

**INTEGRAL INDEFINIDA**

El Cálculo Integral o integración consiste en hallar la función  $f(x)$  cuando se conoce su función derivada  $f'(x)$ . Por eso, se dice que la integración es la operación inversa de la derivación.

Mientras que las reglas de derivación nos permiten hallar la derivada de cualquier combinación (suma, producto, composición) de las llamadas funciones elementales, con la integración no podemos decir lo mismo.

Por ejemplo, no existen funciones elementales cuyas derivadas sean  $f(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x}$ ;  $g(x) = e^{-x^2}$ ;  $h(x) = \frac{1}{\ln(x)}$

**Primitiva de una función.**

Dada una función  $f(x)$ , diremos que  $F(x)$  es una **primitiva** suya si  $F'(x) = f(x)$ .

La primitiva de una función no es única. Por ejemplo, si  $f(x) = 3x^2$ , entonces  $F_1(x) = x^3$ ,  $F_2(x) = x^3 + 2, \dots, \dots, \dots, \text{etc}$ , etc son primitivas de  $f(x)$ .

En general, si una función  $f(x)$  tiene una función primitiva  $F(x)$ , entonces tiene infinitas primitivas cuyas expresiones serán  $F_k(x) = F(x) + k$ , siendo  $k \in \mathbb{R}$ .

El conjunto de las infinitas primitivas de  $f(x)$ , se llama **integral indefinida** de  $f(x)$  y se denota mediante  $\int f(x) dx$ .

Se lee "integral de  $f$  de  $x$  diferencial de  $x$ ". Por ejemplo:  $\int 3x^2 dx = x^3 + k$ , con  $k \in \mathbb{R}$ .

**Integrales inmediatas**

Puesto que la integración es el proceso contrario al de la derivación, de la tabla de derivadas vista en el tema anterior se deduce una tabla de integrales inmediatas:

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k \quad (n \neq -1)$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x  + k$	$\int e^x dx = e^x + k$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + k$
$\int \text{sen } x dx = -\text{cos } x + k$ $\int \text{cos } x dx = \text{sen } x + k$	$\int \frac{1}{\text{cos}^2 x} dx = \text{tg } x + k$ $\int (1 + \text{tg}^2 x) dx = \text{tg } x + k$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \text{arcsen } x + k$ $= -\text{arccos } x + k$	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \text{arctg } x + k$

**Ejemplos:**

1)  $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + k$                       2)  $\int \frac{1}{x^5} dx = \int x^{-5} dx = \frac{x^{-4}}{-4} + k = \frac{-1}{4x^4} + k$                       3)  $\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + k$

4)  $\int \sqrt{x} dx = \int x^{1/2} dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + k = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + k$                       5)  $\int \frac{1}{\sqrt[5]{x^7}} dx = \int x^{-7/5} dx = \frac{x^{-2/5}}{-2/5} + k = \frac{-5}{2\sqrt[5]{x^2}} + k$

**Reglas de integración**

1) La integral de la suma o diferencia de dos funciones es igual a la suma o diferencia de las integrales de dichas funciones.

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$\int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$$

2) La integral del producto de un número por una función es igual al producto del número por la integral de dicha función.

$$\int a f(x) dx = a \int f(x) dx$$

MÉTODOS DE INTEGRACIÓNCambio de variable

Para calcular una integral del tipo  $\int f[g(x)] \cdot g'(x) dx$  se hace un cambio de variable

$$\begin{cases} t = g(x) \\ dt = g'(x) dx \end{cases} \text{ de forma que queda } \int f(t) dt$$

En la práctica se busca en el integrando una función  $t = g(x)$  cuya derivada  $g'(x)$  (salvo una constante) aparezca multiplicando en el integrando y de forma que  $\int f(t) dt$  se sepa integrar.

Ejemplos:

$$1) \int x^2 e^{x^3} dx = \begin{cases} t = x^3 \\ dt = 3x^2 dx \rightarrow x^2 dx = \frac{1}{3} dt \end{cases} = \int e^t \cdot \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3} \int e^t dt = \frac{1}{3} (e^t + k) = \frac{1}{3} e^{x^3} + k'$$

$$2) \int (x-2) \cos(x^2 - 4x + 5) dx = \begin{cases} t = x^2 - 4x + 5 \\ dt = (2x-4) dx = 2(x-2) dx \rightarrow (x-2) dx = \frac{1}{2} dt \end{cases} = \int (\cos t) \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int \cos t dt = \frac{1}{2} (\sin t + k) = \frac{1}{2} \sin(x^2 - 4x + 5) + k'$$

Integración por partes

Tiene por objeto transformar una integral en otra más sencilla aplicando una expresión deducida a partir de la derivada de un producto de funciones.

