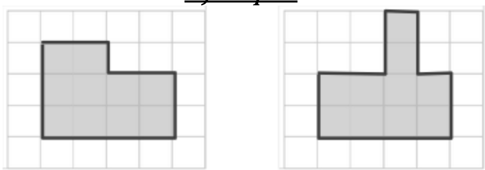
Concepto de perímetro y área de una figura

Perímetro de una figura: Es la medida del contorno, borde o línea que encierra a la figura.
Si la figura es un polígono, el perímetro es la suma de todos sus lados.
El perímetro se mide usando unidades de longitud.

Área de una figura: Es la medida de la región o superficie encerrada por la figura, es decir el área es la cantidad de superficie que ocupa. El área se mide usando unidades de superficie.

Ejemplo:

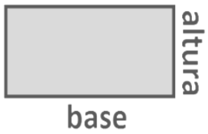


El área de cada figura es de 10 cuadritos.
El perímetro de la primera es 14 unidades y el de la segunda 16 unidades

LONGITUDES Y ÁREAS DE FIGURAS POLIGONALES

Rectángulo

Área del rectángulo: El área del rectángulo se obtiene multiplicando la base "b" por la altura "h"



$$\boxed{A(\text{rectángulo}) = \text{base} \,.\, \text{altura}}$$

Actividades resueltas

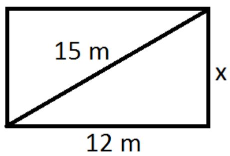
1) El patio de un colegio es rectangular y tiene 40 m de largo y 50 m de diagonal. Halla su superficie y su perímetro.

Resolución

$x = \text{ancho} \Rightarrow 50^2 = x^2 + 40^2 \Rightarrow x = 30 \Rightarrow P = 2.40 + 2.30 = 140 \text{ m} \qquad A = 40.30 = 1200 \text{ m}^2$

2) Un patio rectangular mide 12 m de largo y 15 m de diagonal. Calcula:
a) El ancho del patio.

Resolución



$15^2 = 12^2 + x^2$; $225 = 144 + x^2$; $x^2 = 81$; $x = 9$. Mide 9 m de ancho

b) El número de losas de 40 cm de lado que necesitamos para enlosarlo.

Resolución

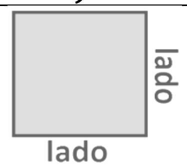
Se pasa a cm: 12 m = 1200 cm 9 m = 900 cm

Se divide el área del patio entre el área de la losa: $(1\,200 \,.\, 900) : (40^2) = 1\,080\,000 : 1\,600 = 675$ losas

Cuadrado

Área del cuadrado: El área del cuadrado se obtiene multiplicando el lado por sí mismo:

$$\boxed{\text{A(cuadrado)} = \text{lado}^2}$$



Observa que el perímetro del cuadrado es 4 veces el lado: **P = 4.lado**

Actividades resueltas

1) Halla el área, en cm^2, de un cuadrado de 0,4 m de lado

Resolución

Se pasa a cm: 0,4 m = 40 cm. A(cuadrado) $40^2 = 1600\ cm^2$

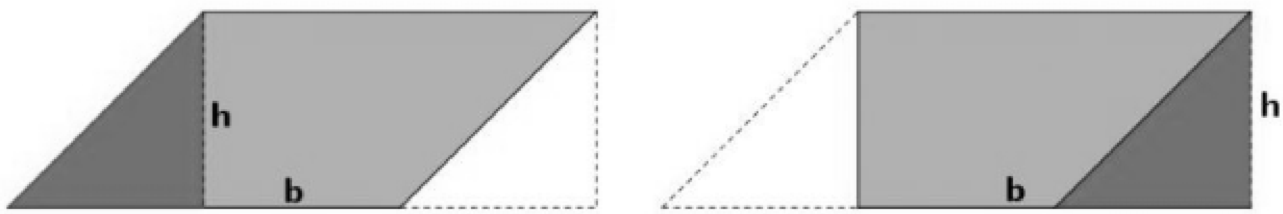
2) Calcula el precio de un mantel cuadrado de 3 m de diagonal si el m^2 de tela cuesta 15 €

Resolución

$x = \text{lado} \Rightarrow 3^2 = x^2 + x^2 \Rightarrow x^2 = 4{,}5 \Rightarrow A = x^2 = 4{,}5\ m^2 \Rightarrow \text{precio} : 4{,}5\ .\ 15 = 67{,}5$ €

