Suma, resta, producto y cociente de funciones

Dadas dos funciones f y g se definen las siguientes operaciones:

Suma de funciones: $\mathbf{(f+g)(x) = f(x) + g(x)}$

Ejemplo: Si $f(x) = 3x + 1$, $g(x) = 2x - 4 \Rightarrow (f + g)(x) = f(x) + g(x) = 3x + 1 + 2x - 4 = 5x - 3$

Función opuesta: $\mathbf{(-f)(x) = -f(x)}$ *Ejemplo*: Si $f(x) = 2x - 4 \Rightarrow (-f)(x) = -f(x) = -2x + 4$

Resta de funciones: $\mathbf{(f-g)(x) = f(x) - g(x)}$

Ejemplo: Si $f(x) = x^2 - 3$, $g(x) = x + 3 \Rightarrow (f - g)(x) = f(x) - g(x) = x^2 - 3 - x - 3 = x^2 - x - 6$

Producto de un número por una función: $\mathbf{(a.f)(x) = a.f(x)}$

Ejemplo: Si $f(x) = x^2 + x - 2 \Rightarrow (3f)(x) = 3f(x) = 3x^2 + 3x - 6$

Producto de funciones: $\mathbf{(f.g)(x) = f(x) \,.\, g(x)}$

Ejemplo: Si $f(x) = x^2 - 3$, $g(x) = x + 3 \Rightarrow (f.g)(x) = f(x)g(x) = (x^2 - 3)(x - 3) = x^3 - 3x^2 - 3x + 9$

Función inversa para el producto: $\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)}$

Ejemplo: Si $f(x) = x^2 + x - 2 \Rightarrow \left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x^2 + x - 2}$

Cociente de funciones: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Ejemplo: Si $f(x) = x^2 - 3$, $g(x) = x + 3 \Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 - 3}{x + 3}$

Propiedades de las operaciones con funciones

1) Conmutativa: $(f + g)(x) = (g + f)(x)$, $(fg)(x) = (gf)(x)$

2) Asociativa: $[f(x) + g(x)] + h(x) = f(x) + [g(x) + h(x)]$, $[f(x).g(x)].h(x) = f(x).[g(x).h(x)]$

3) Elemento neutro:
Para la suma de funciones el elemento neutro es la función constante 0 , $0(x) = 0$

$$f(x) + 0(x) = 0(x) + f(x) = f(x)$$

Para el producto de funciones es la constante 1 , $1(x) = 1$

$$f(x).1(x) = 1(x).f(x) = f(x)$$

4) Distributiva del producto respecto de la suma: $f(x) \,.\, [g(x) + h(x)] = f(x) \,.\, g(x) + f(x) \,.\, h(x)$

Actividad resuelta

Considera las funciones $f(x) = \frac{x^2+3x}{x-3}$, $g(x) = \frac{x+3}{5x^2-15x}$. Calcula la fórmula de las funciones:

$f+g \qquad -f \qquad -g \qquad f-g \qquad 5g \qquad fg \qquad \frac{1}{f} \qquad \frac{1}{g} \qquad \frac{g}{f}$

1) $(f+g)(x) = \frac{5x^3+15x^2+x+3}{5x^2-15x}$ 2) $(-f)(x) = \frac{-x^2-3x}{x-3}$ 3) $(-g)(x) = \frac{-x-3}{5x^2-15x}$

4) $(f-g)(x) = \frac{5x^3+15x^2-x-3}{5x^2-15x}$ 5) $(5g)(x) = \frac{x+3}{x^2-3x}$ 6) $(fg)(x) = \frac{x^2+6x+9}{5x^2-30x+45}$

7) $(\frac{1}{f})(x) = \frac{x-3}{x^2+3x}$ 8) $(\frac{1}{g})(x) = \frac{5x^2-15x}{x+3}$ 9) $(\frac{g}{f})(x) = \frac{1}{5x^2}$

Composición de funciones

Dada una función f que transforma x en y = f(x) y otra función g que transforma y en g(y),
$x \xrightarrow{f} y = f(x) \xrightarrow{g} g(y) = g[f(x)]$. Se define la función compuesta de f con g así: **$(g \circ f)(x) = g[f(x)]$**

Ejemplo: Si $f(x) = x^2$, $g(x) = x - 2$, entonces $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = [g(x)]^2 = (x-2)^2$.

Observa que $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = f(x) - 2 = x^2 - 2$.

Actividades resueltas

1) Realiza las siguientes composiciones de funciones:

a) $f \circ g$, siendo $f(x) = \frac{1}{6-3x^2}$, $g(x) = \sqrt{x^2+2}$.

Resolución

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = \frac{1}{6-3.[g(x)]^2} = \frac{1}{6-3.[\sqrt{x^2+2}]^2} = \frac{1}{6-3.(x^2+2)} = \frac{-1}{3x^2}$$

b) $n \circ m$, siendo $m(x) = 2^{7x+3}$, $n(x) = \log_2 x$

Resolución

$$(n \circ m)(x) = n[m(x)] = \log_2[m(x)] = \log_2[2^{7x+3}] = 7x+3$$

c) $f \circ f$, siendo $f(x) = \frac{x+9}{x}$

Resolución

$$(f \circ f)(x) = f[f(x)] = \frac{f(x)+9}{f(x)} = \frac{\frac{x+9}{x}+9}{\frac{x+9}{x}} = \frac{\frac{x+9+9x}{x}}{\frac{x+9}{x}} = \frac{10x+9}{x+9}$$

d) $f \circ g$ y $g \circ f$, siendo $f(x) = 3x - 4$, $g(x) = x^2 + 1$

Resolución

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = 3.g(x) - 4 = 3.(x^2 + 1) - 4 = 3x^2 - 1$$

