EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Concepto de número complejo

Al intentar resolver algunas ecuaciones de 2º grado, por ejemplo, $x^2 + 1 = 0$, nos encontramos con $x = \pm\sqrt{-1}$, que no tiene solución, por ser la raíz cuadrada de un número negativo.

Para dar solución estas ecuaciones de 2º grado, los matemáticos definieron un nuevo número, $\boxed{i = \sqrt{-1}}$ que llamaron unidad imaginaria. Observa que se cumple $i^2 = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$

Por ejemplo, una vez que hemos definido $i = \sqrt{-1}$, podemos resolver la ecuación $x^2 - 6x + 34 = 0$:

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4.34}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-100}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{100.(-1)}}{2} = \frac{6 \pm 10\sqrt{-1}}{2} = \frac{6 \pm 10i}{2} = 3 \pm 5i$$

A partir de la unidad imaginaria, i, los matemáticos crearon unos nuevos números que llamaron números complejos:
Un número complejo z es una expresión del tipo $z = a + bi$ (llamada forma binómica del número complejo), donde a y b son números reales (“a” se llama parte real y “b” parte imaginaria).

El conjunto de los números complejos se representa con la letra C.

$$\text{Complejos } (\mathbb{C})\begin{cases}\text{Reales } (\mathbb{R})\begin{cases}\text{Racionales } (\mathbb{Q})\begin{cases}\text{Enteros } (\mathbb{Z})\begin{cases}\text{Naturales } (\mathbb{N})\\ \text{Enteros negativos}\\ \text{Cero}\end{cases}\\ \text{Fraccionarios}\end{cases}\\ \text{Irracionales}\end{cases}\\ \text{Imaginarios}\end{cases}$$

Si $a = 0 \rightarrow z = 0 + bi = bi$ se llama imaginario puro. Por ejemplo, $z = 7i$ es un imaginario puro

Si $b = 0 \rightarrow z = a + 0i = a$ es un número real. Por ejemplo, $z = 3$ es un número real

Si $a = 0$ y $b = 0$, resulta el número complejo $0 + 0i$, que se llama complejo cero, y se escribe 0.

Observa que
$z = a + bi = 0 \Leftrightarrow a = 0$ y $b = 0$

Si $z = a + bi$ y $w = c + di$, entonces $z = w \Leftrightarrow a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c$ y $b = d$

Conjugado de un número complejo: Dado un complejo $z = a + bi$, su conjugado es $\overline{z} = a - bi$

Opuesto de un número complejo: Dado un complejo $z = a + bi$, su opuesto es $-z = -a - bi$.
Por ejemplo, el conjugado de $z = 5 - 3i$ es $\overline{z} = 5 + 3i$ y su opuesto es $-z = -5 + 3i$

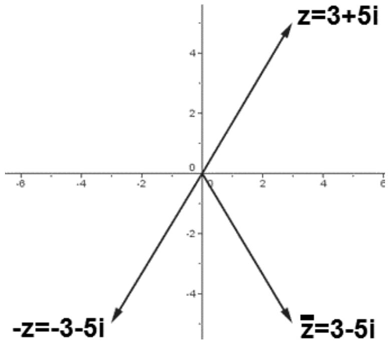
Representación gráfica de números complejos

Un número complejo $z = a + bi$ se representa por el punto $P(a, b)$ llamado afijo del complejo z

El eje horizontal o eje X se llama el eje real. El eje vertical o eje Y se llama eje imaginario.

Observa que:
- Los números reales (considerados como complejos) se representan sobre el eje real
- Los números imaginarios puros se representan sobre el eje imaginario
- El conjugado de z es simétrico respecto del eje X
- El opuesto es simétrico respecto del origen de coordenadas

Ejemplo

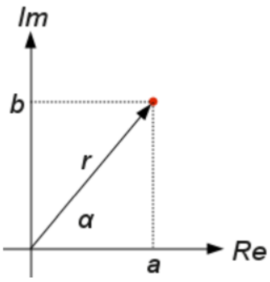


Módulo de un número complejo: Es el módulo del vector de posición del punto P(a, b) o sea el módulo del vector $\overrightarrow{OP} = (a, b)$. Por tanto, si $z = a + bi$, el módulo es $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Argumento de un número complejo z: Es el ángulo α que forma su vector de posición con el semieje OX

Observación: El argumento de un complejo no es único. Si α es un argumento, también son argumentos α + k360°, donde k es cualquier número entero.

Dada la existencia de infinitos argumentos, se suele elegir el único de ellos que está entre 0° y 360°, el cual recibe el nombre de argumento principal, Arg (z).



Forma trigonométrica y forma polar de un número complejo

Observa que $\operatorname{sen}\alpha = \frac{b}{r} \Rightarrow b = r\operatorname{sen}\alpha \qquad \cos\alpha = \frac{a}{r} \Rightarrow a = r\cos\alpha \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a} \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$.

Luego, $z = a + bi = r\cos\alpha + (r\operatorname{sen}\alpha)\, i \Rightarrow \boxed{z = \underbrace{r(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)}_{\text{forma trigonométrica}}}$

A su vez, la forma trigonométrica se puede escribir de forma simplificada así: $\boxed{z = \underbrace{r_\alpha}_{\text{forma polar}}}$

Dos números en forma polar son iguales si tienen el mismo módulo y sus argumentos difieren en un múltiplo entero de 360°

Si $z = r_\alpha$. entonces su conjugado es $r_{-\alpha}$.