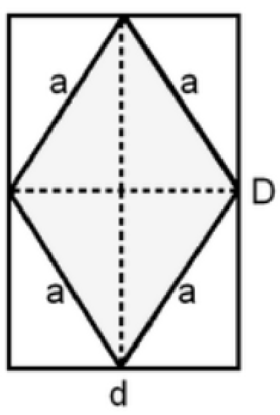
Romboide

Área del romboide: Se obtiene multiplicando la base "b" por la altura "h", $\boxed{\text{A(romboide)} = \text{b h}}$



Rombo

Área del rombo: El área del rombo es la mitad del área del rectángulo dibujado.
Por tanto, se obtiene multiplicando la diagonal mayor "D" por la menor "d" y dividiendo entre dos



$$\boxed{\text{A(rombo)} = \frac{\text{D d}}{2}}$$

Observa que el perímetro del rombo es 4 veces el lado: **P = 4.a**

Actividades resueltas

1) Halla el área de un rombo cuyas diagonales miden 12 dm y 80 cm, respectivamente

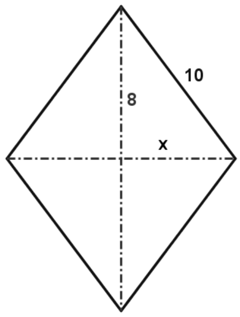
Resolución

Se pasa a cm: 12 dm = 120 cm ; $A(rombo) = \frac{D.d}{2} = \frac{120\ .\ 80}{2} = 4800\ cm^2$

2) El perímetro de un rombo es 40 cm y su diagonal mayor 16 cm. Halla el área

Resolución

Cada lado del rombo mide 40 : 4 = 10 cm



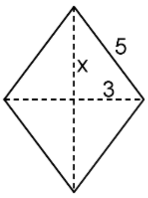
Por el teorema de Pitágoras: $10^2 = 8^2 + x^2 \rightarrow x = 6$

La diagonal menor es 6 . 2 = 12

$$A(rombo) = \frac{D\ .\ d}{2} = \frac{16\ .\ 12}{2} = 96\ cm^2$$

3) Un pequeño jardín con forma de rombo se ha rodeado con una valla de 20 m. Calcula su superficie sabiendo que la diagonal menor mide 6 m.

Resolución

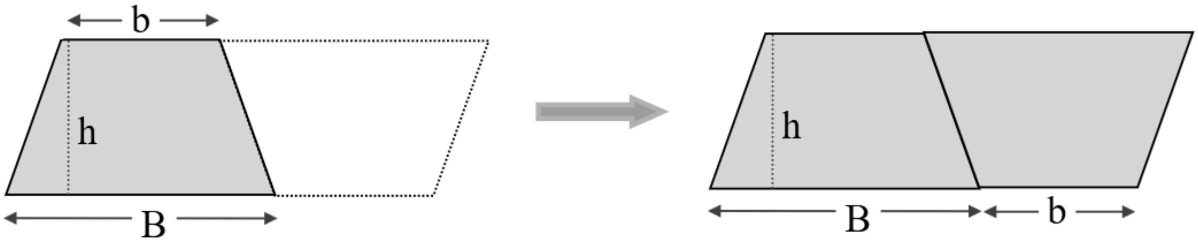


$5^2 = x^2 + 3^2 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow D = 8 \quad A = \frac{D\ .\ d}{2} = \frac{8\ .\ 6}{2} = 24\ m^2$

4) Calcula el área, en m^2, haciendo primero un dibujo representativo de

Trapecio

Área del trapecio: El área del trapecio es la mitad de la del romboide. Por tanto, se obtiene multiplicando "B + b" por la altura "h" y dividiendo entre dos $\boxed{A(trapecio) = \frac{(B+b)\ h}{2}}$



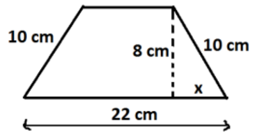
Actividades resueltas

1) Calcula el área de un trapecio isósceles, siendo la base mayor 12 cm, la base menor 8 cm y la altura 5 cm.

Resolución

$$A(trapecio) = \frac{(B+b).h}{2} = \frac{(12+8).5}{2} = 50\ cm^2$$

2) Dado el siguiente trapecio isósceles



a) Calcula x.

Resolución

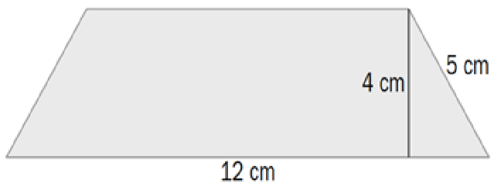
$$10^2 = 8^2 + x^2 \Rightarrow 100 = 64 + x^2 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = 6 \text{ cm}$$

b) Halla el perímetro del trapecio.

