LÍMITES PUNTUALES

1) Sea f(x) = 5x – 3. Queremos averiguar el valor hacía donde se aproximan los valores de una función f(x) cuánto los valores de x se aproximan al punto 2. Este valor, si existe, se representa por $\lim_{x \to 2} f(x)$.

por la izda de 2: $x \to 2^-$ $(x < 2)$	1,9	1,99	1,999	...
$f(x) = 5x - 3$	6,5	6,95	6,995	...
	Los valores se aproximan a 7. Se dice que el límite de f(x) cuando x tiende a 2 por la izquierda es 7 y se representa $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 7$			
por la dcha de 2: $x \to 2^+$ $(x > 2)$	2,1	2,01	2,001	...
$f(x) = 5x - 3$	7,5	7,05	7,005	
	Los valores también se aproximan a 7. Se dice que el límite de f(x) cuando x tiende a 2 por la derecha es 7 y se representa $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 7$			

$$\text{Como } \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = 7 \Rightarrow \exists \lim_{x \to 2} f(x) = 7$$

2) Sea $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 \text{ , si } x < 3 \\ \dfrac{1}{x-3} \text{ , si } x > 3 \end{cases}$ y queremos saber cuánto vale $\lim_{x \to 3} f(x)$

por la izda de 3: $x \to 3^-$ $(x < 3)$	2,9	2,99	2,999	...
$f(x) = 2x - 1$	4,8	4,98	4,998	...
	Los valores se aproximan a 5. Se dice que el límite de f(x) cuando x tiende a 3 por la izquierda es 5 y se representa $\lim_{x \to 3^-} f(x) = 5$			
por la dcha de 3: $x \to 3^+$ $(x > 3)$	3,1	3,01	3,001	...
$f(x) = \dfrac{1}{x-3}$	10	100	1000	
	Los valores se hacen infinitamente grandes. Se dice que el límite de f(x) cuando x tiende a 3 por la derecha es $+\infty$ y se representa $\lim_{x \to 3^+} f(x) = +\infty$			

$$\text{Como } \lim_{x \to 3^-} f(x) = 5 \text{ y } \lim_{x \to 3^+} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to 3^-} f(x) \neq \lim_{x \to 3^+} f(x) \Rightarrow \nexists \lim_{x \to 3} f(x)$$

En los dos ejemplos, se trataba de averiguar el valor hacía donde se aproximan los valores de una función f(x) cuándo la x se aproxima a un cierto número "a".
Este valor, si existe, se llama límite cuando x tiende a "a" de f(x) y se escribe $\lim_{x \to a} f(x)$.
El límite puede que sea un número, que sea $+\infty$, que sea $-\infty$ o que no exista.

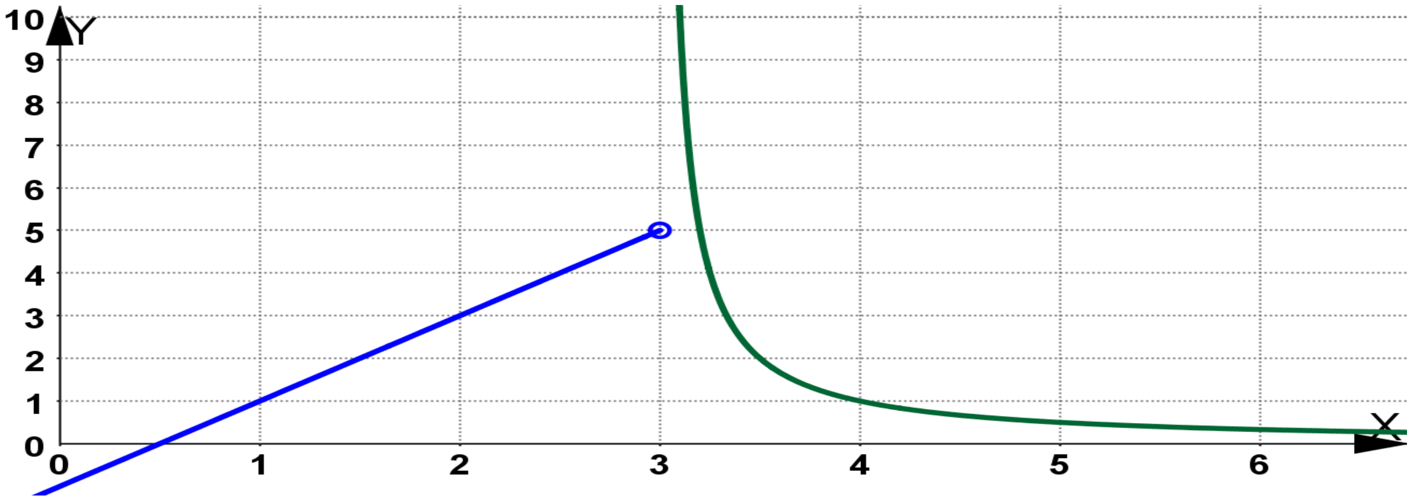
Dado que nos podemos aproximar al punto "a" por la izquierda o por la derecha hablamos de:

- **<u>límite de una función f(x) cuando x tiende al punto "a" por la izquierda</u>**, que se representa por $\lim_{x \to a^-} f(x)$, es el valor, si es que existe, al que se aproximan o tienden los valores de "y" cuando le damos valores a x menores que "a", cada vez más próximos a "a".

- **<u>límite de una función f(x) cuando x tiende al punto "a" por la derecha</u>**, que se representa por $\lim_{x \to a^+} f(x)$, es el valor, si es que existe, al que se aproximan o tienden los valores de "y" cuando le damos valores a x mayores que "a", cada vez más próximos a "a".

Los límites por la izquierda y por la derecha se llaman <u>límites laterales</u>

Interpretación gráfica de los límites laterales. Concepto de límite puntual.



Gráficamente significa que al acercarnos cada vez más al valor $x = 3$:

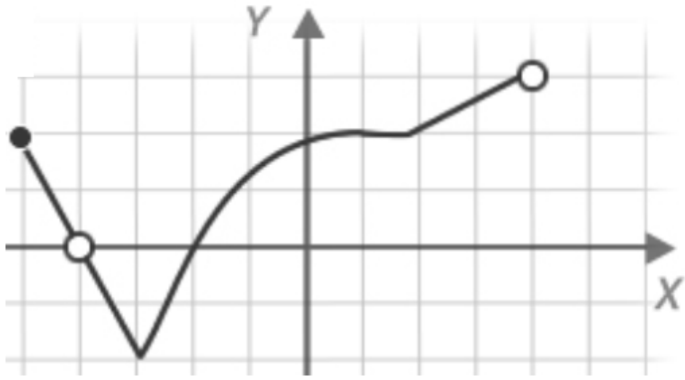
- La gráfica que hay a la izquierda de 3 tiende al punto de valor $y = 5$

- La gráfica que hay a la derecha de 3 se dirige hacia arriba

Decimos que una función f tiene límite en un punto "a" cuando los límites laterales son iguales, es decir, cuando $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$. El límite de la función f cuando x tiende al punto "a", $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, es el valor común de los límites laterales. En la función del ejemplo, $\nexists \lim\limits_{x\to 3} f(x)$ pues los límites laterales no coinciden: $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 5$ y $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = +\infty$

- Si sólo se puede calcular uno de los límites laterales porque la función no esté definida a la izquierda o a la derecha del punto "a", diremos que la función tiene límite.

- Para poder calcular los límites laterales en el punto $x = a$ no es necesario que exista f(a).
Por ejemplo, en la función f representada



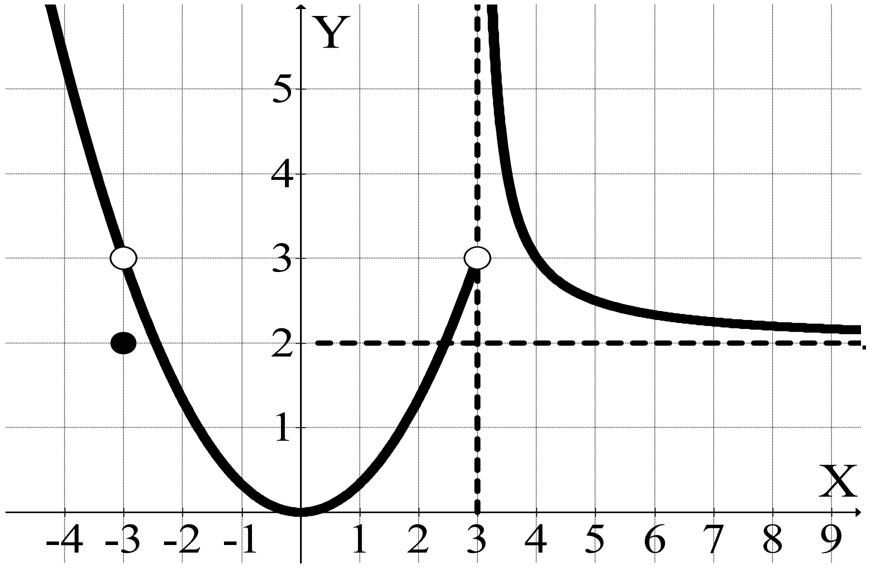
Como sólo existe $\lim\limits_{x\to -5^+} f(x) = 2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to -5} f(x) = 2$

Como sólo existe $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = 3 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 4} f(x) = 3$

No existe $f(-4)$ pero si existe $\lim\limits_{x\to -4} f(x) = 0$

Actividades resueltas

1) Si la gráfica de la función f(x) es

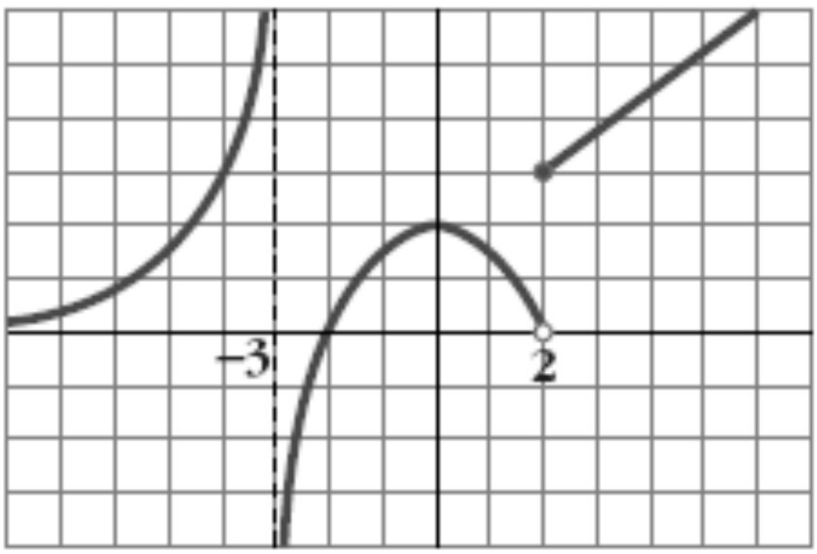


Halla: a) $\lim_{x \to 3^-} f(x)$ b) $\lim_{x \to 3^+} f(x)$ c) $\lim_{x \to 3} f(x)$ d) $\lim_{x \to -3^-} f(x)$ e) $\lim_{x \to -3^+} f(x)$ f) $\lim_{x \to -3} f(x)$ g) $\lim_{x \to 0} f(x)$ h) f(–3)

Resolución

a) 3 b) $+\infty$ c) No existe porque los límites laterales son distintos d) 3 e) 3 f) 3 g) 0 h) 2

2) Si la gráfica de la función f(x) es



Halla: a) $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ b) $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ c) $\lim_{x \to 2} f(x)$ d) $\lim_{x \to -3^-} f(x)$ e) $\lim_{x \to -3^+} f(x)$ f) $\lim_{x \to -3} f(x)$ g) f(–3) h) f(2)

Resolución

a) 0 b) 3 c) No existe porque los límites laterales son distintos d) $+\infty$

e) $-\infty$ f) No existe porque los límites laterales son distintos g) No existe h) 3

Propiedades de los límites puntuales, reglas para el cálculo de límites, indeterminaciones

Si dos funciones f(x) y g(x) tienen límite cuando x tiende a "a" entonces:

1) $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\pm g(x)\right]=\lim\limits_{x\to a} f(x)\pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$ 2) $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x).g(x)\right]=\lim\limits_{x\to a} f(x)\,.\lim\limits_{x\to a} g(x)$ 3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]=L+\infty=\infty$. Este resultado se expresa así: $\boxed{L+\infty=\infty}$

También se cumplen las siguientes reglas:

$\boxed{L-\infty=-\infty}$ $\boxed{\infty+\infty=\infty}$ $\boxed{-\infty-\infty=-\infty}$ $\boxed{\infty-\infty\to \text{Indeterminación}}$

$\boxed{\infty.\infty=\infty}$ $\boxed{L.\infty=\begin{cases}\infty, & \text{si } L>0\\ -\infty, & \text{si } L<0\end{cases}}$ $\boxed{0.\infty\to \text{Indeterminación}}$

$\boxed{\dfrac{L}{\infty}=0}$ $\boxed{\dfrac{0}{\infty}=0}$ $\boxed{\dfrac{\infty}{0}=\pm\infty \ \textbf{Indeterminación}}$ $\boxed{\dfrac{L}{0}=\pm\infty \ \textbf{Indeterminación}}$ $\boxed{\dfrac{0}{0}\to \text{Indeterminación}}$

$\boxed{\dfrac{\infty}{\infty}\to \text{Indeterminación}}$

$\boxed{\text{Si } L>0,\ L^{\infty}=\begin{cases}\infty, & \text{si } L>1\\ 0, & \text{si } L<1\end{cases}}$ $\boxed{\infty^{\infty}=\infty}$ $\boxed{0^{\infty}=0}$

$\boxed{\infty^{0}\to \text{Indeterminación}}$ $\boxed{0^{0}\to \text{Indeterminación}}$ $\boxed{1^{\infty}\to \text{Indeterminación}}$

Cálculo de límites a partir de la fórmula

Basándose en las propiedades de los límites puntuales, si la función f viene dada por una fórmula, para calcular $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, se sustituye "x" por "a" en la expresión de f(x).

Por ejemplo, si f(x) = 3x – 1 entonces $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=\lim\limits_{x\to -2}(3x-1)=3.(-2)-1=-7$

Un caso especial es cuando f es una función constante.
En este caso, el límite es el mismo número. Por ejemplo, $\lim\limits_{x\to 3} 7=7$

Actividad resuelta

Calcula:

a) $\lim\limits_{x\to 1}(3x^2-6x+1)$ **Resolución** $3.1^2-6.1+1=-2$

b) $\lim\limits_{x\to 5}(\sqrt[3]{x^2+2}-x)$ **Resolución** $\sqrt[3]{5^2+2}-5=3-5=-2$

Límite de una función definida a trozos: Si la función es definida a trozos y "a" es el punto donde cambia de expresión la función, tenemos calcular los límites laterales y ver si ambos coinciden.
Recordemos que sólo existirá el límite cuando coincidan los límites laterales.

Ejemplos:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{11-x}, \text{ si } x<2\\ \log_2(x), \text{ si } x\geq 2\end{cases}, \text{ entonces } \begin{matrix}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{11-x}=\sqrt{11-2}=3\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\log_2(x)=\log_2(2)=1\end{matrix} \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 2} f(x)$$

$$f(x)=\begin{cases}e^{-x}, \text{ si } x>0\\ x^3-x+1, \text{ si } x<0\end{cases}, \text{ entonces } \begin{matrix}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(x^3-x+1)=0^3-0+1=1\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} e^{-x}=e^0=1\end{matrix} \Rightarrow \exists \lim_{x\to 0} f(x)=1$$

Actividades resueltas

1) Calcula:

a) $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$, siendo $f(x)=\begin{cases}x^2+1, \text{ si } x<5\\ 6x-7, \text{ si } x>5\end{cases}$ **Resolución** $\begin{matrix}\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 5}(x^2+1)=5^2+1=26\\ \lim\limits_{x\to 5^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 5}(6x-7)=6.5-7=23\end{matrix} \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 5} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, siendo $f(x)=\begin{cases}x^2+2x-5, \text{ si } x<1\\ 3x-5, \text{ si } x>1\end{cases}$ **Resolución** $\begin{matrix}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x^2+2x-5)=1^2+2.1-5=-2\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(3x-5)=3.1-5=-2\end{matrix} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x)=-2$

2) Dada la función $f(x)=\begin{cases}1-x^2 \text{ , si } x>-3\\ 5 \text{ , si } x=-3\\ 2x-2 \text{ , si } x<-3\end{cases}$, calcula $\lim\limits_{x\to -3} f(x), \lim\limits_{x\to 0} f(x)\ \lim\limits_{x\to -4} f(x)$

Resolución

$$\begin{matrix}\lim\limits_{x\to -3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -3}(2x-2)=-8\\ \lim\limits_{x\to -3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -3}(1-x^2)=-8\end{matrix} \Rightarrow \lim_{x\to -3} f(x)=-8\ ;\ \lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}(1-x^2)=1\ ;\ \lim_{x\to -4} f(x)=\lim_{x\to -4}(2x-2)=-10$$

INDETERMINACIONES

Indeterminaciones del tipo k/0

Si al calcular $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ obtenemos $\dfrac{L}{0}$, siendo $L \neq 0$, usamos que $\dfrac{L}{0} = \pm\infty$.

Debemos calcular los límites laterales y ver si ambos coinciden. Sólo existirá el límite cuando coincidan los límites laterales.

Este mismo proceso se puede usar si la función no fuese racional.

Ejemplos:

a) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{(x+1)^3}{x+3} = \dfrac{(-3+1)^3}{-3+3} = \dfrac{-8}{0} = \pm\infty$.

Para averiguar si los límites laterales valen $+\infty$ ó $-\infty$ debemos ver que signo tiene la fracción a la izquierda y a la derecha de -3, respectivamente.

$$x \to -3^- \xrightarrow{\text{probamos, por ejemplo, con } x=-3{,}1} \dfrac{(-3{,}1+1)^3}{-3{,}1+3} \to \dfrac{-}{-} = + \Rightarrow \lim_{x\to -3^-} \dfrac{(x+1)^3}{x+3} = +\infty$$

$$x \to -3^+ \xrightarrow{\text{probamos, por ejemplo, con } x=-2{,}9} \dfrac{(-2{,}9+1)^3}{-2{,}9+3} \to \dfrac{-}{+} = - \Rightarrow \lim_{x\to -3^+} \dfrac{(x+1)^3}{x+3} = -\infty$$

$$\Rightarrow \nexists \lim_{x\to -3} \dfrac{(x+1)^3}{x+3}$$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-5}{x^2-2x+1} = \dfrac{1-5}{1^2-2.1+1} = \dfrac{-4}{0} = \pm\infty$.

Para averiguar si los límites laterales valen $+\infty$ ó $-\infty$ debemos ver que signo tiene la fracción a la izquierda y a la derecha de 1, respectivamente.

$$x \to 1^- \xrightarrow{\text{probamos, por ejemplo, con } x=0{,}9} \dfrac{0{,}9-5}{0{,}9^2-2.0{,}9+1} \to \dfrac{-}{+} = - \Rightarrow \lim_{x\to 1^-} \dfrac{x-5}{x^2-2x+1} = -\infty$$

$$x \to 1^+ \xrightarrow{\text{probamos, por ejemplo, con } x=1{,}1} \dfrac{1{,}1-5}{1{,}1^2-2.1{,}1+1} \to \dfrac{-}{+} = - \Rightarrow \lim_{x\to 1^+} \dfrac{x-5}{x^2-2x+1} = -\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1} \dfrac{x-5}{x^2-2x+1} = -\infty$$

Actividad resuelta

Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-6x+9}{x^2}$ **Resolución**

$$\dfrac{9}{0} = \pm\infty \to \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x^2-6x+9}{x^2} \to \dfrac{+}{+} = \infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2-6x+9}{x^2} \to \dfrac{+}{+} = \infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \dfrac{x^2-6x+9}{x^2} = \infty$$

b) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x-1}{x^2+4x+4}$

Resolución

$$\lim_{x\to -2} \dfrac{x-1}{x^2+4x+4} = \dfrac{-2-1}{(-2)^2+4.(-2)+4} = \dfrac{-3}{0} \text{Indetermin.:} \begin{cases} \lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{x-1}{x^2+4x+4} = \dfrac{-3}{0^+} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{x-1}{x^2+4x+4} = \dfrac{-3}{0^+} = -\infty \end{cases}. \text{ Luego, } \lim_{x\to -2} \dfrac{x-1}{x^2+4x+4} = -\infty$$

c) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2+1}{x^2+5x}$ **Resolución** $\dfrac{26}{0}=\pm\infty \to \begin{cases}\lim\limits_{x\to -5^-}\dfrac{x^2+1}{x^2+5x}\to\dfrac{+}{+}=\infty \\ \lim\limits_{x\to -5^+}\dfrac{x^2+1}{x^2+5x}\to\dfrac{+}{-}=-\infty\end{cases} \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2+1}{x^2+5x}$

d) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{-6}{x^2+2x+1}$ **Resolución** $\dfrac{-6}{0}=\pm\infty \to \begin{cases}\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{-6}{x^2+2x+1}\to\dfrac{-}{+}=-\infty \\ \lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{-6}{x^2+2x+1}\to\dfrac{-}{+}=-\infty\end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{-6}{x^2+2x+1}=-\infty$

e) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$, siendo $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x+2}, \text{ si } x<-2 \\ \dfrac{1}{x^2+4x+4}, \text{ si } x>-2\end{cases}$

Resolución

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{x^2-1}{x+2}=\dfrac{3}{0^-}=-\infty \\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{1}{x^2+4x+4}=\dfrac{1}{0^+}=\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to -2} f(x)$$

Indeterminaciones del tipo 0/0 en funciones racionales

Si al calcular $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{p(x)}{q(x)}$, obtuviéramos la indeterminación $\dfrac{0}{0}$, para resolverla y poder calcular el límite debemos dividir los dos polinomios por (x – a) ó factorizarlos y simplificarlos por (x – a).

