ECUACIONES LINEALES Y SISTEMAS CON DOS INCÓGNITAS

Ecuaciones lineales con dos incógnitas

Las ecuaciones con un término en x, otro en y y un término independiente son ecuaciones lineales con dos incógnitas, por ejemplo, $3x + 2y = 6$ es una ecuación lineal con dos incógnitas.

En general, una ecuación lineal con dos incógnitas es aquella que se puede expresar de la forma $ax + by = c$.

Para las ecuaciones con dos incógnitas puedes usar las mismas reglas que estudiaste en cursos pasados:
- Regla de la suma: Se pueden pasar los términos de un miembro a otro con signo contrario y la ecuación que se obtiene es equivalente, es decir tiene las mismas soluciones.
Por ejemplo, $2x - y = 7$ es equivalente a $2x - 7 = y$

- Regla del producto: Si se multiplican o dividen los dos miembros por un mismo número, no nulo, se obtiene una ecuación equivalente.

Resolver una ecuación consiste en encontrar una pareja de valores, uno para la "x" y otro para la "y", que cumple la ecuación.

En general, una ecuación lineal con dos incógnitas tiene infinitas soluciones y se corresponden con los puntos de una recta del plano.
Por ejemplo, para la ecuación $x + y = 10$ algunas soluciones serían

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1,7	6,35	etc
y	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	8,3	3,65	etc

Excepcionalmente hay algunas ecuaciones lineales que no tienen solución. Por ejemplo, $0x + 0y = 5$ no tiene solución porque es falso que sea $0 = 5$. Estas ecuaciones se llaman incompatibles.

Si quisiéramos dibujar la recta que corresponde a una ecuación lineal con dos incógnitas basta con calcular 2 puntos y unirlos con una regla.
Una forma de calcular puntos de una recta es darle un valor a una incógnita, sustituir y calcular la otra incógnita.

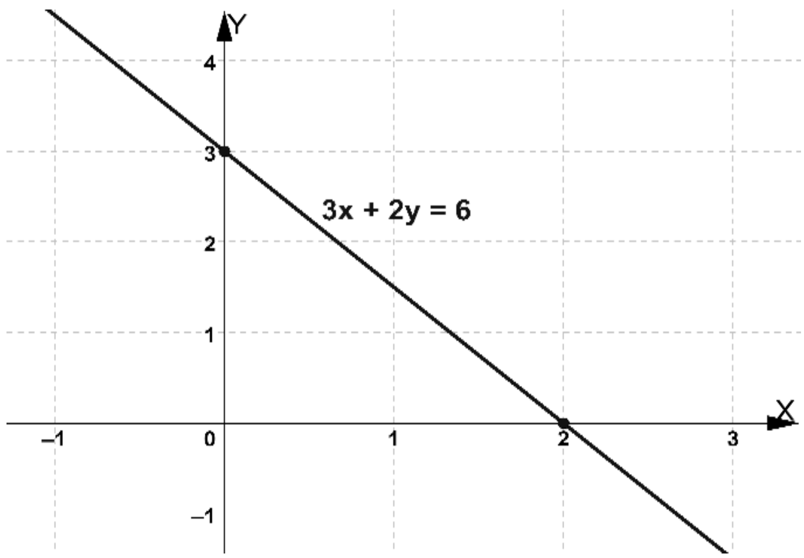
Actividad resuelta

Dibuja la recta $3x + 2y = 6$.

Resolución

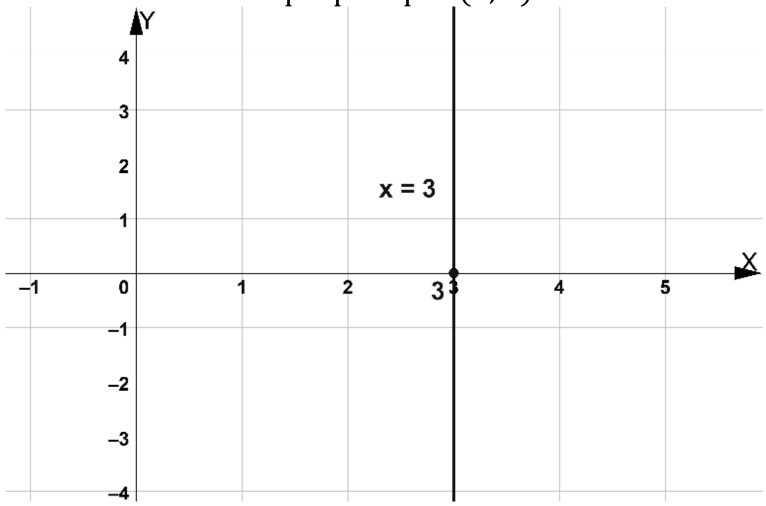
Si $x = 0$, $3.0 + 2y = 6$, $y = 3$. Punto (0, 3)
Si $y = 0$, $3x + 2.0 = 6$, $x = 2$. Punto (2, 0)

x	0	2
y	3	0



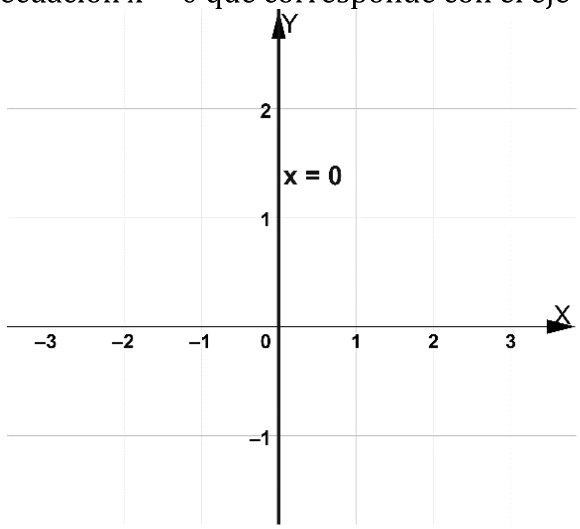
Rectas horizontales y verticales

La ecuación $x = 3$ se interpreta como una ecuación lineal con dos incógnitas, $x + 0y = 3$.
Su representación gráfica es la recta vertical que pasa por (3, 0)

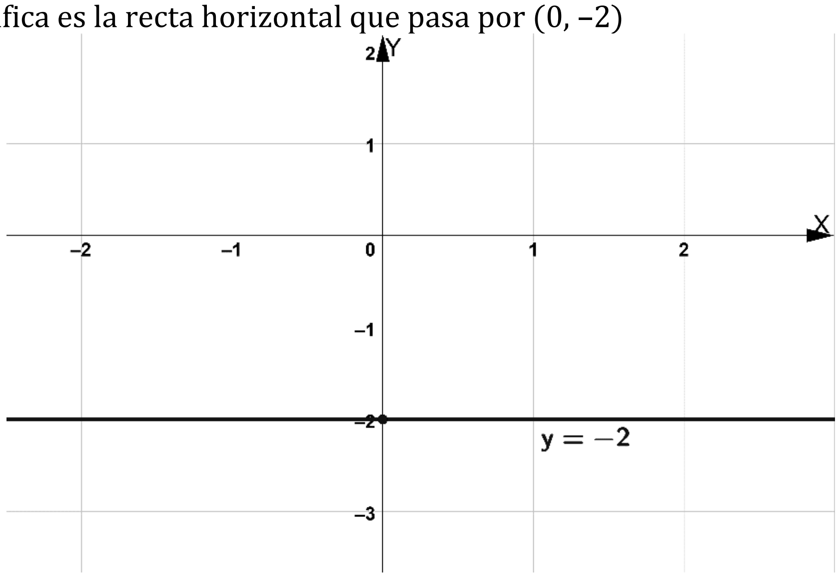


En general, la ecuación $x = k$ representa la recta vertical que pasa por (k, 0)

