EXPERIMENTOS ALEATORIOS

Experimentos aleatorios y deterministas

Cuando lanzamos un dado no podemos saber de antemano qué resultado nos va a salir.
Sabemos que nos puede salir cualquier número del 1 al 6 pero no cuál.
Decimos que lanzar un dado es un experimento aleatorio.

También son experimentos aleatorios: lanzar una moneda, sacar una bola de una bolsa, sacar una carta de la baraja, etc.

Los experimentos que no son aleatorios se llaman *experimentos deterministas.*
Por ejemplo, son experimentos deterministas observar a qué temperatura hierve el agua o sacar una bola de una bolsa con bolas blancas y observar su color

Actividad resuelta

Determina si los siguientes experimentos son aleatorios o deterministas:
a) Extraer sin mirar una carta de una baraja. b) Lanzar una moneda al aire.

c) Sacar una bola de una bolsa que tiene bolas rojas y anotar el color que se obtiene.

d) Dejar caer una piedra desde 5 metros y decir con qué velocidad llegará al suelo.

e) Medir la temperatura a la que congela el agua destilada. f) Jugar a la lotería primitiva.

g) Tirar un dado h) Tirar un dado con todas las caras pintadas de rojo y anotar el color

Resolución

a) aleatorio b) aleatorio c) determinista d) determinista

e) determinista f) aleatorio g) aleatorio h) determinista

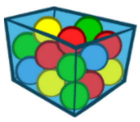
Espacio muestral en experimentos simples

Es el conjunto formado por todos los resultados que podemos obtener al hacer el experimento.
El espacio muestral se representa con la letra **E**.

Ejemplos

- Si lanzamos una moneda, el espacio muestral es E = { C , X }

- Si extraemos al azar una bola de una caja que tiene bolas rojas, verdes, azules y amarillas, el espacio muestral es E = { R, V, Az, Am }



Los experimentos aleatorios pueden ser *simples* o *compuestos*.

Son simples aquellos que constan de una sola etapa. Por ejemplo, lanzar una moneda al aire.

Son compuestos si constan de varias etapas.
Ejemplos:
- lanzar un dado cinco veces
- tirar una moneda y luego sacar una bola de una bolsa.
- tirar una moneda 3 veces
- sacar una bola de una bolsa y luego lanzar un dado

Actividad resuelta

Calcula el espacio muestral de los siguientes experimentos aleatorios simples:
a) Elegir un día de la semana
b) Elegir al azar un alumno de 1º ESO de este centro y anotar el grupo en el que está
c) Extraer una bola de una bolsa con bolas negras, blancas, marrones y amarillas y anotar el color
d) Se saca una bola al azar de una bolsa que tiene 12 bolas numeradas del 1 al 12.

Resolución

a) E = {L,M,X,J,V,S,D} b) E = {A,B,C,D,E,F,G} c) E = {N,B,M,A} d) $E = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$

Tabla de doble entrada

Es una técnica que sirve para saber **cuáles** son los resultados de un experimento aleatorio (es decir, el espacio muestral) que consta de dos etapas.

Para obtener el espacio muestral en un experimento compuesto podemos hacerlo directamente o formar una tabla o hacer un diagrama de árbol.

Ejemplo

Sacamos una bola de una bolsa que tiene 3 bolas, una roja, otra azul y otra negra y luego tiramos un dado:

color/dado	1	2	3	4	5	6
roja = r	r1	r2	r3	r4	r5	r6
azul = a	a1	a2	a3	a4	a5	a6
negra = n	n1	n2	n3	n4	n5	n6

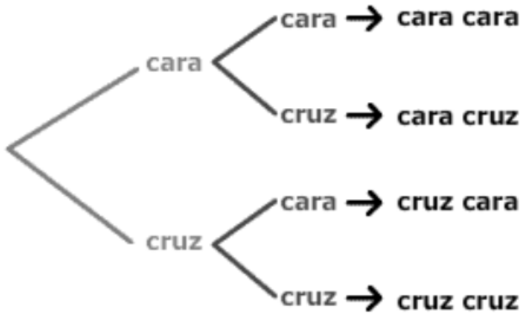
E = { r1, ..., r6, a1, ..., a6, n1, ..., n6 } Tiene 18 resultados

Diagrama de árbol

Es una técnica que sirve para saber **cuáles** son los resultados de un experimento aleatorio (es decir, el espacio muestral) que consta de dos o más etapas.

Ejemplo

Tiramos una moneda dos veces:



E = { CC, CX, XC, XX } Tiene 4 resultados

Actividad resuelta

Obtén el espacio muestral de los siguientes experimentos aleatorios compuestos usando tabla o un diagrama de árbol
a) Lanzar una moneda y luego elegir un número primo de una cifra