Ejemplos

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^4-2x^3+x-2}{x^3+4x^2-11x-2}=\frac{2^4-2.2^3+2-2}{2^3+4.2^2-11.2-2}=\frac{0}{0}\ \text{Indeterminación}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & & 2 & 0 & 0 & 2 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 1 & \lfloor 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 1 & 4 & -11 & -2 \\ 2 & & 2 & 12 & 2 \\ \hline & 1 & 6 & 1 & \lfloor 0 \end{array} \Rightarrow \lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x^3+1)}{\cancel{(x-2)}(x^2+6x+1)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^3+1}{x^2+6x+1}=\frac{2^3+1}{2^2+6.2+1}=\frac{9}{17}$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-x-2}{x^2+2x+1}=\frac{(-1)^2-(-1)-2}{(-1)^2+2(-1)+1}=\frac{0}{0}\ \text{Indeterminación}$$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -1 & -2 \\ -1 & & -1 & 2 \\ \hline & 1 & -2 & \lfloor 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrr} & 1 & 2 & 1 \\ -1 & & -1 & -1 \\ \hline & 1 & 1 & \lfloor 0 \end{array} \Rightarrow \lim_{x\to -1}\frac{\cancel{(x+1)}(x-2)}{\cancel{(x+1)}(x+1)}=\lim_{x\to -1}\frac{x-2}{x+1}=\frac{-3}{0}=\pm\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x-2}{x+1}\xrightarrow{\text{Por la izda de }-1\text{ probamos por ejemplo con }x=-1,1}\dfrac{-}{-}=+\Rightarrow \lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x-2}{x+1}=+\infty \\ \dfrac{x-2}{x+1}\xrightarrow{\text{Por la dcha de }-1\text{ probamos por ejemplo con }x=-0,9}\dfrac{-}{+}=-\Rightarrow \lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x-2}{x+1}=-\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x\to -1}\frac{x-2}{x+1}\Rightarrow \nexists \lim_{x\to -1}\frac{x^2-x-2}{x^2+2x+1}$$

Actividad resuelta

Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^3+5x^2+3x-9}{x^3+7x^2+15x+9}$

$$\underline{\text{Solución}}: \frac{0}{0}\text{Indeterm.}\quad \begin{array}{r|rrrr} & 1 & 5 & 3 & -9 \\ -3 & & -3 & -6 & 9 \\ \hline & 1 & 2 & -3 & \lfloor 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 1 & 7 & 15 & 9 \\ -3 & & -3 & -12 & -8 \\ \hline & 1 & 4 & 3 & \lfloor 0 \end{array}$$

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^2+2x-3}{x^2+4x+3}=\frac{0}{0}\text{Indeterm.}\ \begin{array}{r|rrr} & 1 & 2 & -3 \\ -3 & & -3 & 3 \\ \hline & 1 & -1 & \lfloor 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrr} & 1 & 4 & 3 \\ -3 & & -3 & -3 \\ \hline & 1 & 1 & \lfloor 0 \end{array} \Rightarrow \lim_{x\to -3}\frac{x-1}{x+1}=\frac{-4}{-2}=2$$

b) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-25}{x^2-5x}$ **Resolución** $\dfrac{0}{0}\text{Indeterm.}\ \begin{array}{r|rrr} & 1 & 0 & -25 \\ 5 & & 5 & 25 \\ \hline & 1 & 5 & \lfloor 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrr} & 1 & -5 & 0 \\ 5 & & 5 & 0 \\ \hline & 1 & 0 & \lfloor 0 \end{array} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x+5}{x}=\dfrac{10}{5}=2$

c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-6x^2+5x}{x^4-x^3+x-1}$ **Resolución** $\dfrac{0}{0}\text{Indeterm.}\ \begin{array}{r|rrrr} & 1 & -6 & 5 & 0 \\ 1 & & 1 & -5 & 0 \\ \hline & 1 & -5 & 0 & \lfloor 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 1 & \lfloor 0 \end{array} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-5x}{x^3+1}=\dfrac{-4}{2}=-2$

d) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^4+4x^3+5x^2+4x+4}{x^4+4x^3+4x^2}$

Resolución

$$\underline{\text{Solución}}: \frac{0}{0}\text{Indeterm.}\ \begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 4 & 5 & 4 & 4 \\ -2 & & -2 & -4 & -2 & -4 \\ \hline & 1 & 2 & 1 & 2 & \lfloor 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & & -2 & -4 & 0 & 0 \\ \hline & 1 & 2 & 0 & 0 & \lfloor 0 \end{array} \Rightarrow \lim_{x\to -2}\frac{x^3+2x^2+x+2}{x^3+2x^2}=\frac{0}{0}\text{Indeterm.}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & & -2 & 0 & -2 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & \lfloor 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & & -2 & 0 & 0 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & \lfloor 0 \end{array} \Rightarrow \lim_{x\to -2}\frac{x^2+1}{x^2}=\frac{5}{4}$$

e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-6x^2+8x-3}{x^4-2x^3+2x-1}$

Resolución

$$\underline{\text{Solución}}: \frac{0}{0}\text{Indeterm.}\ \begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -6 & 8 & -3 \\ 1 & & 1 & 1 & -5 & 3 \\ \hline & 1 & 1 & -5 & 3 & \lfloor 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -2 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & & 1 & -1 & -1 & 1 \\ \hline & 1 & -1 & -1 & 1 & \lfloor 0 \end{array} \Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-x^2-x+1}=\frac{0}{0}\text{Indeterm.}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1 & -5 & 3 \\ 1 & & 1 & 2 & 3 \\ \hline & 1 & 2 & -3 & \lfloor 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & & 1 & 0 & -1 \\ \hline & 1 & 0 & -1 & \lfloor 0 \end{array} \Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x^2-1}=\frac{0}{0}\text{Indeterm.}\ \begin{array}{r|rrr} & 1 & 2 & -3 \\ 1 & & 1 & 3 \\ \hline & 1 & 3 & \lfloor 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrr} & 1 & 0 & -1 \\ 1 & & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & \lfloor 0 \end{array} \Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{x+3}{x+1}=2$$

f) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x^2-6}{x^2-3x}-\dfrac{1}{x-3}\right)$

Resolución

$$\underline{\text{Solución}}: \left(\frac{3}{0}-\frac{1}{0}\text{Indeterm.}\right)\Rightarrow \lim_{x\to 3}\left(\frac{x^2-6}{x(x-3)}-\frac{1}{x-3}\right)=\lim_{x\to 3}\left(\frac{x^2-6}{x(x-3)}-\frac{x}{x(x-3)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x^2-3x}=\frac{0}{0}\text{Indeterm.}\ \begin{array}{r|rrr} & 1 & -1 & -6 \\ 3 & & 3 & 6 \\ \hline & 1 & 2 & \lfloor 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrr} & 1 & -3 & 0 \\ 3 & & 3 & 0 \\ \hline & 1 & 0 & \lfloor 0 \end{array} \Rightarrow \lim_{x\to 3}\frac{x+2}{x}=\frac{5}{3}$$

g) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x-2}{x^2-4}-\dfrac{x^2-2x}{x-2}\right)$

Resolución

$$\left(\frac{0}{0}-\frac{0}{0}\right)\Rightarrow \lim_{x\to 2}\left(\frac{x-2}{(x+2)(x-2)}-\frac{x(x-2)}{x-2}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x+2}-x\right)=\frac{1}{2+2}-2=\frac{-7}{4}$$

Indeterminaciones en funciones con radicales

Algunas veces aparece la indeterminación $\frac{0}{0}$ en expresiones con radicales. Entonces, para calcular el límite se utiliza la expresión conjugada.

Ejemplo

$$\lim_{x\to -2}\frac{x+2}{\sqrt{x+3}\;-\;1}=\frac{0}{0}\Rightarrow \frac{x+2}{\sqrt{x+3}\;-\;1}.\xrightarrow[.\,(\sqrt{x+3}\;+\;1)]{.\,(\sqrt{x+3}\;+\;1)}\frac{(x+2)(\sqrt{x+3}\;+\;1)}{x+2}=\sqrt{x+3}\;+\;1\Rightarrow \lim_{x\to -2}(\sqrt{x+3}\;+\;1)=2$$

Actividad resuelta

Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}$

Resolución

$$\frac{0}{0}\text{Indeterm.}\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}\xrightarrow[.\,(\sqrt{3+x}+\sqrt{3})]{.\,(\sqrt{3+x}+\sqrt{3})}\lim_{x\to 0}\frac{x\,.(\sqrt{3+x}+\sqrt{3})}{x}=\lim_{x\to 0}(\sqrt{3+x}+\sqrt{3})=2\sqrt{3}$$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{1-\sqrt{1-x}}$

Resolución

$$\frac{0}{0}\text{Indeterm.}\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-\sqrt{1-x}}\xrightarrow[.\,(1+\sqrt{1-x})]{.\,(1+\sqrt{1-x})}\lim_{x\to 0}\frac{x.\,(1+\sqrt{1-x})}{x}=\lim_{x\to 0}(1+\sqrt{1-x})=2$$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$

Resolución

$$\frac{0}{0}\text{Indeterm.}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}\xrightarrow[.\,(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})]{.\,(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})}\lim_{x\to 0}\frac{x}{x.(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

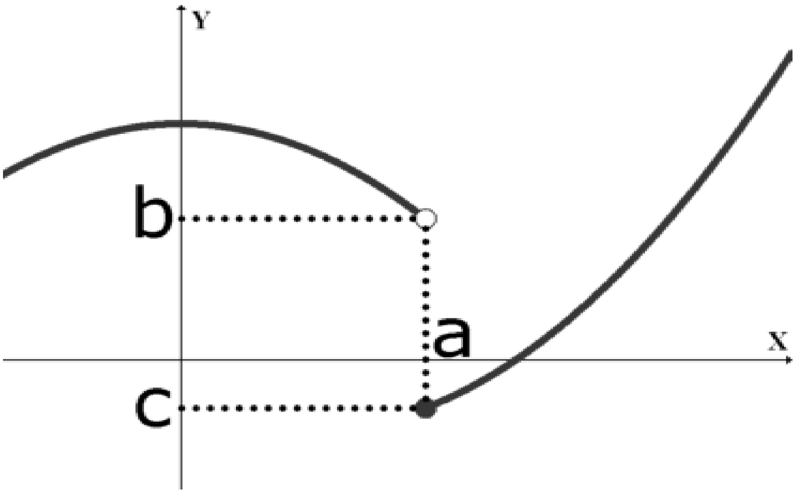
d) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3-\sqrt{5+x^2}}{4-x^2}$

Resolución

$$\frac{0}{0}\text{Indeterm.}\lim_{x\to 2}\frac{3-\sqrt{5+x^2}}{4-x^2}\xrightarrow[.\,(3+\sqrt{5+x^2})]{.\,(3+\sqrt{5+x^2})}\lim_{x\to 2}\frac{4-x^2}{(4-x^2).\,(3+\sqrt{5+x^2})}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{3+\sqrt{5+x^2}}=\frac{1}{6}$$

RELACIÓN ENTRE CONTINUIDAD Y LÍMITE PUNTUAL

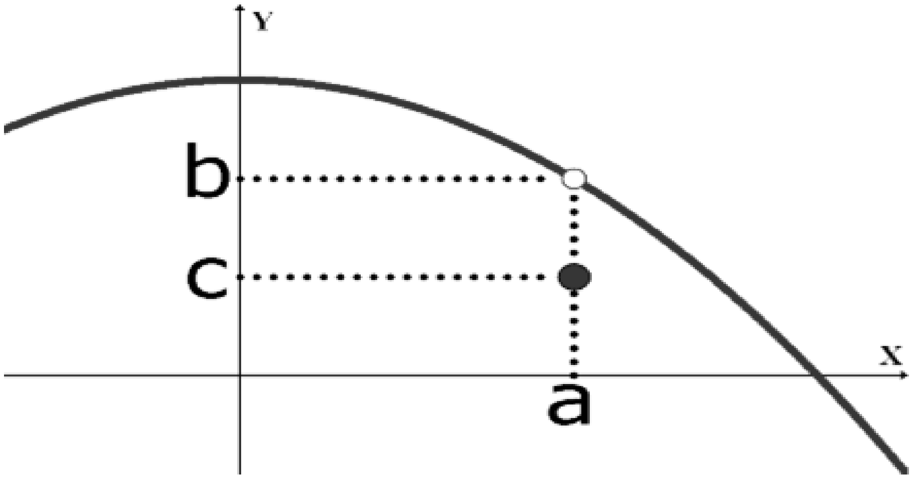
Recuerda que para que una función sea continua en un punto, sabemos que su gráfica no puede tener ninguna rotura. Por ejemplo, la siguiente función no es continua en x = a porque las ramas no "conectan".



Fíjate que los límites laterales en x = a son distintos, pues $\lim_{x\to a^-} f(x) = b$, $\lim_{x\to a^+} f(x) = c$.

Es decir, no existe $\lim_{x\to a} f(x)$

Tampoco es continua, en x = a, la siguiente función porque, aunque las ramas conectan porque existe $\lim_{x\to a} f(x) = b$) y dicho límite no coincide con f(a), pues f(a) = c. Por eso su gráfica tiene un "agujero"



Esto quiere decir que para que una función f sea continua en x = a debe cumplir que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

O lo que es lo mismo, se tienen que dar las siguientes condiciones:

C$_1$: Debe existir f(a) **C**$_2$: $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

Usando las propiedades fundamentales de los límites se puede demostrar que todas las funciones que no sean definidas a trozos son continuas en su dominio de definición.

Para las funciones definidas a trozos hay que estudiar la continuidad en los puntos donde cambia la expresión de la función pues son los puntos donde puede haber una rotura.

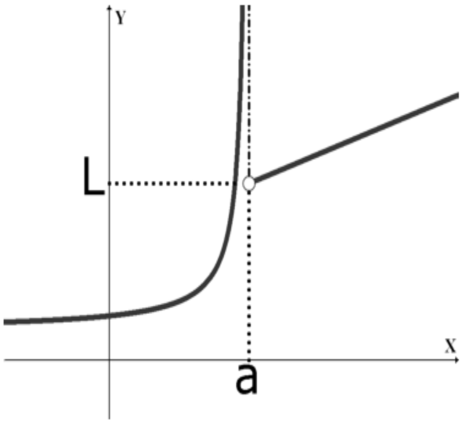
Tipos de discontinuidades

Cuando una función no es continua en un punto se dice que es discontinua.

Hay varios tipos de discontinuidades.

1) Discontinuidad asintótica o de salto infinito: Se da cuando $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ y/o $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$.

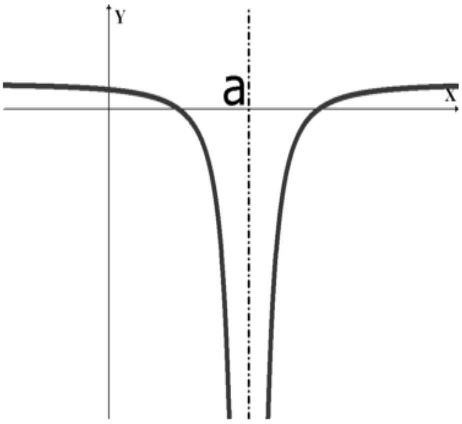
Ejemplos:



$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \infty$

$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$

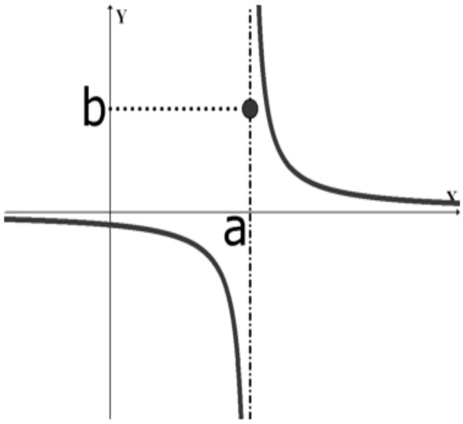
($\nexists$ f(a))



$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$

($\nexists$ f(a))



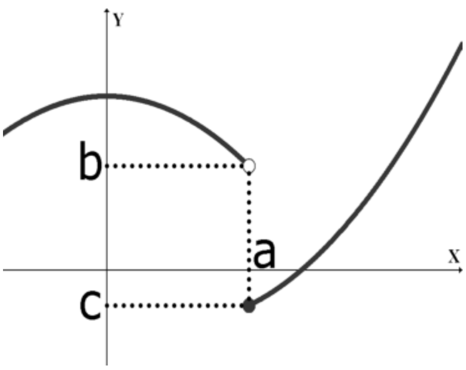
$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \infty$

(f(a) = b)

2) Discontinuidad de salto finito: Se da cuando $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = c$, pero $b \neq c$

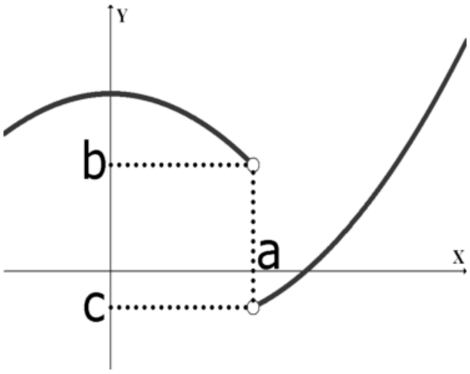
Ejemplos:



$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = b$

$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = c$

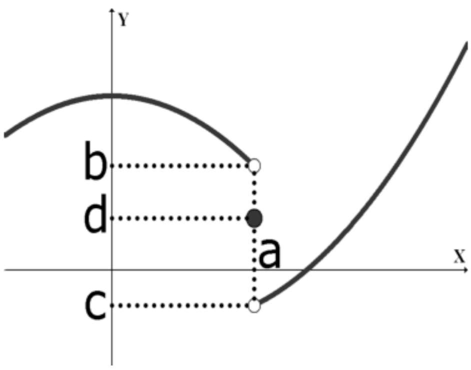
(f(a) = c)



$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = b$

$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = c$

($\nexists$ f(a))



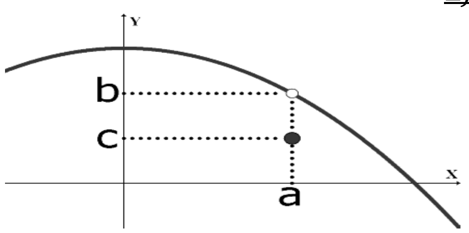
$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = b$

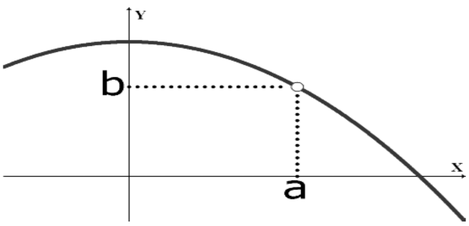
$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = c$

(f(a) = d)

3) Discontinuidad evitable: Se da cuando $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, pero $b \neq f(a)$

Ejemplos:





$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=b$

$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=b$

$(f(a)=c)$

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=b$

$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=b$

$(\nexists f(a))$

Actividades resueltas

1) Estudia la continuidad de la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-4}, & \text{si } x\le 0\\ x+3, & \text{si } 0<x<2\\ x^2+1, & \text{si } x\ge 2\end{cases}$ y clasifica sus discontinuidades, en caso de que exista alguna.

Resolución

Observamos que para $x\neq 0$, $x\neq 2$ es una función continua porque cada expresión corresponde a una función continua.

Para $x=0$: $\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x-4}=\dfrac{-1}{4}\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(x+3)=3\end{array} \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Luego, f tiene una discontinuidad de salto finito en $x=0$

Para $x=2$: $\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(x+3)=5\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(x^2+1)=5\end{array}$, $f(2)=2^2+1=5$. Luego, f es continua en $x=2$

2) Estudia la continuidad de las siguientes funciones y clasifica sus discontinuidades, en caso de que exista alguna:

a) $f(x)=\begin{cases}2x-3, & \text{si } x<5\\ \dfrac{32}{x^2-9}, & \text{si } x>5\end{cases}$

Resolución

Observamos que $D(f)=R-\{5\}$, pues no existe f(5).

Para $x\neq 5$ es una función continua porque cada expresión corresponde a una función continua

Para $x=5$: $\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 5}(2x-3)=7\\ \lim\limits_{x\to 5^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{32}{x^2-9}=2\end{array} \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 5} f(x)$. Luego, f tiene una discontinuidad de salto finito en $x=5$

b) $f(x)=\begin{cases} 5x-6, \text{ si } x<2 \\ \dfrac{20}{x^2+1}, \text{ si } x>2 \end{cases}$

Resolución

Observamos que D(f) = R – {2}, pues no existe f(2).
Para x ≠ 2 es una función continua porque cada expresión corresponde a una función continua

Para x = 2 : $\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(5x-6)=4 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{20}{x^2+1}=4 \end{array} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x)=4.$ Luego, f tiene una discontinuidad evitable en $x=2$

c) $f(x)=\begin{cases} e^{x-1}, \text{ si } x\le 0 \\ \dfrac{1}{x}, \text{ si } x>0 \end{cases}$

Resolución

Observamos que D(f) = R. Para x ≠ 0 es una función continua porque cada expresión corresponde a una función continua

Para x = 0 : $\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} e^{x-1}=e^{-1}=\dfrac{1}{e} \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty \end{array}$. Luego, f tiene una discontinuidad asintótica en $x=0$

d) $f(x)=\begin{cases} -x^2+x+6, \text{ si } x\le 2 \\ x+2, \text{ si } x>2 \end{cases}$

Resolución

Observamos que D(f) = R. Para x ≠ 2 es una función continua porque cada expresión corresponde a una función continua

Para x = 2 : $\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(-x^2+x+6)=4 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(x+2)=4 \end{array}$; $f(2)=-2^2+2+6=4$. Luego, f es continua en $x=2$

3) Halla los límites laterales de la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{-3x}{x-1}, \text{ si } x<1 \\ 2x+3, \text{ si } x\ge 1 \end{cases}$ en x = 1 e indica el tipo de discontinuidad que tiene la función de dicho punto.