Resolución

La base menor es: 22 – (6 + 6) = 10 cm → El perímetro es: 22 + 10 + 10 + 10 = 52 cm

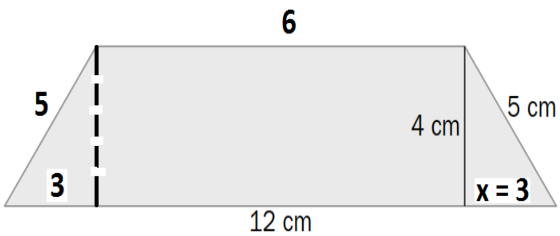
3) Halla el perímetro y área del trapecio



Resolución

Por el teorema de Pitágoras: $5^2 = 4^2 + x^2 \rightarrow x = 3$

La base menor es 12 – (3 + 3) = 6



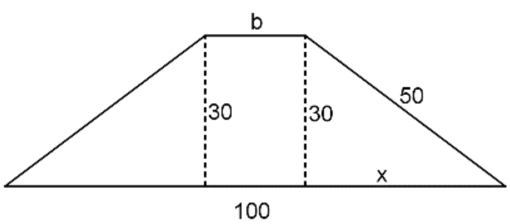
El perímetro del trapecio es P = 12 + 5 + 5 + 6 = 28 cm

$$A(trapecio) = \frac{(B+b).h}{2} = \frac{(12+6).4}{2} = 36\ cm^2$$

4) Una parcela tiene forma de trapecio isósceles de 30 m de altura, base mayor 100 m y lados no paralelos 50 m cada uno. Se ha rodeado con una valla.

a) ¿Cuánto mide la valla? b) ¿Cuál será su precio a razón de 20,50 €/m²?

Resolución



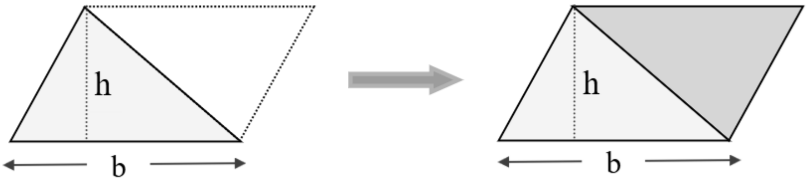
$$50^2 = x^2 + 30^2 \Rightarrow x = 40 \Rightarrow b = 100 - 2.40 = 20$$

$$P = 100 + 20 + 50.2 = 220 \text{ m} \quad A = \frac{(B+b)\ .\ h}{2} = \frac{(100+20)\ .\ 30}{2} = 1800 \text{ m}^2$$

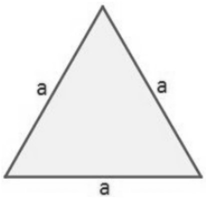
a) 220 m b) $1800\ .\ 20{,}50 = 36900$ €

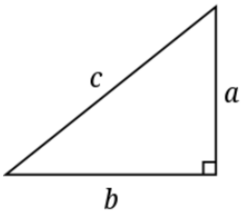
Triángulo

Área del triángulo: El área del triángulo es la mitad del área del romboide. Por tanto, se obtiene multiplicando la base "b" por la altura "h" y dividiendo entre dos $\boxed{A(\text{triángulo}) = \frac{b\,h}{2}}$



Observa que:

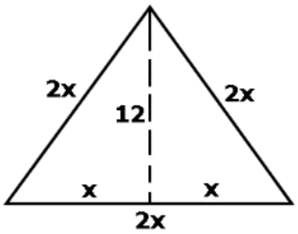
- En el triángulo equilátero  , el perímetro es 3 veces el lado, P = 3.a

- En el triángulo rectángulo  , el área es el producto de los catetos dividido entre 2: $A = \frac{b\,a}{2}$

Actividades resueltas

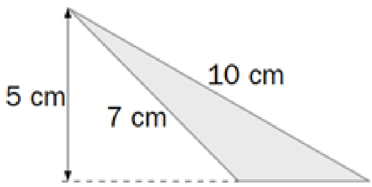
1) Un triángulo equilátero tiene 12 cm de altura. Halla el área del triángulo.

