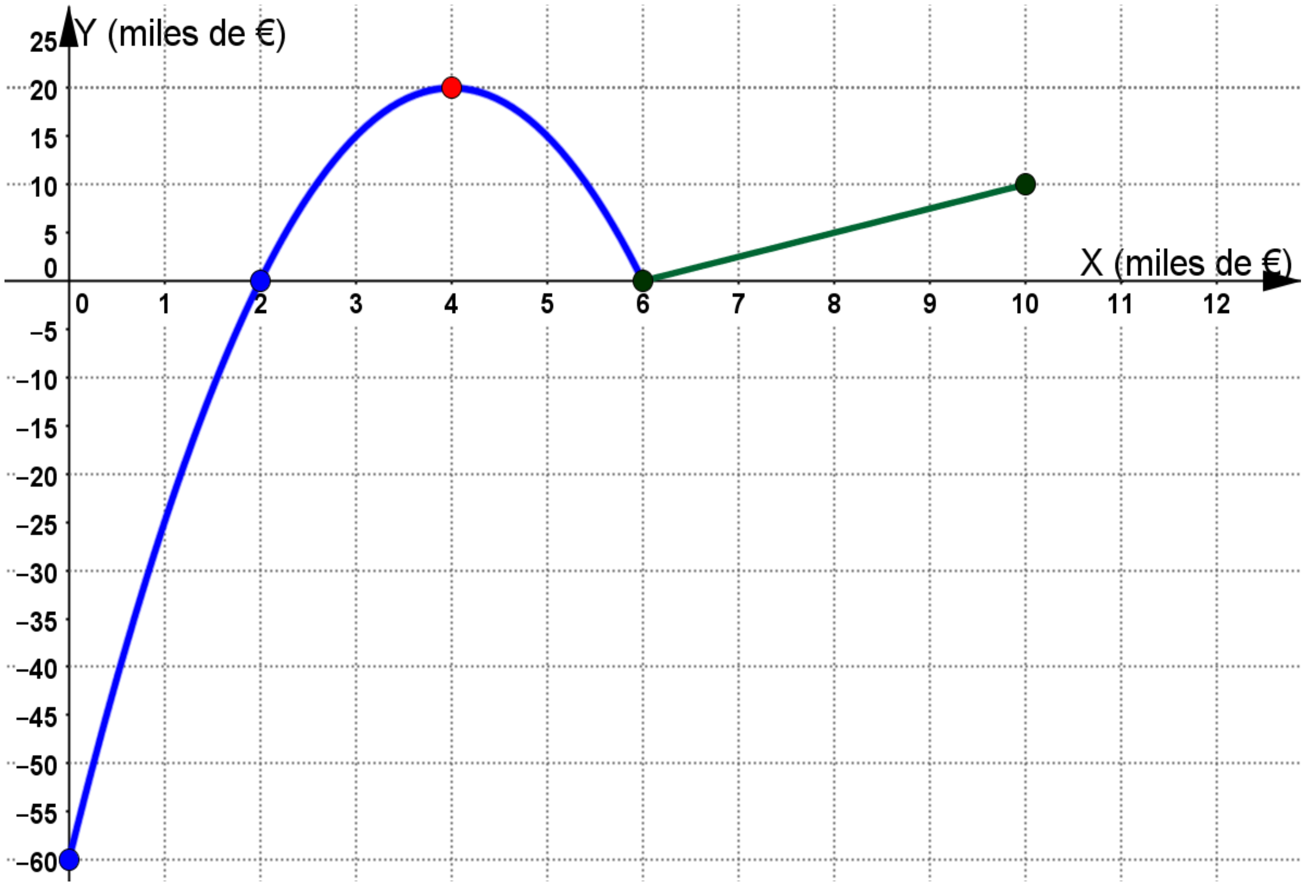
5) El beneficio obtenido por una empresa, en miles de euros, viene dado por la función

$$f(x)=\begin{cases}-5x^2+40x-60\ , & \text{si } 0\le x\le 6\\ \dfrac{5x}{2}-15\ , & \text{si } 6<x\le 10\end{cases}$$

donde x representa el gasto en publicidad, en miles de €.

a) Representa la función f.

Resolución



b) Calcula el gasto en publicidad a partir del cual la empresa no tiene pérdidas.

Resolución

A partir de 2000 € hasta 10000 €

c) ¿Para qué gastos en publicidad se producen beneficios nulos?

Resolución

Para 2000 € y 6000 €

d) Calcula el gasto en publicidad que produce máximo beneficio. ¿Cuál es ese beneficio máximo?