Resolución

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-3x}{x-1}=\dfrac{-3.1}{1-1}=\dfrac{-3}{0^-}=+\infty \qquad \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(2x+3)=2.1+3=5 \qquad f(1)=2.1+3=5$

La discontinuidad es de salto infinito

4) Halla los límites laterales de la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+3}{x+1}, \text{ si } x\le -1\\ 3x-4, \text{ si } x>-1\end{cases}$ en x = −1 e indica el tipo de discontinuidad que tiene la función de dicho punto.

Resolución

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}\frac{x+3}{x+1}=\frac{-1+3}{-1+1}=\frac{2}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1}(3x-4)=3.(-1)-4=-7$$

$$f(-1)=3.(-1)-4=-7$$

La discontinuidad es de salto infinito

5) Dada la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+2}{4-x}, \text{ si } x<4\\ -(x-3)^2, \text{ si } x\ge 4\end{cases}$

Halla los límites laterales en x = 4 e indica el tipo de discontinuidad que tiene la función de dicho punto.

Resolución

$\lim_{x\to 4^-} f(x)=\lim_{x\to 4^-}\frac{x+2}{4-x}=\frac{4+2}{4-4}=\frac{6}{0^+}=+\infty$ $\lim_{x\to 4^+} f(x)=\lim_{x\to 4}[-(x-3)^2]=-(4-3)^2=-1^2=-1$

La discontinuidad es de salto infinito

6) Dada la función $f(x)=\begin{cases}-x^2+x-3, \text{ si } x<-1\\ 5-x, \text{ si } -1\le x<2\\ x^2-1, \text{ si } x>2\end{cases}$

a) Halla los límites laterales en x = −1, halla f(−1) e indica el tipo de discontinuidad que tiene la función de dicho punto.

Resolución

$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1}(-x^2+x-3)=-(-1)^2+(-1)-3=-1-1-3=-5$ $\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1}(5-x)=5-(-1)=6$

$f(-1)=5-(-1)=6$. La discontinuidad es de salto finito

b) Halla los límites laterales en x = 2, halla f(2) e indica el tipo de discontinuidad que tiene la función de dicho punto.

Resolución

$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2}(5-x)=5-2=3$ $\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2}(x^2-1)=2^2-1=3$

$f(2)$ no existe. La discontinuidad es evitable

Dada la función $f(x)=\begin{cases}1-3x, \text{ si } x<2\\ \dfrac{20}{x^2+1}, \text{ si } x\ge 2\end{cases}$, calcula $\lim_{x\to 2} f(x)$ y determina qué tipo de discontinuidad tiene la función en x = 2

$\lim_{x\to 2^-} f(x)=-5$; $\lim_{x\to 2^+} f(x)=4$; la discontinuidad es de salto finito

7) Estudia la continuidad de la función $f(x)=\begin{cases} x^2-x+1, \text{ si } x\le 0 \\ e^x, \text{ si } 0<x<2 \\ x-3, \text{ si } x\ge 2 \end{cases}$ en x = 0, x = 2 y en caso de que sea discontinua indica el tipo de discontinuidad que tiene

Resolución

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(x^2-x+1)=0^2-0+1=1 \quad \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} e^x=e^0=1 \quad f(0)=0^2-0+1=1$

Luego, f es continua en x = 0

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2} e^x=e^2 \quad \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(x-3)=2-3=-1 \quad f(2)=2-3=-1$

Luego, f es discontinua en x = 2. La discontinuidad es de salto finito

8) Halla los límites laterales de la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x-1}{x+3}, \text{ si } x<-3 \\ 1-2x, \text{ si } x\ge -3 \end{cases}$ en x = –3 e indica el tipo de discontinuidad que tiene la función de dicho punto.

Resolución

$\lim\limits_{x\to -3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -3^-}\dfrac{2x-1}{x+3}=\dfrac{2.(-3)-1}{-3+3}=\dfrac{-7}{0^-}=+\infty \qquad \lim\limits_{x\to -3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -3}(1-2x)=1-2.(-3)=7$

La discontinuidad es de salto infinito

9) Averigua el tipo de discontinuidad que tiene $f(x)=\dfrac{2x}{x-1}$ en x = 1 hallando el límite correspondiente y resolviendo la indeterminación que se presente.

Resolución

Como $x-1=0$ cuando $x=1$, $\text{Dom}(f)=R-\{1\}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x}{x-1}=\dfrac{2.1}{1-1}=\dfrac{2}{0}$ Indetermin.: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x}{x-1}=\dfrac{2}{0^-}=-\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x}{x-1}=\dfrac{2}{0^+}=\infty \end{cases}$.

Luego, f tiene una discontinuidad asintótica o de salto infinito en $x=1$

10) Averigua el tipo de discontinuidad que tiene $f(x)=\dfrac{2x^2+2x}{x+1}$ en x = –1 hallando el límite correspondiente y resolviendo la indeterminación que se presente.

Resolución

$\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+2x}{x+1}=\dfrac{2.(-1)^2+2.(-1)}{-1+1}=\dfrac{0}{0}$ Indeterm. Factorizo: $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}}=2.(-1)=-2$

$f(-1)$ no existe. Luego, la discontinuidad es evitable

11) Averigua el tipo de discontinuidad que tiene la función $f(x)=\dfrac{3x^2+6x}{x+2}$ en x = –2 hallando el límite correspondiente y resolviendo la indeterminación que se presente.

Resolución

$\lim\limits_{x\to -2} f(x)=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2+6x}{x+2}=\dfrac{3.(-2)^2+6.(-2)}{-2+2}=\dfrac{0}{0}$ Indeterm. Factorizo: $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x\cancel{(x+2)}}{\cancel{x+2}}=3.(-2)=-6$

$f(-2)$ no existe. Luego, la discontinuidad es evitable

12) Averigua el tipo de discontinuidad que tiene $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2}{x^2+x-2}$ en $x=-2$ hallando el límite correspondiente y resolviendo la indeterminación que se presente.

Resolución

$$\lim_{x\to -2} f(x)=\lim_{x\to -2}\frac{x^3+2x^2}{x^2+x-2}=\frac{(-2)^3+2.(-2)^2}{(-2)^2+(-2)-2}=\frac{-8+2.4}{4-2-2}=\frac{0}{0}\text{Indeterm. Factorizo los polinomios}$$

	1	1	−2
−2		−2	2
	1	−1	0

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+2)}(x-1)}=\frac{(-2)^2}{-2-1}=\frac{4}{-3}=\frac{-4}{3}$$; f(−2) no existe. Luego, la discontinuidad es evitable

13) Averigua el tipo de discontinuidad que tiene $f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-3x}$ en $x=3$ hallando el límite correspondiente y resolviendo la indeterminación que se presente.

Resolución

$$\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x^2-3x}=\frac{3^2-2.3-3}{3^2-3.3}=\frac{9-6-3}{9-9}=\frac{0}{0}\text{Indeterm. Factorizo los polinomios}$$

	1	−2	−3
3		3	3
	1	1	0

$$\lim_{x\to 3}\frac{\cancel{(x-3)}(x+1)}{x\cancel{(x-3)}}=\frac{3+1}{3}=\frac{4}{3}$$; f(3) no existe. Luego, la discontinuidad es evitable

14) Averigua el tipo de discontinuidad que tiene la función $f(x)=\dfrac{3x^2+12x}{x+4}$ en $x=-4$ hallando el límite correspondiente y resolviendo la indeterminación que se presente.

Resolución

$$\lim_{x\to -4} f(x)=\lim_{x\to -4}\frac{3x^2+12x}{x+4}=\frac{3.(-4)^2+12.(-4)}{-4+4}=\frac{3.16-48}{0}=\frac{0}{0}\text{Indeterm. Factorizo: }\lim_{x\to -4}\frac{3x\cancel{(x+4)}}{\cancel{x+4}}=3.(-4)=-12$$

f(−4) no existe porque para −4 se anula el denominador. Luego, la discontinuidad es evitable

15) Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-x}$

Calcula $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ y determina el tipo de discontinuidad que tiene la función en $x=1$

Resolución

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x^2-x}=\frac{1^2+2.1-3}{1^2-1}=\frac{0}{0}\text{Indetermin. }\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+3)}{x\cancel{(x-1)}}=\frac{1+3}{1}=4.\ \nexists f(1).$$ Luego, la discontinuidad es evitable

16) Los ciudadanos de cierto estado pagan en concepto de impuestos una cantidad f(x), en euros, donde x es el ingreso anual en miles de euros, siendo $f(x)=\begin{cases} 2,16x^2 \text{, si } 0<x\le 10 \\ 21,6x \text{, si } x>10 \end{cases}$

a) Estudia su continuidad

Resolución

Observamos que $D(f)=(0,\infty)$. Para $x\neq 10$ es una función continua porque cada expresión corresponde a una función continua

Para $x = 10$: $\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 10^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 10}(2,16x^2)=2,16.10^2=216 \\ \lim\limits_{x\to 10^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 10}(21,6x)=21,6.10=216 \end{array}$; $f(10)=2,16.10^2=216$. Luego, f es continua en $x=10$

b) ¿Cuántos impuestos paga un ciudadano que gana 9000 € anuales?

Resolución $x=9\Rightarrow f(9)=2,16\ .\ 9^2=174,96$ €

c) ¿Y si los ingresos anuales fueran de 12000 €?

Resolución $x=12\Rightarrow f(12)=21,6\ .\ 12=259,2$ €

d) ¿Qué % de sus ingresos paga un ciudadano que gana 9000 € anuales?

Resolución $x=9\Rightarrow f(9)=2,16\ .\ 9^2=174,96 \text{ €}\Rightarrow \dfrac{174,96}{9000}=\boxed{1,944\%}$

17) Sea P(t) el porcentaje de células, de un determinado tejido, afectadas por un cierto tipo de enfermedad transcurrido un tiempo t, medido en meses: $P(t)=\begin{cases} t^2 \text{ , si } 0\le t\le 5 \\ \dfrac{100t-250}{t+5} \text{, si } t>5 \end{cases}$

a) Estudia la continuidad de la función P(t)

Resolución

Observamos que $D(f)=R$ y para $t\neq 5$ es una función continua porque cada expresión corresponde a una función continua.

$\begin{array}{l} \lim\limits_{t\to 5^-} P(t)=\lim\limits_{t\to 5} t^2=5^2=25 \\ \lim\limits_{t\to 5^+} P(t)=\lim\limits_{t\to 5}\dfrac{100t-250}{t+5}=\dfrac{100.5-250}{5+5}=25 \end{array}$, $P(5)=5^2=25$. Luego, la función P(t) es continua en R

b) ¿Qué porcentaje de células habrá afectadas cuando pase un año?

__Solución__: 1 año = 12 meses → $P(12)=\dfrac{100.12-250}{12+5}\cong 55,88\%$

18) Halla el valor de los parámetros para que sean continuas las siguientes funciones:

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{ax}{x-1},\ si\ x\le -1\\ x^3-3x^2+6x-2,\ si\ x>-1\end{cases}$

Resolución

$$Como\ debe\ ser\ continua\ en\ x=-1,\ entonces\ \lim_{x\to -1} f(x)=f(-1)$$

$$\begin{cases}\displaystyle\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{ax}{x-1}=\frac{a.(-1)}{-1-1}=\frac{a}{2}\\ \displaystyle\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1}(x^3-3x^2+6x-2)=(-1)^3-3.(-1)^2+6.(-1)-2=-12\end{cases}\quad ;\ f(-1)=\frac{a}{2}$$

$$Para\ que\ f\ sea\ continua\ en\ x=-1\ debe\ ser\ \frac{a}{2}=-12\ \Rightarrow \boxed{a=-24}$$

b) $f(x)=\begin{cases}-x^2-2ax+3,\ si\ x\le 1\\ ax^2-6x+5,\ si\ x>1\end{cases}$

Resolución

Para x ≠ 1 es continua porque cada expresión corresponde a una función continua.

En x = 1 : $\begin{matrix}\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1}(-x^2-2ax+3)=-1^2-2a.1+3=2-2a\\ \displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1}(ax^2-6x+5)=a.1^2-6.1+5=a-1\end{matrix}\ ;\ f(1)=-1^2-2a.1+3=2-2a$.

$$\text{Luego, para que sea continua debe ser } 2-2a=a-1\to \boxed{a=1}$$

c) $f(x)=\begin{cases}x^2+mx-3,\ si\ x\le -2\\ 5x+7,\ si\ x>-2\end{cases}$

Resolución

Para x ≠ – 2 es continua porque cada expresión corresponde a una función continua.

En x = –2 : $\begin{matrix}\displaystyle\lim_{x\to -2^-} f(x)=\lim_{x\to -2}(x^2+mx-3)=(-2)^2+m(-2)-3=1-2m\\ \displaystyle\lim_{x\to -2^+} f(x)=\lim_{x\to -2}(5x+7)=5(-2)+7=-3\end{matrix}\ ;\ f(-2)=(-2)^2+m(-2)-3=1-2m$

$$\text{Luego, para que sea continua debe ser } 1-2m=-3\to \boxed{m=2}$$

d) $f(x)=\begin{cases} x^2-ax & si \quad x<1 \\ b & si \quad x=1 \\ 2^x & si \quad x>1 \end{cases}$

Resolución

Para $x \neq 1$ es continua porque cada expresión corresponde a una función continua

En $x = 1$: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x^2-ax)=1^2-a.1=1-a$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1} 2^x=2^1=2$; $f(1)=b$

Luego, para que sea continua debe ser $1-a=2=b \Rightarrow \boxed{a=-1,\ b=2}$

19) ¿Cuánto debe valer m para que la función $f(x)=\begin{cases} x^2+mx, \text{ si } x\le 2 \\ \dfrac{x+m}{x^2+1}, \text{ si } x>2 \end{cases}$ sea continua en $x = 2$?

Resolución

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(x^2+mx)=2^2+m.2=2m+4$ $\qquad \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+m}{x^2+1}=\dfrac{2+m}{2^2+1}=\dfrac{2+m}{5}$

Para que sea continua en $x = 2$ debe ser

$$2m+4=\frac{2+m}{5}\to 10m+20=2+m\to 9m=-18\to m=\frac{-18}{9}\to m=-2$$

20) ¿Cuánto debe valer "a" para que la función $f(x)=\begin{cases} x^2-ax+1, \text{ si } x\le -1 \\ \dfrac{3a}{x+2}, \text{ si } x>-1 \end{cases}$ sea continua en $x = -1$?

Resolución

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}(x^2-ax+1)=(-1)^2-a.(-1)+1=a+2$ $\qquad \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3a}{x+2}=\dfrac{3a}{-1+2}=3a$

Para que sea continua en $x = -1$ debe ser $a + 2 = 3a \to 2 = 2a \to a = 1$

21) Halla el valor o valores de k para que $f(x)=\begin{cases} \dfrac{k}{x-3}, \text{ si } x\le 1 \\ \dfrac{2x+k}{x^2-k}, \text{ si } x>1 \end{cases}$ sea continua en $x = 1$

Resolución

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{k}{x-3}=\dfrac{k}{1-3}=\dfrac{k}{-2}=f(1)$ $\qquad \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x+k}{x^2-k}=\dfrac{2.1+k}{1^2-k}=\dfrac{2+k}{1-k}$

Para que sea continua en $x = 1$ debe ser

$$\frac{k}{-2}=\frac{2+k}{1-k}\to k(1-k)=-2(2+k)\to k-k^2=-4-2k\to k^2-3k-4=0\to k=\frac{3\pm 5}{2}\to \begin{array}{l} k=4 \\ k=-1 \end{array}$$

22) Halla el valor o valores de b para que la función $f(x)=\begin{cases}2x^2-bx+b^2, \text{ si } x<-1\\ 2-3bx, \text{ si } x\geq -1\end{cases}$ sea continua en x = –1

Resolución

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1}(2x^2-bx+b^2)=2(-1)^2-b(-1)+b^2=2+b+b^2$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1}(2-3bx)=2-3b(-1)=2+3b=f(-1)$$

Para que sea continua en x = –1 debe ser

$$2+b+b^2=2+3b\to b^2-2b=0\to b(b-2)=0\to \begin{matrix} b=0\\ b-2=0\to b=2\end{matrix}$$

23) ¿Cuánto debe valer "k" para que la función $f(x)=\begin{cases}x^2-2kx+k-1, \text{ si } x\leq -5\\ \dfrac{3k}{x+6}, \text{ si } x>-5\end{cases}$ sea continua en x = –5?

Resolución

$$\lim_{x\to -5^-} f(x)=\lim_{x\to -5}(x^2-2kx+k-1)=(-5)^2-2k.(-5)+k-1=11k+24\ ;\ \lim_{x\to -5^+} f(x)=\lim_{x\to -5}\frac{3k}{x+6}=\frac{3k}{-5+6}=3k$$

Para que sea continua en x = –5 debe ser $11k+24=3k\to 8k=-24\to k=-3$

24) Calcula a y b para que la función $f(x)=\begin{cases}2x^2-a\ , \text{ si } x\leq -1\\ -3x^2+b\ , \text{ si } -1<x<1\\ \log x\ +\ a\ , \text{ si } x\geq 1\end{cases}$ sea continua

Resolución

$$\begin{cases}\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1}(2x^2-a)=2-a\\ \lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1}(-3x^2+b)=b-3\\ f(-1)=2-a\end{cases}\qquad \begin{cases}\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1}(-3x^2+b)=b-3\\ \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1}(\log x+a)=\log 1+a=a\\ f(1)=\log 1+a=a\end{cases}$$

Por tanto, $\begin{cases}\text{para que sea continua en } x=-1 \text{ debe ser } 2-a=b-3\\ \text{para que sea continua en } x=1 \text{ debe ser } b-3=a\end{cases}$

Resolviendo el sistema obtenemos: $a=1\ ,\ b=4$

25) Calcula a y b para que la función $f(x)=\begin{cases}3x+2, \text{ si } x<0\\ x^2+2a\cos(x), \text{ si } 0\leq x<\pi\\ ax^2+b, \text{ si } x\geq \pi\end{cases}$ sea continua

Resolución

Para $x\neq 0,\ x\neq \pi$ es continua porque cada expresión corresponde a una función continua

En x = 0: $\begin{matrix}\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0}(3x+2)=3.0+2=2\\ \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0}(x^2+2a\cos x)=0^2+2a\cos 0=2a\end{matrix}\ ;\ f(0)=0^2+2a\cos 0=2a$

Luego, para que sea continua en $x=0$ debe ser $2a=2\to \boxed{a=1}$

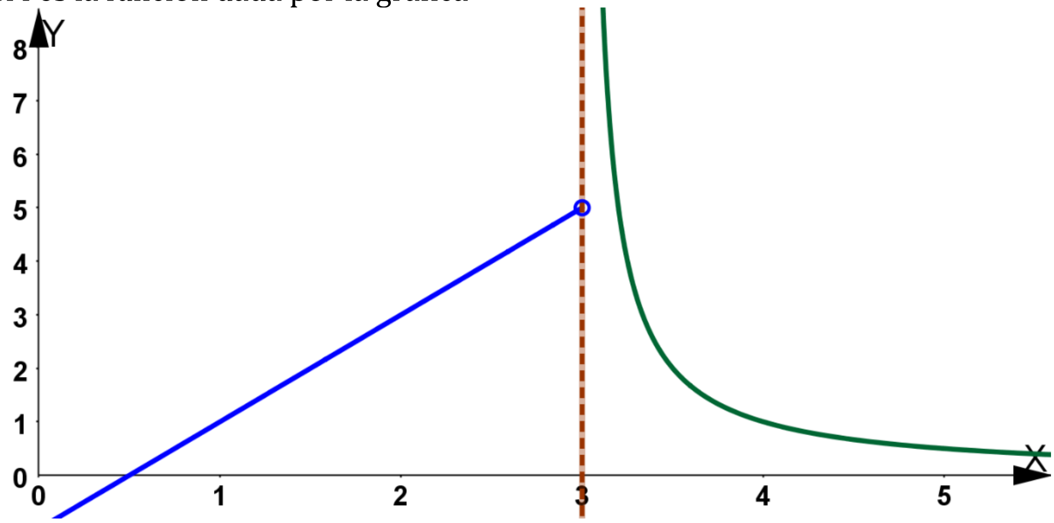
En x = π: $\begin{matrix}\lim_{x\to \pi^-} f(x)=\lim_{x\to \pi}(x^2+2a\cos x)=\pi^2+2a\cos\pi=\pi^2-2a\\ \lim_{x\to \pi^+} f(x)=\lim_{x\to \pi}(ax^2+b)=a\pi^2+b\end{matrix}\ ;\ f(\pi)=a\pi^2+b$

Luego, para que sea continua en $x=\pi$ debe ser $\pi^2-2a=a\pi^2+b\xrightarrow{\text{como } a=1}\pi^2-2=\pi^2+b\to \boxed{b=-2}$

Cálculo de las asíntotas verticales

Cuando una función f tiene una discontinuidad asintótica en x = a, la gráfica tiene una **asíntota vertical** cuya ecuación es $\boxed{\text{A.V. : } x = a}$

Por ejemplo, si f es la función dada por la gráfica

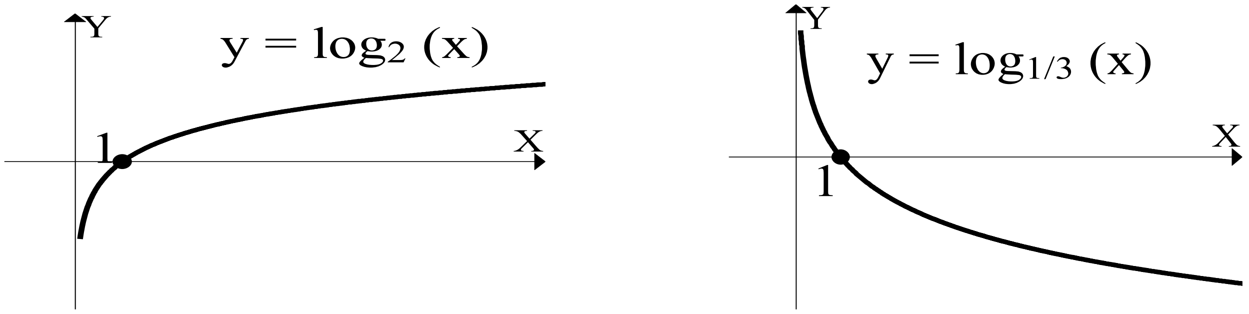


la recta de ecuación x = 3 es una asíntota vertical, pues $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \infty$

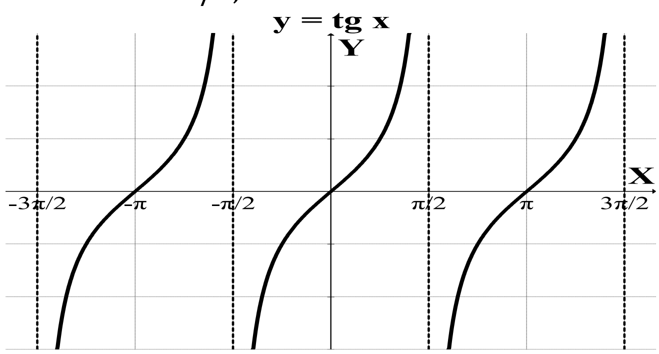
Si al calcular $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ obtenemos $\frac{L}{0} = \pm\infty$, siendo $L \neq 0$, sabemos que la gráfica tiene una asíntota vertical porque tiene una discontinuidad de salto infinito en x = a y la ecuación de la asíntota vertical es A.V. : x = a.