Como caso especial tenemos la ecuación $x = 0$ que corresponde con el eje Y

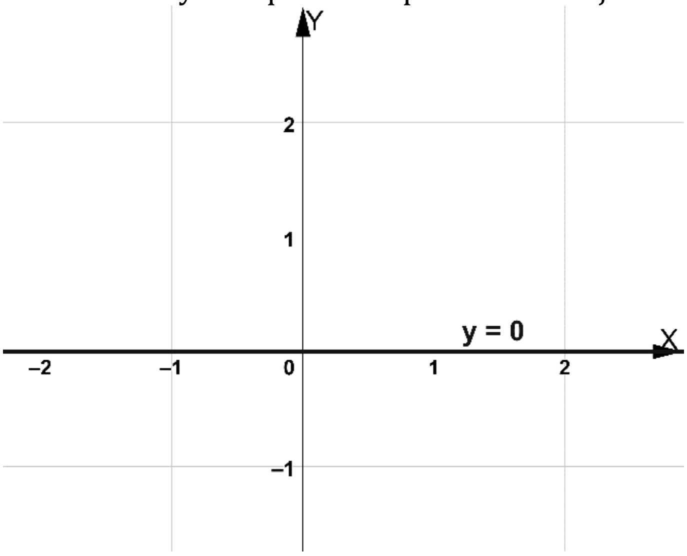


La ecuación $y = –2$ se interpreta como una ecuación lineal con dos incógnitas, $0x + y = –2$.
Su representación gráfica es la recta horizontal que pasa por (0, –2)



En general, la ecuación $y = k$ representa la recta horizontal que pasa por (0, k)

Como caso especial tenemos la ecuación $y = 0$ que corresponde con el eje X



Actividad resuelta

Dibuja las siguientes rectas:

a) $2x - 3y = 6$

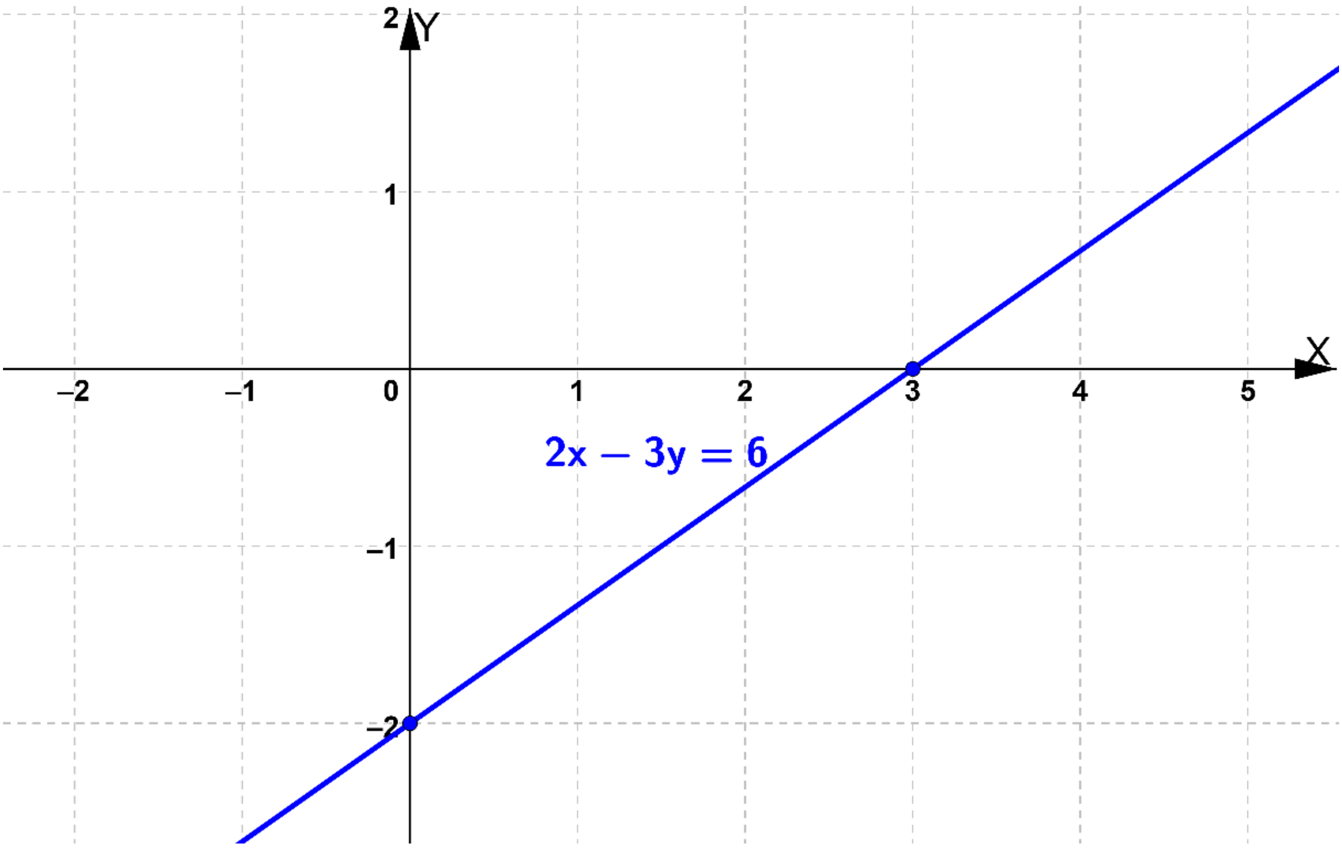
Resolución

$x = 0, \quad 2.0 - 3y = 6, \quad y = -2$

$y = 0, \quad 2x - 3.0 = 6, \quad x = 3$

x	0	3
y	−2	0

Dibujamos los ejes de coordenadas y hacemos la escala adecuada teniendo en cuenta que en el eje X los valores que hay que representar son 0 y 3 y en el eje Y los valores son −2 y 0



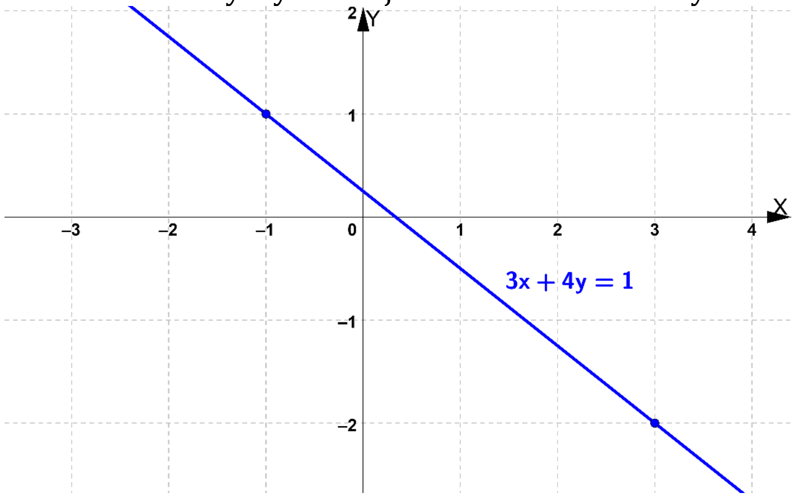
b) $3x + 4y = 1$

Resolución

$x = 3, \quad 3.3 + 4y = 1, \quad y = -2$
$y = 1, \quad 3x + 4.1 = 1, \quad x = -1$

x	3	−1
y	−2	1

Dibujamos los ejes de coordenadas y hacemos la escala adecuada teniendo en cuenta que en el eje X los valores que hay que representar son −1 y 3 y en el eje Y los valores son −2 y 1



Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas es el conjunto formado por dos ecuaciones lineales. Por ejemplo, $\begin{cases} 2x - 5y = -4 \\ x + 3y = 9 \end{cases}$ es un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

En general, un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas se puede escribir de la forma

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Resolver un sistema consiste en encontrar una pareja de valores, un valor para la "x" y otro para la "y", que cumpla las dos ecuaciones a la vez.