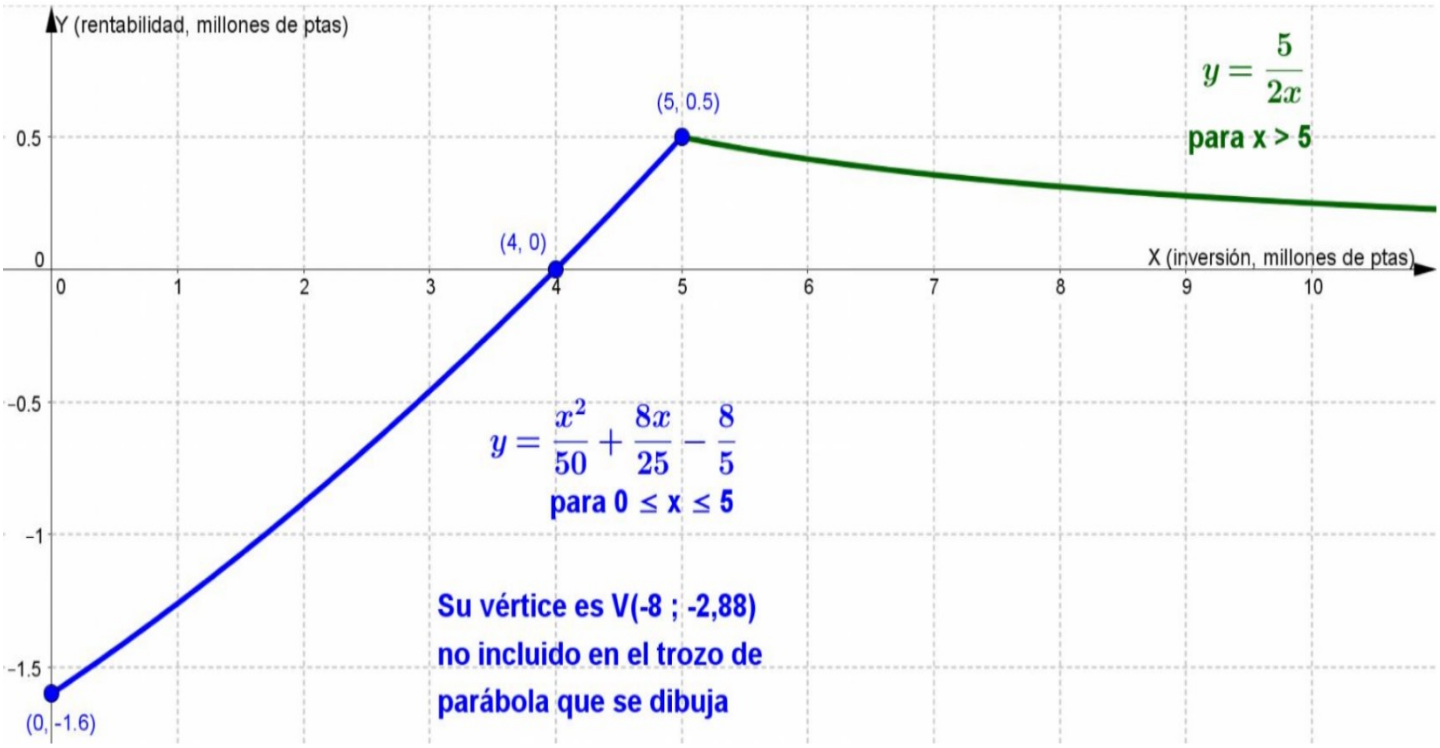
Resolución

4000 € con un beneficio de 20000€

6) En el año 2000, el estudio de la rentabilidad de una empresa revela que una inversión de x millones de pesetas produce una ganancia de f(x) millones de pts, siendo: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{50}+\dfrac{8x}{25}-\dfrac{8}{5} & \text{si } 0\le x\le 5\\ \dfrac{5}{2x} & \text{si } x>5\end{cases}$.

a) Representa la función f(x)

Resolución

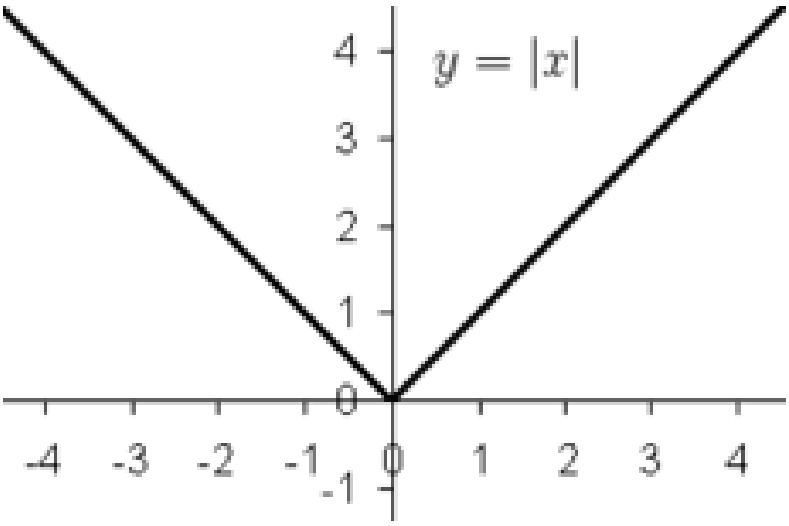


b) Halla la inversión que produce máxima ganancia **Resolución** 5 millones de ptas

c) Halla la inversión que produce ganancia nula **Resolución** 4 millones de ptas