Resolución

	2	3	5	7
C	C-2	C-3	C-5	C-7
X	X-2	X-3	X-5	X-7

E = {C-2,C-3,C-5,C-7,X-2,X-3,X-5,X-7}

b) Sacar una bola de una caja con 2 bolas, blanca y roja y luego tirar un dado

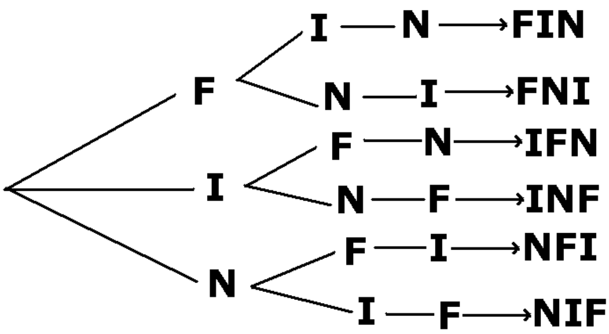
Resolución

	1	2	3	4	5	6
B	B-1	B-2	B-3	B-4	B-5	B-6
R	R-1	R-2	R-3	R-4	R-5	R-6

E = {B-1,B-2,B-3,B-4,B-5,B-6,R-1,R-2,R-3,R-4,R-5,R-6}

c) Colocar todas las letras de la palabra fin de todas las formas posibles

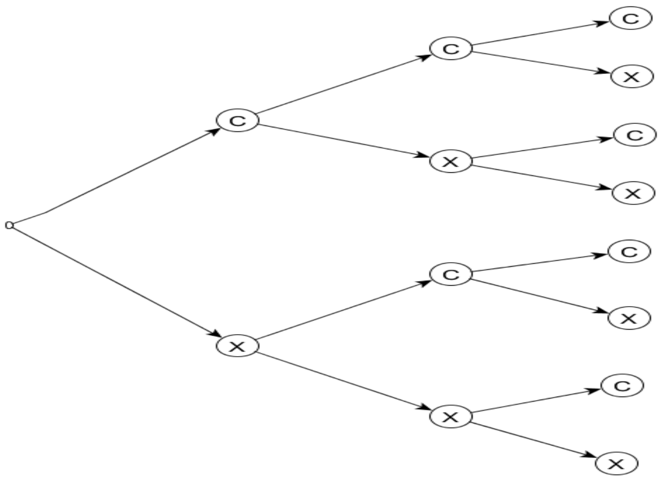
Resolución



Cómo ves hay 6 posibilidades

d) lanzar una moneda tres veces

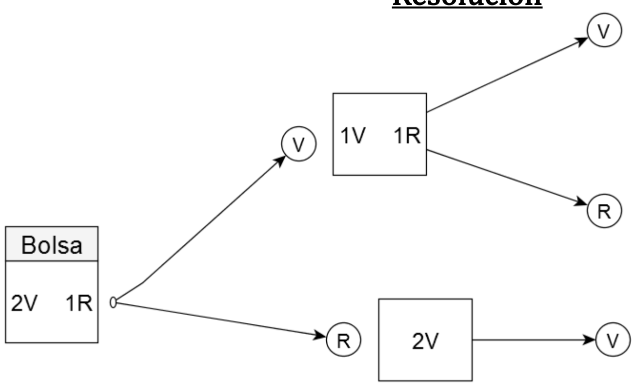
Resolución



E = {CCC , CCX , CXC , CXX , XCC , XCX , XXC , XXX}

e) Una caja tiene 2 bolas verdes y 1 roja. Sacamos sucesivamente 2 bolas sin devolución.

Resolución



E = {VV, VR, RV}

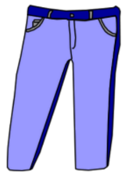
COMBINATORIA

La combinatoria estudia las diferentes formas en que se puede realizar la ordenación o agrupamiento de unos cuantos elementos siguiendo unas determinadas condiciones o reglas.

Principio de multiplicación

Es una técnica que sirve para saber *cuántos* resultados tiene un experimento que consta de dos o más etapas.
El principio de multiplicación se basa en que el número de resultados totales se calcula multiplicando el número de resultados de cada etapa.

Por ejemplo, si Roberto tiene 5 tipos de camisas, 3 tipos de pantalones y 4 tipos de zapatos


¿de cuántas formas distintas puedo combinarlos para vestirme?

En este ejemplo, se podría hacer un cuadro como el siguiente:

Prenda	camisas	pantalones	pares de zapatos
Nº de resultados	5	3	4

El número de formas distintas de combinarlos para vestirse es 5 . 3 . 4 = 60 maneras diferentes para vestirse.

Número combinatorio

Dados dos números naturales n y m con n ≥ m, se define el número combinatorio "n sobre m" así:

$$\boxed{\binom{n}{m} = \frac{n\,!}{m!\,.\,(n-m)!}}$$

El número combinatorio $\binom{n}{m}$ se puede hallar con la calculadora científica CASIO usando la tecla nCr

Por ejemplo, si queremos calcular $\binom{5}{2}$, el proceso es el siguiente: 5 $\boxed{\text{nCr}}$ 2 $\boxed{=}$.

Nos da como resultado 10

Propiedades más importantes de los números combinatorios

1) $\boxed{\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1}$ *Ejemplo*: $\begin{cases} \binom{5}{5} = \dfrac{5\,!}{5!\,.\,(5-5)!} = \dfrac{5\,!}{5!\,.\,0!} = \dfrac{5\,!}{5!\,.\,1} = 1 \\ \binom{5}{0} = \dfrac{5\,!}{0!\,.\,(5-0)!} = \dfrac{5\,!}{1\,.\,5!} = 1 \end{cases}$

2) $\boxed{\binom{n}{1} = n}$ *Ejemplo*: $\binom{5}{1} = \dfrac{5\,!}{1!\,.\,(5-1)!} = \dfrac{5\,!}{1\,.\,4!} = \dfrac{5.\cancel{4!}}{1\,.\,\cancel{4!}} = 5$

3) $\boxed{\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}}$ *Ejemplo*: $\left.\begin{cases} \binom{7}{5} = \dfrac{7\,!}{5!\,.\,(7-5)!} = \dfrac{7\,!}{5!\,.\,2!} \\ \binom{7}{2} = \dfrac{7\,!}{2!\,.\,(7-2)!} = \dfrac{7\,!}{2!\,.\,5!} \end{cases}\right]$ **son iguales**

VARIACIONES Y PERMUTACIONES

Se llaman variaciones al nº de resultados que se pueden obtener en un experimento, de forma que si cambiamos de orden los elementos en uno de los resultados se obtiene un resultado distinto.

Por ejemplo, si formamos números de 3 cifras a partir de los dígitos 1 , 2 , 3 , 4 , 5 y 6, no es lo mismo el número 243 que el 432

Variaciones sin repetición

¿Cuántos números de 4 cifras distintas se pueden formar usando los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9?
Se trata averiguar cuántas listas de 4 elementos se pueden obtener a partir de un conjunto de 9 elementos de forma que:
- No se pueden repetir los elementos en la lista porque vamos a formar números con cifras distintas
- Influye el orden en que estén colocados los elementos en la lista porque no es lo mismo, por ejemplo, el número 5721 que el número 1275

Se dice que el nº de listas son las variaciones de orden 4 tomadas de un conjunto de 9 elementos y se representan por V(9, 4)

Para saber cuántos números hay podemos usar el principio de la multiplicación:

Posición de la cifra	1ª	2ª	3ª	4ª
Nº de posibilidades	9	8	7	6

En total, se podrían formar $V(9, 4) = 9 . 8 . 7 . 6 = 3\,024$ números.