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = f(x)^2 + 1 = (3x - 4)^2 + 1 = 9x^2 - 24x + 16 + 1 = 9x^2 - 24x + 17$$

e) $f \circ g$, siendo $f(x) = \dfrac{1}{2 - 2x^2}$, $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

Resolución

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = \frac{1}{2 - 2.g(x)^2} = \frac{1}{2 - 2.\sqrt{x^2 - 1}^2} = \frac{1}{2 - 2.(x^2 - 1)} = \frac{1}{2 - 2x^2 + 2} = \frac{1}{4 - 2x^2}$$

f) $g \circ f$, siendo $f(x) = 3^{2x-1}$, $g(x) = \log_3 x$

Resolución

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = \log_3 f(x) = \log_3 3^{2x-1} = (2x - 1)\overbrace{\log_3 3}^{\text{vale } 1} = 2x - 1$$

g) $f \circ f$, siendo $f(x) = \dfrac{x - 1}{x}$

Resolución

$$(f \circ f)(x) = f[f(x)] = \frac{f(x) - 1}{f(x)} = \frac{\frac{x - 1}{x} - 1}{\frac{x - 1}{x}} = \frac{\frac{x - 1 - x}{x}}{\frac{x - 1}{x}} = \frac{-1}{x - 1}$$

2) Dadas las funciones $f(x) = \dfrac{1}{x + 1}$, $g(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 - 9}$, calcular:

a) $f \circ g$

Resolución

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = \frac{1}{g(x) + 1} = \frac{1}{\frac{x - 1}{x^2 - 9} + 1} = \frac{1}{\frac{x - 1 + x^2 - 9}{x^2 - 9}} = \frac{1}{\frac{x^2 + x - 10}{x^2 - 9}} = \frac{x^2 - 9}{x^2 + x - 10}$$

b) g o f

Resolución

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = \frac{f(x)-1}{f(x)^2-9} = \frac{\frac{1}{x+1}-1}{\left(\frac{1}{x+1}\right)^2-9} = \frac{\frac{1-x-1}{x+1}}{\frac{1}{(x+1)^2}-9} = \frac{\frac{-x}{x+1}}{\frac{1-9(x+1)^2}{(x+1)^2}} = \frac{\frac{-x}{x+1}}{\frac{1-9(x^2+2x+1)}{(x+1)^2}} =$$

$$\frac{\frac{-x}{x+1}}{\frac{-9x^2-18x-8}{(x+1)^2}} = \frac{-x(x+1)^2}{(-9x^2-18x-8)(x+1)} = \frac{-x(x+1)}{-9x^2-18x-8} = \frac{-x^2-x}{-9x^2-18x-8} = \frac{x^2+x}{9x^2+18x+8}$$

3) Siendo $f(x) = 3x - 4$, $g(x) = x^2 + 1$, realiza las siguientes composiciones de funciones:

a) $(f \circ g)(x)$

Resolución

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = 3.g(x) - 4 = 3.(x^2+1) - 4 = 3x^2 - 1$$

b) $(g \circ f)(x)$

Resolución

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = f(x)^2 + 1 = (3x-4)^2 + 1 = 9x^2 - 24x + 16 + 1 = 9x^2 - 24x + 17$$

4) Siendo $f(x) = 2x - 3$, $g(x) = 5x^2 - x + 1$, realiza las siguientes composiciones de funciones:

a) $(f \circ g)(x)$

Resolución

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = 2.g(x) - 3 = 2.(5x^2 - x + 1) - 3 = 10x^2 - 2x + 2 - 3 = 10x^2 - 2x - 1$$

b) $(g \circ f)(x)$

Resolución

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = 5.[f(x)]^2 - f(x) + 1 = 5.(2x-3)^2 - (2x-3) + 1 = 5(4x^2 - 12x + 9) - 2x + 3 + 1 =$$

$$= 20x^2 - 60x + 45 - 2x + 3 + 1 = 20x^2 - 62x + 49$$

5) Siendo $f(x) = 2x - 3$, $g(x) = 5x^2 - x + 1$, realiza las siguientes composiciones de funciones:
a) $(f \circ g)(x)$

Resolución

$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = 2.g(x) - 3 = 2.(5x^2 - x + 1) - 3 = 10x^2 - 2x + 2 - 3 = 10x^2 - 2x - 1$

b) $(g \circ f)(x)$

Resolución

$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = 5.[f(x)]^2 - f(x) + 1 = 5.(2x - 3)^2 - (2x - 3) + 1 = 5(4x^2 - 12x + 9) - 2x + 3 + 1 =$

$= 20x^2 - 60x + 45 - 2x + 3 + 1 = 20x^2 - 62x + 49$

6) Dadas $f(x) = 1 - 3x^2$, $g(x) = 1 - 2x$, realiza las siguientes composiciones de funciones:
a) $(f \circ g)(x)$

Resolución

$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = 1 - 3.[g(x)]^2 = 1 - 3.(1 - 2x)^2 = 1 - 3.(1 - 4x + 4x^2) =$

$= 1 - 3 + 12x - 12x^2 = -12x^2 + 12x - 2$

b) $(g \circ f)(x)$

Resolución

$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = 1 - 2.[f(x)] = 1 - 2.(1 - 3x^2) = 1 - 2 + 6x^2 = 6x^2 - 1$

7) Si $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$, ¿Qué relación existe entre f(1/x) y f(x)?