Los métodos más usados para resolver sistemas son el método de sustitución, igualación y reducción.

Método de sustitución: Consiste en despejar una incógnita en una ecuación y sustituirla en la otra ecuación. De esta forma se llega a una ecuación con una incógnita.

$\begin{cases} x + y = -1 \\ 2x - 3y = 18 \end{cases}$ $x = -1 - y$. Sustituimos: $2(-1 - y) - 3y = 18, \quad -2 - 2y - 3y = 18, \quad -2 - 5y = 18, \quad -2 - 18 = 5y, \quad -20 = 5y, \quad y = -4$; $x = -1 - (-4); \quad x = 3$

Método de igualación: Consiste en despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones y luego igualar las expresiones obtenidas. De esta forma se llega a una ecuación con una incógnita.

Método de reducción: Consiste en buscar otro sistema equivalente, o sea con las mismas soluciones, en el que los coeficientes de una de las incógnitas sean iguales o números opuestos.

Esto se consigue multiplicando las ecuaciones por números adecuados y luego sumándolas o restándolas.

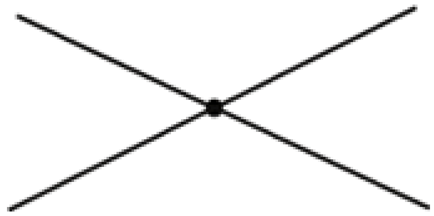
Ejemplo: $\begin{cases} 5x - 2y = 8 \\ 3x + 7y = 13 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (5x - 2y = 8)\ .\ 7 \\ (3x + 7y = 13)\ .\ 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 35x - 14y = 56 \\ 6x + 14y = 26 \end{cases}$

Sumando las ecuaciones: $41x = 82 \rightarrow x = 2$

Sustituimos $x = 2$, por ejemplo, en la 2ª ecuación: $3.2 + 7y = 13; \quad 6 + 7y = 13; \quad 7y = 7; \quad y = 1$

Interpretación y representación gráfica de un sistema de ecuaciones lineales

- Si el sistema tiene solución única, es decir, podemos encontrar un valor de la x y otro de la y, el sistema se llama compatible determinado (S.C.D.) y las ecuaciones representan a dos rectas secantes



La solución del sistema se corresponde con el punto de corte de las rectas.

Actividades resueltas

1) Dibuja las rectas $x + y = -1$, $2x - 3y = 18$ y obtén el punto de corte indicando sus coordenadas

Resolución

Antes hemos visto que la única solución del sistema $\begin{cases} x + y = -1 \\ 2x - 3y = 18 \end{cases}$ es $x = 3$, $y = -4$.

Para hacer la representación gráfica:

- Se dibuja la recta $x + y = -1$. Para ello basta con hallar dos puntos de la misma.

Para $y = 0$, $x + 0 = -1$, $x = -1$, $(-1, 0)$

Para $x = 0$, $0 + y = -1$, $y = -1$, $(0, -1)$

x	–1	0
y	0	–1

- Se dibuja la recta $2x - 3y = 18$. Para ello basta con hallar dos puntos de la misma.

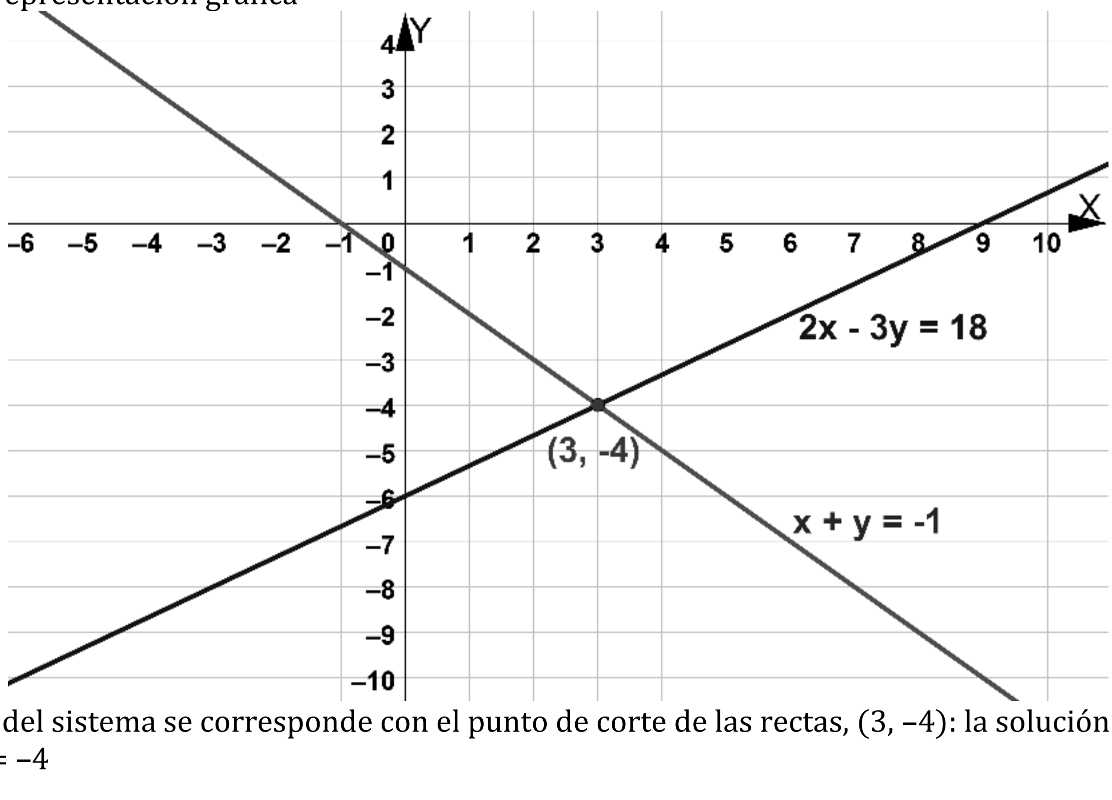
Para $y = 0$, $2x - 3.0 = 18$, $x = 9$, $(9, 0)$

Para $x = 0$, $2.0 - 3y = 18$, $y = -6$, $(0, -6)$

x	9	0
y	0	–6

Dibujamos los ejes de coordenadas y hacemos la escala adecuada teniendo en cuenta que en el eje X los valores que hay que representar son –1, 0 y 9 y en el eje Y los valores son –6, –1 y 0

Observa la representación gráfica



La solución del sistema se corresponde con el punto de corte de las rectas, $(3, -4)$: la solución es $x = 3$, $y = -4$

2) Dibuja las rectas $5x - 2y = 15$, $4x + 7y = 98$ y obtén el punto de corte indicando sus coordenadas