En general, las variaciones de orden k tomadas de un conjunto de n elementos, V(n, k), son las listas de k elementos que se pueden obtener a partir de un conjunto de n elementos de forma que:
- No se pueden repetir los elementos en la lista
- Influye el orden en que estén colocados los elementos en la lista

El número de variaciones sin repetición es: $\boxed{V(n,k) = \underbrace{n.(n-1).(n-2)\ldots\ldots}_{\text{k factores decrecientes empezando por n}}}$

También se puede hallar con la calculadora científica CASIO usando la función nPr
Por ejemplo, si queremos hallar V(9, 4) , el proceso es: 9 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{nCr}}$ 4 $\boxed{=}$
Nos da como resultado 3 024

Permutaciones, factorial de un número

Se llama permutación a cada una de las formas de ordenar los elementos de un conjunto. Por ejemplo, las formas de ordenar las tres primeras letras del alfabeto son
abc, acb, bac, bca, cab y cba. Hay 6 permutaciones.

Para calcular el número de permutaciones podemos usar el principio de multiplicación.

En el ejemplo anterior hay 3 formas de elegir la 1ª letra, para la 2ª letra sólo hay 2 formas porque no podemos elegir la letra que ya hemos elegido y para la 3ª letra sólo queda 1 forma.
Luego, el número de permutaciones de las 3 letras es $3 . 2 . 1 = 6$

Para saber cuántos números de 5 cifras distintas se pueden formar con los dígitos 2, 4, 6, 7 y 9 tenemos que calcular el número de permutaciones de 5 elementos, que es $5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 120$,
es decir, se pueden formar 120 números.

En general, el número de permutaciones de n elementos es: n . (n – 1) . (n – 2) . ….. . 3 . 2 . 1 .

El producto anterior se llama factorial del número n y se representa por n!

Por ejemplo, 1! = 1 , 2! = 2 . 1 = 2 , 3! = 3 . 2 . 1 = 6 , 4! = 4 . 3 . 2 . 1 = 24 , etc.

El factorial de un número también se puede hallar con la calculadora científica CASIO usando la función x!

Por ejemplo, si queremos calcular 13! , el proceso es el siguiente: 13 SHIFT $\boxed{x^{-1}}$ $\boxed{=}$.

Da 6 227 020 800.

Este resultado coincidiría con la multiplicación: 13.12.11.10.9.8.7.6.5.4.3.2.1

Como ves, el factorial de un número se va haciendo muy grande rápidamente tanto que sólo podemos calcular con nuestra calculadora hasta 69! Prueba que 70! ya nos da error porque el resultado tiene tantas cifras que no caben en la pantalla.

Permutaciones sin repetición

Si en lugar de formar números de 4 cifras distintas con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 queremos formar números de 9 cifras distintas tendríamos las V(9, 9) que se llaman permutaciones de 9 elementos y se representan por P(9). Las permutaciones son todas las formas que hay de ordenar los 9 dígitos. Por tanto, P(9) = V(9, 9) = 9 . 8. 7 . 6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 9!

En general, las permutaciones sin repetición de un conjunto de n elementos, P(n) , son las variaciones sin repetición en las que intervienen todos los elementos, es decir P(n) = V(n, n).

Las permutaciones son todas las formas de ordenar los n elementos del conjunto.

Son las variaciones sin repetición en las que, en cada resultado, intervienen todos los elementos.

El número de permutaciones son todas las formas de reordenar los elementos

Para calcular el número de permutaciones sin repetición se usa la fórmula: $\boxed{P(n) = V(n,n) = n!}$

Un caso particular son las permutaciones cíclicas o circulares:

Son permutaciones cíclicas de n elementos distintos, todas las agrupaciones de esos n elementos, dispuestos en forma circular, sin que ninguno falte o se repita.

El número de permutaciones cíclicas que pueden realizarse con n elementos es (n – 1)!

Variaciones con repetición

¿Cuántos números de 4 cifras se pueden formar usando los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9?

Se trata averiguar cuántas listas de 4 elementos se pueden obtener a partir de un conjunto de 9 elementos

de forma que:

- Se pueden repetir los elementos en la lista porque vamos a formar números con cifras que se pueden repetir
- Influye el orden en que estén colocados los elementos en la lista porque no es lo mismo, por ejemplo, el número 5751 que el número 1575

Se dice que el nº de listas son las variaciones con repetición de orden 4 tomadas de un conjunto de 9 elementos y se representan por VR(9, 4)

Para saber cuántos números hay podemos usar el principio de la multiplicación:

Posición de la cifra	1ª	2ª	3ª	4ª
Nº de posibilidades	9	9	9	9

En total, se podrían formar VR(9, 4) = 9 . 9 . 9 . 9 = 9^4 = 6 561 números.

En general, las variaciones con repetición de orden k tomadas de un conjunto de n elementos, VR(n, k), son las listas de k elementos que se pueden obtener a partir de un conjunto de n elementos de forma que:

- Se pueden repetir los elementos en la lista
- Influye el orden en que estén colocados los elementos en la lista

El <u>número de variaciones con repetición</u> es: $\boxed{VR(n,k)=n^k}$

Permutaciones con repetición

Son las distintas formas de ordenar los n elementos de un conjunto en el que hay uno que se repite "a" veces, otro "b" veces, otro "c" veces, etc. El número de permutaciones con repetición se representa por $PR^{n}_{a,b,c,\ldots}$

Para hallar el <u>nº de permutaciones con repetición</u> se usa la fórmula: $\boxed{PR^{n}_{a,b,c,\ldots}=\dfrac{n!}{a!\,.\,b!\,.\,c!\ldots}}$

Por ejemplo, para calcular el número de formas de ordenar las letras: T , T, T , K , K , O calculamos

$$PR^{6}_{3,2}=\frac{6!}{3!\,2!}=\frac{6.5.4.\cancel{3!}}{\cancel{3!}.\,2.1}=60$$. Luego, hay 60 formas

COMBINACIONES

Se llaman combinaciones al nº de resultados que se pueden obtener en un experimento de forma que si cambiamos de orden los elementos en cualquiera de los resultados se obtiene el mismo resultado. Por ejemplo, si vamos a elegir a 2 alumnos de una clase, no influye el orden en que los elijamos.