Solución: $$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x} - 1}{\frac{1}{x} + 1} = \frac{\frac{1-x}{x}}{\frac{1+x}{x}} = \frac{1-x}{1+x} = -f(x)$$

Función recíproca o inversa para la composición

Si f es una función que transforma x en y = f(x) $x \xrightarrow{f} y = f(x)$, se define la función recíproca de f, en caso de que exista, como la función f^{-1} que transforma y en x: $y = f(x) \xrightarrow{f^{-1}} x = f^{-1}(y)$.

Es decir $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

$$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{f^{-1}} x; \quad es\ decir,\ f^{-1}[f(x)] = x$$
$$x \xrightarrow{f^{-1}} f^{-1}(x) \xrightarrow{f} x; \quad es\ decir,\ f[f^{-1}(x)] = x$$

La función inversa de f^{-1} es, a su vez, f. Por eso se dice, simplemente, que las funciones f y f^{-1} son inversas o recíprocas.

Para calcular la fórmula de $f^{-1}(x)$ a partir de la fórmula de f(x) el proceso es el siguiente:

1º) Escribimos y = f(x) e intercambiamos "x" por "y" 2º) Despejamos "y"

La función f^{-1} siempre cumple: $f^{-1}[f(x)] = f[f^{-1}(x)] = x$

Ejemplos:

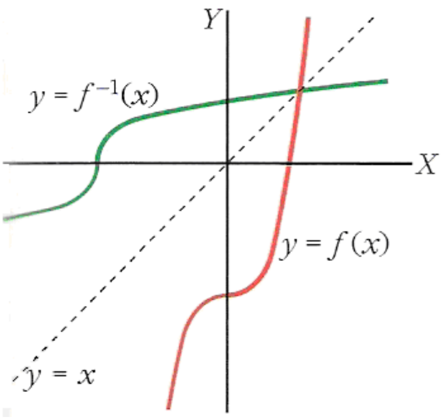
1) $f(x) = 5x - 7;\ y = 5x - 7;\ x = 5y - 7;\ y = (x+7)/5$. Se ha obtenido que $f^{-1}(x) = (x+7)/5$

2) Para hallar la inversa de $f(x) = \dfrac{2}{x-3}$ hacemos:

$$y = \frac{2}{x-3} \xrightarrow{\text{intercambiando x por y}} x = \frac{2}{y-3} \xrightarrow{\text{despejando y}} xy - 3x = 2 \Rightarrow y = \frac{2+3x}{x}$$

Luego, la función recíproca de f es $f^{-1}(x) = \dfrac{2+3x}{x}$

Las gráficas de las funciones f y f^{-1} son simétricas respecto de la bisectriz del primer cuadrante, y = x:



Actividades resueltas

1) Calcula la función recíproca de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 3x - 5$

Resolución

$$y = 3x - 5 \xrightarrow{\text{intercambiando x por y}} x = 3y - 5 \xrightarrow{\text{despejando y}} \frac{x+5}{3} = y = f^{-1}(x)$$

b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

Resolución

$$y = \sqrt{x^2 - 4} \xrightarrow{\text{intercambiando x por y}} x = \sqrt{y^2 - 4} \xrightarrow{\text{despejando y}} x^2 = \left(\sqrt{y^2 - 4}\right)^2$$

$$x^2 = y^2 - 4 \Rightarrow x^2 + 4 = y^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{x^2 + 4} \Rightarrow \text{Hay 2 inversas}: f_1^{-1}(x) = \sqrt{x^2 + 4}\ ,\ f_2^{-1}(x) = -\sqrt{x^2 + 4}$$

c) $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$

Resolución

$$y = \frac{2x-1}{x+2} \xrightarrow{\text{intercambiando x por y}} x = \frac{2y-1}{y+2} \xrightarrow{\text{despejando y}} xy + 2x = 2y - 1$$

$$xy - 2y = -2x - 1 \Rightarrow (x-2)y = -2x - 1 \Rightarrow y = \frac{-2x-1}{x-2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-2x-1}{x-2}$$

d) $f(x) = 1 + 3.2^{x-1}$

Resolución

$$y = 1 + 3.2^{x-1} \xrightarrow{\text{intercambiando x por y}} x = 1 + 3.2^{y-1} \xrightarrow{\text{despejando y}} 3.2^{y-1} = x - 1$$

$$2^{y-1} = \frac{x-1}{3} \Rightarrow \log_2(2^{y-1}) = \log_2 \frac{x-1}{3} \Rightarrow y = \log_2 \frac{x-1}{3} + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = \log_2 \frac{x-1}{3} + 1$$

e) $f(x) = 5 + \log(x - 3)$

Resolución

$$y = 5 + \log(x-3) \xrightarrow{\text{intercambiando x por y}} x = 5 + \log(y-3) \xrightarrow{\text{despejando y}} \log(y-3) = x - 5$$

$$10^{x-5} = y - 3 \Rightarrow y = 10^{x-5} + 3 \Rightarrow f^{-1}(x) = 10^{x-5} + 3$$

2) Dadas $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$, $g(x)=\dfrac{x-1}{x^2-9}$, calcular:

a) (f o g)(x)

Resolución

$$(f\circ g)(x)=f[g(x)]=\frac{1}{g(x)+1}=\frac{1}{\dfrac{x-1}{x^2-9}+1}=\frac{1}{\dfrac{x-1+x^2-9}{x^2-9}}=\frac{1}{\dfrac{x^2+x-10}{x^2-9}}=\frac{x^2-9}{x^2+x-10}$$

b) (g o f)