Función valor absoluto

Es la función cuya fórmula es $y=|x|=\begin{cases}x\ ,\ \text{si } x\ge 0\\ -x\ ,\ \text{si } x<0\end{cases}$



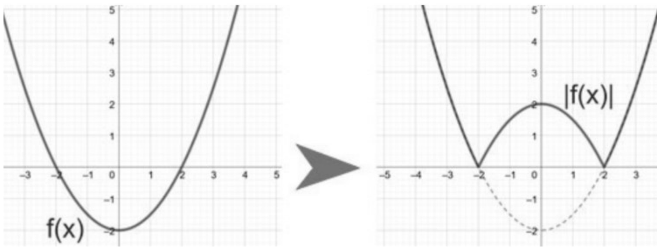
Valor absoluto de una función

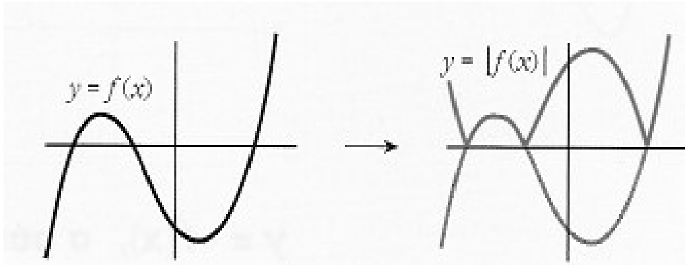
El valor absoluto de una función, |f| , se define así: $|f|(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$.

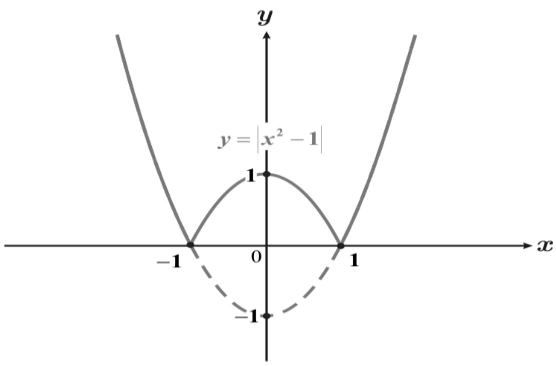
Por tanto, la función |f| siempre se podrá expresar como una función definida a trozos.

La gráfica de la función |f| se puede obtener a partir de la gráfica de f "doblando" hacía arriba la parte de gráfica que haya por debajo del eje X.

Ejemplos







Actividades resueltas

1) Expresa como una función definida a trozos:

a) $f(x) = |x - 3|$

Resolución

Como $x - 3 = 0 \leftrightarrow x = 3 \Rightarrow$

		3	
$x-3$	$-$	0	$+$
$f(x)=\lvert x-3 \rvert$	$-x+3$	0	$x-3$

$\Rightarrow f(x) = |x-3| = \begin{cases} x-3, \text{ si } x \geq 3 \\ -x+3, \text{ si } x < 3 \end{cases}$

b) $f(x) = |x^2 - 5x + 4|$.

Resolución

Como $x^2 - 5x + 4 = 0 \leftrightarrow \begin{matrix} x = 1 \\ x = 4 \end{matrix} \Rightarrow$

		1		4	
x^2-5x+4	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)=\lvert x^2-5x+4 \rvert$	x^2-5x+4	0	$-x^2+5x-4$	0	x^2-5x+4

$$f(x) = |x^2 - 5x + 4| = \begin{cases} x^2 - 5x + 4, \text{ si } x \leq 1 \text{ ó } x \geq 4 \\ -x^2 + 5x - 4, \text{ si } 1 < x < 4 \end{cases}$$

c) $f(x) = |x+1| + |x-1|$

Resolución

Como $x+1=0 \leftrightarrow x=-1$; $x-1=0 \leftrightarrow x=1$

		-1		1	
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)=\|x+1\|+\|x-1\|$	$-x-1+(-x+1)=-2x$	0	$x+1+(-x+1)=2$	0	$x+1+x-1=2x$

$$f(x)=|x+1|+|x-1|=\begin{cases}-2x, \text{ si } x\le -1\\ 2, \text{ si } -1<x<1\\ 2x, \text{ si } x>1\end{cases}$$

d) $f(x)=\sqrt{3+|x|}$ para $x\in[-3, 3]$

Resolución

	$-3\le x<0$	$0\le x\le 3$
$f(x)=\sqrt{3+\|x\|}$	$\sqrt{3-x}$	$\sqrt{3+x}$

$$\Rightarrow f(x)=\sqrt{3+|x|}=\begin{cases}\sqrt{3-x}, \text{ si } -3\le x<0\\ \sqrt{3+x}, \text{ si } 0\le x\le 3\end{cases}$$

e) $f(x)=\begin{cases}-x^2-2x, \text{ si } x<-1\\ 1, \text{ si } -1\le x\le 1\\ |x-2|, \text{ si } x>1\end{cases}$