Las funciones de tipo lineal, las cuadráticas y las funciones exponenciales no tienen asíntotas verticales, pues son continas.

Para las funciones logarítmicas como $\lim\limits_{x \to 0} \log_a x = \pm\infty$, podemos decir que la AV es el eje Y



La única función trigonométrica que tiene asíntotas verticales es la función tangente. Las asíntotas verticales son las rectas de ecuación $x = k\pi/2$, con $k \in Z$



Para calcular las asíntotas verticales de una función dada por un cociente primero debemos encontrar los números "a" que anulen el denominador y luego comprobar que la discontinuidad en "a" es de salto infinito.

Luego, una función racional, f, tendrá una AV en aquellos valores "a" que anulen el denominador y además $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$

Por ejemplo, hallemos las asíntotas verticales de la función $f(x) = \dfrac{6x-5}{3x-3}$

$$Como\ 3x-3=0 \Leftrightarrow x=1 \quad y \ \lim_{x\to 1} f(x) = \frac{6.1-5}{3.1-3} = \frac{1}{0} = \pm\infty,\ la\ asíntota\ vertical\ es\ \boxed{A.V.: x=1}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \dfrac{1}{0^-} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \dfrac{1}{0^+} = +\infty \end{cases}$$

Actividad resuelta

Halla las asíntotas verticales de las siguientes funciones racionales y los límites laterales correspondientes

a) $f(x) = \dfrac{7x}{3x-12}$

Resolución

$$Como\ 3x-12=0 \Leftrightarrow x=4 \quad y \ \lim_{x\to 4} f(x) = \frac{7.4}{3.4-12} = \frac{28}{0} = \pm\infty,\ la\ asíntota\ vertical\ es\ \boxed{A.V.: x=4}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \dfrac{28}{0^-} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \dfrac{28}{0^+} = +\infty \end{cases}$$

b) $f(x) = \dfrac{4x}{2x+1}$

Resolución

$$Como\ 2x+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{-1}{2} \quad y \ \lim_{x\to \frac{-1}{2}} f(x) = \frac{4.\frac{-1}{2}}{2.\frac{-1}{2}+1} = \frac{-2}{0} = \pm\infty,\ la\ asíntota\ vertical\ es\ \boxed{A.V.: x=\frac{-1}{2}}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to \frac{-1}{2}^-} f(x) = \dfrac{-2}{0^-} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to \frac{-1}{2}^-} f(x) = \dfrac{-2}{0^+} = -\infty \end{cases}$$

LÍMITES EN EL INFINITO

Límites en $+\infty$ y en $-\infty$, interpretación gráfica, asíntotas horizontales

- El límite de una función f(x) cuando x tiende a $+\infty$, y se representa por $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, es el valor al que tienden los valores de la función cuando se toman valores de x muy grandes y cada vez más grandes.

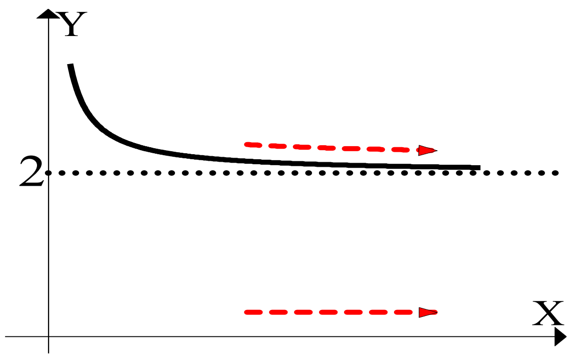
- El límite de una función f(x) cuando x tiende a $-\infty$, y se representa por $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, es el valor al que tienden los valores de la función cuando se toman valores de x negativos, muy grandes, en valor absoluto, y cada vez más grandes.

Veamos varios ejemplos:

- Si $f(x)=\dfrac{6x+1}{3x}$ y queremos saber cuánto vale $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$x\to+\infty$	100	200	300	...
$f(x)=\dfrac{6x+1}{3x}$	2,003	2,0017	2,0011	...
	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$			

Interpretación sobre la gráfica:

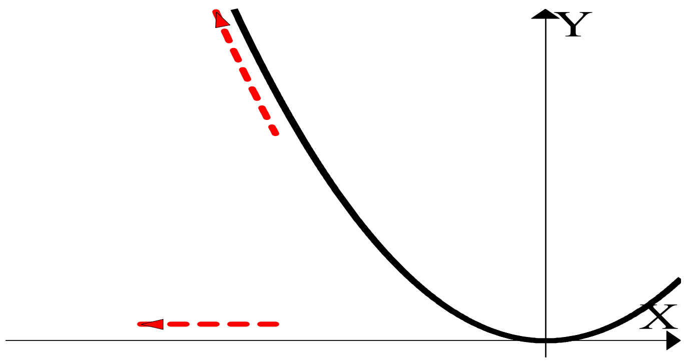


El hecho de que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ significa que la gráfica se aproxima cada vez más a la recta horizontal de ecuación y = 2.

- Si $f(x)=3x^2$ y queremos saber cuánto vale $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

$x\to-\infty$	−100	−200	−300	...
$f(x)=3x^2$	30 000	120 000	270 000	...
	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$			

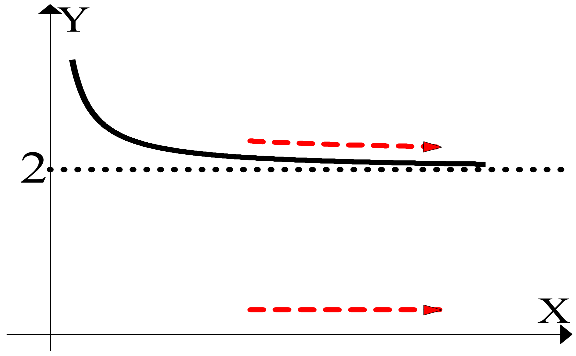
Interpretación sobre la gráfica:



El hecho de que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ significa que la gráfica tiende hacia arriba

Decimos que una función f tiene una <u>asíntota horizontal</u> si alguno de los límites en ∞ ó −∞, o los dos, son un número, L. La ecuación de la asíntota horizontal es $\boxed{\text{A.H.}: y = L}$

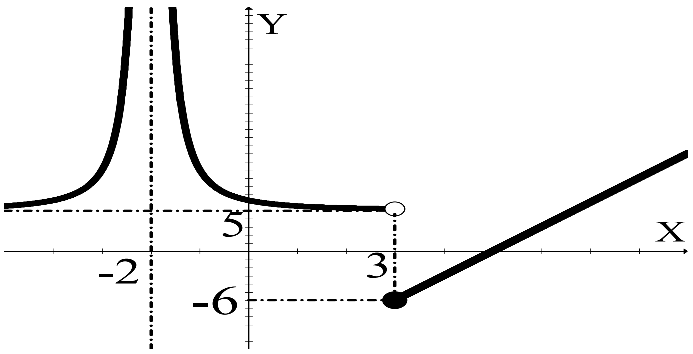
Por ejemplo, la función cuya gráfica es



tiene como asíntota horizontal en ∞, la recta de ecuación A.H.: y = 2, porque $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 2$

Actividades resueltas

1) Considera la función f cuya gráfica es



Determina:

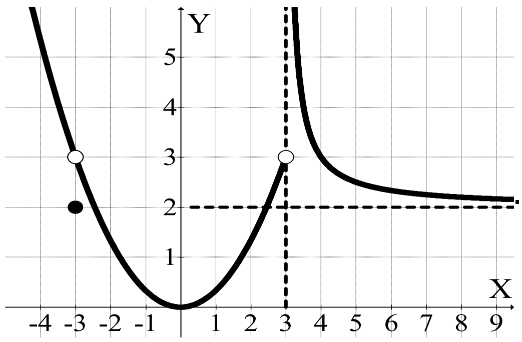
a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ c) La ecuación de su asíntota horizontal en $-\infty$

d) La ecuación de su asíntota vertical e) El tipo de discontinuidad que tiene la función en x = 3

Resolución

a) +∞ b) 5 c) A.H.: y = 5 d) A.V. : x = −2 e) Discontinuidad de salto finito

2) Sea la función f(x) cuya gráfica es



. Halla:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ c) Las ecuaciones de sus asíntotas

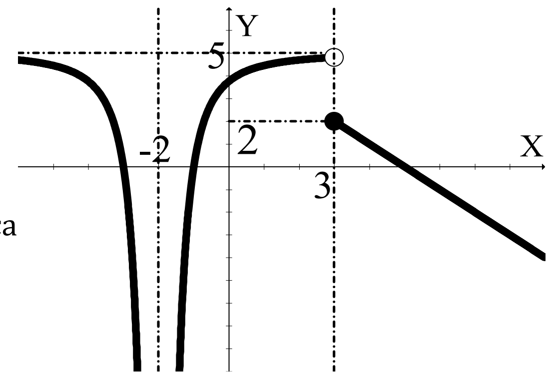
d) El tipo de discontinuidad que tiene la función en x = −3 e) f(−3) f) f(4)

g) $\lim\limits_{x\to-3} f(x)$ h) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$ i) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$

Resolución

a) 2 b) +∞ c) A.V. : x = **3** ; A.H.: y = 2 d) evitable e) 2

f) 3 g) 3 h) +∞ i) 3

3) Sea f la función dada por la gráfica  Se pide:

a) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ b) Indicar el tipo de discontinuidad que tiene en x = – 2

c) Escribir la ecuación de la asíntota vertical d) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$ e) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$

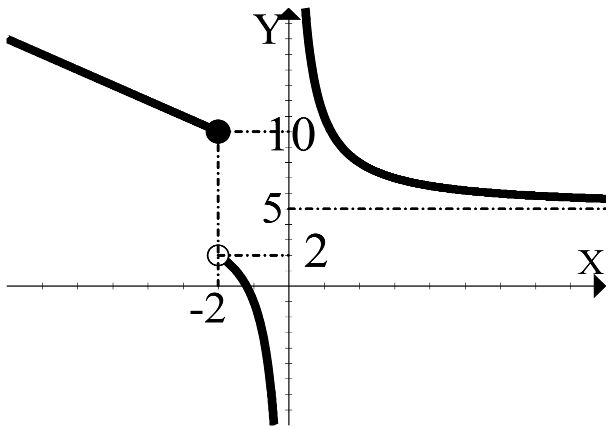
f) Indicar el tipo de discontinuidad que tiene en x = 3 g) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)$ h) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

i) Escribir la ecuación de la asíntota horizontal j) f(– 2)

Resolución

a) $-\infty$ b) asintótica o de salto infinito c) A.V. : x = –2 d) 5 e) 2

f) de salto finito g) $-\infty$ h) 5 i) A.H.: y = 5 j) no existe

4) Considera la función f cuya gráfica es  Determina:

a) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ c) Escribir la ecuación de la asíntota horizontal d) $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$

e) $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$ f) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ g) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ h) La ecuación de su asíntota vertical

i) El tipo de discontinuidad que tiene la función en x = – 2

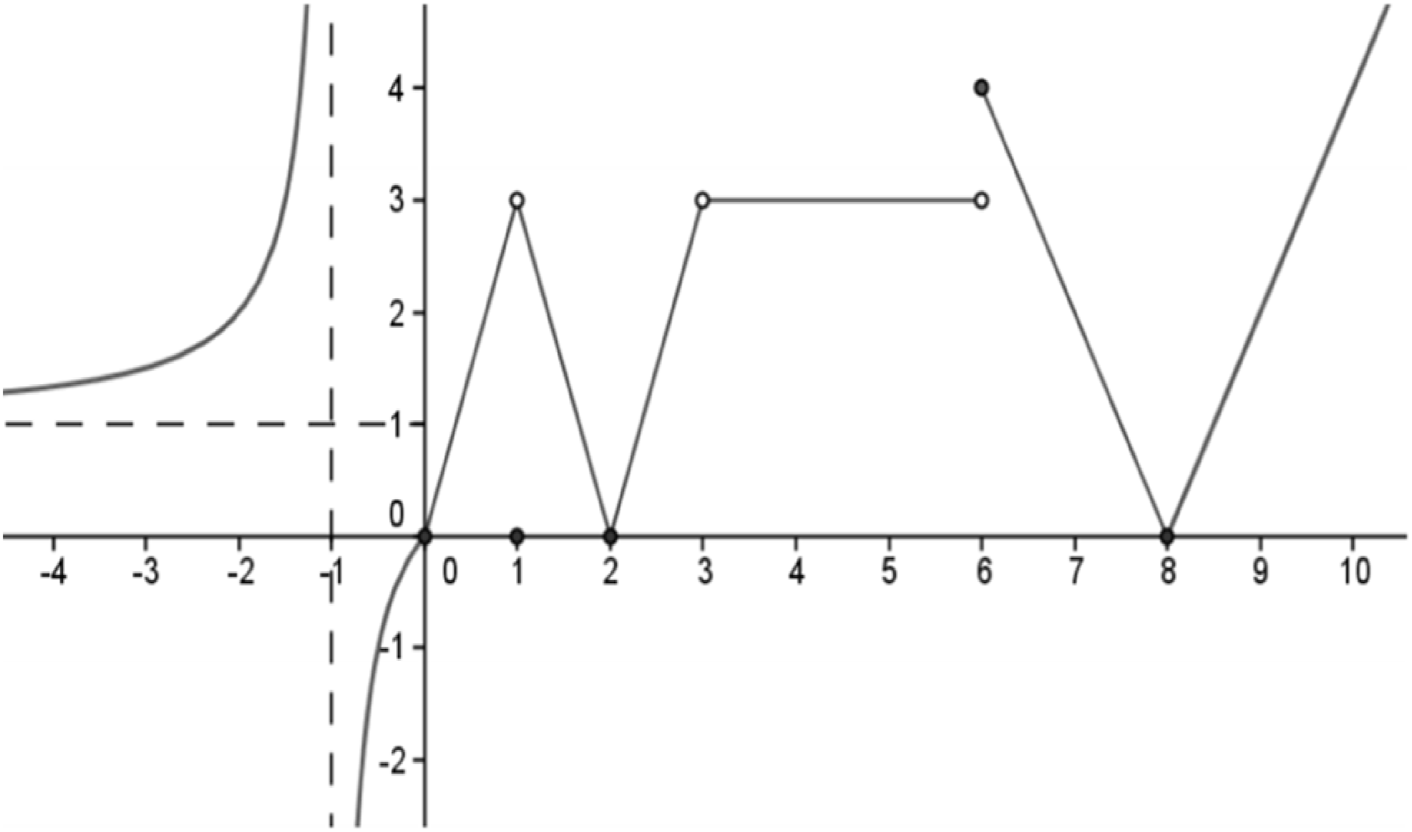
j) El tipo de discontinuidad que tiene la función en x = 0

Resolución

a) 5 b) $+\infty$ c) A.H. : y = 5 d) 10 e) 2

f) $-\infty$ g) $+\infty$ h) A.V. : x = 0 i) de salto finito j) de salto infinito

5) Sea f la función dada por la gráfica.



Se pide:

a) $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$ c) Indicar el tipo de discontinuidad que tiene en $x = 1$

d) Escribir la ecuación de la asíntota vertical e) $\lim\limits_{x\to 6^-} f(x)$ f) $\lim\limits_{x\to 6^+} f(x)$ g) $\lim\limits_{x\to 6} f(x)$ h) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

i) Indicar el tipo de discontinuidad que tiene en $x = 6$ j) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ k) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

l) Escribir la ecuación de la asíntota horizontal m) $f(-1)$

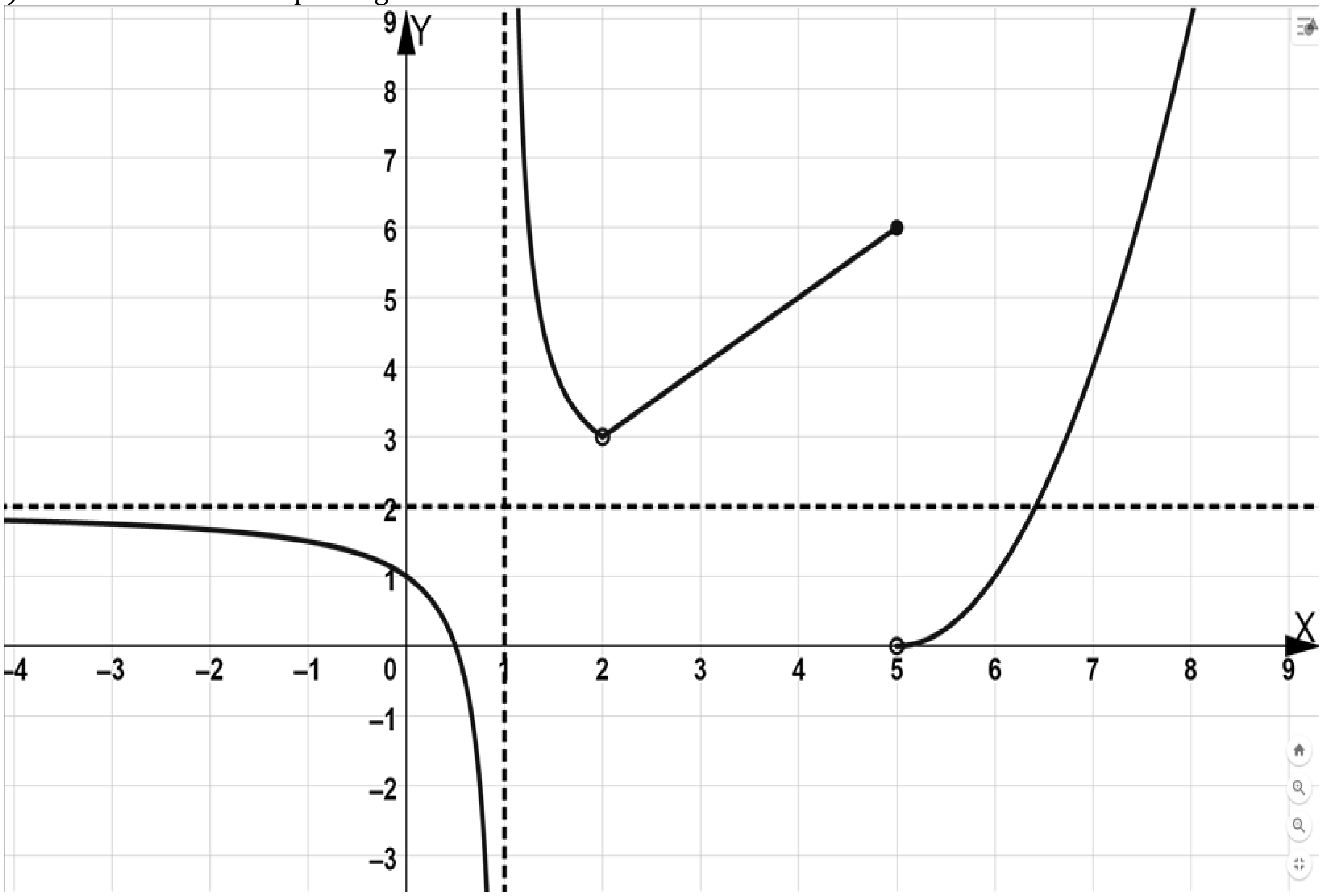
n) Indicar el tipo de discontinuidad que tiene en $x = -1$ ñ) Indicar si es o no continua en $x = 2$

Resolución

a) $-\infty$ b) $+\infty$ c) evitable d) A.V. : $x = -1$ e) 3 f) 4 g) no existe h) 3

i) de salto finito j) $+\infty$ k) 1 l) A.H. : $y = 1$ m) no existe n) de salto infinito ñ) continua

6) Sea f la función dada por la gráfica.