Resolución

$$(g\circ f)(x)=g[f(x)]=\frac{f(x)-1}{f(x)^2-9}=\frac{\dfrac{1}{x+1}-1}{\left(\dfrac{1}{x+1}\right)^2-9}=\frac{\dfrac{1-x-1}{x+1}}{\dfrac{1}{(x+1)^2}-9}=\frac{\dfrac{-x}{x+1}}{\dfrac{1-9(x+1)^2}{(x+1)^2}}=\frac{\dfrac{-x}{x+1}}{\dfrac{1-9(x^2+2x+1)}{(x+1)^2}}=$$

$$\frac{\dfrac{-x}{x+1}}{\dfrac{-9x^2-18x-8}{(x+1)^2}}=\frac{-x(x+1)^2}{(-9x^2-18x-8)(x+1)}=\frac{-x(x+1)}{-9x^2-18x-8}=\frac{-x^2-x}{-9x^2-18x-8}=\frac{x^2+x}{9x^2+18x+8}$$

c) $f^{-1}(x)$

Resolución

$$y=\frac{1}{x+1}\xrightarrow{\text{intercambiando x por y}}x=\frac{1}{y+1}\xrightarrow{\text{despejando y}}xy+x=1\Rightarrow xy=1-x\Rightarrow y=\frac{1-x}{x}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{1-x}{x}$$

d) $f\left(\dfrac{1}{g(x)}\right)$

Resolución

$$\frac{1}{\dfrac{1}{g(x)}+1}=\frac{1}{\dfrac{x^2-9}{x-1}+1}=\frac{1}{\dfrac{x^2-9+x-1}{x-1}}=\frac{x-1}{x^2+x-10}$$

3) Dadas las funciones $f(x)=\dfrac{2}{x-3}$, $g(x) = 2x + 3$, hallar f o g, g o f y la inversa de la función f

Resolución

$$(f\circ g)(x)=f[g(x)]=\frac{2}{g(x)-3}=\frac{2}{2x+3-3}=\frac{2}{2x}=\frac{1}{x}\qquad (g\circ f)(x)=g[f(x)]=2.f(x)+3=2\frac{2}{x-3}+3=\frac{4+3x-9}{x-3}=\frac{3x-5}{x-3}$$

$$y=\frac{2}{x-3}\xrightarrow{\text{intercambiando x por y}}x=\frac{2}{y-3}\xrightarrow{\text{despejando y}}xy-3x=2\Rightarrow xy=3x+2\Rightarrow y=\frac{3x+2}{x}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{3x+2}{x}$$

4) Sean las funciones $f(x)=10^{\frac{100x-1}{x}}$ $g(x) = 5 + \log x$ $h(x) = \text{sen}(2x) - 1.$

Calcula:

a) (g o f)(x)

Resolución

$$(g\circ f)(x)=g[f(x)]=5+\log f(x)=5+\log 10^{\frac{100x-1}{x}}=5+\frac{100x-1}{x}=\frac{105x-1}{x}$$

b) $f^{-1}(x)$ y su dominio

Resolución

$$y=10^{\frac{100x-1}{x}}\xrightarrow{\text{intercambiando x por y}}x=10^{\frac{100y-1}{y}}$$

Despejamos "y": $\log x=\log 10^{\frac{100y-1}{y}}=\dfrac{100y-1}{y}\Rightarrow y\log x=100y-1\Rightarrow 1=100y-y\log x$

$1=y(100-\log x)\Rightarrow y=\dfrac{1}{100-\log x}=f^{-1}(x)$. Como $100-\log x=0\Leftrightarrow \log x=100\Leftrightarrow x=2$, para que exista f^{-1} debe ser : $\begin{cases}x>0\\ x\neq 2\end{cases}$. Luego, $D(f^{-1})=(0,\,\infty)-\{2\}$

c) $h^{-1}(x)$ y su dominio

Resolución

$$y=\text{sen}(2x)-1\xrightarrow{\text{intercambiando x por y}}x=\text{sen}(2y)-1\xrightarrow{\text{despejando y}}x+1=\text{sen}(2y)$$

$$\text{arcsen}(x+1)=2y\Rightarrow \frac{\text{arcsen}(x+1)}{2}=y=f^{-1}(x)$$

Para que exista f^{-1} debe ser $-1\le x+1\le 1\xrightarrow{\text{restamos 1}}-1-1\le x\le 1-1\Rightarrow -2\le x\le 0\Rightarrow D(f^{-1})=[-2,\,0]$

5) Dada $f(x) = \text{sen}(5x) - 2$, hallar f^{-1} y $D(f^{-1})$

Resolución

$$y = \text{sen}(5x) - 2 \xrightarrow{\text{intercambiando x por y}} x = \text{sen}(5y) - 2 \xrightarrow{\text{despejando y}} x + 2 = \text{sen}(5y)$$

$$\text{arcsen}(x+2) = 5y \Rightarrow \frac{\text{arcsen}(x+2)}{5} = y \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{\text{arcsen}(x+2)}{5}$$

Para que exista f^{-1} debe ser $-1 \le x+2 \le 1 \xrightarrow{\text{restamos 2}} -1-2 \le x \le 1-2 \Rightarrow -3 \le x \le -1 \Rightarrow D(f^{-1}) = [-3, -1]$

6) Dada $f(x) = \text{arctg}\dfrac{1-x}{1+x}$, hallar $D(f)$, f^{-1} y $D(f^{-1})$