Resolución

Como $x-2=0 \leftrightarrow x=2 \Rightarrow$

	1		2	
$x-2$		$-$	0	$+$
$\|x-2\|$		$-x+2$	0	$x-2$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}-x^2-2x, \text{ si } x<-1\\ 1, \text{ si } -1\le x\le 1\\ -x+2, \text{ si } 1<x<2\\ x-2, \text{ si } x\ge 2\end{cases}$$

2) Dibuja la gráfica de las siguientes funciones

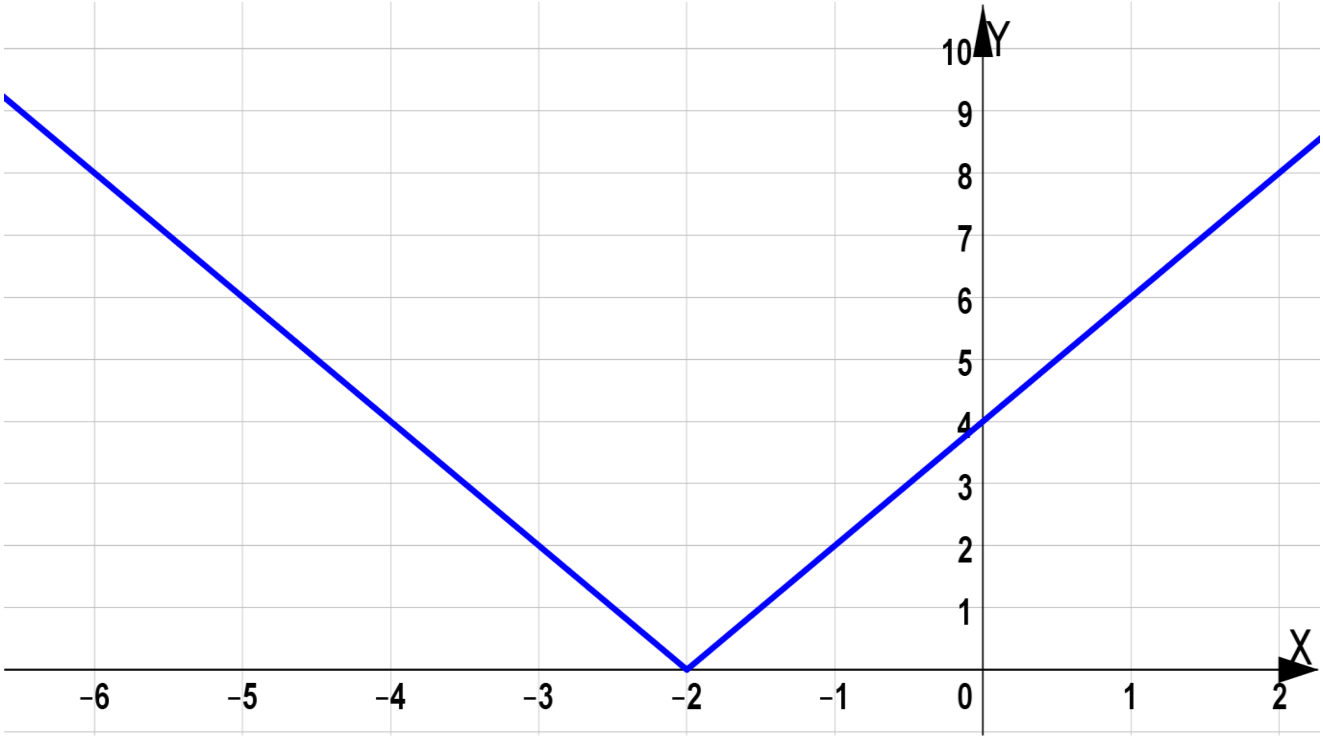
a) $f(x) = |2x + 4|$

Resolución

Como $2x+4=0 \leftrightarrow x=-2 \Rightarrow$

		-2	
$2x+4$	$-$	0	$+$
$\|2x+4\|$	$-2x-4$	0	$2x+4$

$\Rightarrow f(x)=\begin{cases} -2x-4, \text{ si } x<-2 \\ 2x+4, \text{ si } x\geq -2 \end{cases}$