Resolución

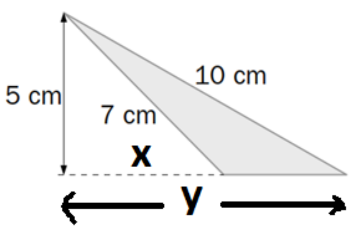


$(2x)^2 = 12^2 + x^2$; $4x^2 = 144 + x^2$; $3x^2 = 144$; $x^2 = 48$; $x = 6{,}93$ cm ;

Base = 6,93 . 2 = 13,86 ; $A(triángulo) = \frac{base\ .\ altura}{2} = \frac{13{,}86\ .\ 12}{2} = 83{,}16\ cm^2$

2) Halla el perímetro y área del triángulo 

Resolución

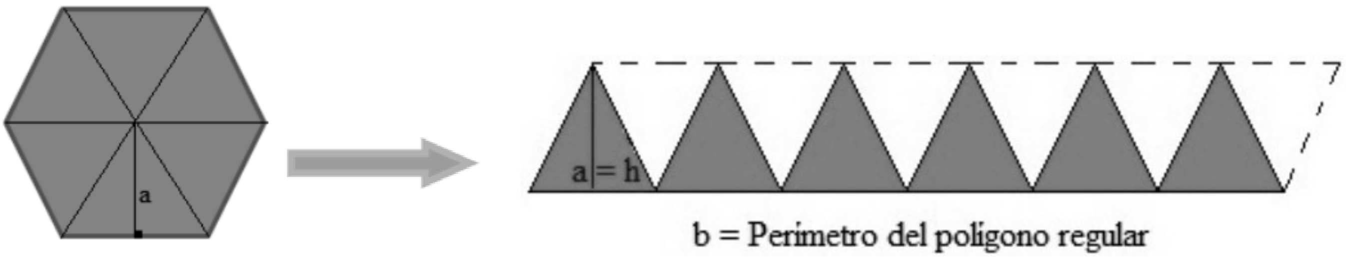


Por el teorema de Pitágoras: $7^2 = 5^2 + x^2 \rightarrow x = 4{,}9$ $10^2 = 5^2 + y^2 \rightarrow y = 8{,}66$

La base del triángulo es y – x = 8,66 – 4,9 = 3,76 $A(triángulo) = \frac{Base\ .\ altura}{2} = \frac{3{,}76\ .\ 5}{2} = 9{,}4\ cm^2$

Polígono regular

Área de un polígono regular: Se puede calcular dividiéndolo en triángulos como se indica.
Observa que el área del polígono es igual a la mitad del área del romboide dibujado.
Por tanto, se obtiene multiplicando la base (perímetro del polígono, P) por la altura (apotema del polígono regular y dividiendo entre dos: $\boxed{\text{A(polígono regular)} = \dfrac{\text{P a}}{2}}$



Actividades resueltas

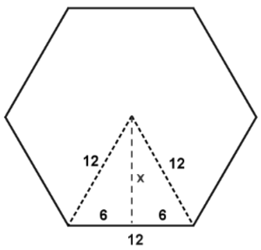
1) Halla el área de un hexágono regular de 4,5 cm de lado y 3 cm de apotema.

Resolución

$$A(hexágono) = \frac{P.a}{2} = \frac{(4,5\ .\ 6)\ .\ 3}{2} = 40,5\ cm^2$$

2) Calcula el área de un hexágono regular de 12 cm de lado

Resolución



Por el teorema de Pitágoras: $12^2 = 6^2 + x^2 \rightarrow x = 10,39$

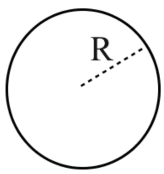
$$A(hexágono\ regular) = \frac{P\ .\ a}{2} = \frac{(12\ .\ 6)\ \ .\ \ 10,39}{2} = 374,04\ cm^2$$

LONGITUDES Y ÁREAS DE FIGURAS CIRCULARES

Circunferencia y círculo

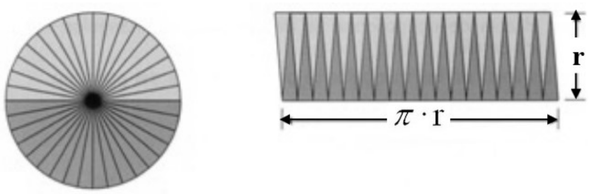
Longitud de una circunferencia: Pitágoras demostró que la razón entre la longitud L de una circunferencia y su diámetro, 2R, era constante e igual a $\pi \approx 3,14$

$$\frac{L}{2R} = \pi \Rightarrow L = \pi 2R \Rightarrow \boxed{L(\text{circunferencia}) = 2\pi R}$$



Área de un círculo: Se puede calcular dividiéndolo en sectores como se indica.