Combinaciones sin repetición

¿Cuántas formas hay de elegir 3 personas de un grupo de 7 amigos?

Se trata averiguar cuántas listas de 3 elementos se pueden obtener a partir de un conjunto de 7 elementos de forma que:

- No se pueden repetir los elementos en la lista porque lógicamente no puede repetirse la misma persona
- No influye el orden en que estén colocados los elementos en la lista porque es lo mismo, por ejemplo, {Pepe, Ana, Rocío} que {Rocío, Pepe, Ana})

Se dice que el nº de listas son las combinaciones sin repetición de orden 3 tomadas de un conjunto de 7 elementos y se representan por C(7, 3)

En general, las combinaciones sin repetición de orden k tomadas de un conjunto de n elementos, C(n, k), son las listas de k elementos que se pueden obtener a partir de un conjunto de n elementos de forma que:

- No se pueden repetir los elementos en la lista
- No influye el orden en que estén colocados los elementos en la lista

El nº de combinaciones sin repetición es: $\boxed{C(n,m)=\binom{n}{m}=\dfrac{n!}{m!\,.\,(n-m)!}}$

SUCESOS ALEATORIOS

Concepto de suceso aleatorio

Un suceso aleatorio es el conjunto formado por algunos resultados de un experimento aleatorio.
Los sucesos se representan con letras mayúsculas.
También se consideran sucesos el conjunto de todos los resultados del experimento y el que no tiene ningún resultado.

Ejemplo:

En el experimento de sacar al azar una bola de una bolsa que contiene 8 bolas numeradas del 1 al 8 algunos sucesos son: A = salir un número menor que 3 = {1, 2}   B = salir un múltiplo de 4 = {4, 8}
C = { 2 , 3 , 5 , 7 } = salir un número primo

Suceso seguro

El suceso seguro es el suceso que siempre se cumple. Está formado por todos los resultados del experimento y, por tanto, coincide con el espacio muestral, E.

Ejemplos:

Al lanzar una moneda el suceso "salir cara o cruz" es un suceso seguro
Cuando lanzamos un dado el suceso "salir un número menor que 7" es un suceso seguro

Suceso imposible

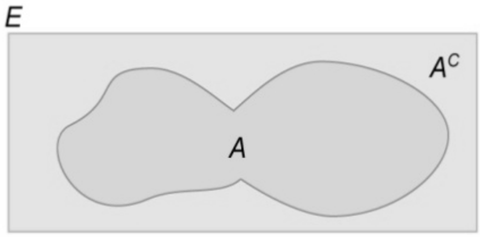
El suceso imposible es el nunca ocurre. Es el conjunto que "no tiene ningún elemento".
Este conjunto se llama conjunto vacío y se representa con el símbolo $\varnothing$

Ejemplos:

1) Al lanzar un dado "salir un número de dos cifras" es un suceso imposible.
2) Si una bolsa sólo tiene bolas blancas y negras, entonces el suceso "sacar bola roja" es un suceso imposible.

Sucesos contrarios

Dado un suceso A, el suceso contrario o complementario de A es aquel que expresa lo contrario que el suceso A y está formado por todos los resultados del experimento excepto los del suceso A.
El suceso contrario de A se representa por A^c o también por $\bar{A}$.



Ejemplos:

Si lanzamos un dado y el suceso A = "salir número par" = {2, 4, 6}, entonces el suceso contrario es

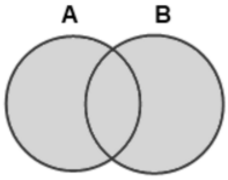
A^c = "no salir número par" = "salir número impar" = {1, 3, 5}

Al lanzar un dado, si A = "salir un número mayor que 4" = {5, 6} entonces el suceso contrario es

A^c = "salir un número menor o igual que 4" = {1, 2, 3, 4}

Unión de sucesos

La unión de dos sucesos A y B es otro suceso formado "juntando" los elementos de A y B. La unión de A y B se representa por A U B.



A U B significa: "ocurre A ó B"

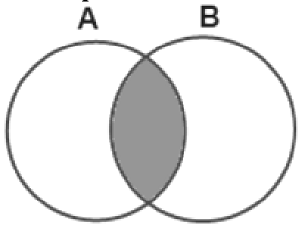
Ejemplo

En el lanzamiento de un dado, si tomamos los sucesos: $\begin{cases} A = \text{"salir n° par"} = \{2,4,6\} \\ B = \text{"salir n° primo"} = \{2,3,5\} \end{cases}$

entonces A U B = "salir par o primo" = {2, 3, 4, 5, 6}

Intersección de sucesos

La intersección de dos sucesos A y B es otro suceso formado por los elementos comunes de A y B. La intersección de los sucesos A y B se representa por A ∩ B.



A ∩ B significa: "ocurre A y B"

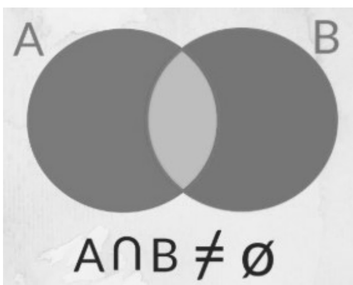
Sucesos compatibles e incompatibles

Dos sucesos A y B son compatibles cuando pueden ocurrir al mismo tiempo.

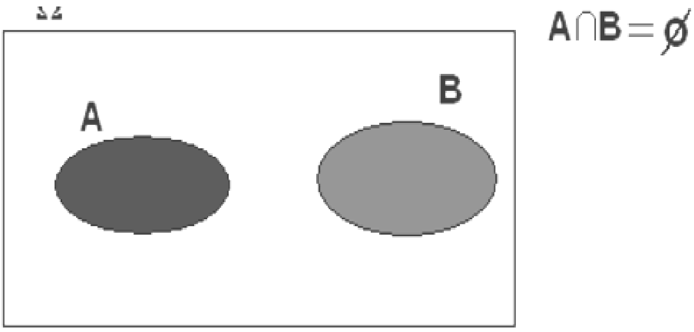
Ejemplo:

En el lanzamiento de un dado los sucesos A = "salir un número par" y B = "salir un número primo" son compatibles ya que si tiro el dado y si sale un 2, ocurren los dos sucesos a la vez: 2 es un número par y también es un número primo.