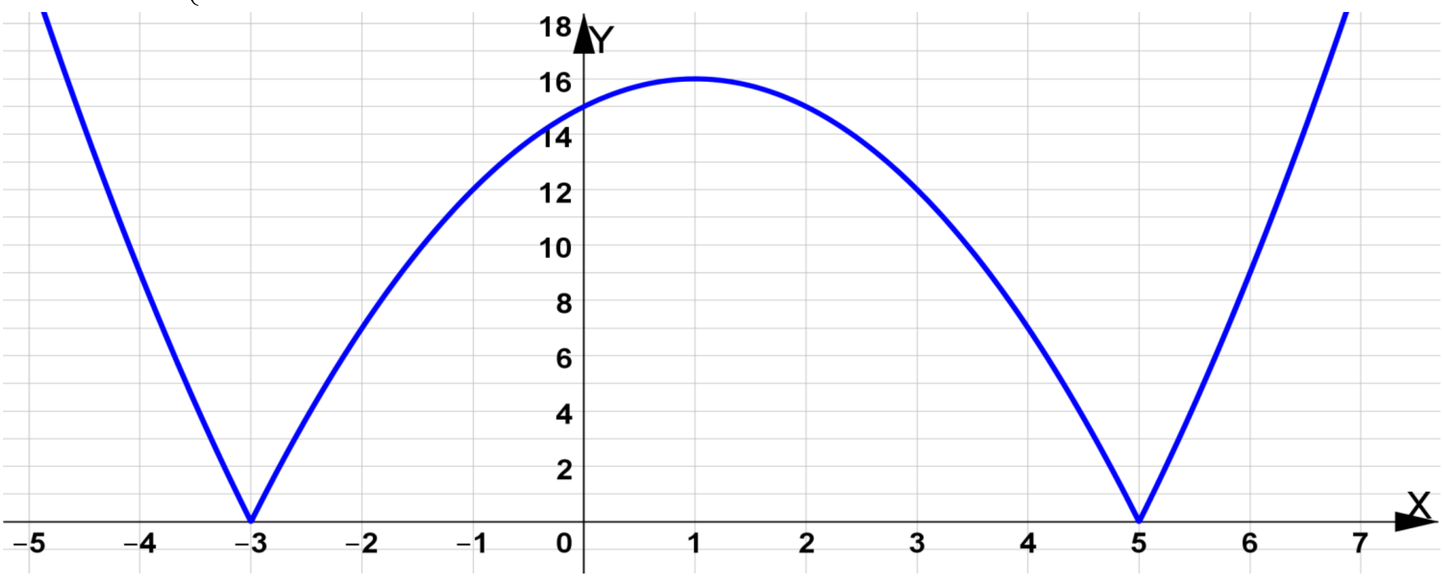
b) $f(x) = |-x^2 + 2x + 15|$

Resolución

$-x^2+2x+15=0 \leftrightarrow x=-3,\ x=5 \Rightarrow$

		-3		5	
$-x^2+2x+15$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$x^2-2x-15$		$-x^2+2x+15$	0	$x^2-2x-15$

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2x-15, \text{ si } x<-3 \text{ ó } x>5 \\ -x^2+2x+15, \text{ si } -3\leq x\leq 5 \end{cases}$$