Resolución

Para que exista f debe ser $x+1 \ne 0 \Rightarrow x \ne -1 \Rightarrow D(f) = R - \{-1\}$

$$y = \text{arctg}\frac{1-x}{1+x} \xrightarrow{\text{intercambiando x por y}} x = \text{arctg}\frac{1-y}{1+y} \xrightarrow{\text{despejando y}} \text{tg}\,x = \frac{1-y}{1+y}$$

$$\text{tg}\,x + y\,\text{tg}\,x = 1 - y \Rightarrow y + y\,\text{tg}\,x = 1 - \text{tg}\,x \Rightarrow y(1+\text{tg}\,x) = 1 - \text{tg}\,x \Rightarrow y = \frac{1-\text{tg}\,x}{1+\text{tg}\,x} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1-\text{tg}\,x}{1+\text{tg}\,x}$$

Para que exista f^{-1} debe ser $\begin{cases} x \ne \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ \text{tg}\,x \ne -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ne \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x \ne \dfrac{3\pi}{4} + k'\pi \end{cases} \Rightarrow D(f^{-1}) = R - \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{3\pi}{4} + k'\pi\right\}$

7) Dada $f(x) = \dfrac{1}{2\,\text{sen}\,x - 1}$, hallar $D(f)$, f^{-1} y $D(f^{-1})$

Resolución

Para que exista f debe ser $2\,\text{sen}\,x - 1 \ne 0 \Rightarrow \text{sen}\,x \ne \dfrac{1}{2} \Rightarrow x \ne \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow D(f) = R - \left\{\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi\right\}$

$$y = \frac{1}{2\,\text{sen}\,x - 1} \xrightarrow{\text{intercambiando x por y}} x = \frac{1}{2\,\text{sen}\,y - 1} \xrightarrow{\text{despejando y}} 2x\,\text{sen}\,y - x = 1$$

$$\text{sen}\,y = \frac{x+1}{2x} \Rightarrow y = \text{arcsen}\frac{x+1}{2x} \Rightarrow f^{-1}(x) = \text{arcsen}\frac{x+1}{2x}$$

Para que exista f^{-1} debe ser $-1 \le \dfrac{x+1}{2x} \le 1$ y $2x \ne 0 \Rightarrow \begin{cases} -1 \le \dfrac{x+1}{2x} \\ \dfrac{x+1}{2x} \le 1 \end{cases}$ y $x \ne 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 \le \dfrac{x+1}{2x} + 1 \\ \dfrac{x+1}{2x} - 1 \le 0 \end{cases}$ y $x \ne 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 \le \dfrac{x+1+2x}{2x} \\ \dfrac{x+1-2x}{2x} \le 0 \end{cases}$ y $x \ne 0$

$\begin{cases} 0 \le \dfrac{3x+1}{2x} \\ \dfrac{1-x}{2x} \le 0 \end{cases}$ y $x \ne 0$; $3x+1 = 0 \leftrightarrow x = \dfrac{-1}{3}$; $2x = 0 \leftrightarrow x = 0$; $1 - x = 0 \leftrightarrow x = 1 \Rightarrow$

		$\frac{-1}{3}$		0		1	
$\frac{3x+1}{2x}$	+	0	−	∄	+	+	+
$\frac{1-x}{2x}$	−	−	−	∄	+	0	−

$\Rightarrow D(f^{-1}) = (-\infty, \dfrac{-1}{3}] \cup [1, \infty)$

8) Dada $f(x) = tg(3x + \pi/2)$, hallar D(f) y f^{-1}

Resolución

Para que exista f debe ser $3x+\dfrac{\pi}{2}\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi \Rightarrow 3x\neq k\pi \Rightarrow x\neq\dfrac{k\pi}{3} \Rightarrow D(f)=R-\left\{\dfrac{k\pi}{3}\right\}$

$$y=tg(3x+\frac{\pi}{2})\xrightarrow{\text{intercambiando x por y}}x=tg(3y+\frac{\pi}{2})\xrightarrow{\text{despejando y}}\operatorname{arctg}x=3y+\frac{\pi}{2}$$

$$y=\frac{\operatorname{arctg}x-\frac{\pi}{2}}{3}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{\operatorname{arctg}x-\frac{\pi}{2}}{3}$$

9) Dada $f(x)=\dfrac{1}{\cos x}$, hallar D(f), f^{-1} y $D(f^{-1})$

Resolución

$\cos x=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, con $k\in Z$, luego $D(f)=R-\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ \text{con } k\in Z\right\}$

$$y=\frac{1}{\cos x}\xrightarrow{x\leftrightarrow y}x=\frac{1}{\cos y}\Rightarrow \cos y=\frac{1}{x}\Rightarrow y=\arccos\frac{1}{x}\Rightarrow f^{-1}(x)=\arccos\frac{1}{x}$$

Para que exista f^{-1} debe ser $\begin{cases}x\neq 0\\ -1\le\dfrac{1}{x}\le 1\end{cases}\Rightarrow$

Si $x>0, -1\le\dfrac{1}{x}\le 1\xrightarrow{.\,x}-x\le 1\le x\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 1\\ x\ge -1\end{cases}\Leftrightarrow x\ge 1$

Si $x<0, -1\le\dfrac{1}{x}\le 1\xrightarrow{.\,x}-x\ge 1\ge x\Leftrightarrow\begin{cases}x\le -1\\ x\le 1\end{cases}\Leftrightarrow x\le -1$

Luego, sólo existe f^{-1} para $x\ge 1$ ó $x\le -1\Rightarrow D(f^{-1})=(-\infty,\,-1]\cup[1,\,\infty)$