Si A y B son incompatibles, hay elementos comunes a los sucesos y por tanto $A \cap B \neq \varnothing$



Dos sucesos A y B son incompatibles cuando NO pueden ocurrir al mismo tiempo.
Si A y B son incompatibles, no hay elementos comunes a los sucesos y por tanto $A \cap B = \emptyset$



Ejemplos:

1) En el lanzamiento de un dado los sucesos A = "salir un número par" y B = "salir un número primo" son compatibles ya que si tiro el dado y si sale un 2, ocurren los dos sucesos a la vez: 2 es un número par y también es un número primo

2) Si sacamos una carta de la baraja, los sucesos A = "salir un basto", B = "salir una espada" son incompatibles, pues al sacar una carta no puede salir a la vez un basto y una espada

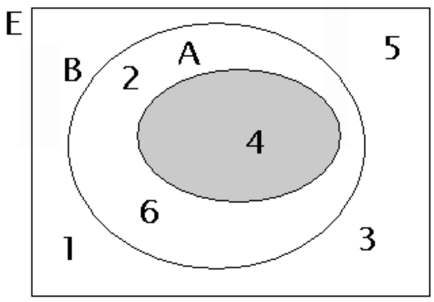
Inclusión de sucesos

Dados dos sucesos A y B , decimos que A está incluido o contenido en B (se representa $A \subset B$) si cuando ocurre A también ocurre B.

En este caso, los elementos de A están "contenidos en B.

Por ejemplo, en el lanzamiento de un dado, si A = "salir un 4" = { 4 } y
B = "salir número par" = {2, 4, 6} , entonces $A \subset B$ pues si ocurre A también ocurre B.

Lo podemos representar mediante diagrama de Venn así:



Se cumple que si $\mathbf{A \subset B \rightarrow B^c \subset A^c}$.

En el ejemplo anterior
B^c = "salir nº impar" = {1,3,5} , A^c = "salir un nº distinto de 4" = {1, 2,3,5,6} , luego $B^c \subset A^c$

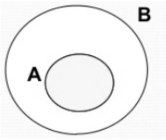
Propiedades de las operaciones con sucesos

1) Conmutativas: $\begin{cases} A\cup B = B\cup A \\ A\cap B = B\cap A \end{cases}$

2) Asociativas: $\begin{cases} (A\cup B)\cup C = A\cup (B\cup C) \\ (A\cap B)\cap C = A\cap (B\cap C) \end{cases}$

3) Distributivas: $\begin{cases} A\cup (B\cap C) = (A\cup B)\cap (A\cup C) \\ A\cap (B\cup C) = (A\cap B)\cup (A\cap C) \end{cases}$

4) $\begin{cases} A\cap B\subset A \\ A\cap B\subset B \end{cases}$ 5) $\begin{cases} A\cup A = A \\ A\cap A = A \end{cases}$ 6) $\begin{cases} A\cup\varnothing = A \\ A\cap\varnothing = \varnothing \end{cases}$

7) Si $A\subset B$  entonces $\begin{cases} A\subset A\cup B \\ B\subset A\cup B \end{cases}$, $A \cap B = A$ y $A \cup B = B$. En particular, $A \cap (A \cup B) = A$

8) A y A^c son incompatibles. Además, $A \cup A^c = E$ y $(A^c)^c = A$

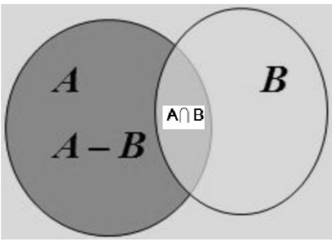
9) **Leyes de Morgan**: $\begin{cases} \boxed{(A\cup B)^C = A^C\cap B^C} \\ \boxed{(A\cap B)^C = A^C\cup B^C} \end{cases}$

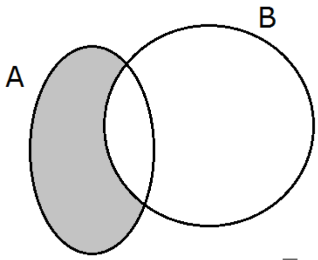
Diferencia de dos sucesos

Dados dos sucesos A y B, se define **A – B** como el suceso que expresa: "ocurre A y no ocurre B".

Es decir $A - B = A \cap B^c$.

Los elementos de A – B se obtienen tomando los elementos de A que no estén en B.
Es decir, A – B se obtiene "quitándole" a los elementos de A los de $A\cap B$

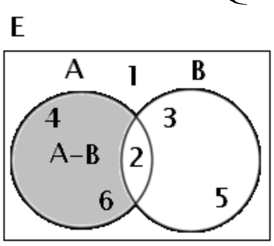


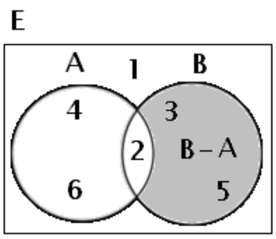


$A\text{-}B = A\cap\overline{B}$

Por tanto, $p(A-B) = \boxed{p(A\cap B^C) = p(A) - p(A\cap B)}$

Por ejemplo, en el lanzamiento de un dado, si $\begin{cases} A = \text{"salir nº par"} = \{2,4,6\} \\ B = \text{"salir nº primo"} = \{2,3,5\} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A-B = \text{"salir nº par no primo"} = \{4,6\} \\ B-A = \text{"salir nº primo no par"} = \{3,5\} \end{cases}$





$A - B$ y $A \cap B$ son incompatibles y se cumple: $A = (A - B) \cup (A \cap B)$
$A - B$, $A \cap B$ y $B - A$ son incompatibles y se cumple: $A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$

Para tres sucesos se cumpliría $\boxed{A, B \text{ y } C \text{ son independientes} \Leftrightarrow p(A \cap B \cap C) = p(A).p(B).p(C)}$

Análogamente si hubiese más de tres sucesos.