Se pide:

a) $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ b) $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ c) Indicar el tipo de discontinuidad que tiene en $x = 2$

d) Escribir la ecuación de la asíntota vertical e) $\lim_{x\to 5^-} f(x)$ f) $\lim_{x\to 5^+} f(x)$

g) $\lim_{x\to 5} f(x)$ h) $\lim_{x\to 4} f(x)$

i) Indicar el tipo de discontinuidad que tiene en $x = 5$ j) $\lim_{x\to +\infty} f(x)$

k) $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ l) Escribir la ecuación de la asíntota horizontal en $-\infty$ m) $f(2)$

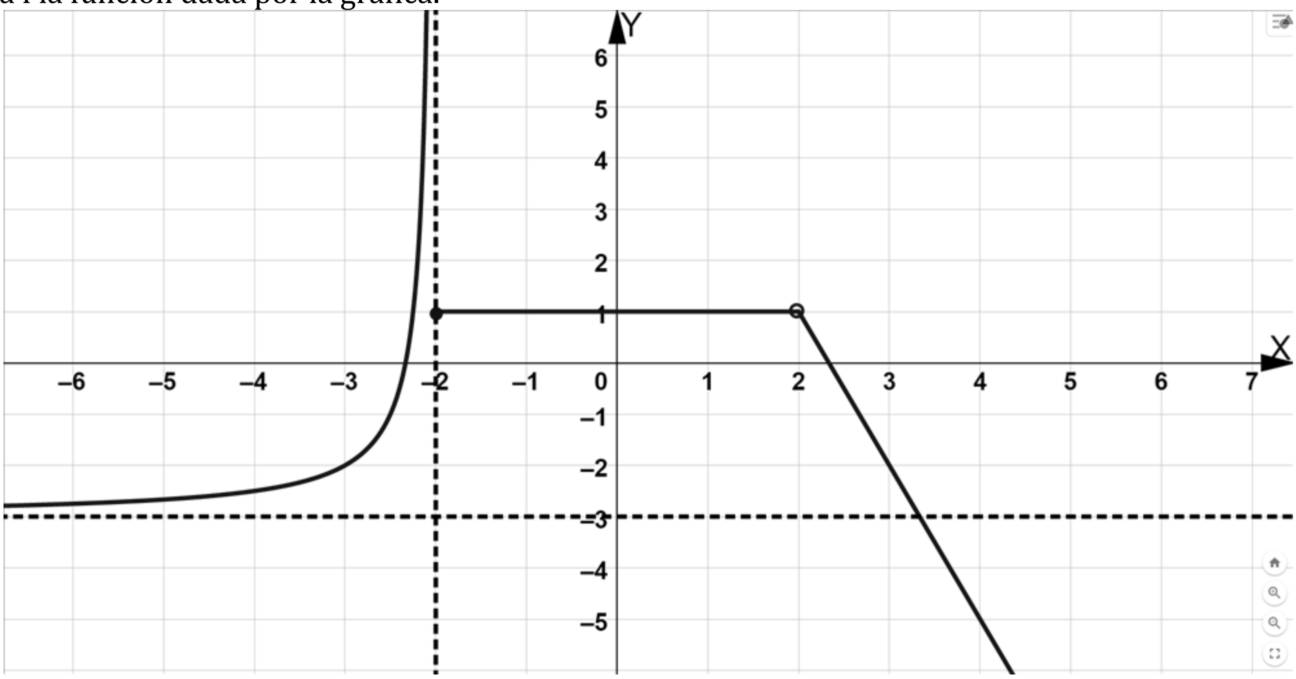
n) Indicar el tipo de discontinuidad que tiene en $x = 1$ ñ) $f(5)$

Resolución

a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) evitable d) A.V. : $x = 1$ e) 6 f) 0 g) no existe h) 5

i) de salto finito j) $+\infty$ k) 2 l) A.H. : $y = 2$ m) no existe n) de salto finito ñ) 6

7) Sea f la función dada por la gráfica.



Se pide:

a) $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$ c) Indicar el tipo de discontinuidad que tiene en $x = 2$

d) Escribir la ecuación de la asíntota vertical e) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ f) $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$

g) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ h) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ i) Escribir la ecuación de la asíntota horizontal en $-\infty$ j) $f(2)$

k) Indicar el tipo de discontinuidad que tiene en $x = -2$ l) $f(0)$

Resolución

a) 1 b) $+\infty$ c) evitable d) A.V. : $x = -2$ e) 1 f) 5 g) $-\infty$

h) -3 i) A.H. : $y = -3$ j) no existe k) de salto finito l) 1

Propiedades de los límites en el infinito, reglas para el cálculo de límites, indeterminaciones

Si dos funciones f(x) y g(x) tienen límite cuando x tiende a $\pm\infty$ entonces:

$$\lim_{x\to \infty} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to \infty} f(x) \pm \lim_{x\to \infty} g(x)$$

$$\lim_{x\to \infty} f(x).g(x) = \lim_{x\to \infty} f(x) \,.\, \lim_{x\to \infty} g(x)$$

$$\lim_{x\to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to \infty} f(x)}{\lim\limits_{x\to \infty} g(x)}$$

Si $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = L$, $\lim\limits_{x\to \infty} g(x) = \infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to \infty} f(x) + g(x) = L + \infty$. Este resultado se expresa así: $\boxed{L + \infty = \infty}$

También se cumplen las siguientes reglas:

$\boxed{L-\infty=-\infty}$ $\boxed{\infty+\infty=\infty}$ $\boxed{-\infty-\infty=-\infty}$ $\boxed{\infty-\infty\rightarrow \text{Indeterminación}}$

$\boxed{\infty.\infty=\infty}$ $\boxed{L.\infty=\begin{cases}\infty, & \text{si } L>0\\ -\infty, & \text{si } L<0\end{cases}}$ $\boxed{0.\infty\rightarrow \text{Indeterminación}}$

$\boxed{\frac{L}{\infty}=0}$ $\boxed{\frac{0}{\infty}=0}$ $\boxed{\frac{\infty}{0}=\pm\infty \ \textbf{Indeterminación}}$ $\boxed{\frac{L}{0}=\pm\infty \ \textbf{Indeterminación}}$ $\boxed{\frac{0}{0}\rightarrow \text{Indeterminación}}$

$\boxed{\frac{\infty}{\infty}\rightarrow \text{Indeterminación}}$

$\boxed{\text{Si } L>0,\ L^{\infty}=\begin{cases}\infty, & \text{si } L>1\\ 0, & \text{si } L<1\end{cases}}$ $\boxed{\infty^{\infty}=\infty}$ $\boxed{0^{\infty}=0}$

$\boxed{\infty^{0}\rightarrow \text{Indeterminación}}$ $\boxed{0^{0}\rightarrow \text{Indeterminación}}$ $\boxed{1^{\infty}\rightarrow \text{Indeterminación}}$

Límites de funciones polinómicas

Observemos primero que si $n>0$, $\lim\limits_{x\to\infty} x^n=\infty$ y $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a}{x^n}=\frac{a}{\infty}=0$.

Entonces, si tenemos que calcular el límite en ∞ de un polinomio, por ejemplo, $p(x)=ax^2+bx+c$:

$$\text{Como } ax^2+bx+c=\frac{ax^2+bx+c}{x^2}.x^2=(a+\underbrace{\frac{b}{x}}_{\text{tiende a 0 en}\infty}+\underbrace{\frac{c}{x^2}}_{\text{tiende a 0 en}\infty}).x^2\approx ax^2\Rightarrow \lim_{x\to\infty}(ax^2+bx+c)=\lim_{x\to\infty}(ax^2)$$

Este resultado es válido para cualquier polinomio.

Es decir, si $p(x)$ es un polinomio, $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} p(x)=\lim\limits_{x\to\infty} ax^n, \text{ siendo } ax^n \text{ el término de mayor grado de } p(x)}$

Para calcular $\lim\limits_{x\to-\infty} p(x)$ también se puede usar la regla anterior

Ejemplos:

$\lim\limits_{x\to\infty}(-7x^3+3x-2)=\lim\limits_{x\to\infty}(-7x^3)=-7.\infty=-\infty$ $\lim\limits_{x\to\infty}(x^4-5x^2+x-4)=\lim\limits_{x\to\infty}x^4=\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^5+7x^2+1)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^5)=(-2).(-\infty)^5=-2.(-\infty)=\infty$

Por tanto, las funciones polinómicas no tiene asíntotas horizontales porque su límite es ∞ ó $-\infty$.

Actividad resuelta

Calcula:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}(4+2x-3x^2)$ **Resolución** $\lim\limits_{x\to\infty}(-3x^2)=-3.\infty=\boxed{-\infty}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-4x^3-5x^2+x-3)$ **Resolución** $\lim\limits_{x\to-\infty}(-4x^3)=-4.(-\infty)=\boxed{\infty}$

Límites de funciones racionales

Sea $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ una función racional y sea ax^m el término de mayor grado de $p(x)$ y bx^n el de mayor grado de $q(x)$. Entonces, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{p(x)}{q(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to+\infty}p(x)}{\lim\limits_{x\to+\infty}q(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to+\infty}ax^m}{\lim\limits_{x\to+\infty}bx^n}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ax^m}{bx^n}\Rightarrow\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{p(x)}{q(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ax^m}{bx^n}}$

Los casos que se pueden dar son:

1) $\boxed{\text{Si } m>n,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{p(x)}{q(x)}=\pm\infty}$

Ejemplos

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^5-2x^3-1}{4x^4-7x+9}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^5}{4x^4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{4}x=\frac{3}{4}.(+\infty)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^7+2x}{3x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^7}{3x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{3}x^5=\frac{-2}{3}.(+\infty)=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4-3x+1}{2x-3x^3-4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4}{-3x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{3}=\boxed{\infty}$$

En este caso el límite es $+\infty$ ó $-\infty$ y no hay asíntota horizontal.

2) $\boxed{\text{Si } m=n,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{p(x)}{q(x)}=\dfrac{a}{b}}$

Ejemplos

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{6x^3-x^2+3}{-2x^3+4x-7}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x^3}{-2x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6}{-2}=-3$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^9-x^4+1}{7x^9+x-3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^9}{7x^9}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{7}=\frac{5}{7}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2-4x-9}{(3x-5)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2}{9x^2}=\boxed{\frac{5}{9}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+2x-3x^3}{x^2-x^3-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{-3x^3}{-x^3}=\boxed{3}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x-5}{2x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x-5}{2x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x}{2x}=\frac{6}{2}=3$$

En este caso el límite es $\dfrac{a}{b}$ y la asíntota horizontal es $A.H.:\ y=\dfrac{a}{b}$

3) $\boxed{\text{Si } m < n, \ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = 0}$

Ejemplos

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - x^2}{-6x^8 + 2x - 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{-6x^8} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{-6x^5} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{5}{4x - 3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{5}{4x} = \frac{5}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{(4x - 1)^2}{x^3 + 2x^2 - 3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{16x^2}{x^3} = \boxed{0}$$

En este caso el límite es 0 y la asíntota horizontal es $A.H.: y = 0$

También se puede hallar el límite de una función racional dividiendo todos los términos de la fracción entre la mayor potencia de x que aparezca en la fracción, aunque es un proceso bastante más largo.

Para calcular $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{p(x)}{q(x)}$ también se pueden usar las mismas reglas.

Resumiendo

$$\lim_{x \to \infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \begin{cases} \pm\infty, \text{ si } m > n \\ \frac{a}{b}, \text{ si } m = n \\ 0, \text{ si } m < n \end{cases}$$, siendo ax^m el término de mayor grado de p(x) y bx^n el de mayor grado de q(x).

También se puede hallar el límite de una función racional dividiendo todos los términos de la fracción entre la mayor potencia de x que aparezca en la misma.

Actividades resueltas

1) Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{2x^6 + 1}{x + 1} - \frac{4x^6 - 5x^2 + 1}{3x + 3} \right)$ **Resolución** $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{6x^6 + 3 - 4x^6 + 5x^2 - 1}{3x + 3} \right) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{2x^6 + 2 + 5x^2}{3x + 3} \right) = \infty$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 + 3}{x - 1} - \frac{x^3}{x - 2} \right)$

Resolución

$$\infty - \infty \text{ Indet.} \Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{(x^2 + 3)(x - 2) - x^3(x - 1)}{(x - 1)(x - 2)} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 3x - 6 - x^4 + x^3}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \to \infty} \frac{-x^4}{x^2} = \boxed{-\infty}$$

2) La cantidad, C, que una entidad bancaria dedica a créditos depende de su liquidez, x, según la función

$$C(x)=\begin{cases}\dfrac{150+5x}{100}, & \text{si } 10\le x\le 50\\[2mm] \dfrac{200+10x}{25+3x}, & \text{si } x>50\end{cases}$$

donde C y x están expresadas en miles de euros. Calcula la asíntota horizontal e interprétala en el contexto del problema.

Resolución

$$Como \lim_{x\to\infty} C(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{200+10x}{25+3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{10x}{3x}=\frac{10}{3}\to La\ asíntota\ horizontal\ en\ \infty\ es\ \boxed{A.H.\text{ en } \infty : y=\frac{10}{3}}$$

Interpretación: cuando la liquidez tiende a ser infinitamente grande la cantidad dedicada a créditos tiende a 10/3 ≈ 3333 €

3) Sea f(t) el porcentaje de ocupación de un determinado complejo hotelero en función del tiempo t, medido en meses, transcurrido desde su inauguración: $f(t)=\begin{cases}-\dfrac{5}{2}t^2+20t, & \text{si } 0\le t\le 6\\[2mm] \dfrac{90t-240}{t+4}, & \text{si } t>6\end{cases}$

a) ¿Es continua la función en t = 6?

Resolución

$$\text{Como}\begin{cases}\lim\limits_{t\to 6^-} f(t)=\lim\limits_{t\to 6}(-\dfrac{5}{2}t^2+20t)=-\dfrac{5}{2}6^2+20.6=30\\[2mm] \lim\limits_{t\to 6^+} f(x)=\lim\limits_{t\to 6}\dfrac{90t-240}{t+4}=\dfrac{90.6-240}{6+4}=30\end{cases}\Rightarrow \text{Es continua en } t=6$$

b) ¿Llegaría en algún momento a estar completo en caso de que estuviese abierto indefinidamente?

Resolución

$$\text{Como } \lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{90t-240}{t+4}=90\Rightarrow \text{Estará casi al 90\%}\Rightarrow \text{No estará completo}$$

Límites de funciones con radicales

Veamos cómo se pueden hallar límites con funciones con radicales.

Actividad resuelta

Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\dfrac{2+9x}{x-10}}$ **Resolución** $\sqrt{\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+9x}{x-10}}=\sqrt{9}=3$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x+x^2}}{2+5x^2}$

Resolución

Como se considera grado numerador $2/2=1\Rightarrow$ grado numerador $<$ grado denominador $\Rightarrow$ El límite vale 0

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^4+1}}$

Resolución

Se considera grado denominador $= 4/2 = 2 \Rightarrow$ numerador y denominador tienen igual grado

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{3x}{x^2}-\frac{4}{x^2}}{\frac{\sqrt{x^4+1}}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2-\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}}{\sqrt{\frac{x^4}{x^4}+\frac{1}{x^4}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2-\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}} = 2$$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x+7})$

Resolución

$$\infty-\infty \text{ Indet.} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x+7}).(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x+7})}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x+7}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x-(x+7)}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x+7}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-7}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x+7}} = \infty$$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x(x+1)}-x\right)$

Resolución

<u>Solución</u>: $\infty-\infty$ Indet. $\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(\sqrt{x^2+x}-x).(\sqrt{x^2+x}+x)}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} =$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+x}}{x}+\frac{x}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}}+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} = \frac{1}{2}$$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-\sqrt{x^2-1})$

Resolución

$$\infty-\infty \text{ Indet.} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{(x-\sqrt{x^2-1}).(x+\sqrt{x^2-1})}{x+\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-(x^2-1)}{x+\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} = 0$$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^3-x}-\sqrt{x^3-2x^2}\right)$

Resolución

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^3-x}-\sqrt{x^3-2x^2}\right)\xrightarrow[\cdot\left(\sqrt{x^3-x}+\sqrt{x^3-2x^2}\right)]{\cdot\left(\sqrt{x^3-x}+\sqrt{x^3-2x^2}\right)}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^3-x}-\sqrt{x^3-2x^2}\right).\left(\sqrt{x^3-x}+\sqrt{x^3-2x^2}\right)}{\sqrt{x^3-x}+\sqrt{x^3-2x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-x-(x^3-2x^2)}{\sqrt{x^3-x}+\sqrt{x^3-2x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-x}{\sqrt{x^3-x}+\sqrt{x^3-2x^2}}$$

El grado del numerador es 2. El mayor grado de los polinomios del denominador es 3, pero al estar dentro de una raíz cuadrada el grado que se considera es 3/2.

Para hallar el límite vamos a dividir todo entre x^2 que es la potencia con mayor exponente.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}}{\frac{\sqrt{x^3-x}}{x^2}+\frac{\sqrt{x^3-2x^2}}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{x^3-x}{x^4}}+\sqrt{\frac{x^3-2x^2}{x^4}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}}+\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}}=\frac{2}{0^+}=+\infty$$

Para calcular el límite cuando $x\to-\infty$ también se pueden usar las mismas reglas.

<u>Cálculo de asíntotas horizontales a partir de la fórmula</u>

Se dice que una función tiene una asíntota horizontal, A.H., en $+\infty$ si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$, siendo $L\in\mathbb{R}$.

Análogamente se puede hablar de asíntota horizontal en $-\infty$ si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$.

- Las funciones polinómicas no tienen asíntotas horizontales porque $\lim\limits_{x\to\pm\infty} p(x)=\pm\infty$

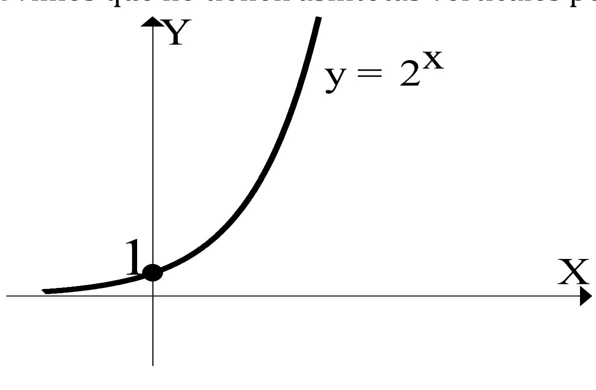
- Las funciones racionales sólo tienen asíntotas horizontales cuando $m\le n$.

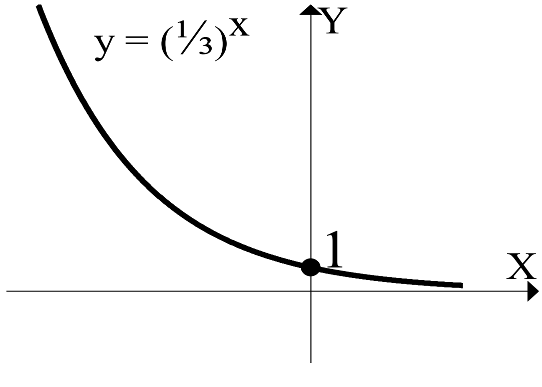
Si $m<n$, A.H. : $y=0$ (el eje X)

Si $m=n$, A.H. : $y=\frac{a}{b}$ (a, b eran los coeficientes de los términos de mayor grado de los polinomios)

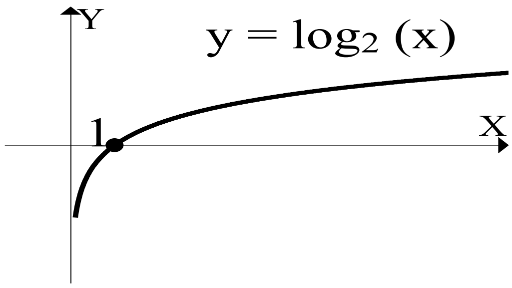
Las funciones exponenciales de base "a" sólo tienen una asíntota horizontal, que es el eje X (de ecuación $y=0$) ya que $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=0$, cuando $a>1$ y $\lim\limits_{x\to\infty} a^x=0$, cuando $0<a<1$.