Observa que el área del círculo es igual al área del rectángulo dibujado $A = \pi r\ .\ r \Rightarrow \boxed{A(\text{círculo}) = \pi r^2}$



Actividad resuelta

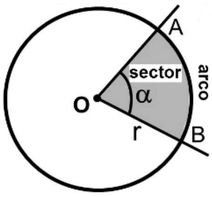
Calcula el área, en cm^2, haciendo primero un dibujo representativo de un círculo de 400 mm de diámetro

Resolución

Se pasa a cm: 400 mm = 40 cm. El radio es R = 40 : 2 = 20

$$A(\text{círculo}) = \pi . R^2 = 3{,}14 . 20^2 = 3{,}14 . 400 = 1\ 256\ cm^2$$

Arco y sector

Arco y sector circular 

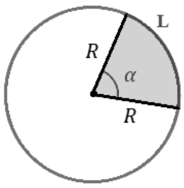
La longitud del arco de circunferencia $\overset{\frown}{AB}$ de ángulo α se puede obtener usando la proporcionalidad entre los grados y la longitud: $\begin{array}{l} 360^o \to 2\pi r \\ \alpha \to \overset{\frown}{AB} \end{array} \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \frac{2\pi r . \alpha}{360^o} \Rightarrow \boxed{\overset{\frown}{AB} = \frac{\pi r \alpha}{180^o}}$

El área del sector de circunferencia, S de ángulo α se puede obtener usando la proporcionalidad entre los grados y la superficie: $\begin{array}{l} 360^o \to \pi r^2 \\ \alpha \to S \end{array} \Rightarrow \boxed{S = \frac{\pi r^2 . \alpha}{360^o}}$

Perímetro del sector de circunferencia: $P = r + r + \overset{\frown}{AB} = 2r + \frac{\pi \cdot r \cdot \alpha}{180^o}$

Actividades resueltas

1) Halla el perímetro y área de un sector circular de 60º de una circunferencia de 10 cm de diámetro



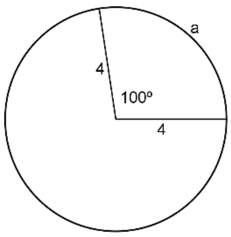
Resolución

$$R = 5\ ,\ \alpha = 60^o \Rightarrow \begin{array}{l} A(\text{sector}) = \frac{\pi R^2 . \alpha}{360^o} = \frac{\pi . 5^2 . 60}{360^o} = \frac{25\pi}{6} \cong 13{,}1\ cm^2 \\ L(\text{arco}) = \frac{\pi R \alpha}{180^o} = \frac{\pi . 5 . 60}{180^o} = \frac{5\pi}{3} \cong 5{,}2\ cm \end{array}$$

El perímetro del sector es $L + 2R = 5{,}2 + 2.5 = 15{,}2$ cm

2) Calcula el perímetro y área de un sector circular de 100º y 4 cm de radio

Resolución



$$a = \frac{2\pi R . \alpha^o}{360^o} = \frac{2\pi . 4 . 100^o}{360^o} \cong 6{,}98 \Rightarrow P(\text{sector}) = 4 + 4 + 6{,}98 = 14{,}98\ cm$$

$$A(\text{sector}) = \frac{\pi R^2 . \alpha^o}{360^o} = \frac{\pi . 4^2 . 100^o}{360^o} \cong 13{,}96\ cm^2$$

3) Calcula el perímetro y el área de los arcos y sectores circulares en los casos:
a) de 60º y 4 cm de radio

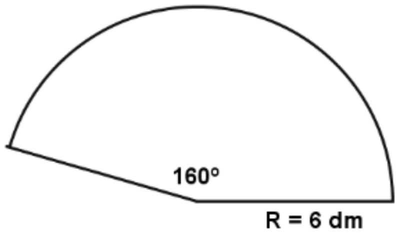
Resolución

Longitud de arco = $\frac{2\pi R}{360}.60 = \frac{2\ .\ 3{,}14.4}{360}.60 = 4{,}2$; Perímetro = 4,2 + 4 + 4 = 12,2 cm

Área del sector = $\frac{\pi R^2}{360}.60 = \frac{3{,}14.4^2}{360}.60 = 8{,}4\ \text{cm}^2$

b) de 160º y 6 dm de radio

Resolución



La longitud de una circunferencia es L = 2π R.

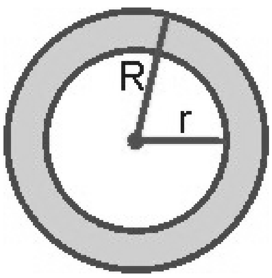
La longitud del arco es $\frac{2\ \pi\ R}{360^o}.160^o = \frac{2\ .\ 3{,}14\ .\ 6}{360^o}.160^o = 16{,}75\ dm$

El perímetro es 6 + 6 + 16,75 = 28,75 dm

El área del círculo es A = π R^2.