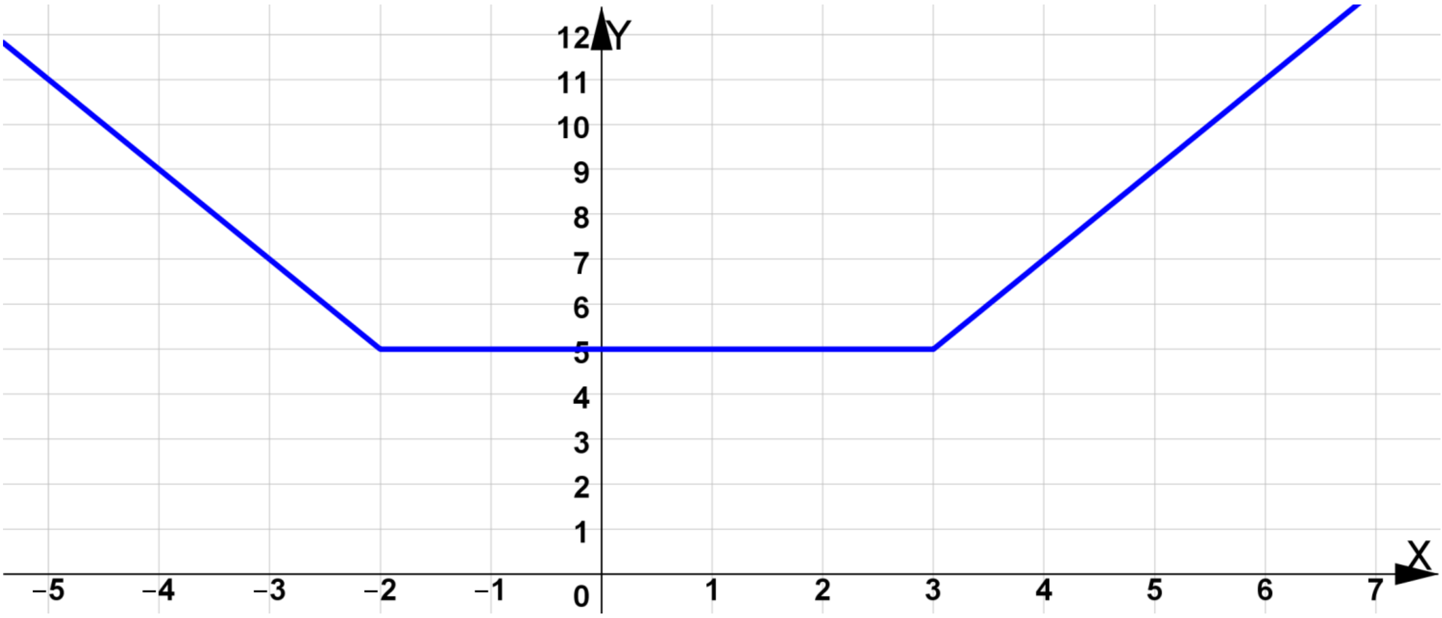
c) $f(x) = |x+2| + |x-3|$

Resolución

Como $x+2=0 \leftrightarrow x=-2$; $x-3=0 \leftrightarrow x=3$

		-2		3	
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-x-2+(-x+3)=-2x+1$	5	$x+2+(-x+3)=5$	5	$x+2+x-3=2x-1$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}-2x+1, \text{ si } x<-2\\ 5, \text{ si } -2\le x\le 3\\ 2x-1, \text{ si } x>3\end{cases}$$



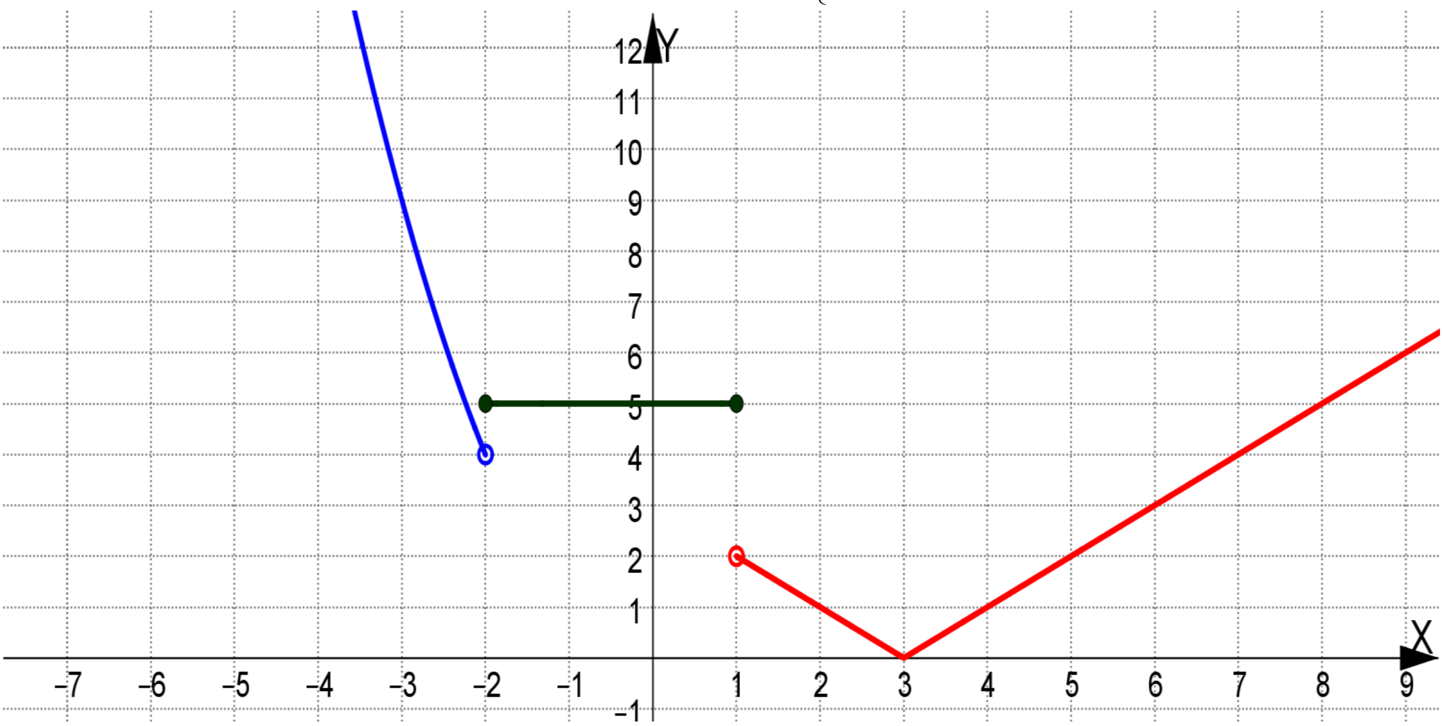
d) $$f(x)=\begin{cases}x^2, \text{ si } x<-2\\ 5, \text{ si } -2\le x\le 1\\ |x-3|, \text{ si } x>1\end{cases}$$

Resolución

Como $x-3=0 \leftrightarrow x=3 \Rightarrow$

	1		3	
$x-3$		$-$	0	$+$
$\|x-3\|$		$-x+3$	0	$x-3$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}x^2, \text{ si } x<-2\\ 5, \text{ si } -2\le x\le 1\\ -x+3, \text{ si } 1<x<3\\ x-3, \text{ si } x\ge 3\end{cases}$$



3) Considera la función f: R → R definida por $f(x) = x\,|\,2 - x\,|$. Dibuja el recinto limitado por la gráfica de f y la recta de ecuación $x = 3$.