Sean  $u = u(x)$  y  $v = v(x)$  dos funciones derivables. Aplicando la regla de la derivada del producto:

$$d(uv) = u dv + v du \rightarrow u dv = d(uv) - v du \xrightarrow{\text{Integrando}} \int u dv = uv - \int v du$$

El método consiste en expresar el integrando como producto de dos factores  $u$  y  $dv$ , de tal forma que la nueva

integral  $\int v du$  sea más fácil de calcular.

Podemos usar el esquema siguiente:

$$\int u \cdot v' dx = \int u \cdot dv \rightarrow \begin{cases} u \rightarrow du = u' dx \\ dv = v' dx \rightarrow v = \int v' dx \end{cases} \Rightarrow \boxed{\int u dv = uv - \int v du}$$

Si una de las partes del integrando no se sabe integrar, se tomará esta función como  $u$

Integración de funciones racionales

Supongamos que queremos calcular una integral del tipo  $\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$ , donde  $p(x)$  y  $q(x)$  son polinomios.

Si  $\text{grado}(p(x)) \geq \text{grado}(q(x))$  se efectúa la división y se expresa en forma mixta:  $\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$ ,

quedando reducida la integral inicial a la de un polinomio más una integral racional donde el  $\text{grado}(r(x)) < \text{grado}(q(x))$ .

Sólo consideraremos entonces integrales de este último tipo.

Para resolver esta, descompondremos  $\frac{r(x)}{q(x)}$  en fracciones simples lo que equivaldrá a sustituir la integral inicial por una suma de integrales más elementales.

Para descomponer una fracción algebraica propia  $\frac{p(x)}{q(x)}$  en suma de fracciones simples se factoriza el polinomio  $q(x)$ . Supongamos que  $q(x)$  tiene todas las raíces reales. (Sólo se estudia este caso que es el más simple).

Una vez factorizado  $q(x)$ :

A cada factor de  $q(x)$  del tipo  $(x - r)$  le corresponde una fracción simple  $\frac{A}{x - r}$

A cada factor del tipo  $(x - r)^2$  le corresponden 2 fracciones:  $\frac{M}{(x - r)^2} + \frac{N}{x - r}$

Si el factor fuese  $(x - r)^3$  le corresponderían 3 fracciones:  $\frac{M}{(x - r)^3} + \frac{N}{(x - r)^2} + \frac{P}{x - r}$

El esquema es el siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{p(x)}{q(x)} = & \frac{A}{x - a} + \frac{B}{x - b} + \frac{C}{x - c} + \dots\dots\dots(\text{factores lineales simples}) \\ & + \frac{M}{(x - m)^2} + \frac{N}{x - m} + \dots\dots\dots(\text{factor lineal doble}) \\ & + \frac{S}{(x - p)^3} + \frac{T}{(x - p)^2} + \frac{U}{x - p} \dots\dots\dots(\text{factor lineal triple}) \\ & + \dots\dots\dots \end{aligned}$$

Para la determinación de las constantes A, B, C, ..., M, N, ..., S, T, U, ... se hace lo siguiente:

- 1º) Se multiplica la igualdad anterior por  $q(x)$ , obteniéndose la igualdad entre polinomios
- 2º) Se dan valores numéricos en ambos miembros, tantos como constantes haya que determinar. Por comodidad se utilizan las raíces, obteniéndose un sistema de ecuaciones.
- 3º) Se resuelve el sistema y las soluciones obtenidas se sustituyen en las fracciones simples.

Ejemplo: Vamos a descomponer en fracciones simples la función racional  $f(x) = \frac{3x + 5}{x^3 - x^2 - x + 1}$

El denominador se descompone usando la regla de Ruffini y queda  $(x + 1)(x - 1)^2$ .