El área del sector circular es $\frac{\pi\ R^2}{360^o}.160^o = \frac{3{,}14\ .\ 6^2}{360^o}.160^o = 50{,}24\ dm^2$

Corona circular

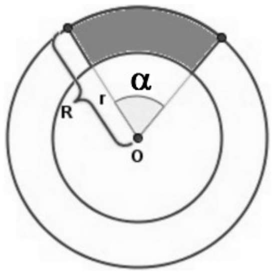


El área de la corona circular se puede calcular restando al área del círculo mayor la del menor

$$A(\text{corona}) = \pi R^2 - \pi r^2 \xrightarrow{\text{sacando factor común } \pi} \boxed{A(\text{corona}) = \pi(R^2 - r^2)}$$

Perímetro de la corona: $P(\text{corona}) = 2\pi R + 2\pi r \xrightarrow{\text{sacando factor común } 2\pi} P = 2\pi(R + r)$

Trapecio circular



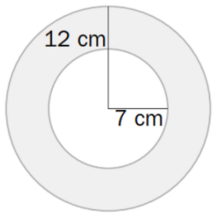
Área del trapecio circular

El área del trapecio circular, T de ángulo α se puede obtener usando la proporcionalidad entre los grados y la superficie:

$$\begin{array}{lll} 360^{\circ} & \rightarrow & A(\text{corona}) = \pi(R^2 - r^2) \\ \alpha & \rightarrow & T \end{array} \Rightarrow \boxed{T = \frac{\pi(R^2 - r^2).\alpha}{360^{\circ}}}$$

Actividad resuelta

Halla el área de la corona



Resolución

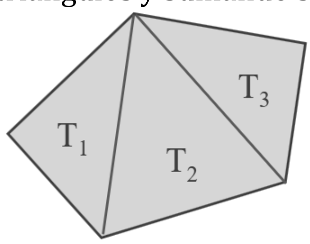
$$\begin{cases} A(\text{círculo grande}) = \pi\ R^2 = 3{,}14\ .\ 12^2 = 452{,}16 \\ A(\text{círculo pequeño}) = \pi\ r^2 = 3{,}14\ .\ 7^2 = 153{,}86 \end{cases}$$

$$A(\text{corona}) = 452{,}16 - 153{,}86 = 298{,}3\ cm^2$$

LONGITUDES Y ÁREAS DE FIGURAS COMPUESTAS

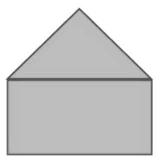
Área de un polígono irregular

Se puede calcular descomponiéndolo en triángulos y sumando sus áreas



Actividades resueltas

1) Calcula el área de la siguiente figura, en cm^2, sabiendo que el rectángulo mide 80 cm de largo y 0,4 m de ancho. La altura del triángulo es 30 cm



Resolución

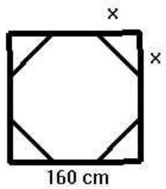
El ancho se pasa a cm: 0,4 m = 40 cm

$A(\text{rectángulo}) = 80\ .\ 40 = 3200\ cm^2$

$$A(\text{triángulo}) = \frac{base\ .\ altura}{2} = \frac{80\ .\ 30}{2} = 1200\ cm^2$$

$A(\text{figura}) = 3200 + 1200 = \boxed{4400\ cm^2}$

2) ¿Cuánto debe valer x para que la superficie del octógono regular sea 2,06 m²?

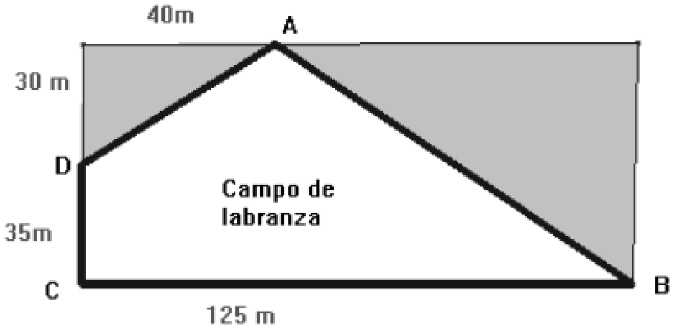


Resolución

$$2{,}06\ m^2 = 20600\ cm^2 \quad A(\text{octógono}) = A(\text{cuadrado}) - 4A(\text{triángulo})$$

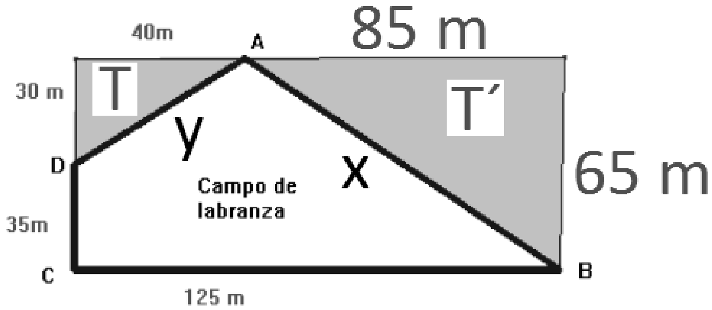
$$20600 = 160^2 - 4\frac{x^2}{2} \Rightarrow 20600 = 25600 - 2x^2 \Rightarrow x = 50\ cm$$

3) De un campo rectangular se han suprimido dos triángulos rectángulos (tal como indica la figura), resultando un cuadrilátero ABCD que se va a utilizar como campo de labranza.



a) ¿Cuál es la superficie de dicho campo de labranza?