Se puede demostrar que si A y B son independientes, entonces también son independientes

A y B^c, A^c y B, A^c y B^c

PROBABILIDAD

Concepto de probabilidad

La probabilidad de un suceso indica si es más o menos frecuente que ocurra dicho suceso.
La probabilidad de un suceso A se representa por p(A) o simplemente por p y a veces se expresa en forma de %.

Regla de Laplace

Si todos los resultados tienen la misma posibilidad de aparecer (resultados equiprobables) se usa una regla llamada regla de Laplace, que consiste en dividir el número de casos favorables al suceso entre el número de casos posibles:

$$\boxed{\textbf{REGLA DE LAPLACE}: p(A) = \frac{\text{Número de casos favorables a que ocurra A}}{\text{Número de casos posibles}}}$$

La probabilidad del suceso seguro es 1 y la del suceso imposible es 0.

Ejemplos

- Si se saca una bola al azar de una bolsa que tiene 3 bolas negras y 5 azules, la probabilidad de que sea azul es $p = \frac{5}{8} = 0,625 = 62,5\%$

- Si lanzamos un dado y queremos calcular la probabilidad de que salga un número menor que 3

A = "salir menor que 3" = {1, 2}   E = {1, 2, 3, 4, 5, 6} $\Rightarrow p(A) = \frac{\text{nº de casos favorables}}{\text{nº de casos posibles}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Si no todos los resultados tienen la misma posibilidad de aparecer (resultados no equiprobables), tenemos que calcular la probabilidad de forma aproximada experimentando

Ejemplo

Cuando dejamos caer una chincheta unas veces sale con la punta hacía arriba  y otras con la punta pegando al suelo . Estos resultados no son equiprobables.

Queremos obtener de forma aproximada la probabilidad de que la chincheta caiga con la punta hacía arriba de forma experimental.

Para ello tiramos una chincheta 10000 veces y ha salido en 6000 ocasiones con la punta hacía arriba y en 4000 ocasiones con la punta pegando al suelo.

Aproximadamente, la probabilidad de que si la volvemos a tirar salga con la punta hacía arriba es

$$\frac{6000}{10000} = 0,6 = 60\%$$

Actividades resueltas

1) Se ha tirado una chincheta 1000 veces y ha salido en 600 ocasiones con la punta hacía arriba  y en 400 ocasiones con la punta pegando al suelo  .

a) Aproximadamente, ¿cuál es la el porcentaje de probabilidad de que si la volvemos a tirar salga con la punta hacía arriba?

Resolución $\frac{600}{1000} = 0,6 \xrightarrow{.\ 100} 60\%$

b) ¿Son equiprobables los resultados: "salir con la punta hacía arriba" y "salir con la punta pegando al suelo"?

Resolución

No, pues la probabilidad de que salga con la punta hacía el suelo es del 40%

2) Se lanza cuatro veces una moneda y siempre sale cruz. ¿Qué es más probable que aparezca la siguiente vez? a) Cara b) Cruz c) Es igual de probable que salga cara o cruz d) No se puede saber la probabilidad

Resolución La correcta es la c)

3) En un instituto el 32% de los alumnos repite curso. Si se elige un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no sea repetidor?

Resolución Hay un 68% de no repetidores, luego la probabilidad es del 68%

4) Una bolsa tiene 7 bolas rojas, 5 bolas negras y 4 bolas verdes. Si se saca al azar una bola, ¿cuál es el porcentaje de probabilidad de que sea negra?

Resolución $p = \frac{5}{16} = 0,3125 \xrightarrow{.\ 100} 31,25\%$

5) En una caja hay 4 bolas blancas, 7 negras y 5 azules. Si se saca una bola al azar, calcula la probabilidad de que: a) sea negra b) sea azul o negra c) no sea azul d) sea roja e) sea blanca, negra o azul

Resolución

Solución: El número total de bolas es 16, que son los casos posibles

$$\text{a)}\frac{7}{16} = 43,75\% \quad \text{b)}\ \frac{12}{16} = 75\% \quad \text{c)}\ \frac{11}{16} = 68,75\% \quad \text{d) } 0 \quad \text{e) } 1$$

6) Tienes 10 tarjetas numeradas desde 1 al 10. Si sacas una tarjeta al azar, ¿cuál es la probabilidad de que salga un número primo?

Resolución

nº de casos posibles: 10 casos favorables: 2, 3, 5, 7 (hay 4) p = 4/10 = 0,4 = 40%

7) En el experimento de sacar una carta de la baraja española (de 40 cartas), ¿cuál es la probabilidad de que no sea una figura?

Resolución

nº de casos posibles: 40 nº de casos favorables: 40 – 12 = 28 (pues hay 12 figuras).

La probabilidad es p = 28/40 = 0,7 = 70%

8) Estás jugando con un dado trucado en el que no todas las caras tienen la misma probabilidad de salir. Quieres averiguar de forma aproximada qué probabilidad tienes de que te salga el 6.
Lo lanzas 500 veces y resulta que te sale 100 veces el 6.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que salga el 6 con este dado?
b) Si el dado no estuviera trucado, ¿cuál sería el % de probabilidad de que salga el 6?

Resolución

a) 100/500 = 0,2 = 20% b) 1/6 = 0,1666… ≈ 16,7%

Propiedades de la probabilidad

1) La probabilidad del suceso seguro es 1: $p(E) = 1$

2) La probabilidad del suceso imposible es 0: $p(\varnothing) = 0$

3) La probabilidad de un suceso A siempre está entre 0 y 1: $0 \leq p(A) \leq 1$

Probabilidad de la unión de sucesos y del suceso contrario

$$\mathbf{p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)}$$

Si A y B son incompatibles, como $A \cap B = \varnothing \rightarrow p(A \cap B) = 0 \rightarrow \mathbf{p(A \cup B) = p(A) + p(B)}$

Observa que $A \cup A^c = E$; A y A^c son incompatibles.