Resolución

$2 - x = 0 \leftrightarrow x = 2$

	$x > 2$	$x \le 2$
$\|2-x\|$	$-2+x$	$2-x$
$f(x) = x\|2-x\|$	x^2-2x	$2x-x^2$

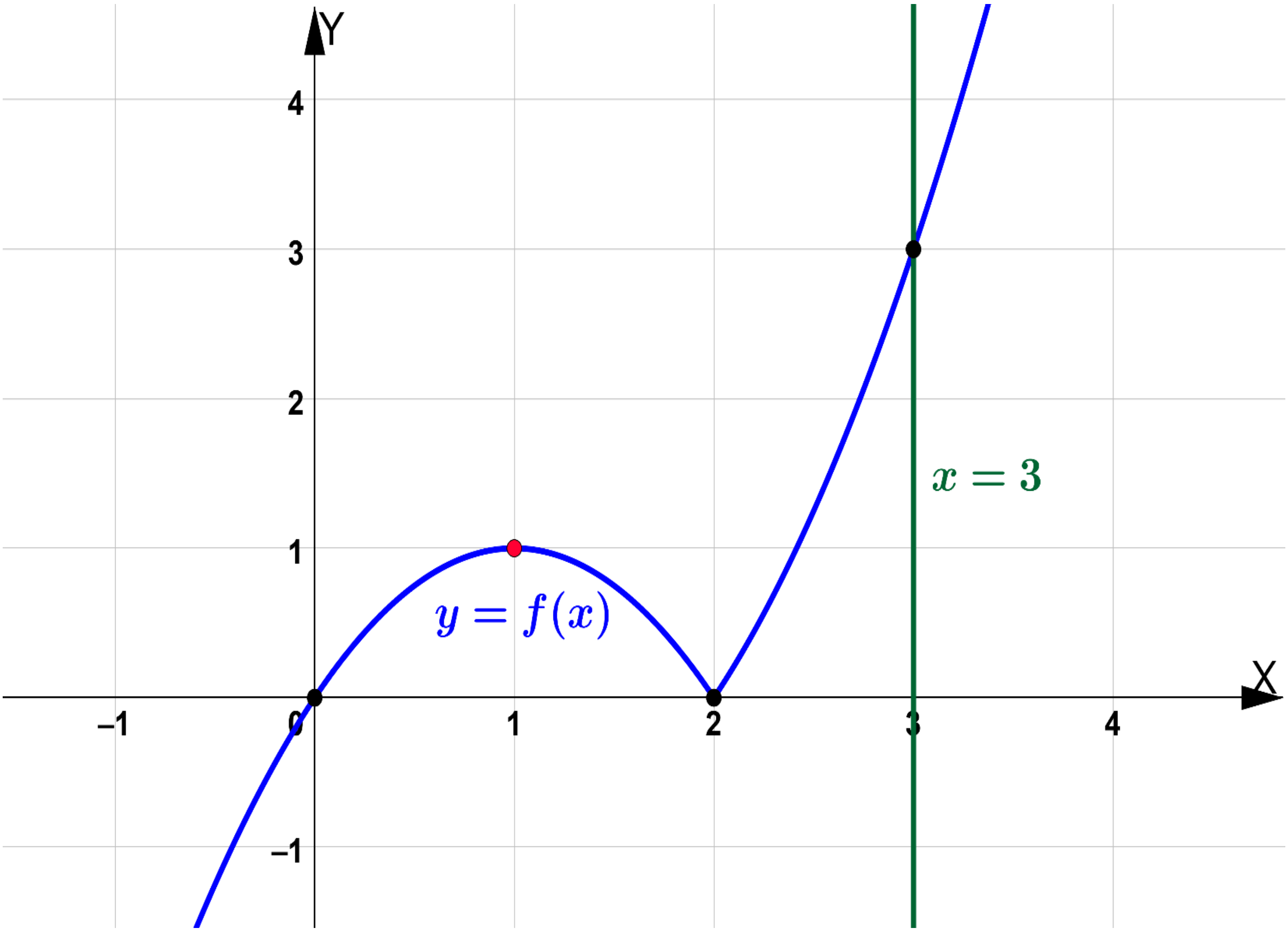
$$f(x) = \begin{cases} 2x - x^2, & \text{si } x \le 2 \\ x^2 - 2x, & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$x = 2$ es la recta vertical que pasa por $(2, 0)$

Puntos de corte de la gráfica de f con los ejes de coordenadas son:
eje X: $0 = x\,|\,2 - x| \rightarrow x = 0,\ \ x = 2$. Puntos $(0, 0)\quad(2, 0)$
eje Y: $f(0) = 0\,|\,2 - 0| = 0$. Punto $(0, 0)$

Puntos de corte de f con la recta $x = 3$

$$\begin{cases} y = x\,|\,x-2\,| \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow y = 3\,|\,3-2\,| = 3.$$ El punto de corte es el $(3,3)$



4) Sean f: R → R y g : R → R las funciones definidas por $f(x) = |\,x\,(x-2)\,|$ y $g(x) = x + 4$.
Esboza las gráficas de f y g sobre los mismos ejes. Calcula el punto de corte entre ambas gráficas.