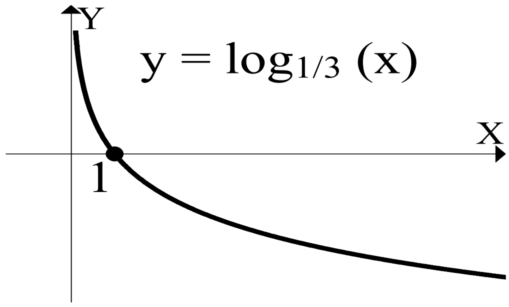
Ya vimos que no tienen asíntotas verticales porque son funciones continuas:





También vimos que las funciones logarítmicas de base “a” tienen una asíntota vertical, que es el eje Y (de ecuación x = 0) ya que $\lim_{x \to 0} \log_a x = \pm\infty$. No tiene asíntotas horizontales:





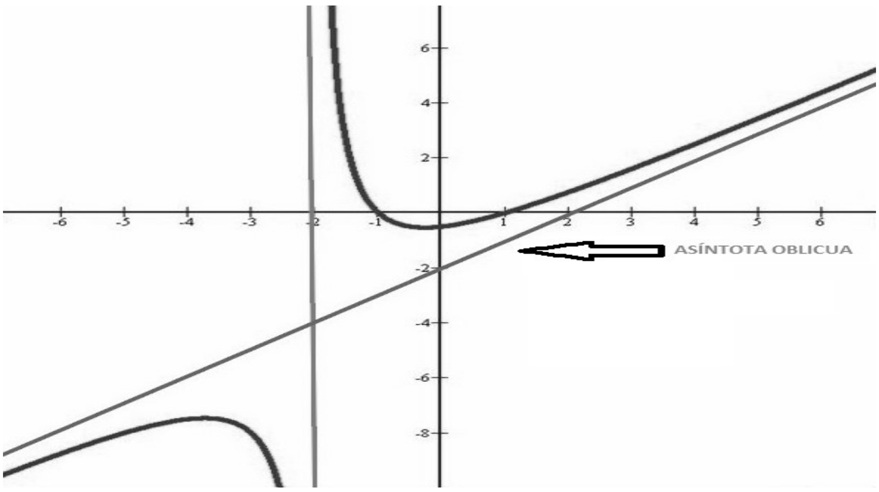
Asíntotas oblicuas, cálculo de asíntotas oblicuas de las funciones racionales

Se dice que una función f(x) tiene una asíntota oblicua, A.O.: y = mx +n, en +∞ si se cumple que cuando x →+∞ la gráfica de f(x) se aproxima cada vez más a la recta y = mx + n.

Es decir, $\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - (mx + n) \right] = 0$

De forma análoga se puede hablar de asíntota oblicua en −∞.

Por ejemplo, la recta que se indica en el siguiente dibujo es una asíntota de la gráfica de la función en ∞ y en −∞.



Las funciones polinómicas no tienen asíntotas oblicuas salvo cuando el grado es 1: la propia función es la A.O.

En las funciones racionales, si m es una unidad mayor que n, entonces hay una asíntota oblicua en +∞ la recta de ecuación A.O. : y = c(x), siendo c(x) el cociente de la división p(x) : q(x)

Demostración: Sea $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \Rightarrow f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$ (forma mixta de la fracción)

Entonces, $\lim_{x \to \infty} \left[f(x) - c(x) \right] = \lim_{x \to \infty} \frac{r(x)}{q(x)} = 0$, pues el grado de r(x) < grado de q(x)

Ejemplo: Calcula la asíntota oblicua de la función racional $f(x) = \frac{6x^2 - 5x + 1}{2x - 7}$

$$\begin{array}{l|l} 6x^2 - 5x + 1 & 2x - 7 \\ \hline r = 57 & 3x + 8 = c(x) \end{array}$$

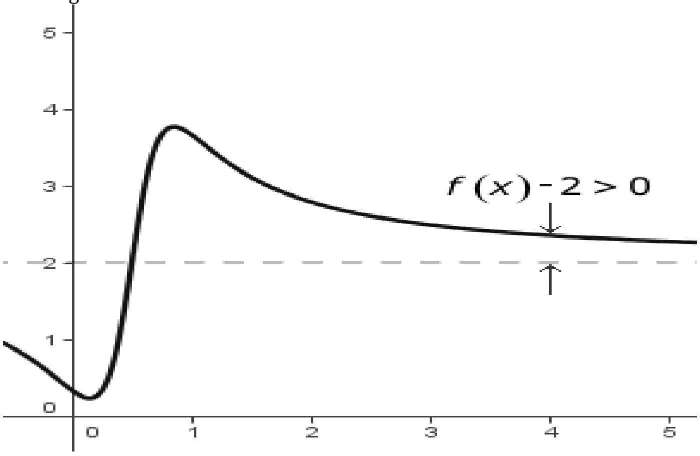
. Por tanto, la asíntota oblicua es A.O. : y = 3x + 8

Análogamente se hace en −∞.

Posición de la gráfica respecto de la asíntota horizontal u oblicua

- Si la asíntota es vertical se calculan los límites laterales.

- Si la asíntota es horizontal u oblicua, la gráfica está por encima de la asíntota en $+\infty$ cuando $y_{\text{gráfica}} > y_{\text{asíntota}}$. O sea, $y_{\text{gráfica}} - y_{\text{asíntota}} > 0$



La gráfica estará por debajo de la asíntota en $+\infty$ cuando $y_{\text{gráfica}} < y_{\text{asíntota}}$. O sea, $y_{\text{gráfica}} - y_{\text{asíntota}} < 0$

El mismo razonamiento se puede hacer en $-\infty$.

Actividades resueltas

1) Estudia y halla todas las asíntotas de la gráfica de la función f, la posición de la gráfica respecto de las asíntotas y haz una interpretación gráfica en los siguientes casos:

a) $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x^2-4}$

Resolución

$x^2 - 4 = 0 \leftrightarrow x = 2,\ x = -2;$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \frac{2^2+3}{2^2-4} = \frac{7}{0} = \pm\infty \ ; \ \text{A.V}: x = 2 \ ; \quad \lim_{x\to 2^-} f(x) = \frac{7}{0^-} = -\infty \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x) = \frac{7}{0^+} = +\infty$$

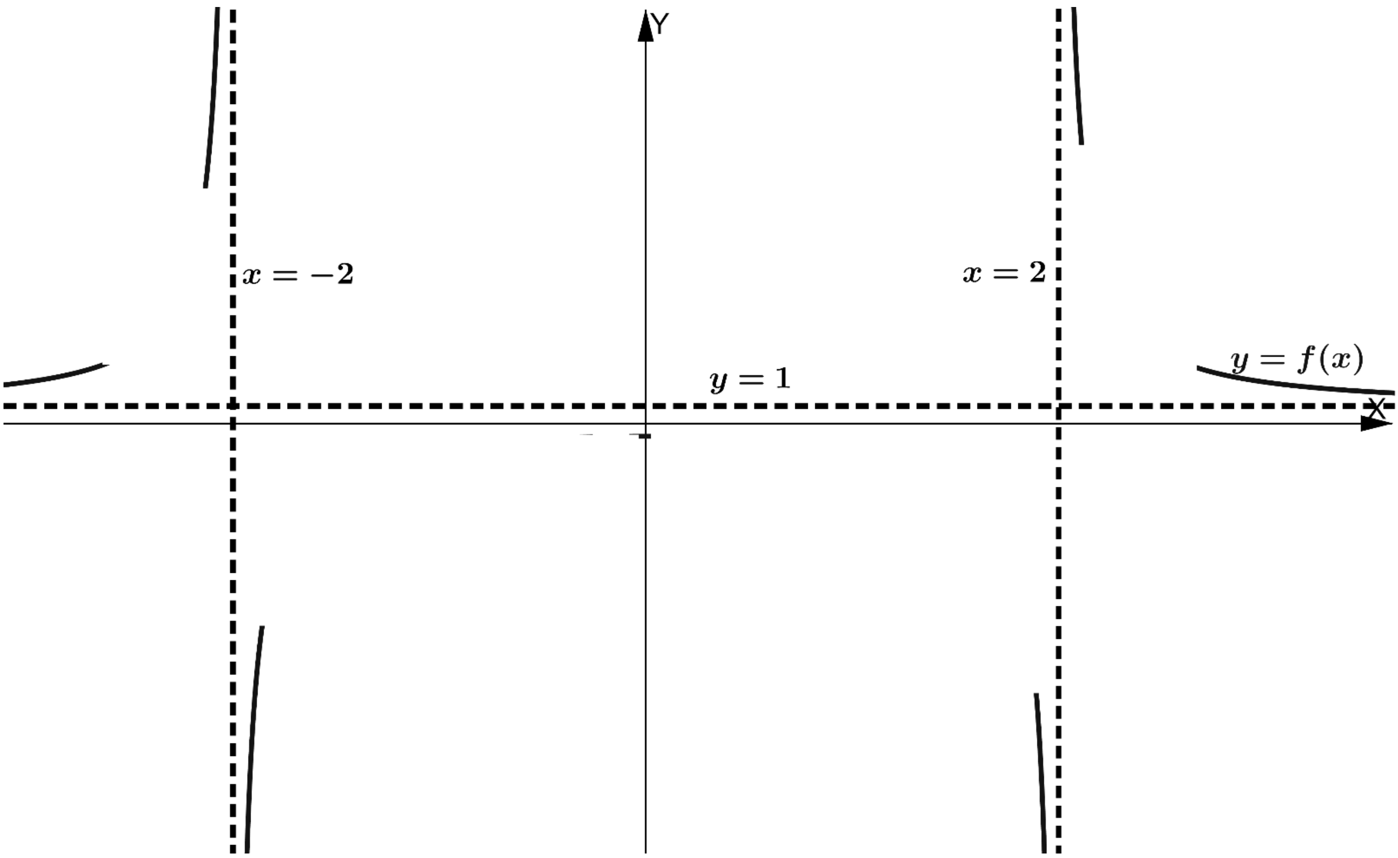
$$\lim_{x\to -2} f(x) = \frac{(-2)^2+3}{(-2)^2-4} = \frac{7}{0} = \pm\infty \ ; \ \text{A.V}: x = -2 \ ; \quad \lim_{x\to -2^-} f(x) = \frac{7}{0^+} = +\infty \qquad \lim_{x\to -2^+} f(x) = \frac{7}{0^-} = -\infty$$

Como el grado del numerador es igual que el del denominador hay una asíntota horizontal en $\pm\infty$:

$$\begin{array}{l|l} x^2+3 & x^2-4 \\ \hline r = 7 & 1 = c(x) \end{array} \qquad f(x) = \frac{x^2+3}{x^2-4} = 1 + \frac{1}{x^2-4} \ ; \text{A.H.}: y = 1$$

$$y_{\text{gráfica}} - y_{\text{asíntota}} = \frac{x^2+3}{x^2-4} - 1 = \frac{1}{x^2-4} \quad \begin{array}{l} \text{Es} > 0, \text{ si } x \to +\infty \\ \text{Es} > 0, \text{ si } x \to -\infty \end{array}$$

Luego, la gráfica está por encima de la asíntota en $+\infty$ y en $-\infty$



b) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$

<u>Resolución</u>

$x^2-1=0 \leftrightarrow x=1,\ x=-1;$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\frac{1^3}{1^2-1}=\frac{1}{0}=\pm\infty\ ;\ \text{A.V}: x=1\ ;\quad \lim_{x\to 1^-} f(x)=\frac{1}{0^-}=-\infty \quad \lim_{x\to 1^+} f(x)=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

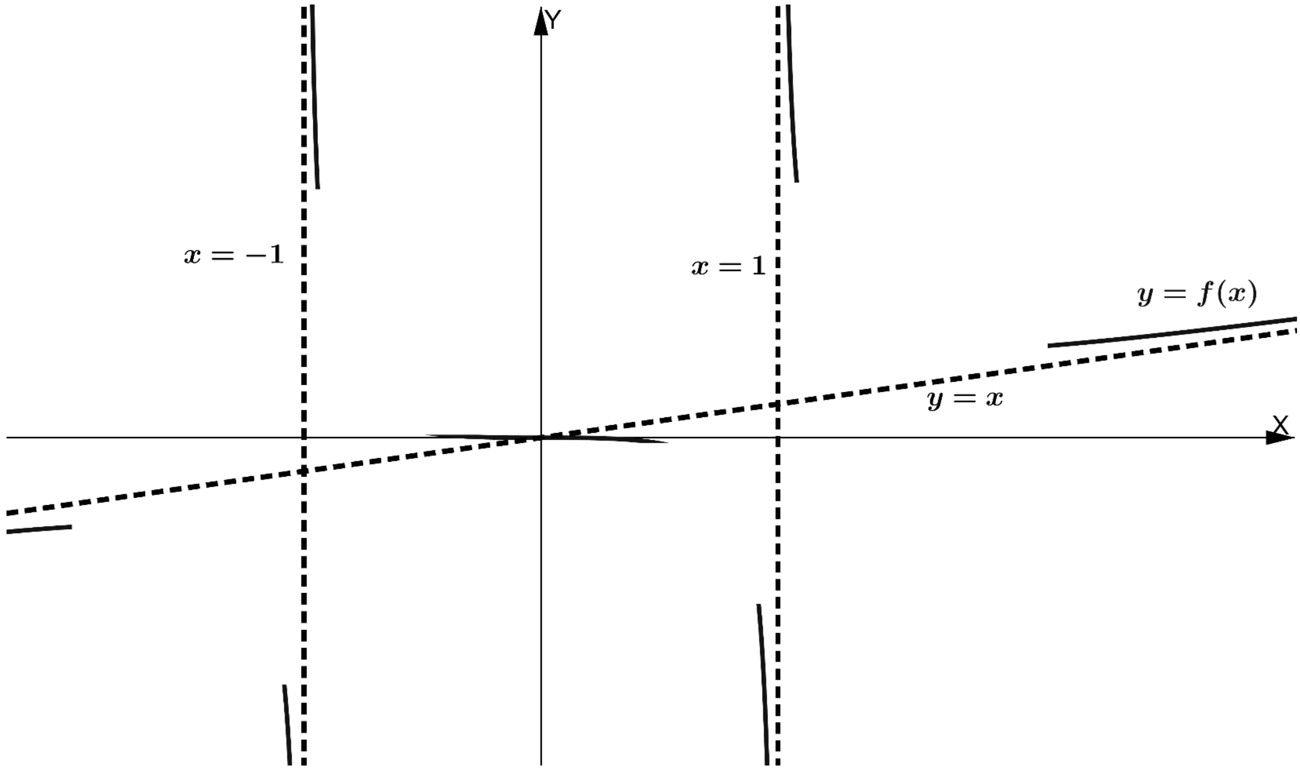
$$\lim_{x\to -1} f(x)=\frac{(-1)^3}{(-1)^2-1}=\frac{-1}{0}=\pm\infty\ ;\ \text{A.V}: x=-1\ ;\quad \lim_{x\to -1^-} f(x)=\frac{-1}{0^+}=-\infty \quad \lim_{x\to -1^+} f(x)=\frac{-1}{0^-}=+\infty$$

Como el grado del numerador es 1 más que el del denominador hay una asíntota oblicua en $\pm\infty$:

$$\begin{array}{l|l} x^3 & x^2-1 \\ \hline r=x & x=c(x) \end{array} \quad f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}=x+\frac{x}{x^2-1}\ ;\text{A.O.}: y=x$$

$$y_{\text{gráfica}}-y_{\text{asíntota}}=\frac{x^3}{x^2-1}-x=\frac{x}{x^2-1}\quad \begin{array}{l}\text{Es}>0,\ \text{si } x\to+\infty \\ \text{Es}<0,\ \text{si } x\to-\infty\end{array}$$

Luego, la gráfica está por encima de la asíntota en $+\infty$ y por debajo en $-\infty$



2) Halla las asíntotas de la función $f(x)=\dfrac{6x-5}{3x-3}$, la posición de la gráfica respecto de ellas y, usando que la función no tiene extremos (o sea máximos ni mínimos), dibuja de forma aproximada su gráfica

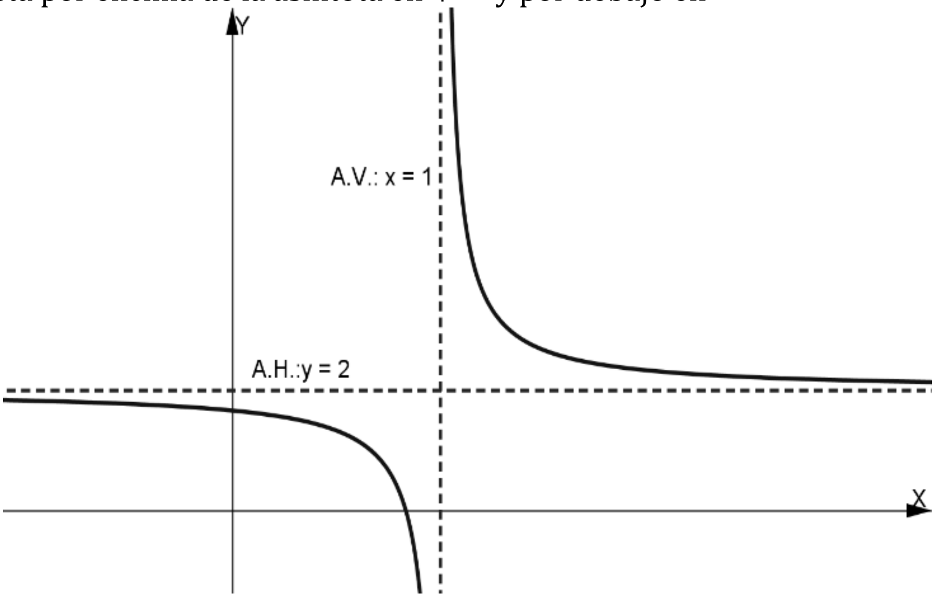
Resolución

Observa que, D(f) = R – {1}. Como $\begin{cases}\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\dfrac{1}{0^-}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\dfrac{1}{0^+}=\infty\end{cases}$ $\Rightarrow$ la asíntota vertical es A.V.: x = 1

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\dfrac{6}{3}=2$ $\Rightarrow$la asíntota horizontal en ±∞ es A.H.: y =2.

$y_{\text{gráfica}}-y_{\text{asíntota}}=\dfrac{6x-5}{3x-3}-2=\dfrac{6x-5-2(3x-3)}{3x-3}=\dfrac{1}{3x-3}\Rightarrow\begin{matrix}\text{Es} > 0\text{, cuando } x\to\infty\\ \text{Es} < 0\text{, cuando } x\to-\infty\end{matrix}$

Luego, la gráfica está por encima de la asíntota en $+\infty$ y por debajo en $-\infty$



3) Determina todas las asíntotas de las siguientes funciones y la posición de la gráfica respecto de ellas:

a) $f(x)=\dfrac{6x-7}{4x-8}$

Resolución

Solución: $4x-8=0 \Leftrightarrow x=2$; $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\dfrac{5}{0}=\pm\infty \Rightarrow$ A.V. : $x=2$. Además $\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\dfrac{5}{0^-}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\dfrac{5}{0^+}=\infty\end{array}$

$\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x)=\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2}\Rightarrow$ A.H. : $y=\dfrac{3}{2}$.

Además, $y_{\text{gráfica}}-y_{\text{asíntota}}=\dfrac{6x-7}{4x-8}-\dfrac{3}{2}=\dfrac{2(6x-7)-3(4x-8)}{2(4x-8)}=\dfrac{10}{8x-16}\Rightarrow \begin{array}{l}\text{Es}>0\text{, cuando } x\to+\infty\\ \text{Es}<0\text{, cuando } x\to-\infty\end{array}$

Luego, la gráfica está encima de la asíntota en $+\infty$ y está por debajo de la asíntota en $-\infty$

b) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+2x}$

Resolución

Solución: $x^2+2x=0 \Leftrightarrow x=0,\ x=-2$; $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\dfrac{1}{0}=\pm\infty \Rightarrow$ A.V. : $x=0$. Además, $\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\dfrac{1}{0^-}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\dfrac{1}{0^+}=\infty\end{array}$

$\lim\limits_{x\to -2} f(x)=\dfrac{5}{0}=\pm\infty \Rightarrow$ A.V. : $x=-2$. Además, $\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\dfrac{5}{0^+}=\infty\\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\dfrac{5}{0^-}=-\infty\end{array}$

$\lim\limits_{x\to \infty} f(x)=\dfrac{1}{1}=1\Rightarrow$ A.H. : $y=1$.

Además, $y_{\text{gráfica}}-y_{\text{asíntota}}=\dfrac{x^2+1}{x^2+2x}-1=\dfrac{x^2+1-(x^2+2x)}{x^2+2x}=\dfrac{1-2x}{x^2+2x}\Rightarrow \begin{array}{l}\text{Es}<0\text{, cuando } x\to\infty\\ \text{Es}>0\text{, cuando } x\to-\infty\end{array}$

Luego, la gráfica está debajo de la asíntota en $+\infty$ y está encima de la asíntota en $-\infty$

c) $f(x)=\dfrac{x^2+5x}{x-3}$

Resolución

$x-3=0 \Leftrightarrow x=3$; $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\dfrac{24}{0}=\pm\infty \Rightarrow$ A.V. : $x=3$. Además $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\dfrac{24}{0^-}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\dfrac{24}{0^+}=\infty$

Como el grado del numerador es 1 más que el del denominador, la función racional tiene una asíntota oblicua.

La calculamos: $\begin{array}{l|l} x^2+5x & x-3 \\ \hline r=24 & x+8=c(x) \end{array}$. Por tanto, la asíntota oblicua es A.O. : $y = x + 8$, $f(x)=x+8+\dfrac{24}{x-3}$.

$y_{\text{gráfica}} - y_{\text{asíntota}} = =\dfrac{24}{x-3} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Es} > 0\text{, cuando } x\to\infty \\ \text{Es} < 0\text{, cuando } x\to-\infty \end{array}$

Luego, la gráfica está encima de la asíntota en $+\infty$ y está por debajo de la asíntota en $-\infty$

d) $f(x)=\dfrac{2x^2-1}{x}$

Resolución

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\dfrac{-1}{0}=\pm\infty \Rightarrow$ A.V. : $x=0$. Además, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\dfrac{-1}{0^-}=\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\dfrac{-1}{0^+}=-\infty$

Como el grado del numerador es 1 más que el del denominador, la función racional tiene una asíntota oblicua.