Resolución



$$A(\text{campo}) = A(\text{rectáng}) - A(T) - A(T') = 125\ .\ 65 - \frac{30\ .\ 40}{2} - \frac{85\ .\ 65}{2} = 8125 - 600 - 2762{,}5 = \boxed{4762{,}5\ m^2}$$

b) Si se quiere rodear el campo con una cerca, ¿cuántos metros hacen falta?

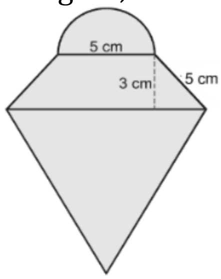
Resolución

$$\underline{Sol}.\ \text{Por el teorema de Pitágoras} \begin{cases} x^2 = 85^2 + 65^2 = 11450 \Rightarrow x = \sqrt{11450} \cong 107 \\ y^2 = 30^2 + 40^2 = 2500 \Rightarrow y = \sqrt{2500} \cong 50 \end{cases}$$

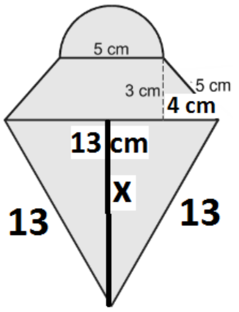
Por tanto, el perímetro del campo es: $107 + 50 + 35 + 125 = 317\ m$.

Harán falta entonces $\boxed{317\ m\ \text{de cerca}}$

4) Calcula el área y el perímetro de la siguiente figura, sabiendo que el triángulo es equilátero



Resolución

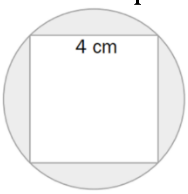


$$\underline{Sol}.\ \text{Por el teorema de Pitágoras}\ \begin{cases} \text{Se calcula el cateto que falta}: 5^2 = cat^2 + 3^2 \Rightarrow cat = 4\ cm \\ \text{Se calcula altura del triángulo}: 13^2 = x^2 + 6{,}5^2 \\ 169 = x^2 + 42{,}25 \Rightarrow x^2 = 169 - 42{,}25 = 126{,}75 \Rightarrow x \cong 11{,}26 \end{cases}$$

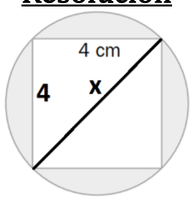
$$\begin{cases} A(semicírculo) = \dfrac{\pi R^2}{2} = \dfrac{3{,}14\ .\ 2{,}5^2}{2} \cong 9{,}8 \\ A(trapecio) = \dfrac{(B+b)\ .\ h}{2} = \dfrac{(13+5)\ .\ 3}{2} = 27 \\ A(triángulo) = \dfrac{base\ .\ altura}{2} = \dfrac{13\ .\ 11{,}26}{2} = 73{,}2 \end{cases} \quad \text{Por tanto, el área de la figura es}: 9{,}8 + 27 + 73{,}2 = \boxed{110\ cm^2}$$

$$\text{El perímetro es } P = 13.2 + 5.2 + \frac{2\ \pi\ .\ 2{,}5}{2} \cong \boxed{43{,}8\ cm}$$

5) Calcula el perímetro y área de la zona sombreada:

a) 

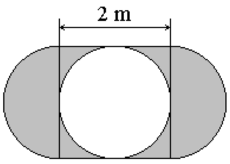
Resolución



Por el teorema de Pitágoras: $x^2 = 4^2 + 4^2 \rightarrow x = 5{,}66 =$ diámetro

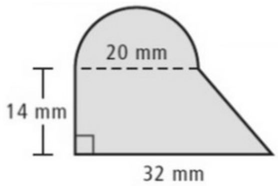
El radio del círculo es R = 5,66 : 2 = 2,83

$$\begin{cases} A(círculo) = \pi\ R^2 = 3{,}14\ .\ 2{,}83^2 = 25{,}15 \\ A(cuadrado) = 4^2 = 16 \end{cases} \qquad A(sombreada) = 25{,}15 - 16 = 9{,}15\ cm^2$$

b) 