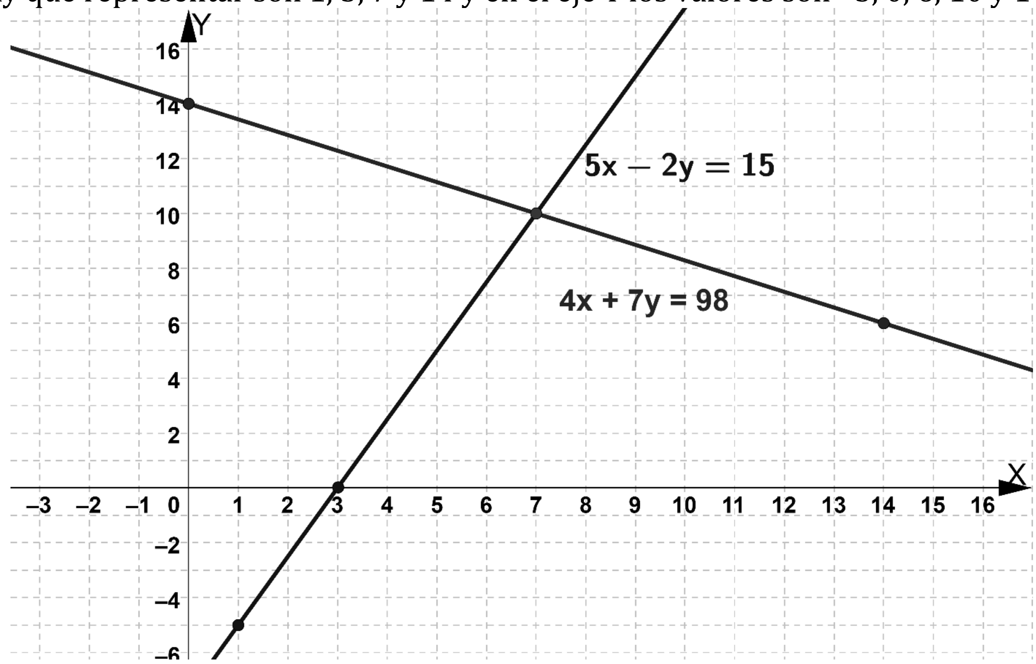
Resolución

<table>
<tr>
<td>Recta $5x - 2y = 15$
$x = 1,\quad 5.1 - 2y = 15,\quad y = -5$
$y = 0,\quad 5x - 2.0 = 15,\quad x = 3$
<table><tr><td>x</td><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>y</td><td>−5</td><td>0</td></tr></table></td>
<td>Recta $4x + 7y = 98$
$x = 0,\quad 4.0 + 7y = 98,\quad y = 14$
$y = 6,\quad 4x + 7.6 = 14,\quad x = 14$
<table><tr><td>x</td><td>0</td><td>14</td></tr><tr><td>y</td><td>14</td><td>6</td></tr></table></td>
</tr>
</table>

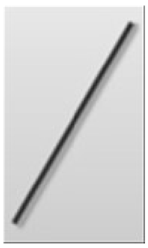
$$\begin{cases} 5x - 2y = 15 \xrightarrow{\ .4\ } \\ 4x + 7y = 98 \xrightarrow{\ .5\ } \end{cases} \begin{cases} 20x - 8y = 60 \\ 20x + 35y = 490 \end{cases}; \text{restando, } 43y = 430,\ y = \frac{430}{43} = 10$$

$5x - 2.10 = 15,\ \ 5x = 35,\quad x = 7 \rightarrow$ punto de corte $(7, 10)$

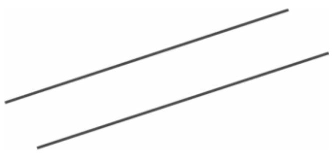
Dibujamos los ejes de coordenadas y hacemos la escala adecuada teniendo en cuenta que en el eje X los valores que hay que representar son 1, 3, 7 y 14 y en el eje Y los valores son −5, 0, 6, 10 y 14



- Si al resolver el sistema llegamos a una ecuación $0 = 0$ ó a una ecuación con dos incógnitas, el sistema tiene <u>infinitas soluciones</u>. El sistema se llama <u>compatible indeterminado</u> (S.C.I.) y las ecuaciones representan a dos <u>rectas coincidentes</u>



- Si al resolver el sistema llegamos a una ecuación imposible (una igualdad falsa entre números), por ejemplo, $0 = 3$, el sistema <u>no tiene solución</u>. El sistema se llama <u>incompatible</u> (S.I.) y las ecuaciones representan a dos <u>rectas paralelas</u>



Actividad resuelta

Dibuja las rectas 2x + y = 20, 4x + 3y = 48 y obtén el punto de corte indicando sus coordenadas

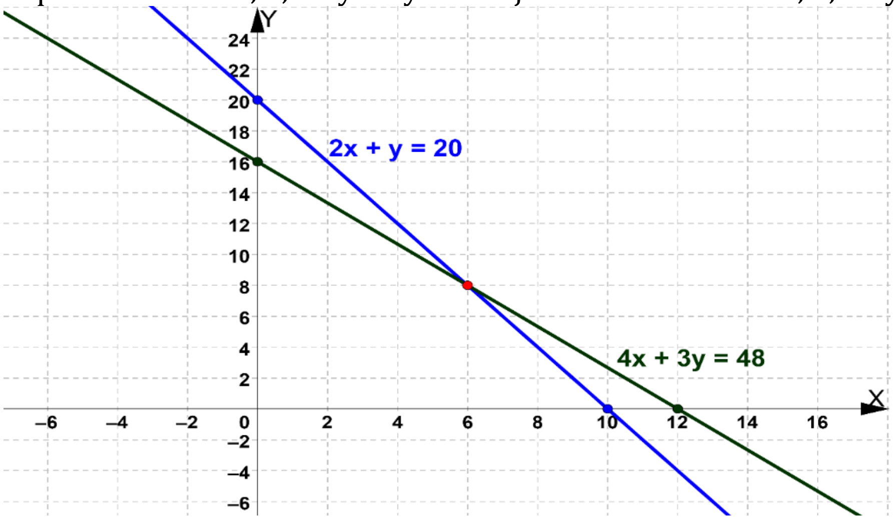
Resolución

Recta 2x + y = 20	Recta 4x + 3y = 48
x = 0, 2.0 + y = 20, y = 20 y = 0, 2x + 0 = 20, x = 10 x: 0, 10 y: 20, 0	x = 0, 4.0 + 3y = 48, y = 16 y = 0, 4x + 3.0 = 48, x = 12 x: 0, 12 y: 16, 0

$$\begin{cases} 2x+y=20 \\ 4x+3y=48 \end{cases} \xrightarrow{\cdot 2} \begin{cases} 4x+2y=40 \\ 4x+3y=48 \end{cases}; \text{ restando, } y=8$$

$$2x+8=20,\quad 2x=12,\quad x=6 \rightarrow \text{ punto de corte } (6,\ 8)$$

Dibujamos los ejes de coordenadas y hacemos la escala adecuada teniendo en cuenta que en el eje X los valores que hay que representar son 0, 6, 10 y 12 y en el eje Y los valores son 0, 8, 16 y 20



INECUACIONES LINEALES Y SISTEMAS CON DOS INCÓGNITAS

Inecuaciones lineales con dos incógnitas

Las inecuaciones son expresiones parecidas a las ecuaciones, salvo que en vez del signo = hay un signo de desigualdad, >, < , ≤ ó ≥.
Por ejemplo, 3x + 2y > 6 es una inecuación lineal con dos incógnitas.

En general, una inecuación lineal con dos incógnitas es aquella que se puede expresar de la forma ax + by > c, donde el signo > puede ser cualquiera de los otros tres, >, < , ≤ ó ≥.

Una inecuación lineal con dos incógnitas ax + by > c lleva asociada la recta ax +by = c.
Por ejemplo, la recta asociada a 3x + 2y > 6 es 3x + 2y = 6.

Resolver una inecuación es averiguar los valores de las incógnitas para que se cumpla la desigualdad. Las soluciones de una inecuación lineal con dos incógnitas corresponden con un semiplano cuyo borde es la recta asociada.

Para las inecuaciones con dos incógnitas puedes usar las reglas:
- Regla de la suma: Se pueden pasar los términos de un miembro a otro con signo contrario y la inecuación que se obtiene es equivalente, es decir tiene las mismas soluciones.
Por ejemplo, 2x – y > 7 es equivalente a 2x – 7 > y

- Regla del producto: Si se multiplican o dividen los dos miembros por un mismo número POSITIVO se obtiene una inecuación equivalente.