La calculamos: $\begin{array}{l|l} 2x^2-1 & x \\ \hline r=-1 & 2x=c(x) \end{array}$. Por tanto, la asíntota oblicua es A.O. : $y = 2x$, $f(x)=2x+\dfrac{-1}{x}$.

$y_{\text{gráfica}} - y_{\text{asíntota}} = =\dfrac{-1}{x} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Es} < 0\text{, cuando } x\to\infty \\ \text{Es} > 0\text{, cuando } x\to-\infty \end{array}$

Luego, la gráfica está debajo de la asíntota en $+\infty$ y está encima de la asíntota en $-\infty$

e) $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x+1}$

Resolución

$x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$; $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\dfrac{0}{0}$Indeterm. $\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & & -1 & 1 & -1 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & \underline{|0} \end{array}$ $\begin{array}{r|rr} & 1 & 1 \\ -1 & & -1 \\ \hline & 1 & \underline{|0} \end{array} \Rightarrow \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-x+1}{1}=3$

Luego, la función racional no tiene asíntotas verticales.

Como el grado del numerador es 2 más que el del denominador, la función racional no tiene asíntotas horizontales ni oblicuas.

4) Dada la función $f(x)=\dfrac{4x-1}{2x+4}$

a) Halla la ecuación de la asíntota vertical y la posición de la gráfica respecto de ella hallando los límites laterales que correspondan.

Resolución

$$2x+4=0 \leftrightarrow x=-2\ ;\ \lim_{x\to -2} f(x)=\lim_{x\to -2}\frac{4x-1}{2x+4}=\frac{4.(-2)-1}{2.(-2)+4}=\frac{-9}{0}=\pm\infty.\ \text{A.V.}: x=-2$$

$$\lim_{x\to -2^-}\frac{4x-1}{2x+4}\xrightarrow{x=-2,1}\frac{-9}{0^-}=+\infty$$

$$\lim_{x\to -2^+}\frac{4x-1}{2x+4}\xrightarrow{x=-1,9}\frac{-9}{0^+}=-\infty$$

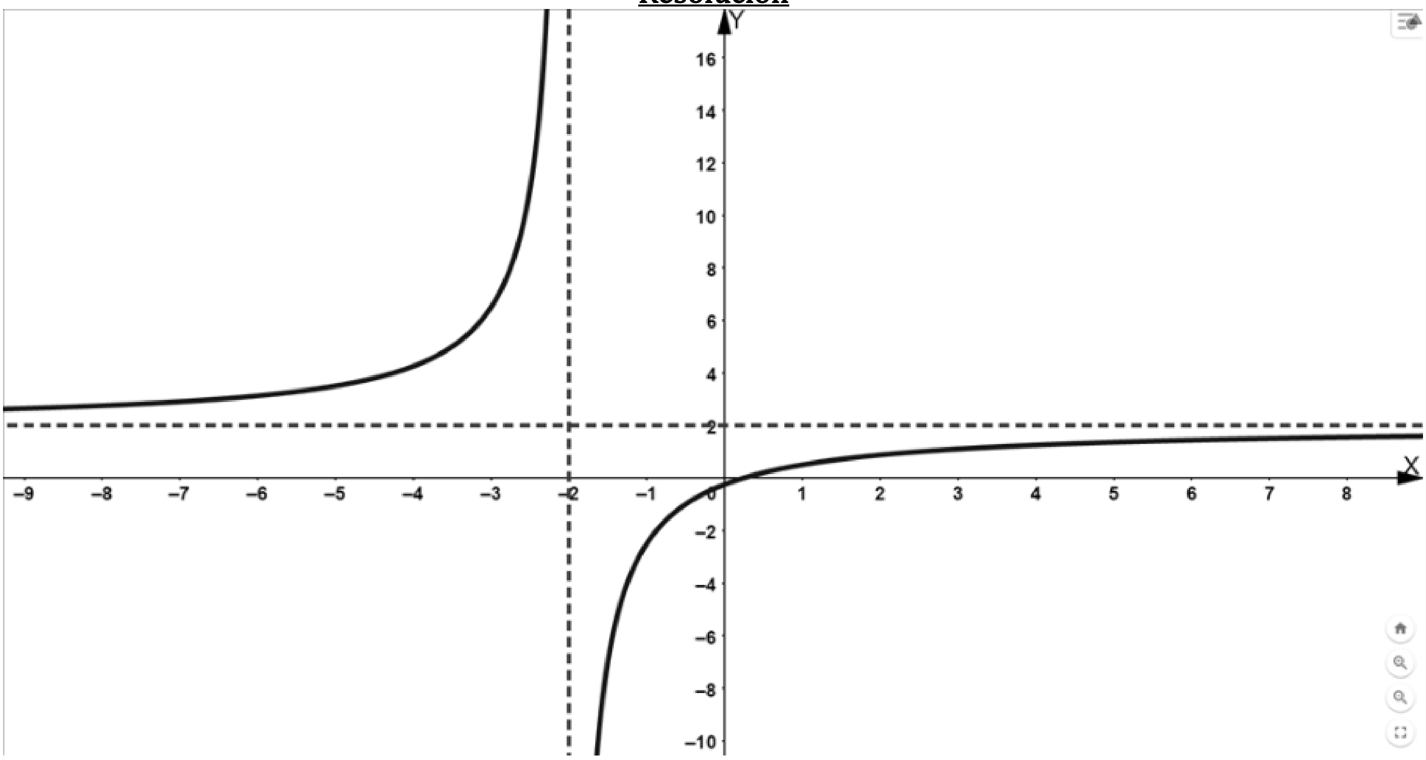
b) Calcula la ecuación de la asíntota horizontal en $+\infty$ hallando el límite que corresponda.

Resolución

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{4x-1}{2x+4}=\lim_{x\to +\infty}\frac{4x}{2x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{4}{2}=2\ ;\ \text{A.H.}: y=2$$

c) Haz una interpretación gráfica representando las asíntotas y la situación de la gráfica respecto de ellas sabiendo que la función es creciente.

Resolución



5) Dada la función $f(x)=\dfrac{1-6x}{3x+3}$

a) Halla la ecuación de la asíntota vertical y la posición de la gráfica respecto de ella hallando los límites laterales que correspondan.

Resolución

$$3x+3=0 \leftrightarrow x=-1\ ;\ \lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{1-6x}{3x+3}=\frac{1-6.(-1)}{3.(-1)+3}=\frac{7}{0}=\pm\infty.\ \text{A.V.}: x=-1$$

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{1-6x}{3x+3}\xrightarrow{x=-1,1}\frac{7}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{1-6x}{3x+3}\xrightarrow{x=-0,9}\frac{7}{0^+}=+\infty$$

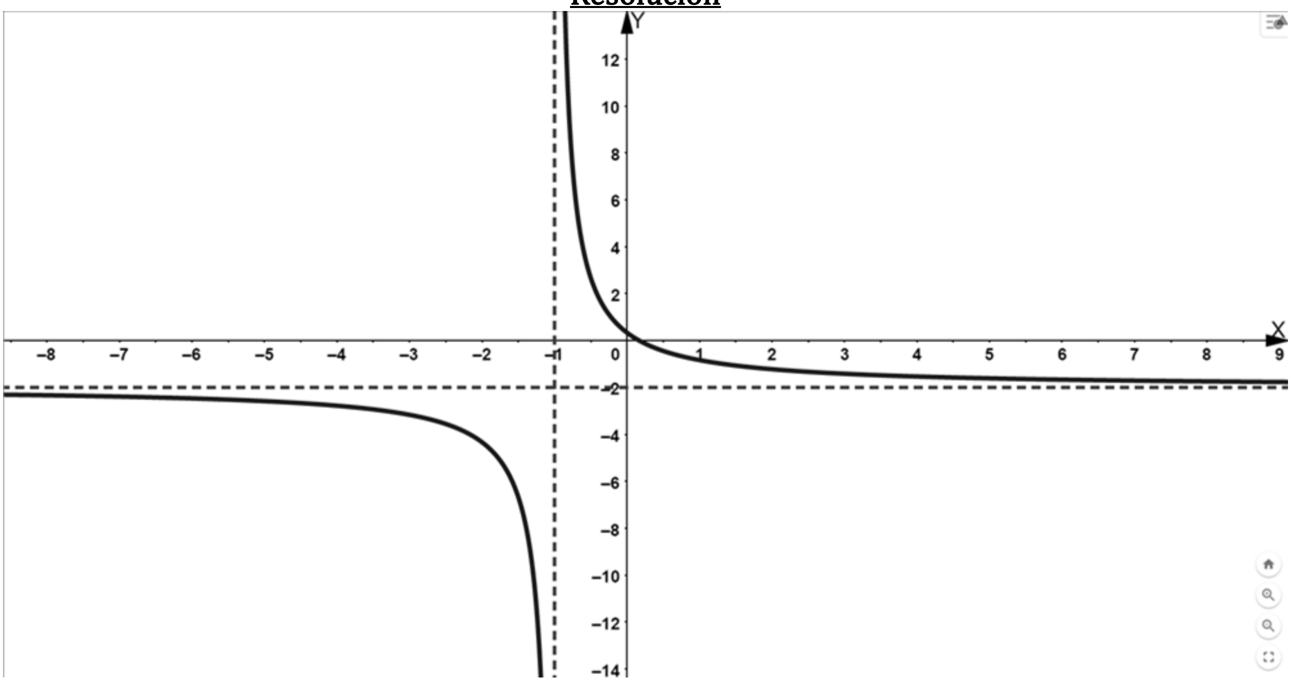
b) Calcula la ecuación de la asíntota horizontal en $+\infty$ hallando el límite que corresponda.

Resolución

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{1-6x}{3x+3}=\lim_{x\to +\infty}\frac{-6x}{3x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{-6}{3}=-2\ \ ;\ \ \text{A.H.}: y=-2$$

c) Haz una interpretación gráfica representando las asíntotas y la situación de la gráfica respecto de ellas sabiendo que la función es decreciente.

Resolución



6) Dada la función $f(x)=\dfrac{1-10x}{-5x-15}$

a) Halla la ecuación de la asíntota vertical y la posición de la gráfica respecto de ella hallando los límites laterales que correspondan.

Resolución

$$-5x-15=0 \leftrightarrow x=-3\ ;\ \lim_{x\to -3} f(x)=\lim_{x\to -3}\frac{1-10x}{-5x-15}=\frac{1-10(-3)}{-5(-3)-15}=\frac{31}{0}=\pm\infty.\ \text{A.V.}: x=-3\ ;$$

$$\lim_{x\to -3^-}\frac{1-10x}{-5x-15}\xrightarrow{x=-3,1}\frac{31}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to -3^+}\frac{1-10x}{-5x-15}\xrightarrow{x=-2,9}\frac{31}{0^-}=-\infty$$

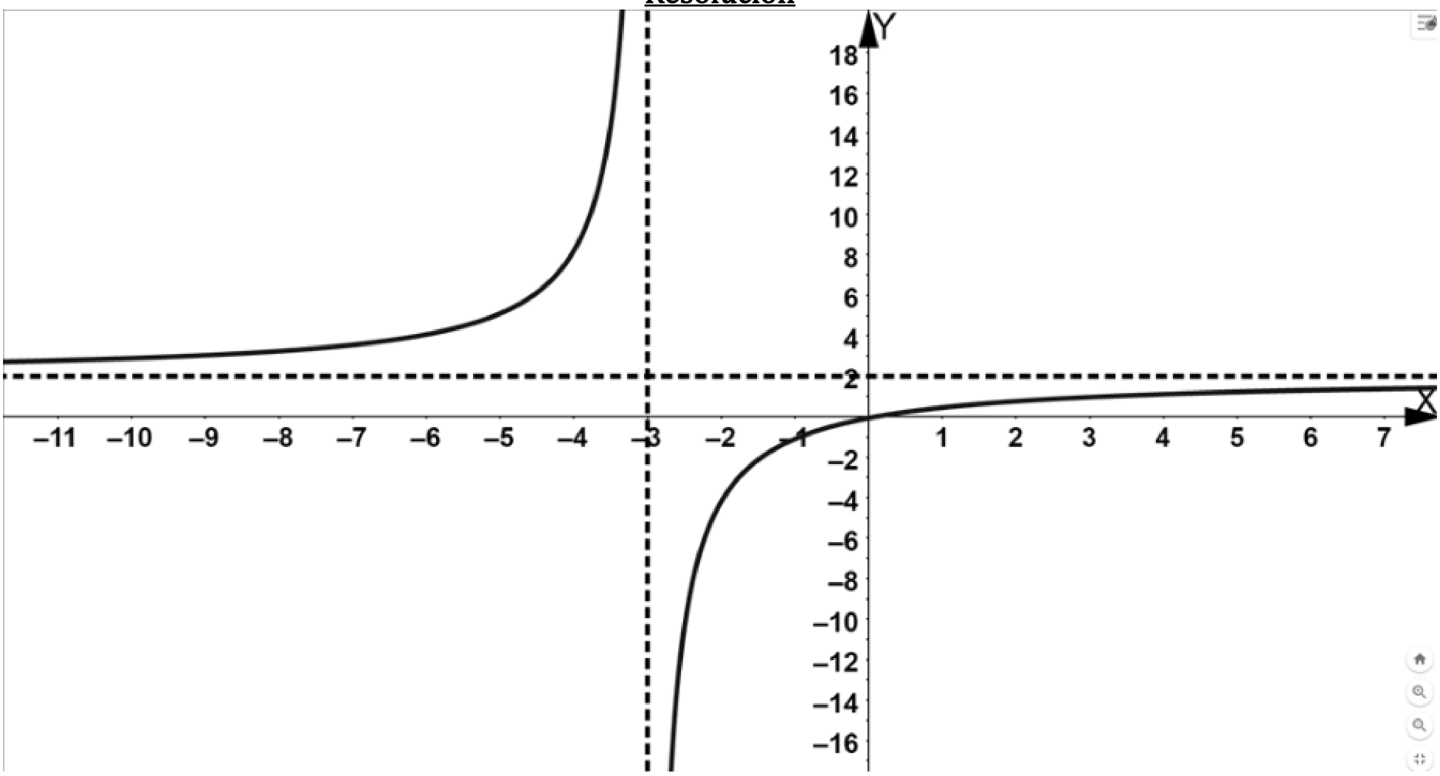
b) Calcula la ecuación de la asíntota horizontal en $+\infty$ hallando el límite que corresponda.

Resolución

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{1-10x}{-5x-15}=\lim_{x\to +\infty}\frac{-10\cancel{x}}{-5\cancel{x}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{-10}{-5}=2\ \ ;\ \ \text{A.H.}: y=2$$

c) Haz una interpretación gráfica representando las asíntotas y la situación de la gráfica respecto de ellas sabiendo que la función es creciente.

Resolución



7) Dada la función $f(x)=\dfrac{6x-5}{12-3x}$

a) Halla la ecuación de la asíntota vertical y la posición de la gráfica respecto de ella hallando los límites laterales que correspondan.

Resolución

$$12-3x=0 \leftrightarrow x=4\ ;\ \lim_{x\to 4} f(x)=\lim_{x\to 4}\frac{6x-5}{12-3x}=\frac{6.4-5}{12-3.4}=\frac{19}{0}=\pm\infty.\ \text{A.V.}: x=4\ ;\ \begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to 4^-}\frac{6x-5}{12-3x}\xrightarrow{x=3,9}\frac{19}{0^+}=+\infty\\ \displaystyle\lim_{x\to 4^+}\frac{6x-5}{12-3x}\xrightarrow{x=4,1}\frac{19}{0^-}=-\infty\end{array}$$

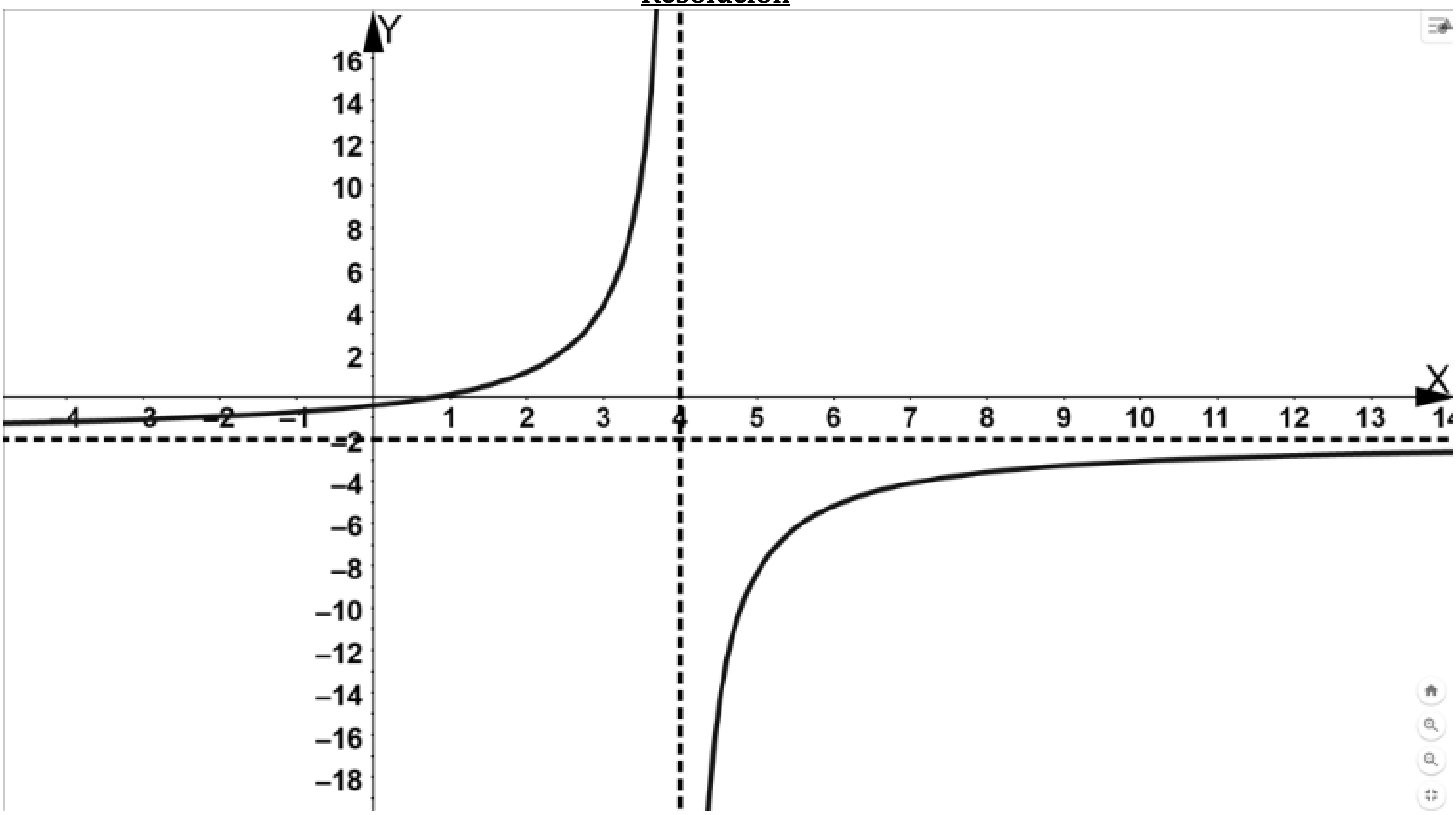
b) Calcula la ecuación de la asíntota horizontal en $+\infty$ hallando el límite que corresponda.

Resolución

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x-5}{12-3x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6\cancel{x}}{-3\cancel{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6}{-3}=-2\ \ ;\ \text{A.H.}: y=-2$$

c) Haz una interpretación gráfica representando las asíntotas y la situación de la gráfica respecto de ellas sabiendo que la función es creciente.

Resolución



8) Dada la función $f(x)=\dfrac{5-12x}{4x+8}$

a) Halla la ecuación de la asíntota vertical y la posición de la gráfica respecto de ella hallando los límites laterales que correspondan.