Entonces podremos descomponer así:  $f(x) = \frac{3x + 5}{x^3 - x^2 - x + 1} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{C}{x - 1}$

Multiplicando la igualdad anterior por  $(x + 1)(x - 1)^2$  resulta  $3x + 5 = A(x - 1)^2 + B(x + 1) + C(x + 1)(x - 1)$

Dando valores:

Para  $x = 1$  tenemos  $8 = 2B \Rightarrow B = 4$

Para  $x = -1$  tenemos  $2 = 4A \Rightarrow A = \frac{1}{2}$

Para  $x = 0$  (por ejemplo) tenemos  $5 = A + B - C = \frac{1}{2} + 4 - C \Rightarrow C = \frac{-1}{2}$

Entonces la descomposición en fracciones simples es:  $\frac{3x + 5}{x^3 - x^2 - x + 1} = \frac{1/2}{x + 1} + \frac{4}{(x - 1)^2} + \frac{-1/2}{x - 1}$ .

- Fracciones correspondientes a raíces reales simples:  $\int \frac{A}{x-r} dx = A \cdot \ln|x-r| + k$  (Inmediata)

- Fracciones correspondientes a raíces reales múltiples:  $\int \frac{A}{(x-r)^n} dx = A \cdot \frac{(x-r)^{-n+1}}{-n+1} + k$  (Inmediata)

Por ejemplo,  $\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1} dx = \int \frac{1/2}{x+1} dx + \int \frac{4}{(x-1)^2} dx + \int \frac{-1/2}{x-1} dx = \frac{1}{2} \cdot \ln|x+1| - \frac{4}{x-1} - \frac{1}{2} \cdot \ln|x-1| + k$

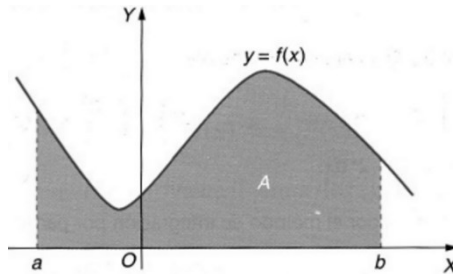
### INTEGRAL DEFINIDA

#### Concepto

Sea una función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . La integral definida de  $f$  en el intervalo  $[a, b]$  se representa por  $\int_a^b f(x) dx$ .

- Si  $f(x) > 0$  en el intervalo  $[a, b]$ , entonces la integral definida es el área comprendida entre la gráfica de  $f$

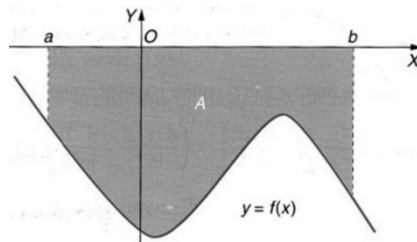
y el eje X:  $\int_a^b f(x) dx = A$



- Si  $f(x) < 0$  en el intervalo  $[a, b]$ , entonces la integral definida es el área comprendida entre la gráfica de  $f$

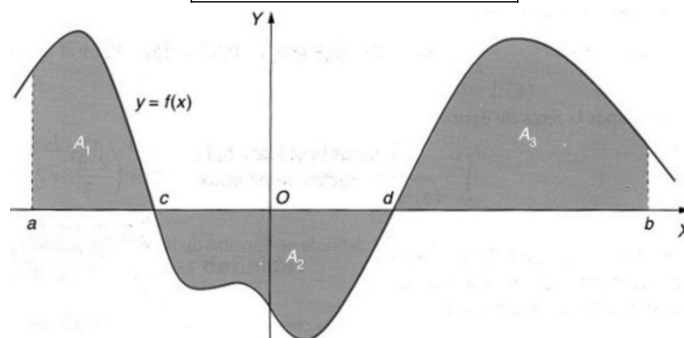
y el eje X pero con signo negativo:

$$\int_a^b f(x) dx = -A$$



- Si  $f(x)$  cambia de signo en el intervalo  $[a, b]$ , entonces la integral definida es la suma de las áreas de los recintos situados por encima y por debajo del eje X (positiva si la gráfica está por encima del eje X y negativa si está por debajo):

$$\int_a^b f(x) dx = A_1 - A_2 + A_3$$

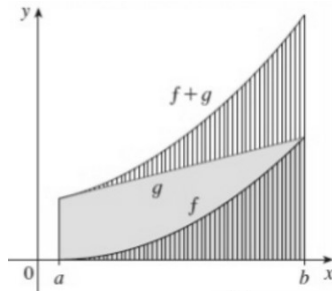


Propiedades de la integral definida

1)  $\int_a^a f(x) dx = 0$  , para cualquier función  $f$

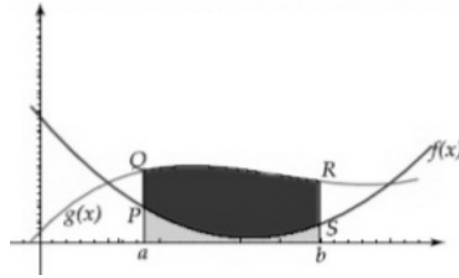
2)  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } f(x) > 0, \forall x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x) dx > 0 \\ \text{Si } f(x) < 0, \forall x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x) dx < 0 \end{array} \right.$