Actividades resueltas

1) Usando las reglas de equivalencia expresa las siguientes inecuaciones de forma más simple:

a) $250x + 300y \leq 500$ **Resolución** $250x + 300y \leq 500 \xrightarrow{:50} 5x + 6y \leq 10$

b) $2{,}1x - 3{,}6y \geq 9$ **Resolución** $2{,}1x - 3{,}6y \geq 9 \xrightarrow{.10} 21x - 36y \geq 90 \xrightarrow{:3} 7x - 12y \geq 30$

c) $\frac{x}{4} - \frac{5y}{6} < 1$ **Resolución** $\frac{x}{4} - \frac{5y}{6} < 1 \xrightarrow{.12} 3x - 10y < 12$

d) $30x + 40y \geq 52000$ **Resolución** $30x + 40y \geq 52000 \xrightarrow{:10} 3x + 4y \geq 5200$

e) $0{,}05x + 0{,}1y \leq 700$ **Resolución** $0{,}05x + 0{,}1y \leq 70 \xrightarrow{.100} 5x + 10y \leq 700 \xrightarrow{:5} x + 2y \leq 140$

f) $100x - 150y > 800$ **Resolución** $100x - 150y > 800 \xrightarrow{:50} 2x - 3y > 16$

g) $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} \geq 1$ **Resolución** $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} \geq 1 \xrightarrow{.15} 5x + 3y \geq 15$

2) Resuelve las siguientes inecuaciones lineales con dos incógnitas:

a) $3x + 2y > 6$

Resolución

Se dibuja la recta asociada, $3x + 2y = 6$

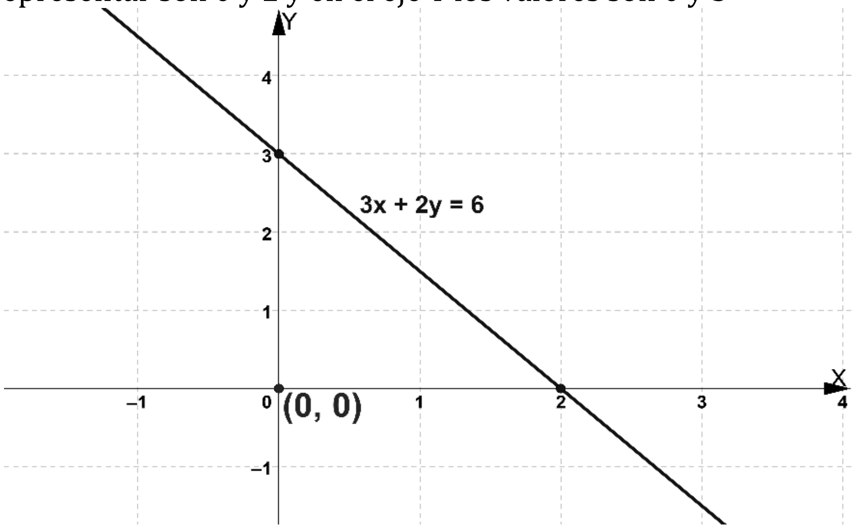
$x = 0$, $3.0 + 2y = 6$, $y = 3$, $(0, 3)$

$y = 0$, $3x + 2.0 = 6$, $x = 2$, $(2, 0)$

x	0	2
y	3	0

Vemos que la recta divide al plano en dos semiplanos. Uno de ellos va a ser el semiplano solución. Para averiguarlo tomamos un punto cualquiera de uno de los semiplanos (¡¡ojo!! el punto que tomes no debe pertenecer a la recta), por ejemplo, el más sencillo es el (0, 0).

Dibujamos los ejes de coordenadas y hacemos la escala adecuada teniendo en cuenta que en el eje X los valores que hay que representar son 0 y 2 y en el eje Y los valores son 0 y 3



Comprobamos si el (0, 0) cumple la inecuación: $3.0 + 2.0 > 6$, $0 > 6$ (no la cumple)

Conclusión: el semiplano solución es el que no contiene el (0, 0); es un semiplano abierto porque la recta no está incluida en él al ser la desigualdad estricta

b) $3x - 4y \geq 0$

Resolución

Se dibuja la recta asociada, $3x - 4y = 0$

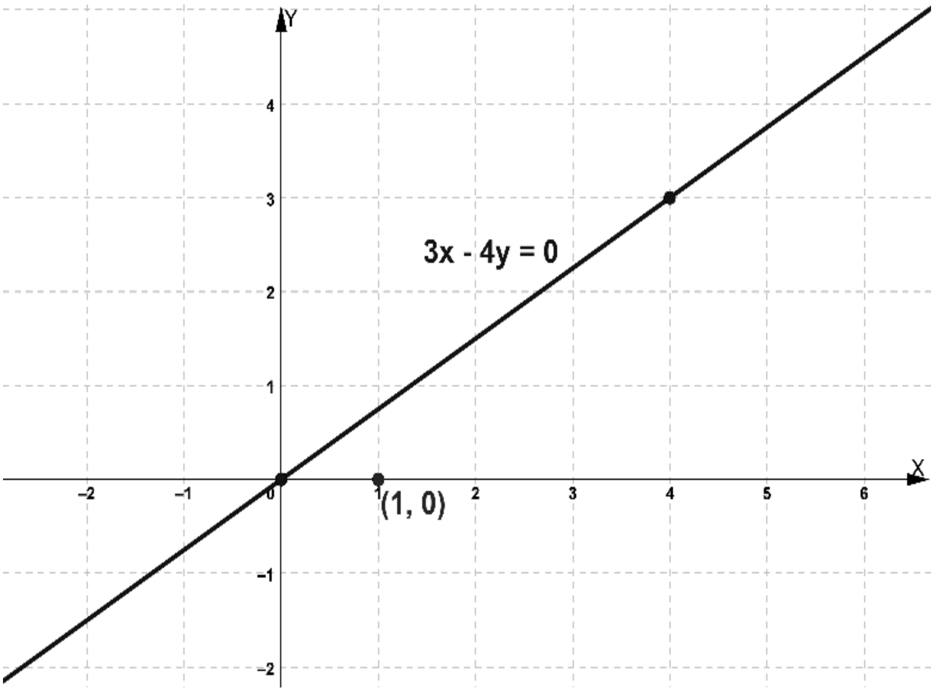
$x = 0$, $3.0 - 4y = 0$, $y = 0$, $(0, 0)$