10) Dada $f(x)=\dfrac{1}{2\cos x+1}$, hallar D(f), f^{-1} y $D(f^{-1})$

$2\cos x+1=0\Leftrightarrow \cos x=\dfrac{-1}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi\\ x=\dfrac{4\pi}{3}+2k\pi\end{cases}$, con $k\in Z$, luego $D(f)=R-\left\{\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi,\ \dfrac{4\pi}{3}+2k\pi\ \text{ con } k\in Z\right\}$

$$y=\frac{1}{2\cos x+1}\xrightarrow{x\leftrightarrow y}x=\frac{1}{2\cos y+1}\Rightarrow 2\cos y+1=\frac{1}{x}\Rightarrow \cos y=\frac{\frac{1}{x}-1}{2}=\frac{1-x}{2x}\Rightarrow y=\arccos\frac{1-x}{2x}\Rightarrow f^{-1}(x)=\arccos\frac{1-x}{2x}$$

Para que exista f^{-1} debe ser $\begin{cases}x\neq 0\\ -1\le\dfrac{1-x}{2x}\le 1\end{cases}\Rightarrow$

Si $x>0, -1\le\dfrac{1-x}{2x}\le 1\xrightarrow{.\,2x}-2x\le 1-x\le 2x\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -1\\ x\ge\dfrac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow x\ge\dfrac{1}{3}$

Si $x<0, -1\le\dfrac{1-x}{2x}\le 1\xrightarrow{.\,2x}-2x\ge 1-x\ge 2x\Leftrightarrow\begin{cases}x\le -1\\ x\le\dfrac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow x\le -1$

Luego, sólo existe f^{-1} para $x\ge\dfrac{1}{3}$ ó $x\le -1\Rightarrow D(f^{-1})=(-\infty,\,-1]\cup[\dfrac{1}{3},\,\infty)$

11) Dada $f(x)=\arccos\frac{x-3}{4}$, hallar $D(f)$ y f^{-1}

Resolución

Para que exista f debe ser $-1\le\frac{x-3}{4}\le 1 \xrightarrow{.\,4} -4\le x-3\le 4 \xrightarrow{+\,3} -1\le x\le 7 \Rightarrow D(f)=[-1,\,7]$

$y=\arccos\frac{x-3}{4}\xrightarrow{x\leftrightarrow y} x=\arccos\frac{y-3}{4}\Rightarrow \cos x=\frac{y-3}{4}\Rightarrow y=4\cos x+3\Rightarrow f^{-1}(x)=4\cos x+3\Rightarrow D(f^{-1})=R$

12) Dada $f(x)=\cos(2x)$, hallar f^{-1} y $D(f^{-1})$

$D(f)=R;\ y=\cos(2x)\xrightarrow{x\leftrightarrow y} x=\cos(2y)\Rightarrow 2y=\arccos x\Rightarrow y=\frac{\arccos x}{2}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{\arccos x}{2}\Rightarrow D(f^{-1})=[-1,\,1]$

13) Dada $f(x)=3\,\mathrm{sen}\,x$, hallar f^{-1} y $D(f^{-1})$

Resolución

$D(f)=R;\ y=3\,\mathrm{sen}\,x\xrightarrow{x\leftrightarrow y} x=3\,\mathrm{sen}\,y\Rightarrow y=\mathrm{arcsen}\,\frac{x}{3}\Rightarrow f^{-1}(x)=\mathrm{arcsen}\,\frac{x}{3}$

Para que exista f^{-1} debe ser $-1\le\frac{x}{3}\le 1\Leftrightarrow -3\le x\le 3\Rightarrow D(f^{-1})=[-3,\,3]$

14) Dada $f(x)=2\cos x+3$, , hallar f^{-1} y $D(f^{-1})$

$D(f)=R;\ y=2\cos x+3\xrightarrow{x\leftrightarrow y} x=2\cos y+3\Rightarrow y=\arccos\,\frac{x-3}{2}\Rightarrow f^{-1}(x)=\arccos\,\frac{x-3}{2}$

Para que exista f^{-1} debe ser $-1\le\frac{x-3}{2}\le 1\Leftrightarrow -2\le x-3\le 2\Leftrightarrow 1\le x\le 5\Rightarrow D(f^{-1})=[-1,\,5]$

15) $f(x)=2\mathrm{tg}\,(x/3)$, hallar $D(f)$, f^{-1} y $D(f^{-1})$

Resolución

La tangente no está definida cuando el ángulo es $\frac{\pi}{2}+k\pi$, luego $\frac{x}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow x=\frac{3\pi}{2}+3k\pi,\ k\in Z\Rightarrow D(f)=R-\left\{\frac{3\pi}{2}+3k\pi,\ k\in Z\right\}$

$y=2\mathrm{tg}\frac{x}{3}\xrightarrow{x\leftrightarrow y} x=2\mathrm{tg}\frac{y}{3}\Rightarrow\frac{y}{3}=\mathrm{arctg}\,\frac{x}{2}\Rightarrow y=3\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{2}\Rightarrow f^{-1}(x)=3\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{2}$; $D(f^{-1})=R$

16) Dada $f(x)=\mathrm{sen}(5x)-2$, hallar f^{-1} y $D(f^{-1})$

Resolución

$D(f)=R;\ y=\mathrm{sen}(5x)-2\xrightarrow{x\leftrightarrow y} x=\mathrm{sen}(5y)-2\Rightarrow 5y=\mathrm{arcsen}(x+2)\Rightarrow y=\frac{\mathrm{arcsen}(x+2)}{5}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{\mathrm{arcsen}(x+2)}{5}$

Para que exista f^{-1} debe ser $-1\le x+2\le 1\Leftrightarrow -3\le x\le -1\Rightarrow D(f^{-1})=[-3,\,-1]$

17) Dada $f(x) = \cos(x-4)$, hallar f^{-1} y $D(f^{-1})$

$$D(f) = R;\ y = \cos(x-4) \xrightarrow{x \leftrightarrow y} x = \cos(y-4) \Rightarrow y - 4 = \arccos x \Rightarrow y = 4 + \arccos x \Rightarrow f^{-1}(x) = 4 + \arccos x$$