Resolución

Expresemos f como función definida a trozos:

$x(x-2)=0 \leftrightarrow \begin{matrix} x=0 \\ x=2 \end{matrix} \Rightarrow$

	$x<0$	0	$0<x<2$	2	$x>2$
x^2-2x	+	0	−	0	+
$f(x)=\|x^2-2x\|$	x^2-2x	0	$-x^2+2x$	0	x^2-2x

$\Rightarrow f(x)=|\,x(x-2)\,|=\begin{cases} x^2-2x, \text{ si } x\le 0 \text{ ó } x\ge 2 \\ -x^2+2x, \text{ si } 0<x<2 \end{cases}$

$y = x^2 - 2x$. Vértice $x_V=\dfrac{2}{2.1}=1 \notin$ al dominio

$y = -x^2 + 2x$. Vértice $x_V=\dfrac{-2}{2.(-1)}=1$; $y_V=-1^2+2.1=1$. V(1, 1)

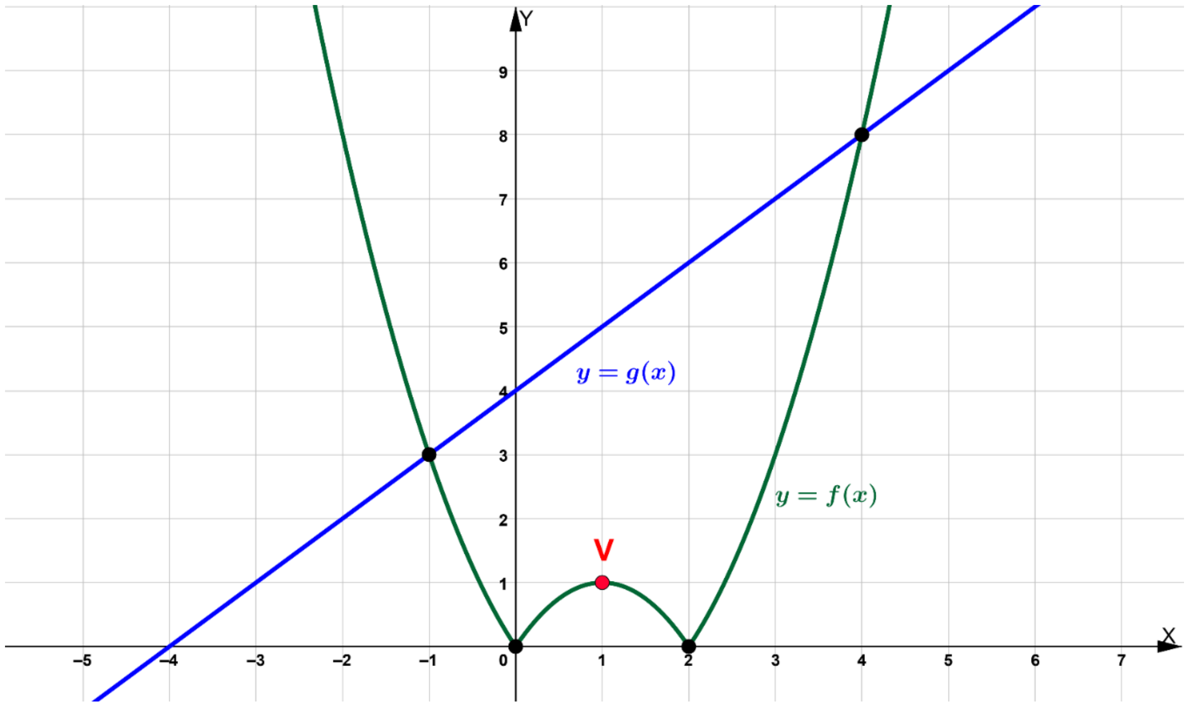
Los puntos de corte de f con los ejes de coordenadas son:

eje X: $x^2 - 2x = 0$, $-x^2 + 2x = 0 \rightarrow x = 0$, $x = 2$. Puntos (0, 0) y (2, 0)

eje Y: $f(0) = 0^2 - 2.0 = 0$. Punto (0, 0)

Puntos de corte de f y g:

$$\begin{cases} y=\left|x^2-2x\right| \\ y=x+4 \end{cases} \Rightarrow \left|x^2-2x\right|=x+4 \rightarrow \begin{matrix} x^2-2x=x+4 \\ x^2-2x=-x-4 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x^2-3x-4=0 \\ x^2-x+4=0 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x=4 \text{ ; } y=4+4=8. \text{ Punto } (4,8) \\ x=-1 \text{ ; } y=-1+4=3. \text{ Punto } (-1,3) \\ x=\dfrac{1\pm\sqrt{-15}}{2}\ \nexists \end{matrix}$$



Función parte entera

Es la función cuya fórmula es y = Ent(x) = "número entero ≤ x"