$x = 4$, $3.4 - 4y = 0$, $4y = 12$, $y = 3$, $(4, 3)$

x	0	4
y	0	3

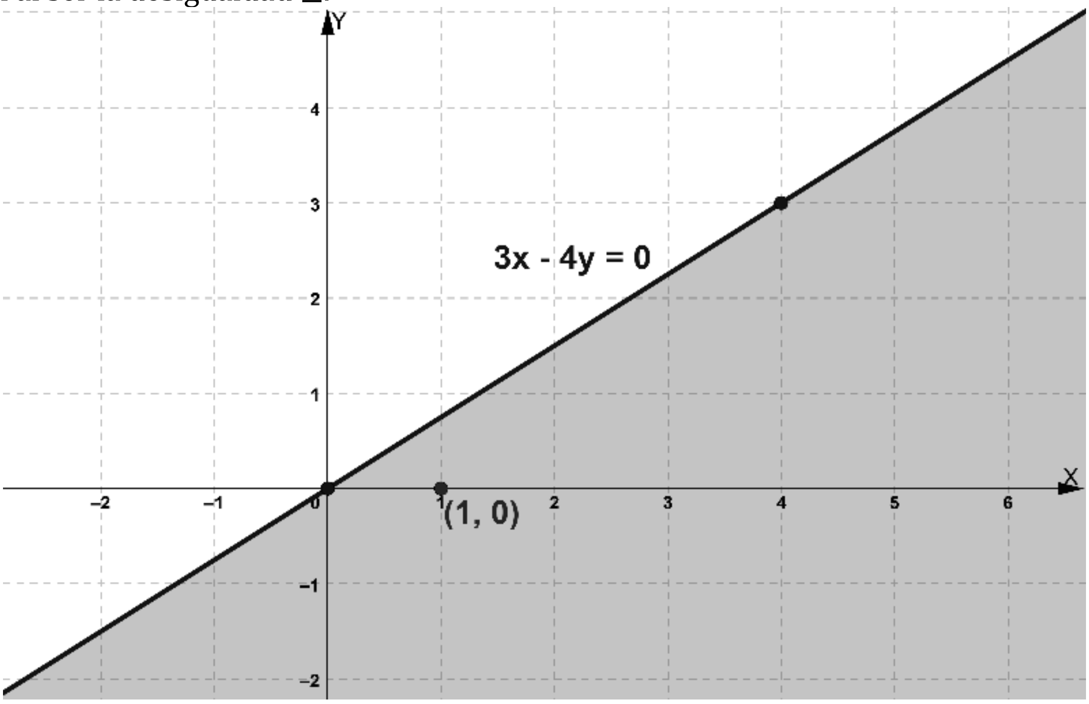
La recta divide al plano en dos semiplanos. Uno de ellos va a ser el semiplano solución. Para averiguarlo tomamos un punto cualquiera de uno de los semiplanos (¡¡ojo!! el punto que tomes no debe pertenecer a la recta), por ejemplo, el más sencillo es el (1, 0).

Dibujamos los ejes de coordenadas y hacemos la escala adecuada teniendo en cuenta que en el eje X los valores que hay que representar son 0, 1 y 4 y en el eje Y los valores son 0 y 3



Comprobamos si el (1, 0) cumple la inecuación: $3.1 - 4.0 \geq 0$ (la cumple)

Luego, el semiplano solución es el que contiene el (1, 0); es un semiplano cerrado porque la recta está incluida en él al ser la desigualdad $\geq$.



c) $x + y \leq 3000$

Resolución

Se dibuja la recta asociada, $x + y = 3000$

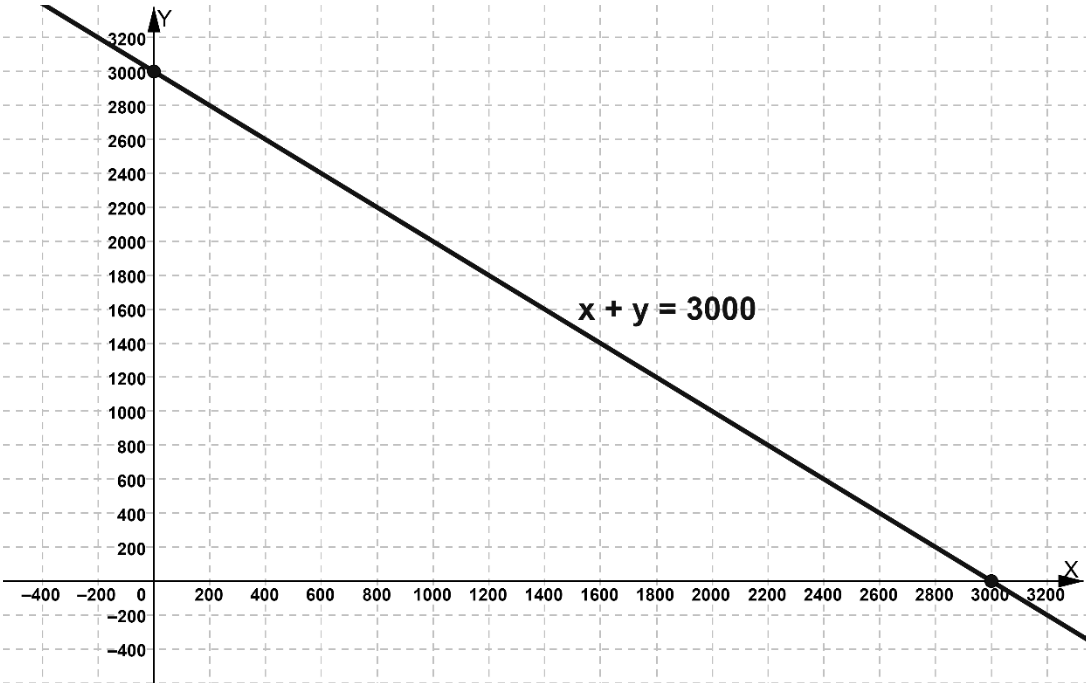
$x = 0, \quad 0 + y = 3000, \quad y = 3000, \quad (0, 3000)$

$y = 0, \quad x + 0 = 3000, \quad y = 3000, \quad (0, 3000)$

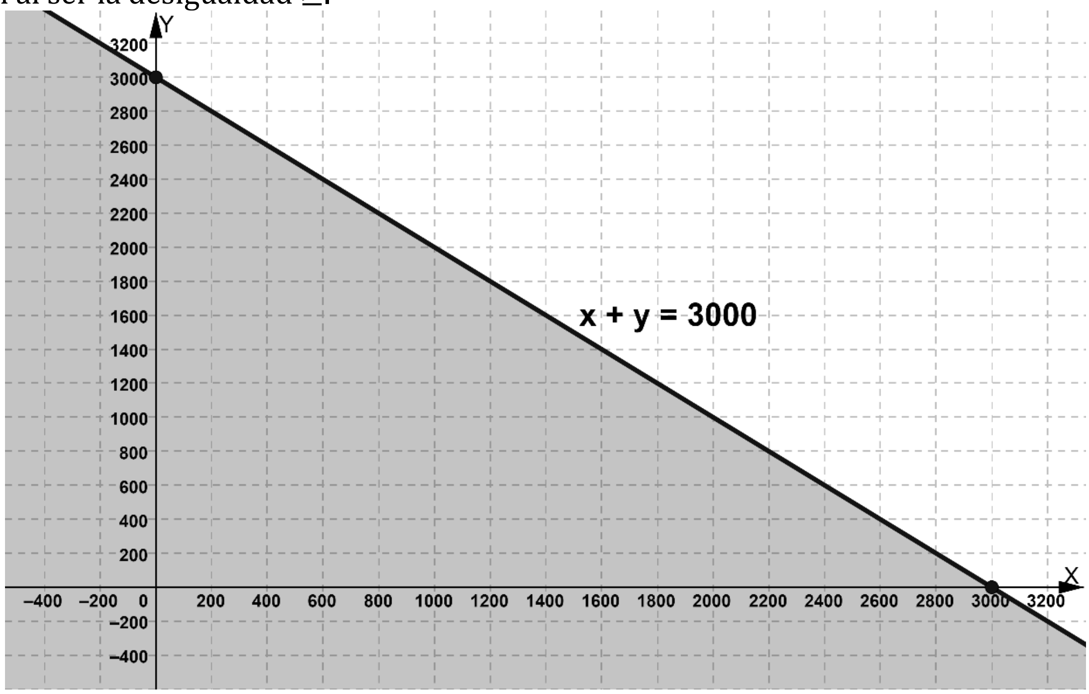
x	0	3000
y	3000	0

La recta divide al plano en dos semiplanos. Uno de ellos va a ser el semiplano solución.
Para averiguarlo tomamos un punto cualquiera de uno de los semiplanos (¡¡ojo!! el punto que tomes no debe pertenecer a la recta), por ejemplo, el más sencillo es el (0, 0).