3)  $\int_a^b (f+g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$

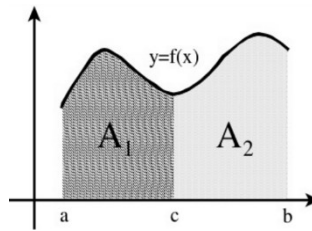


4)  $\int_a^b c \cdot f(x) dx = c \cdot \int_a^b f(x) dx \quad c \in \mathbb{R}$

5) Si  $\forall x \in [a,b], f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

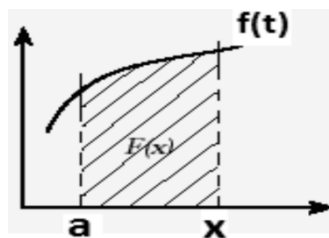


6) Si  $a < c < b \Rightarrow \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$



Teorema fundamental del cálculo integral, regla de Barrow

Dada una función  $f$  continua en  $[a,b]$  , se llama función área a la función  $F : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = \int_a^x f(t) dt$



Geoméricamente, si  $f(t) > 0$  en  $[a, x]$   $F(x)$  es el área comprendida entre la gráfica de  $f$  y el eje X en el intervalo  $[a, x]$

El teorema fundamental del cálculo integral dice que  $F(x)$  es derivable y su derivada es la función  $f$ :  $F'(x) = f(x)$

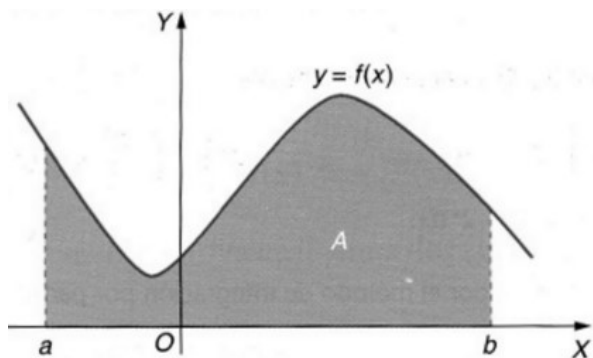
Por tanto,  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } f(t) > 0, \text{ en } [a, b], \text{ entonces } F(x) \text{ es creciente en dicho intervalo} \\ \text{Si } f(t) < 0, \text{ en } [a, b], \text{ entonces } F(x) \text{ es decreciente en dicho intervalo} \end{array} \right.$

Regla de Barrow

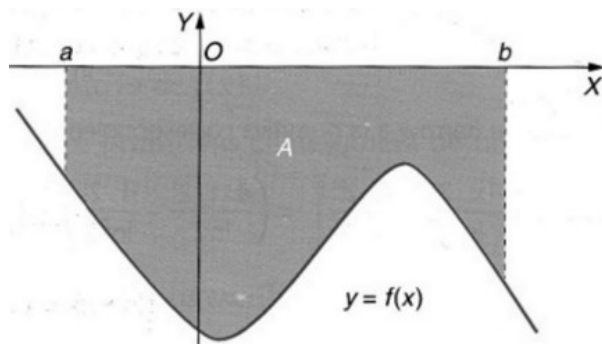
Si  $f$  es una función continua en  $[a,b]$  y  $F(x)$  es cualquier primitiva de  $f$  entonces

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Área comprendida entre la gráfica de una función y el eje X en un intervalo cerrado