Para que exista f^{-1} debe ser $-1 \le x \le 1 \Rightarrow D(f^{-1}) = [-1, 1]$

18) Dada $f(x) = \text{arcsen}(2x-1)$, hallar $D(f)$ y f^{-1}

Resolución

Para que exista f debe ser $-1 \le 2x - 1 \le 1 \xrightarrow{+1} 0 \le 2x \le 2 \xrightarrow{:2} 0 \le x \le 1 \Rightarrow D(f) = [0, 1]$

$$y = \text{arcsen}(2x-1) \xrightarrow{x \leftrightarrow y} x = \text{arcsen}(2y-1) \Rightarrow \text{sen}\ x = 2y - 1 \Rightarrow y = \frac{1+\text{sen}\,x}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1+\text{sen}\,x}{2}$$

19) Dada $f(x) = \text{arcsen}\dfrac{6x-5}{x}$, hallar $D(f)$ y f^{-1}

Resolución

$$\exists f \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne 0 \\ -1 \le \dfrac{6x-5}{x} \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Si } x > 0, -1 \le \dfrac{6x-5}{x} \le 1 \xrightarrow{.\,x} -x \le 6x - 5 \le x \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{5}{7} \\ x \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{5}{7} \le x \le 1 \\ \text{Si } x < 0, -1 \le \dfrac{6x-5}{x} \le 1 \xrightarrow{.\,x} -x \ge 6x - 5 \ge x \Leftrightarrow \begin{cases} x \le \dfrac{5}{7} \text{(Imposible)} \\ x \ge 1 \end{cases} \end{array} \Rightarrow D(f) = [\frac{5}{7}, 1)$$

$$y = \text{arcsen}\frac{6x-5}{x} \xrightarrow{x \leftrightarrow y} x = \text{arcsen}\frac{6y-5}{y} \Rightarrow \text{sen}\ x = \frac{6y-5}{y} \Rightarrow y\,\text{sen}\,x = 6y - 5 \Rightarrow 5 = 6y - y\,\text{sen}\,x$$

$$5 = y(6 - \text{sen}\,x) \Rightarrow y = \frac{5}{6 - \text{sen}\,x} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{5}{6 - \text{sen}\,x}$$

20) Dada $f(x) = \text{tg}(2x - \pi)$, hallar $D(f)$ y f^{-1}

Resolución

La tangente no está definida cuando el ángulo es $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$, luego $2x - \pi = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow 2x = \dfrac{3\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{3\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2},\ k \in Z$

$$D(f) = R - \left\{\frac{3\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\ k \in Z\right\};\ y = \text{tg}(2x - \pi) \xrightarrow{x \leftrightarrow y} x = \text{tg}(2y - \pi) \Rightarrow 2y - \pi = \text{arctg}\ x \Rightarrow y = \frac{\pi + \text{arctg}\ x}{2} = f^{-1}(x)$$

21) Dada $f(x) = \text{sen}(5x) - 2$, hallar f^{-1} y $D(f^{-1})$

Resolución

__Solución__:

$$y = \text{sen}(5x) - 2 \xrightarrow{\text{intercambiando x por y}} x = \text{sen}(5y) - 2 \xrightarrow{\text{despejando y}} x + 2 = \text{sen}(5y)$$

$$\text{arcsen}(x+2) = 5y \Rightarrow \frac{\text{arcsen}(x+2)}{5} = y \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{\text{arcsen}(x+2)}{5}$$

Para que exista f^{-1} debe ser $-1 \le x + 2 \le 1 \xrightarrow{\text{restamos 2}} -1 - 2 \le x \le 1 - 2 \Rightarrow -3 \le x \le -1 \Rightarrow D(f^{-1}) = [-3, -1]$

22) Dada $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1-x}{1+x}$, hallar $D(f)$, f^{-1} y $D(f^{-1})$

Resolución

Para que exista f debe ser $x+1\neq 0 \Rightarrow x\neq -1 \Rightarrow D(f)=R-\{-1\}$

$$y=\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}\xrightarrow{\text{intercambiando x por y}}x=\operatorname{arctg}\frac{1-y}{1+y}\xrightarrow{\text{despejando y}}\operatorname{tg}x=\frac{1-y}{1+y}$$

$$\operatorname{tg}x+y\operatorname{tg}x=1-y\Rightarrow y+y\operatorname{tg}x=1-\operatorname{tg}x\Rightarrow y(1+\operatorname{tg}x)=1-\operatorname{tg}x\Rightarrow y=\frac{1-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{1-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x}$$

Para que exista f^{-1} debe ser $\begin{cases} x\neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi \\ \operatorname{tg}x\neq -1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x\neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi \\ x\neq \dfrac{3\pi}{4}+k'\pi\end{cases}\Rightarrow D(f^{-1})=R-\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\dfrac{3\pi}{4}+k'\pi\right\}$

23) Dada $f(x)=\dfrac{1}{2\operatorname{sen}x-1}$, hallar $D(f)$, f^{-1} y $D(f^{-1})$