De las dos propiedades anteriores se deduce:

$1 = p(E) = p(A \cup A^c) = p(A) + p(A^c)$. Por tanto: $\mathbf{p(A^c) = 1 - p(A)}$ $\mathbf{p(A) = 1 - p(A^c)}$

Actividad resuelta

Dados los sucesos A y B, se sabe que $p(A) = 0,3$ $p(B) = 0,6$ y $p(A \cup B) = 0,85$

a) Halla $p(A \cap B)$ b) Averigua si A y B son compatibles o incompatibles

Resolución

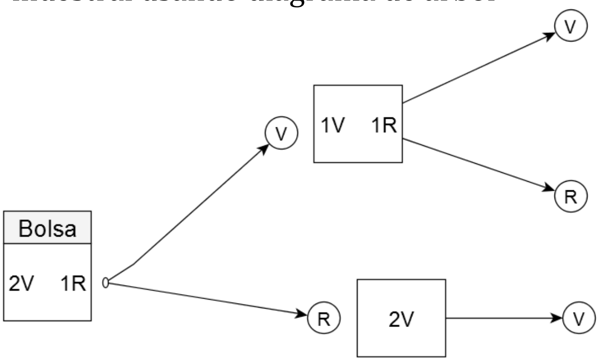
a) $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \Rightarrow p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B) = 0,3 + 0,6 - 0,85 = 0,05$

b) Son compatibles porque $p(A \cap B) \neq 0$

PROBABILIDADES COMPUESTAS

Probabilidad en experimentos compuestos

1) Una caja tiene 2 bolas verdes y 1 roja. Sacamos sucesivamente 2 bolas sin devolución.
Hallemos el espacio muestral usando diagrama de árbol



E = {VV, VR, RV}

Por ejemplo, el suceso contrario de A = "las dos bolas son verdes" es
A^c = "alguna bola no es verde" = {VR, RV} y su probabilidad es
$p(A^c) = \frac{2}{3} = 0{,}6666\ldots \xrightarrow{.\,100} 66{,}7\%$, aproximadamente 2/3

2) En un hospital se han producido 200 nacimientos en un mes. De ellos, 105 son varones y, de éstos, 21 tienen los ojos azules. También se ha observado que 57 de las niñas nacidas en ese mes no tienen los ojos azules.
Organicemos los datos en una tabla (llamada tabla de contingencia)

	varones	hembras	Total
tienen ojos azules	21	38	59
no tienen ojos azules	84	57	141
Total	105	95	200

Si se elige una persona al azar, usando la tabla, podemos calcular, por ejemplo, las siguientes probabilidades:
p(de que sea hembra) = 95/200 = 0,475 = 47,5%

p(de que sea varón con ojos azules) = 21/200 = 0,105 = 10,5%

p(de que no tenga los ojos azules) = 141/200 = 0,705 = 70,5%

3) En cierta región de España se sabe que la probabilidad de que llueva el viernes es 70%, de que llueva el sábado es 40% y de que llueva el domingo es 80%.
Entonces, por ejemplo, podemos calcular las siguientes probabilidades:

p(de que llueva el fin de semana) = 0,7 . 0,4 . 0,8 = 0,224 = 22,4%

p(de que llueva el viernes, el domingo y no el sábado) = 0,7 . 0,8 . 0,6 = 0,336 = 33,6%

Probabilidad condicionada

Dados dos sucesos, A y B, con $p(B) \neq 0$, se llama probabilidad de A condicionada a B a la probabilidad de que ocurra A sabiendo que ha ocurrido B.

La probabilidad de A condicionada a B se representa por p(A / B) y se puede calcular usando la fórmula:

$$\boxed{p(A / B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}}$$

Si despejamos $p(A \cap B)$ de la fórmula anterior se obtiene: $\boxed{p(A \cap B) = p(A/B) \,.\, p(B)}$

Razonando de forma análoga para B condicionado a A: $\boxed{p(B / A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}}$

$$\boxed{p(A \cap B) = p(B/A) \,.\, p(A)}$$

Sucesos independientes

Dos sucesos A y B son independientes si $p(A/B) = p(A)$ y $p(B/A) = p(B)$

Por tanto, si A y B son independientes $\boxed{\mathbf{p(A \cap B) = p(A) \,.\, p(B)}}$

Propiedades

Si A y B son independientes

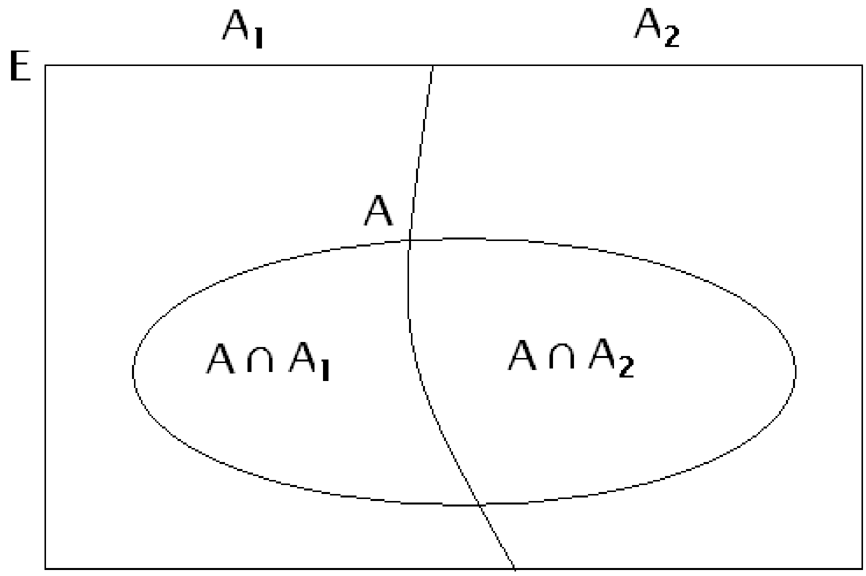
$$p(A \cap B^C) = p(A) - p(A \cap B) \xrightarrow{\text{como A y B son independientes}} p(A) - p(A) \,.\, p(B)$$

Sacando factor común: $p(A).\,[1 - p(B)] = p(A) \,.\, p(B^C) \Rightarrow$ A y B^C son independientes