Resolución

$$4x+8=0 \leftrightarrow x=-2\ ;\ \lim_{x\to -2} f(x)=\lim_{x\to -2}\frac{5-12x}{4x+8}=\frac{5-12.(-2)}{4.(-2)+8}=\frac{29}{0}=\pm\infty.\ \text{A.V.}: x=-2$$

$$\lim_{x\to -2^-}\frac{5-12x}{4x+8}\xrightarrow{x=-2,1}\frac{29}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to -2^+}\frac{5-12x}{4x+8}\xrightarrow{x=-1,9}\frac{29}{0^+}=+\infty$$

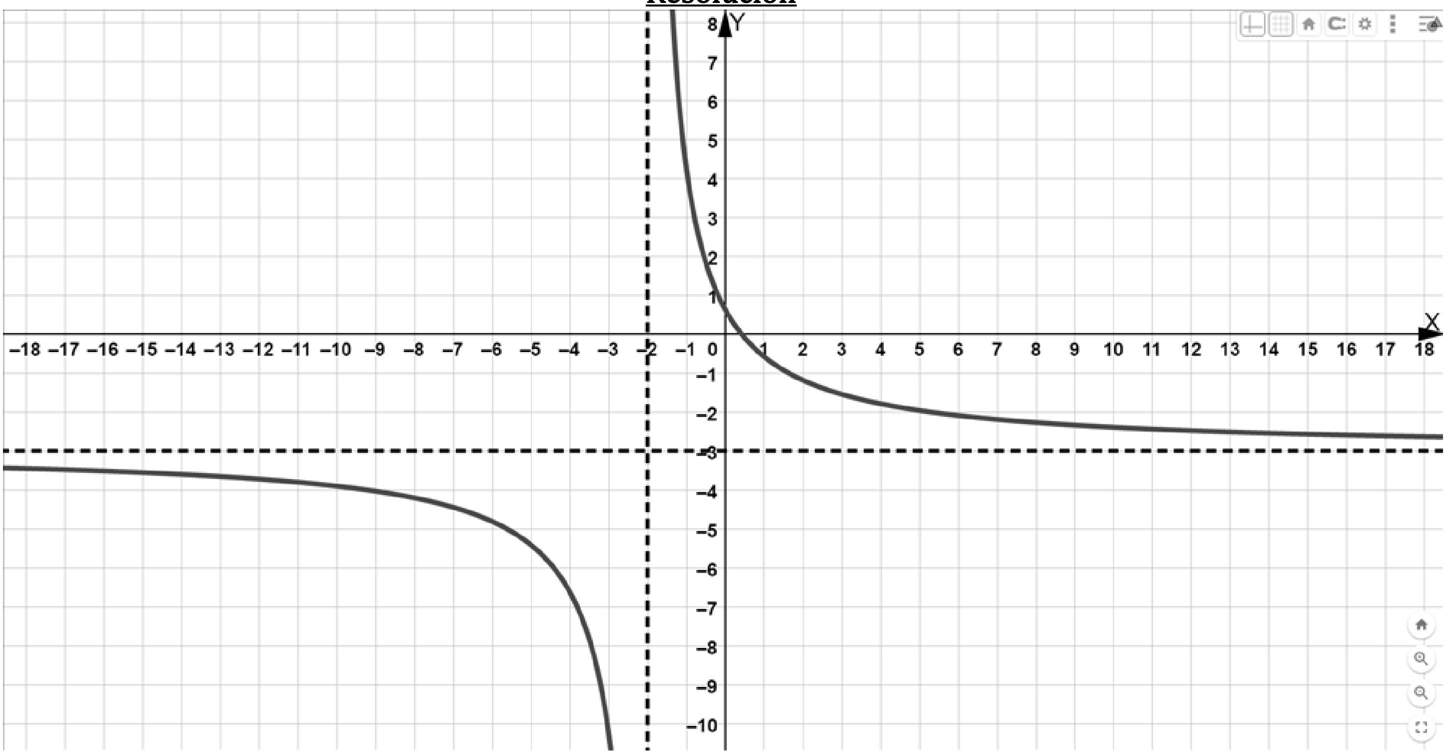
b) Calcula la ecuación de la asíntota horizontal en $+\infty$ hallando el límite que corresponda.

Resolución

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{5-12x}{4x+8}=\lim_{x\to +\infty}\frac{-12\cancel{x}}{4\cancel{x}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{-12}{4}=-3\ ;\ \text{A.H.}: y=-3$$

c) Haz una interpretación gráfica representando las asíntotas y la situación de la gráfica respecto de ellas sabiendo que la función es decreciente.

Resolución



9) Halla la asíntota oblicua de la función $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-9}$ y determina la posición de la gráfica respecto de ella.

Resolución

Como el grado del numerador es una unidad mayor que el del denominador, la función racional tiene una asíntota oblicua.

La calculamos: $\begin{array}{l|l} x^3 & x^2-9 \\ \hline r=9x & x=c(x) \end{array}$. Por tanto, la asíntota oblicua es A.O. : $y=x$, $f(x)=x+\dfrac{9x}{x^2-9}$

$$y_{\text{gráfica}}-y_{\text{asíntota}}=\frac{x^3}{x^2-9}-x=\frac{9x}{x^2-9}\Rightarrow \begin{array}{l}\text{Es}>0,\text{ cuando }x\to+\infty\\ \text{Es}<0,\text{ cuando }x\to-\infty\end{array}$$

Luego, la gráfica está por encima de la asíntota en $+\infty$ y por debajo en $-\infty$

10) Halla la asíntota oblicua de la función $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-9}$ y determina la posición de la gráfica respecto de ella.

Resolución

Como el grado del numerador es una unidad mayor que el del denominador, la función racional tiene una asíntota oblicua.

La calculamos: $\begin{array}{l|l} x^3 & x^2-9 \\ \hline r=9x & x=c(x) \end{array}$. Por tanto, la asíntota oblicua es A.O. : $y=x$, $f(x)=x+\dfrac{9x}{x^2-9}$

$$y_{\text{gráfica}}-y_{\text{asíntota}}=\frac{x^3}{x^2-9}-x=\frac{9x}{x^2-9}\Rightarrow \begin{array}{l}\text{Es}>0,\text{ cuando }x\to+\infty\\ \text{Es}<0,\text{ cuando }x\to-\infty\end{array}$$

Luego, la gráfica está por encima de la asíntota en $+\infty$ y por debajo en $-\infty$

11) Calcula los límites en $+\infty$ y las asíntotas horizontales de $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+2}{2x-3}, \text{ si } 0\le x\le 2\\ \dfrac{8x-10}{x-1}, \text{ si } x>2\end{cases}$

Resolución

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{8x-10}{x-1}=8$. Luego, la asíntota horizontal es A.H.: $y=8$.

12) Halla las asíntotas de la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x-5}{x+4}, \text{ si } x<2\\ x^3-3x^2, \text{ si } x\geq 2\end{cases}$ y la posición de la gráfica respecto de ellas

Resolución

Solución: $x+4=0 \Leftrightarrow x=-4$; $\lim\limits_{x\to -4} f(x)=\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{2x-5}{x+4}=\dfrac{-13}{0}=\pm\infty \Rightarrow$ A.V. : $x=-4$.

Además, $\lim\limits_{x\to -4^-} f(x)=\dfrac{-13}{0^-}=\infty$

$\lim\limits_{x\to -4^+} f(x)=\dfrac{-13}{0^+}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}(x^3-3x^2)=\infty \Rightarrow$ No hay A.H. en ∞.

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x-5}{x+4}=2 \Rightarrow$ A.H. en $-\infty$: $y=2$.

Además, $y_{\text{gráfica}}-y_{\text{asíntota}}=\dfrac{2x-5}{x+4}-2=\dfrac{2x-5-2(x+4)}{x+4}=\dfrac{-13}{x+4}\Rightarrow$ Es >0, cuando $x\to -\infty$

Luego, la gráfica está por encima de la asíntota en $-\infty$

13) Calcula a y b para que la función $f(x)=\dfrac{bx}{x-a}$ tenga como asíntota vertical la recta $x=2$ y como asíntota horizontal la recta $y=3$

Resolución

La A.V. de f es $x=a$ porque "a" anula el denominador y $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\dfrac{ba}{0}=\pm\infty$.

Como nos dicen que $x=2$ es una A.V., entonces $\boxed{a=2}$

La asíntota horizontal de la gráfica de f es A.H. : $y=\dfrac{b}{1}\to$ A.H. : $y=b$

Como nos dicen que $y=3$ es una A.H., entonces $\boxed{b=3}$

14) Sea f la función definida como $f(x)=\dfrac{ax^2+b}{a-x}$ para $x\neq a$. Calcula a y b para que la gráfica de f pase por el punto $(2, 3)$ y tenga una asíntota oblicua con pendiente -4.

Resolución

Para que la gráfica pase por el punto $(2, 3)$, $f(2)=3\Rightarrow \dfrac{a.2^2+b}{a-2}=3\Rightarrow\dfrac{4a+b}{a-2}=3\Rightarrow 4a+b=3a-6\Rightarrow a+b=-6$

La asíntota oblícua de la gráfica de f tiene pendiente $-4=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

Entonces: $-4=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{ax^2+b}{a-x}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^2+b}{x(a-x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^2+b}{x(a-x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^2+b}{ax-x^2}=\dfrac{a}{-1}=-a\Rightarrow\boxed{a=4}$

Luego, $4+b=-6\Rightarrow\boxed{b=-10}$

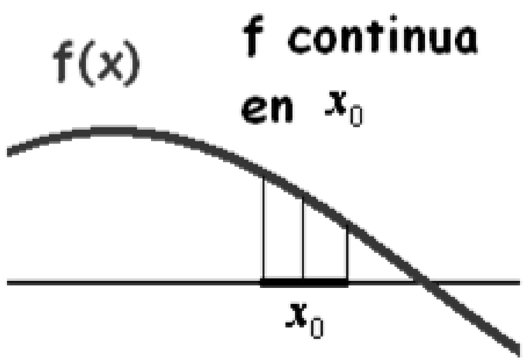
TEOREMAS EN FUNCIONES CONTINUAS

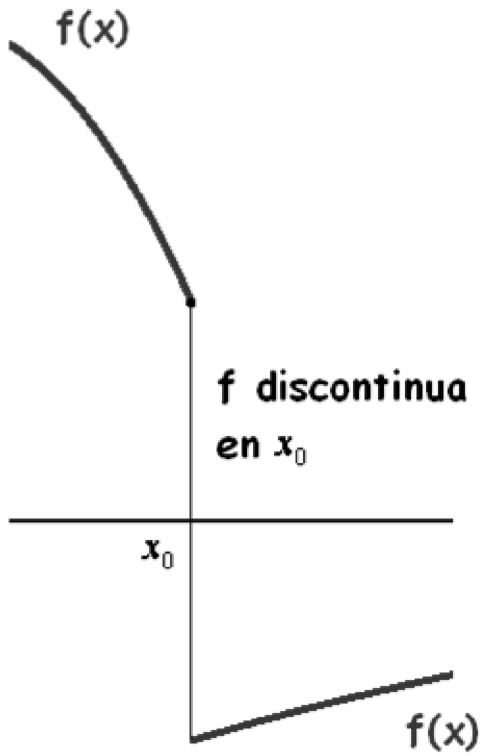
Teorema de conservación del signo

Si la función f es continua en x_0 y $f(x_0) \neq 0$ existe un entorno de x_0 en el que $f(x)$ toma el mismo signo que $f(x_0)$

Explicación. - Si una función f es continua en x_0 las imágenes de los puntos cercanos a x_0 no se separan mucho de $f(x_0)$ por lo que tendrán el mismo signo que esta última.

Interpretación gráfica



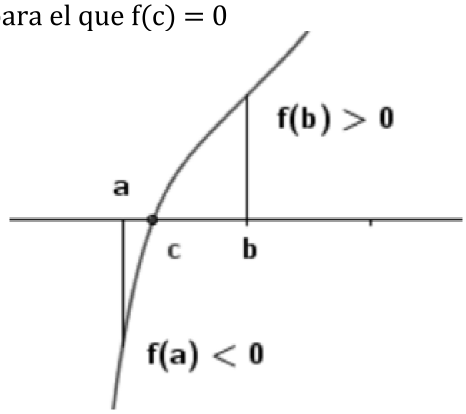


Cuando f es continua en x_0 siempre hay algún entorno de x_0 en el que la función mantenga el signo de $f(x_0)$.

Por ejemplo, la función no es continua en x_0 y no hay ningún entorno de x_0 en el que la función conserve el signo.

Teorema de Bolzano

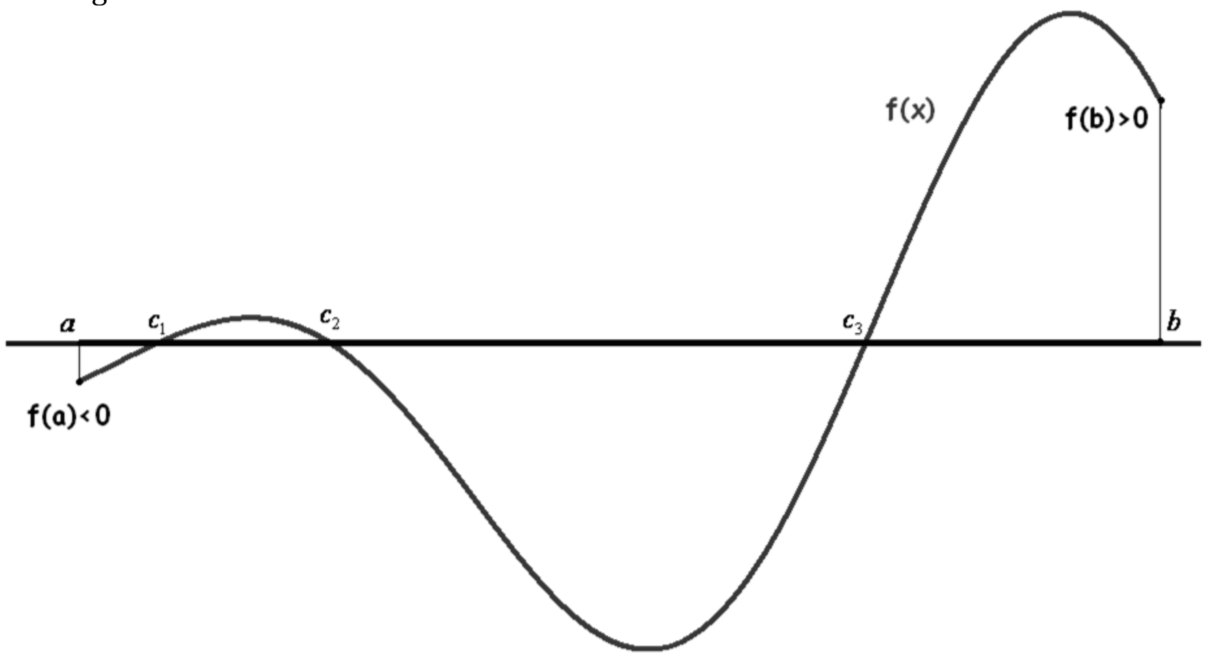
Si f(x) es una función continua en el intervalo [a, b] de forma que f(a) y f(b) tienen distinto signo, entonces existe al menos un punto c del intervalo (a, b) para el que f(c) = 0



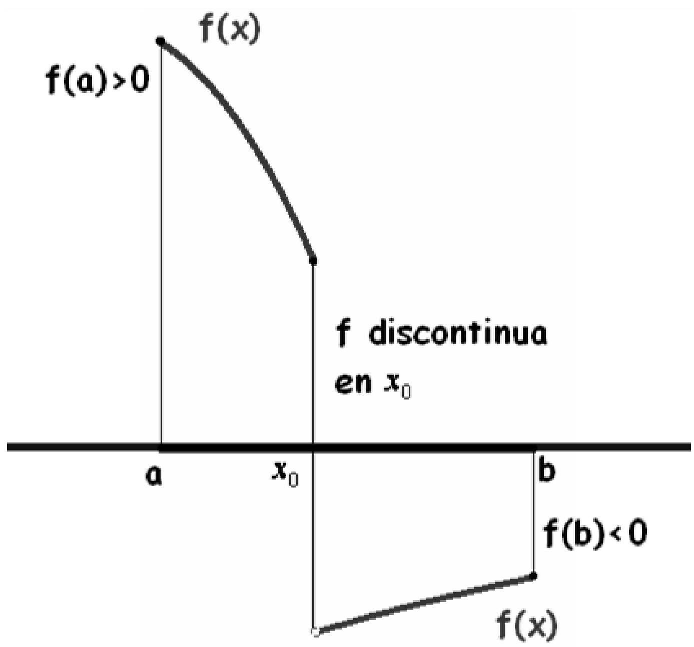
El teorema de Bolzano dice que la gráfica de la función f(x) corta al eje X por lo menos en un punto c en el intervalo (a, b), es decir, la ecuación f(x) = 0 tiene por lo menos una solución en el intervalo (a, b).

Explicación. - La gráfica de una función continua no tiene agujeros ni interrupciones, y si "atraviesa" una línea recta, forzosamente tendrá un punto común con ella.

Interpretación gráfica



La gráfica de la función necesariamente ha de atravesar al eje X al pasar del semiplano inferior al semiplano superior, y por lo tanto $f(x)$ se anulará al menos en un punto (en este caso concreto en tres).



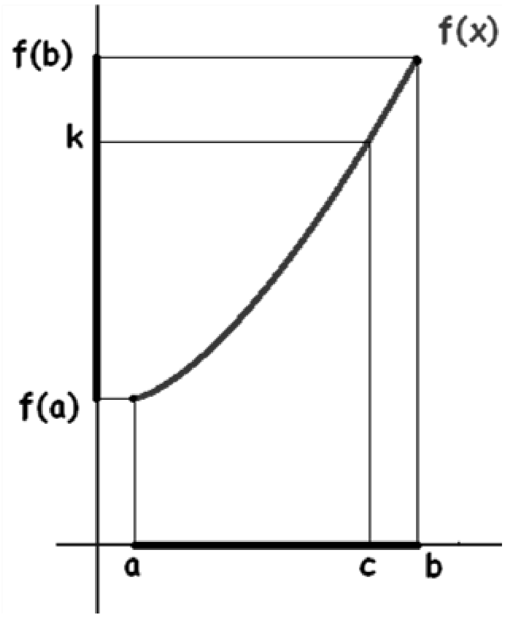
Aunque la función cambie de signo en los extremos de $[a,b]$, observa que si no es continua en dicho intervalo (en el ejemplo es discontinua en $x_0 \in [a,b]$) puede que no se anule en ningún punto de ese intervalo (como en la del ejemplo).

Teorema de Darboux (o teorema de los valores intermedios)

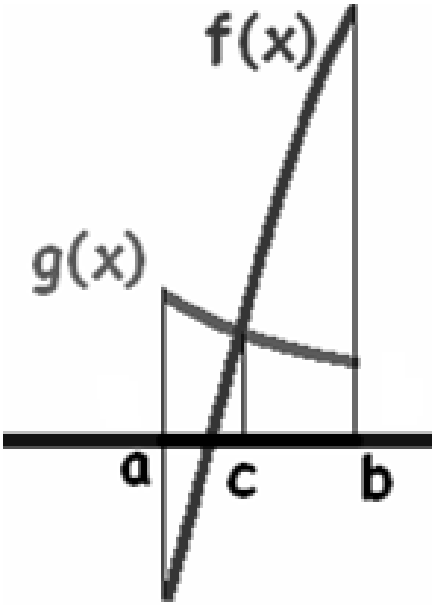
Si la función f es continua en el intervalo $[a,b]$ y k es un número comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$, o sea $f(a)<k<f(b)$, entonces existe algún punto $c\in(a,b)$ tal que $f(c)=k$

Explicación. -Es una consecuencia inmediata del teorema de Bolzano.
La gráfica de una función continua f en el intervalo $[a,b]$ atravesará cualquier recta horizontal situada entre $f(a)$ y $f(b)$. Por lo tanto, la función tomará dentro del intervalo (a,b) cualquier valor comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$.

Interpretación gráfica.
Intenta demostrar este teorema como consecuencia directa del de Bolzano:
¡Aplica Bolzano a la función $g(x)=f(x)-k$!

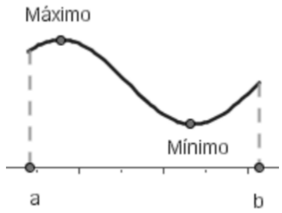


Otra consecuencia inmediata del teorema de Bolzano es.
f y g son dos funciones continuas en $[a,b]$ y $f(a)<g(a)$ y $f(b)>g(b)$ entonces existe un numero $c\in(a,b)$ tal que $f(c)=g(c)$ ¡Aplica Bolzano a la función $h(x)=f(x)-g(x)$!



Teorema de Weierstrass

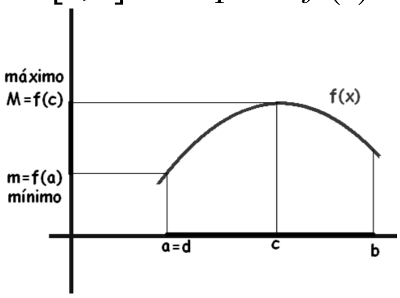
Si una función f(x) está definida y es continua en un intervalo cerrado [a, b], entonces f(x) alcanza al menos un máximo y un mínimo absolutos en el intervalo [a, b].
Es decir: hay al menos dos puntos c y d pertenecientes a [a, b] donde f alcanza valores extremos absolutos:



El teorema de Weierstrass no nos indica donde se encuentran el máximo y el mínimo, sólo afirma que existen.

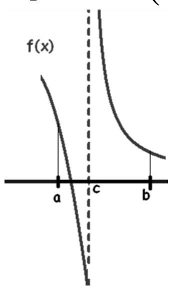
Es decir, existen dos números c y d de dicho intervalo para los que se verifica:

$$\textit{cualquier} \quad x \in [a,b] \quad \textit{cumple} \quad f(c) \le f(x) \le f(d)$$

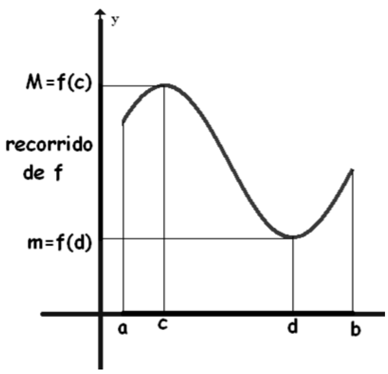


En la función f del gráfico, observa como el máximo o el mínimo pueden alcanzarse, bien en un extremo, bien en un punto interior del intervalo.
Así en este ejemplo el mínimo se alcanza en "a" y el máximo en "c".

Observa que si el intervalo fuese abierto no podríamos asegurar la existencia de máximo o mínimo en el intervalo. En el ejemplo anterior,
f no tendría mínimo en el intervalo (a,b) ya que $a \notin (a,b)$.



Si f no fuese continua en $[a,b]$, en el siguiente ejemplo es discontinua en c, no estaría garantizada la existencia de máximo o mínimo en dicho intervalo pues la función podría no estar acotada (como en el ejemplo) en dicho intervalo.



La consecuencia inmediata del teorema de Weierstrass (y teniendo en cuenta el teorema de los valores intermedios), es que el recorrido de la función f está en el intervalo $[m, M]$.