Resolución

Para que exista f debe ser $2\operatorname{sen}x-1\neq 0\Rightarrow \operatorname{sen}x\neq\dfrac{1}{2}\Rightarrow x\neq\dfrac{\pi}{6}+2k\pi\Rightarrow D(f)=R-\left\{\dfrac{\pi}{6}+2k\pi\right\}$

$$y=\frac{1}{2\operatorname{sen}x-1}\xrightarrow{\text{intercambiando x por y}}x=\frac{1}{2\operatorname{sen}y-1}\xrightarrow{\text{despejando y}}2x\operatorname{sen}y-x=1$$

$$\operatorname{sen}y=\frac{x+1}{2x}\Rightarrow y=\operatorname{arcsen}\frac{x+1}{2x}\Rightarrow f^{-1}(x)=\operatorname{arcsen}\frac{x+1}{2x}$$

Para que exista f^{-1} debe ser $-1\leq\dfrac{x+1}{2x}\leq 1$ y $2x\neq 0\Rightarrow\begin{cases}-1\leq\dfrac{x+1}{2x}\\ \dfrac{x+1}{2x}\leq 1\end{cases}$ y $x\neq 0\Rightarrow\begin{cases}0\leq\dfrac{x+1}{2x}+1\\ \dfrac{x+1}{2x}-1\leq 0\end{cases}$ y $x\neq 0\Rightarrow\begin{cases}0\leq\dfrac{x+1+2x}{2x}\\ \dfrac{x+1-2x}{2x}\leq 0\end{cases}$ y $x\neq 0$

$\begin{cases}0\leq\dfrac{3x+1}{2x}\\ \dfrac{1-x}{2x}\leq 0\end{cases}$ y $x\neq 0$; $3x+1=0\leftrightarrow x=\dfrac{-1}{3}$; $2x=0\leftrightarrow x=0$; $1-x=0\leftrightarrow x=1\Rightarrow$

		$\frac{-1}{3}$		0		1	
$\frac{3x+1}{2x}$	+	0	−	∄	+	+	+
$\frac{1-x}{2x}$	−	−	−	∄	+	0	−

$\Rightarrow D(f^{-1})=(-\infty,\dfrac{-1}{3}]\cup[1,\infty)$

24) $f(x)=\operatorname{tg}(3x+\pi/2)$, hallar $D(f)$ y f^{-1}

Resolución

Para que exista f debe ser $3x+\dfrac{\pi}{2}\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi\Rightarrow 3x\neq k\pi\Rightarrow x\neq\dfrac{k\pi}{3}\Rightarrow D(f)=R-\left\{\dfrac{k\pi}{3}\right\}$

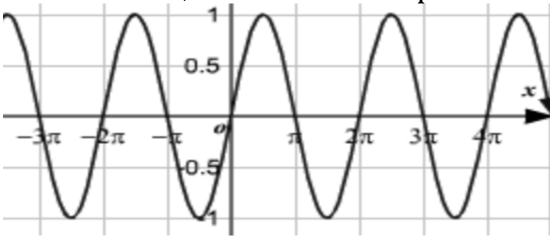
$$y=\operatorname{tg}(3x+\frac{\pi}{2})\xrightarrow{\text{intercambiando x por y}}x=\operatorname{tg}(3y+\frac{\pi}{2})\xrightarrow{\text{despejando y}}\operatorname{arctg}x=3y+\frac{\pi}{2}$$

$$y=\frac{\operatorname{arctg}x-\frac{\pi}{2}}{3}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{\operatorname{arctg}x-\frac{\pi}{2}}{3}$$

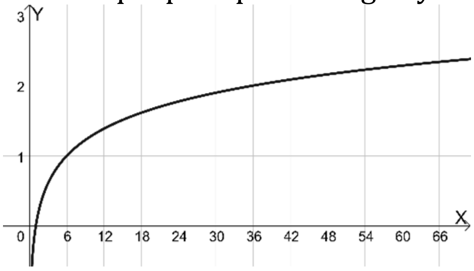
Clasificación de funciones

Veamos de qué tipo es cada función (lineal, afín, constante, cuadrática, de proporcionalidad inversa, exponencial, logarítmica o trigonométrica):

a) En la fórmula de la función, la x está en el exponente de una potencia → exponencial

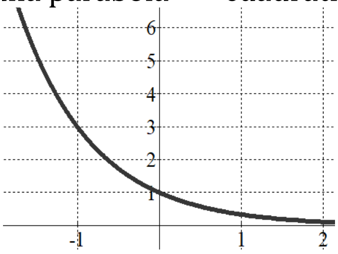
b) La gráfica es  → trigonométrica

c) La gráfica es la recta que pasa por el origen y tiene pendiente 3 → lineal

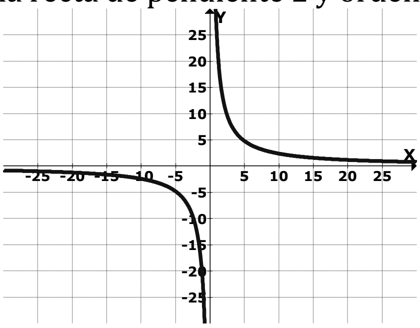
d) La gráfica es  → logarítmica

e) La gráfica es una recta horizontal → constante

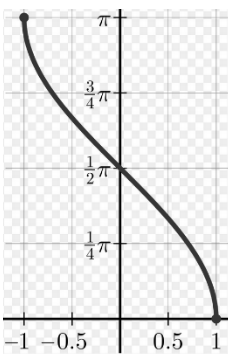
f) La gráfica es una parábola → cuadrática

g) La gráfica es  → exponencial

h) La gráfica es la recta de pendiente 2 y ordenada en el origen 7 → afín

i) La gráfica es  → de proporcionalidad inversa

j) la fórmula es del tipo $f(x) = \frac{k}{x}$, siendo $k \neq 0$ → de proporcionalidad inversa

k) la gráfica es  → trigonométrica

l) La fórmula viene dada por un polinomio de 2º grado → cuadrática