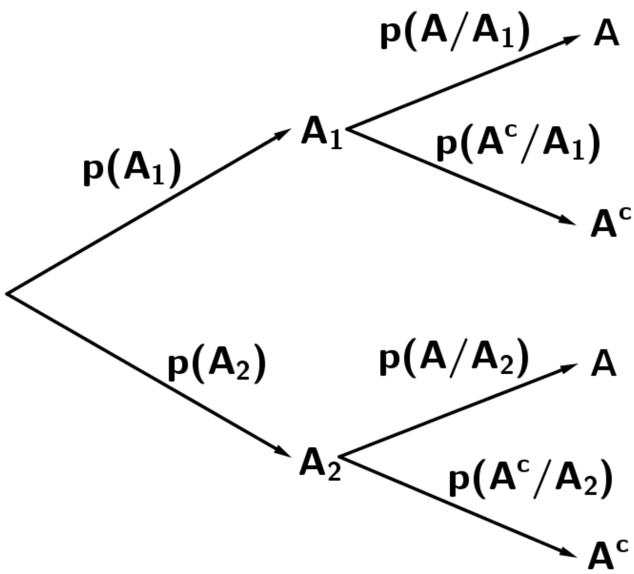
Ten en cuenta que
$$\begin{cases} p(A / B^C) = \dfrac{p(A \cap B^C)}{p(B^C)} = \dfrac{p(A) - p(A \cap B)}{1 - p(B)} \\[2ex] p(A^C / B) = \dfrac{p(A^C \cap B)}{p(B)} = \dfrac{p(B) - p(A \cap B)}{p(B)} \\[2ex] p(A^C / B^C) = \dfrac{p(A^C \cap B^C)}{p(B^C)} = \dfrac{p(A \cup B)^C}{1 - p(B)} = \dfrac{1 - p(A \cup B)}{1 - p(B)} \end{cases}$$

Teorema de la probabilidad total

Sean A_1 , A_2 son sucesos incompatibles con $A_1 \cup A_2 = E$ y A es un suceso cualquiera



$$\text{Como } p(A \cap B) = p(B)\,.\,p(A/B) \Rightarrow \begin{cases} p(A \cap A_1) = p(A_1)\,.\,p(A/A_1) \\ p(A \cap A_2) = p(A_2)\,.\,p(A/A_2) \end{cases}$$



$$\mathbf{p(A_1 \cap A) = p(A_1).p(A/A_1)}$$

$$\mathbf{p(A_1 \cap A^c) = p(A_1).p(A^c/A_1)}$$

$$\mathbf{p(A_2 \cap A) = p(A_2).p(A/A_2)}$$

$$\mathbf{p(A_2 \cap A^c) = p(A_2).p(A^c/A_2)}$$

$$p(A) = p(A \cap A_1) + p(A \cap A_2) = p(A_1)\,.\,p(A/A_1) + p(A_2)\,.\,p(A/A_2)$$

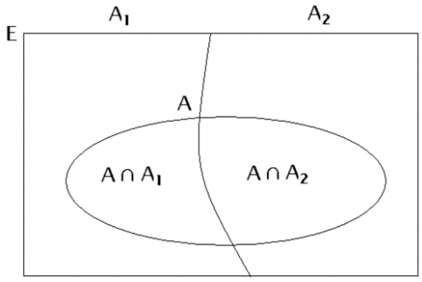
Por tanto, se cumple $\boxed{\underline{\textbf{teorema de la probabilidad total}} : p(A) = p(A_1).p(A/A_1) + p(A_2).p(A/A_2)}$

Ejemplo

Se tira un dado, si sale un 1 , 2 , 3 ó 4 se saca una bola de una urna U_1 que contiene 3 bolas azules y 2 rojas; si sale un 5 ó un 6 se saca una bola de otra urna U_2 que contiene 3 bolas azules y 1 roja. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea azul?

Sean A_1 = sacar un 1, 2, 3 ó 4 = sacar bola de la urna U_1

A_2 = sacar un 5 ó un 6 = sacar bola de la urna U_2 A = sacar bola azul



Observa que A_1 , A_2 son sucesos incompatibles tales que $A_1 \cup A_2 = E$

Fíjate que $A \cap A_1$, $A \cap A_2$ son también incompatibles y $A = (A \cap A_1) \cup (A \cap A_2)$, luego:

$p(A) = p(A \cap A_1) + p(A \cap A_2) = p(A_1) . p(A/A_1) + p(A_2) . p(A/A_2)$

$p(A_1) = 4/6 = 2/3$; $p(A_2) = 2/6 = 1/3$; $p(A/A_1) = 3/5$; $p(A/A_2) = 3/4$

Luego, $p(A) = 3/5 . 2/3 + 3/4 . 1/3 = 2/5 + 1/4 = 13/20$

Fórmulas de Bayes

Usando la definición de probabilidad condicionada y el teorema de la probabilidad total deducimos

$$\begin{cases} p(A_1/A) = \dfrac{p(A_1 \cap A)}{p(A)} \\ p(A_2/A) = \dfrac{p(A_2 \cap A)}{p(A)} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\underline{\textbf{fórmulas de Bayes}}: \begin{cases} p(A_1/A) = \dfrac{p(A_1).p(A/A_1)}{p(A)} \\ p(A_2/A) = \dfrac{p(A_2).p(A/A_2)}{p(A)} \end{cases}, \text{ siendo } p(A) = p(A_1).p(A/A_1) + p(A_2).p(A/A_2)}$$

<u>Nota</u>: Las fórmulas son válidas para más de 2 sucesos, por ejemplo, para 3 sucesos A_1 , A_2 , A_3 incompatibles 2 a 2, tales que $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = E$ y A un suceso cualquiera.

Ejemplo

En la misma situación del ejemplo anterior: Si la bola extraída es azul,

La probabilidad de que se haya sacado la bola de la urna U_1 sería

$$p(A_1/A) = \frac{P(A_1 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A_1).P(A/A_1)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}}{\frac{13}{20}} = \frac{8}{13}$$

La probabilidad de que se haya sacado la bola de la urna U_2 sería

$$p(A_2/A) = \frac{P(A_2 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A_2).P(A/A_2)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}}{\frac{13}{20}} = \frac{5}{13}$$