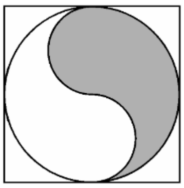
Resolución

Los dos semicírculos encajan perfectamente en el círculo del centro formándose un cuadrado. Luego, A(sombreada) = A(cuadrado) = $2^2 = 4\ m^2$

c) 

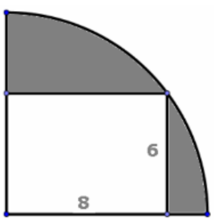
Resolución

$$A = A(\text{trapecio}) + A(\text{semicírculo}) = \frac{(32+20)14}{2} + \frac{\pi.10^2}{2} \cong 521{,}08\ mm^2$$

d)  (Dato: el lado del cuadrado mide 20 cm)

Resolución

Recomponiendo, se trata de un semicírculo de radio 10 cm $\Rightarrow A = \pi.10^2{:}2 = 157\ cm^2$.

e) 

Resolución

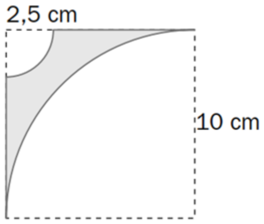
Sea x = diagonal del rectángulo = radio del cuarto de círculo $\Rightarrow x^2 = 8^2 + 6^2 \Rightarrow x = 10$

$$A = A(\text{círculo})/4 - A(\text{rectángulo}) = \pi.10^2{:}4 - 8\ .\ 6 = 30{,}5$$

f)  (Dato: el lado del cuadrado mide 20 cm)

Resolución

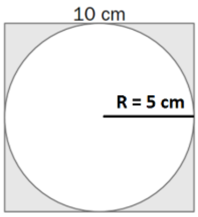
La zona sombreada es 1/8 de círculo de radio 20 cm $\Rightarrow A = A(\text{círculo})/8 = \pi.20^2{:}8 = 157\ cm^2$.

g) 

Resolución

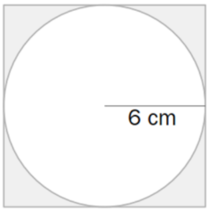
Observa que cada sector circular es la cuarta parte de un círculo

$$\begin{cases} A(cuadrado) = 10^2 = 100 \\ A(\text{sector } circular \ \ peque\tilde{n}o) = \dfrac{\pi \ R^2}{4} = \dfrac{3{,}14 \ . \ 2{,}5^2}{4} = 4{,}91 \\ A(\text{sector } circular \ \ grande) = \dfrac{\pi \ R^2}{4} = \dfrac{3{,}14 \ . \ 10^2}{4} = 78{,}5 \end{cases} \qquad A(sombreada) = 100 - 4{,}91 - 78{,}5 = 16{,}59 \ cm^2$$

h) 

Resolución

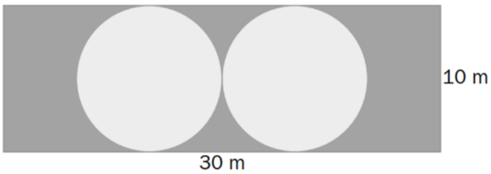
$$\begin{cases} A(cuadrado) = 10^2 = 100 \\ A(c\acute{\imath}rculo) = \pi \ R^2 = 3{,}14 \ . \ 5^2 = 78{,}5 \end{cases} \qquad A(sombreada) = 100 - 78{,}5 = 21{,}5 \ cm^2$$

i) 

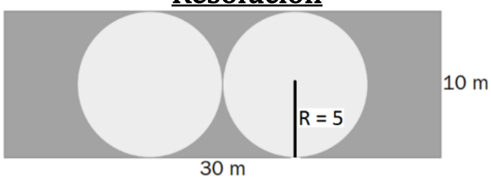
Resolución

$$\begin{cases} A(cuadrado) = 12^2 = 144 \\ A(c\acute{\imath}rculo) = \pi \ R^2 = 3{,}14 \ . \ 6^2 = 113{,}04 \end{cases} \qquad A(sombreada) = 144 - 113{,}04 = 30{,}96 \ cm^2$$

6) En un terreno rectangular se construyen dos fuentes como indica la figura. Halla la superficie que queda libre para plantar césped



Resolución



$$\begin{cases} A(\text{rectángulo}) = 30 \ . \ 10 = 300 \\ A(c\acute{\imath}rculo) = \pi \ R^2 = 3{,}14 \ . \ 5^2 = 78{,}5 \end{cases} \qquad A(sombreada) = 300 \quad - \quad 2 \ . \ 78{,}5 = 143 \ m^2$$