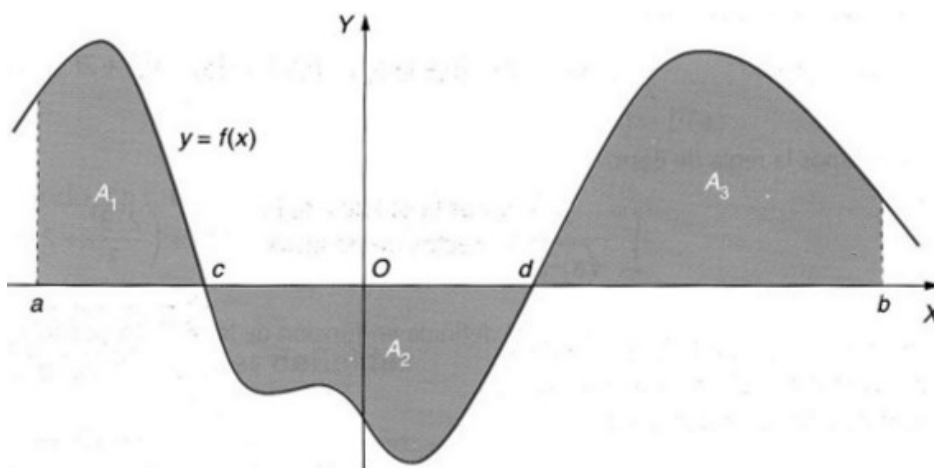
$$A = \int_a^b f(x) dx$$



$$A = - \int_a^b f(x) dx$$

En todo caso, cuando la gráfica de f no atraviese al eje X el área es

$$A = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$$



$$A = A_1 + A_2 + A_3 = \int_a^c f(x) dx - \int_c^d f(x) dx + \int_d^b f(x) dx$$

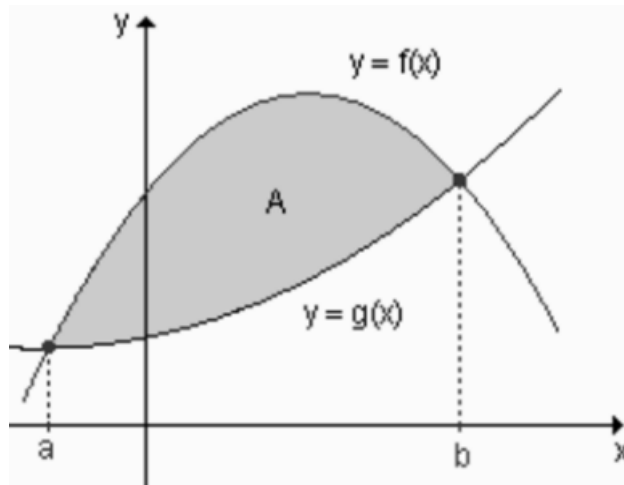
En todo caso, cuando la gráfica de f atraviese al eje X en los puntos c y d, el área es:

$$A = \left| \int_a^c f(x) dx \right| + \left| \int_c^d f(x) dx \right| + \left| \int_d^b f(x) dx \right|$$

Área comprendida entre las gráficas de dos funciones en un intervalo cerrado

Si  $f(x) \geq g(x)$  en el intervalo  $[a, b]$ , el área es

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$



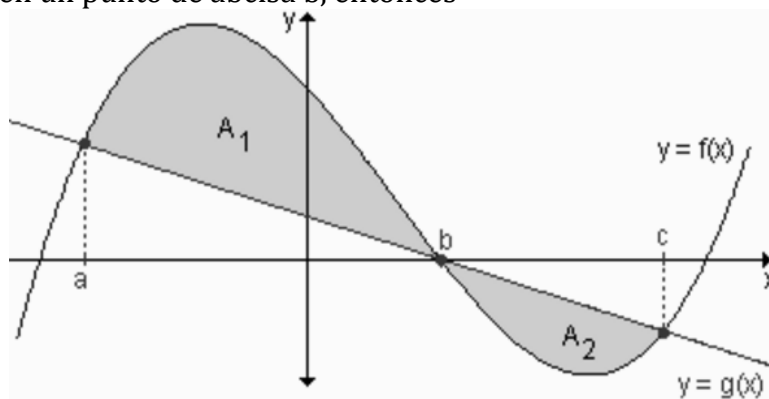
Si fuese  $f(x) \leq g(x)$  en el intervalo  $[a, b]$ , el área sería

$$A = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx = \int_a^b -[f(x) - g(x)] dx = -\int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

En todo caso, sea  $f(x) \geq g(x)$  ó  $f(x) \leq g(x)$  en el intervalo  $[a, b]$

$$A = \left| \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \right|$$

Si las gráficas se cortan en un punto de abscisa  $b$ , entonces



$$A = A_1 + A_2 = \left| \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \right| + \left| \int_b^c [f(x) - g(x)] dx \right|$$