Dibujamos los ejes de coordenadas y hacemos la escala adecuada teniendo en cuenta que en el eje X los valores que hay que representar son 0 y 3000 y en el eje Y los valores son 0 y 3000



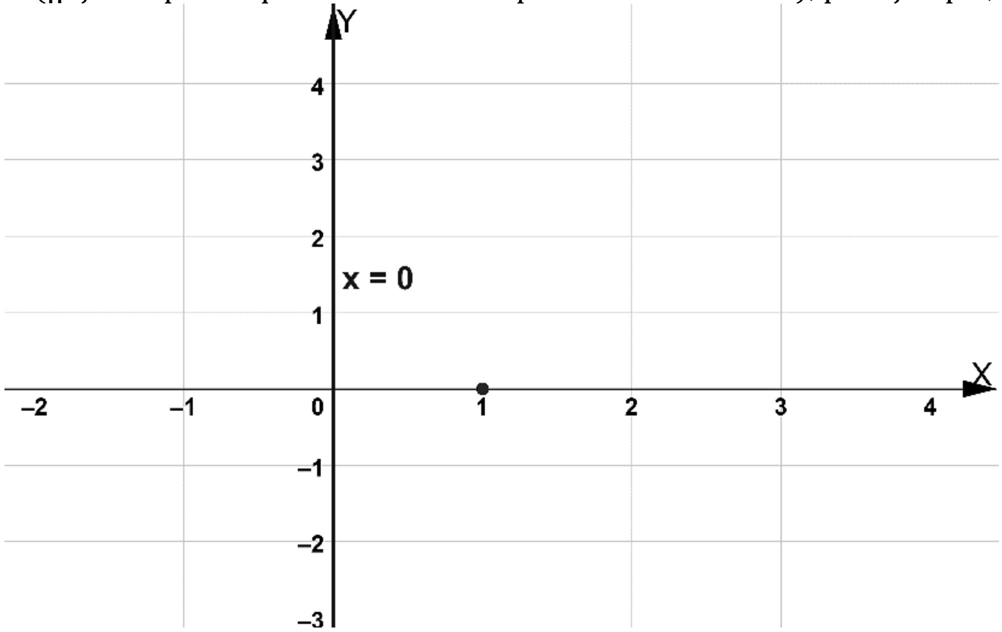
Comprobamos si el (0, 0) cumple la inecuación: $0 + 0 \leq 3000$ (la cumple)
Luego, el semiplano solución es el que contiene el (1, 0); es un semiplano cerrado porque la recta está incluida en él al ser la desigualdad $\geq$.



d) $x \geq 0$

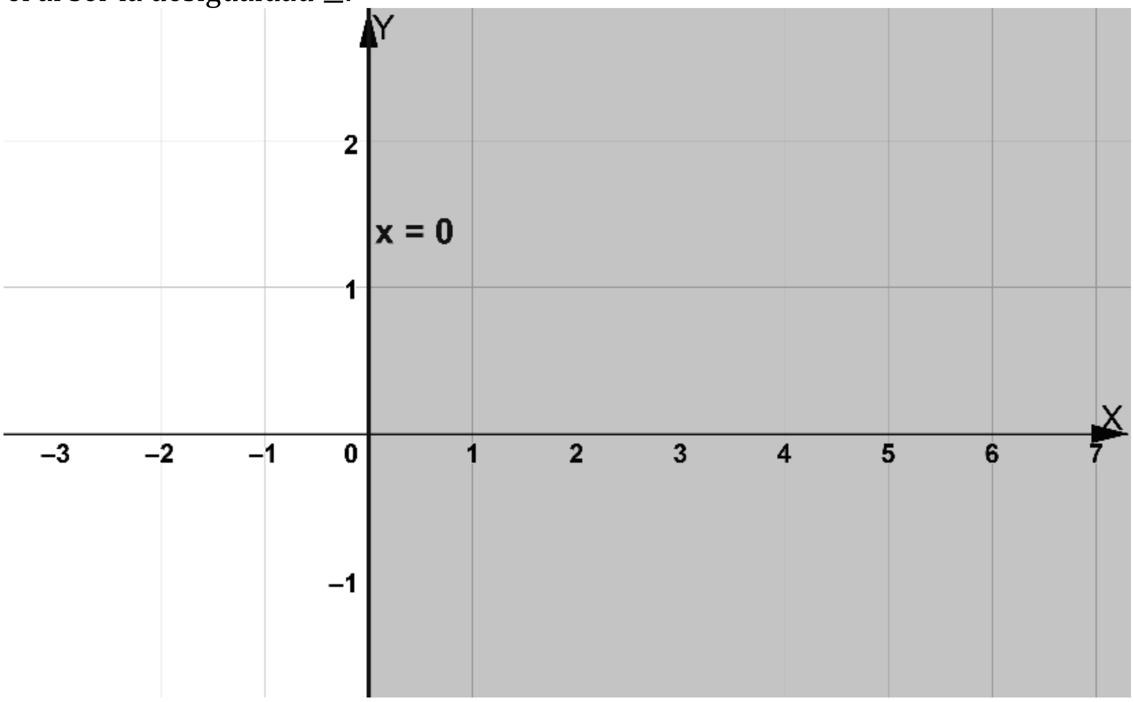
Resolución

Se dibuja la recta $x = 0$ (eje Y), que divide al plano en dos semiplanos. Tomamos cualquier punto de uno de los semiplanos (¡¡ojo!! el punto que tomes no debe pertenecer a la recta), por ejemplo, el (1, 0).



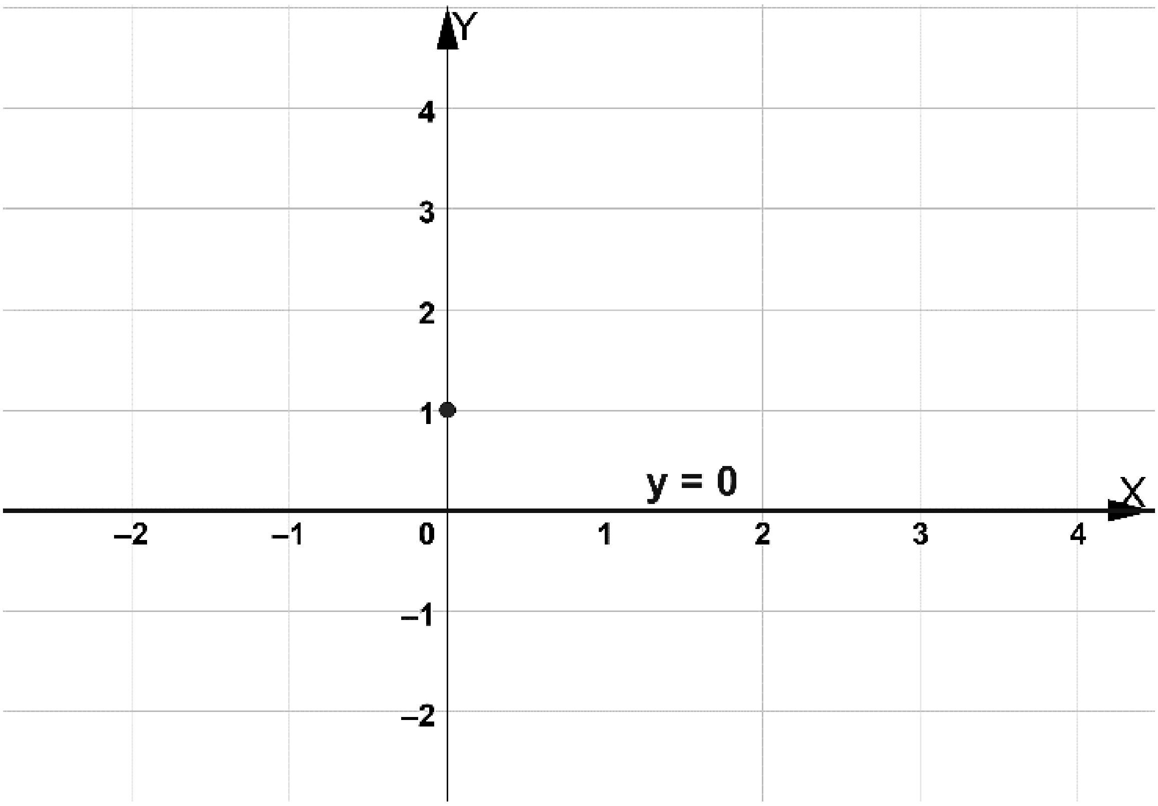
Comprobamos si cumple la inecuación. Sustituyendo, resulta $1 \geq 0$ (se cumple).