OPERACIONES CON NÚMEROS COMPLEJOS

Operaciones con números complejos en forma binómica

Suma y resta

$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$

Ejemplos:
1) Si $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = -8 + 4i$ entonces
$z_1 + z_2 = (3 + 2i) + (-8 + 4i) = (3 - 8) + (2 + 4)i = -5 + 6i$

$z_1 - z_2 = (3 + 2i) - (-8 + 4i) = (3 + 8) + (2 - 4)i = 11 - 2i$

2) $(5 + 12i) + [(10 - 8i) + (-1 + i)]= (5 + 12i) + (9 - 7i) = 14 + 5i$

Producto

$(a + bi)\cdot(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

Ejemplo: Sean $z = 6 + 2i$ y $w = 3 + 5i$. Para hallar $z \cdot w$ hacemos:

$z \cdot w = (6\cdot3 - 2\cdot5) + (6\cdot5 + 2\cdot3)\, i = 8 + 36i$

Potencias de la unidad imaginaria

$i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = i^2.i = -i$, $i^4 = i^2 . i^2 = 1.$ $i^5 = i^4 . i = 1.i = i = i^1$ (se va repitiendo)

Cuando el exponente n es superior a 4 se divide entre 4 y entonces $i^n = i^r$, siendo r el resto de la división. Por ejemplo, $i^{739} = i^{184.4 +3} = i^3 = -i$

Potencia

$(a + bi)^n$. Se efectúa como potencia de un binomio

División

$$\frac{a+bi}{c+di} \xrightarrow[.\,(c-di)]{.\,(c-di)} \frac{ac-bdi^2+(bc-ad)i}{c^2-d^2i^2} = \frac{ac+bd+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

Ejemplo: Sea $z = 3 + 4i$ y $w = 2 + 3i$, entonces:

$$\frac{z}{w} = \frac{3+4i}{2+3i}\cdot\frac{2-3i}{2-3i}$$
$$= \frac{(6+12)+(-9+8)i}{2^2+3^2}$$
$$= \frac{18-i}{11} = \frac{18}{11} - \frac{1}{11}i$$

Producto, potencia, cociente y radicación con números complejos en forma polar

Sean dos números complejos $z = r_\alpha$ y $w = r'_\beta$ entonces

Producto: $\boxed{r_\alpha \cdot r'_\beta = (rr')_{\alpha+\beta}}$ que escrito en forma trigonométrica sería así

$$\boxed{r(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha) \cdot r'(\cos\beta + i\,\text{sen}\,\beta) = rr'[\cos(\alpha+\beta) + i\,\text{sen}(\alpha+\beta)]}$$

Potencia: Es un caso particular de la multiplicación pero con n factores iguales. La regla es, por tanto,

$\boxed{\left(r_\alpha\right)^n = (r^n)_{n\alpha}}$ que escrito en forma trigonométrica sería así

$\boxed{[r(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)]^n = r^n[\cos(n\alpha) + i\,\text{sen}(n\alpha)]}$. Esta fórmula se llama **fórmula de De Moivre**

División: $\boxed{\dfrac{r_\alpha}{r'_\beta} = \left(\dfrac{r}{r'}\right)_{\alpha-\beta}}$ que escrito en forma trigonométrica sería así

$$\boxed{\frac{r(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)}{r'(\cos\beta + i\,\text{sen}\,\beta)} = \frac{r}{r'}[\cos(\alpha-\beta) + i\,\text{sen}(\alpha-\beta)]}$$

Raíces n-simas: Dado un número complejo $z = a + bi = r(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha) = r_\alpha$, las raíces n-simas de z son todos los números complejos w que elevados a n dan como resultado el complejo z.
Es decir, $w^n = z$. Se puede demostrar que hay n raíces n-simas y que se obtienen con la fórmula

$\boxed{\sqrt[n]{z} = \left(\sqrt[n]{r}\right)_{\frac{\alpha + 360^\circ k}{n}}, \text{ con } k = 0, 1, 2, \ldots, n-1}$ que escrito en forma trigonométrica sería así

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 360^\circ k}{n} + i\,\text{sen}\frac{\alpha + 360^\circ k}{n}\right), \text{ con } k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

También se puede demostrar que los afijos de las n raíces n-simas del complejo z dividen a la circunferencia de dentro el origen y radio r en n partes iguales.

Ejemplo:

Hallar todas las raíces cúbicas de $z = 8_{30^\circ} = 8(\cos 30^\circ + i\,\text{sen}\,30^\circ)$

Solución:

Si usamos la fórmula $w = \sqrt[3]{z} = \left(\sqrt[3]{8}\right)_{\frac{30^\circ + 360^\circ k}{3}}, \text{ con } k = 0, 1, 2 \Rightarrow 2_{\frac{30^\circ + 360^\circ k}{3}}, \text{ con } k = 0, 1, 2$

$$k = 0 \Rightarrow w_1 = 2_{\frac{30^\circ + 360^\circ.0}{3}} = 2_{10^\circ}$$

$$k = 1 \Rightarrow w_2 = 2_{\frac{30^\circ + 360^\circ.1}{3}} = 2_{130^\circ}$$

$$k = 2 \Rightarrow w_3 = 2_{\frac{30^\circ + 360^\circ.2}{3}} = 2_{250^\circ}$$

Si representamos gráficamente estas tres raíces, veremos que se hallan sobre una circunferencia con centro en el origen y radio 2 y la dividen en tres partes iguales.