Luego, el semiplano solución es el que contiene al (1, 0); es un semiplano cerrado porque la recta está incluida en él al ser la desigualdad $\geq$.



e) $y \geq 0$

Se dibuja la recta $y = 0$ (eje X), que divide al plano en dos semiplanos. Tomamos cualquier punto de uno de los semiplanos (¡¡ojo!! el punto que tomes no debe pertenecer a la recta), por ejemplo, el (0, 1).



Comprobamos si cumple la inecuación. Sustituyendo, resulta $1 \geq 0$ (se cumple).

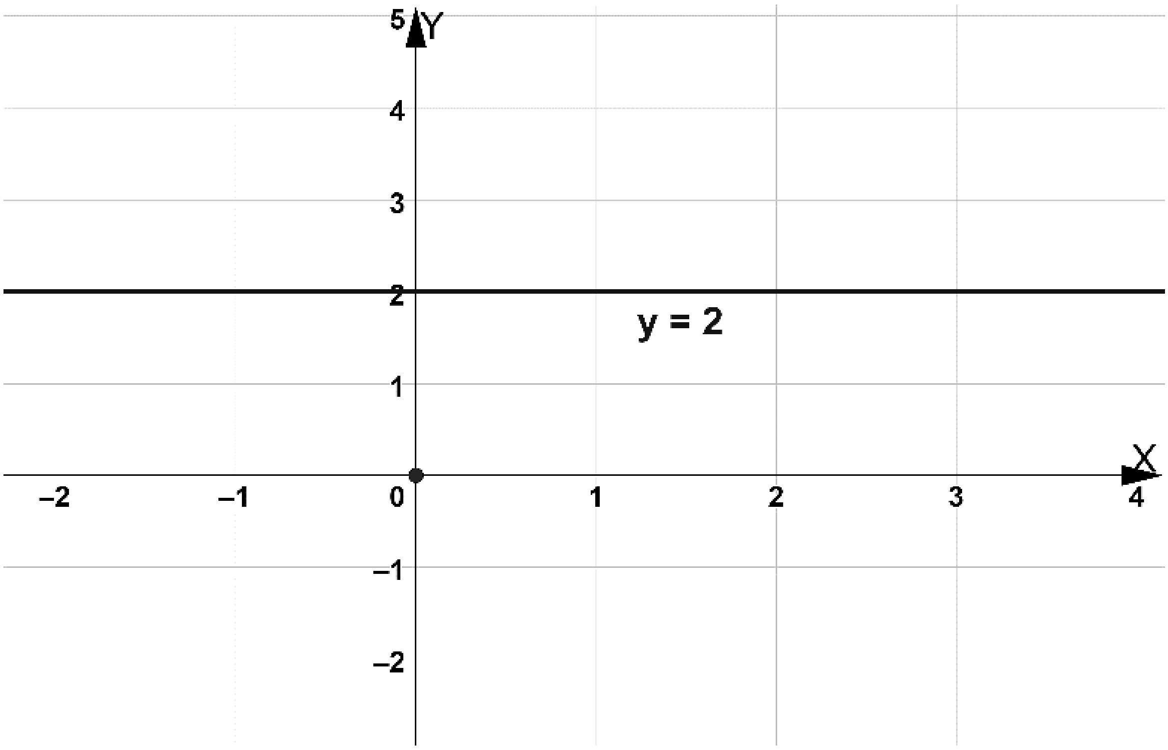
Luego, el semiplano solución es el que contiene al (0, 1); es un semiplano cerrado porque la recta está incluida en él al ser la desigualdad $\geq$.

f) $y > 2$

Resolución

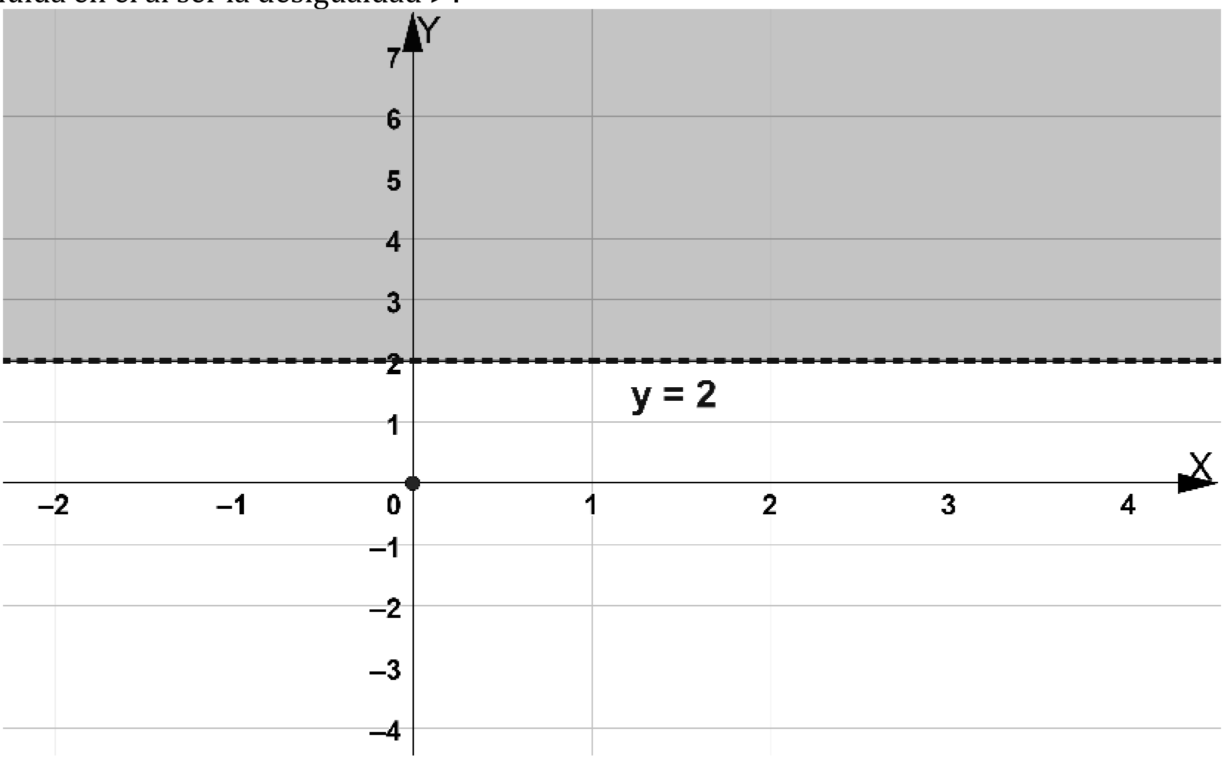
Se dibuja la recta $y = 2$, que es la recta horizontal que pasa por $(0, 2)$. La recta divide al plano en dos semiplanos. Tomamos cualquier punto de uno de los semiplanos (¡¡ojo!! el punto que tomes no debe pertenecer a la recta), por ejemplo, el $(0, 0)$.

Dibujamos los ejes de coordenadas y hacemos la escala adecuada teniendo en cuenta que en el eje Y los valores que hay que representar son 0 y 2



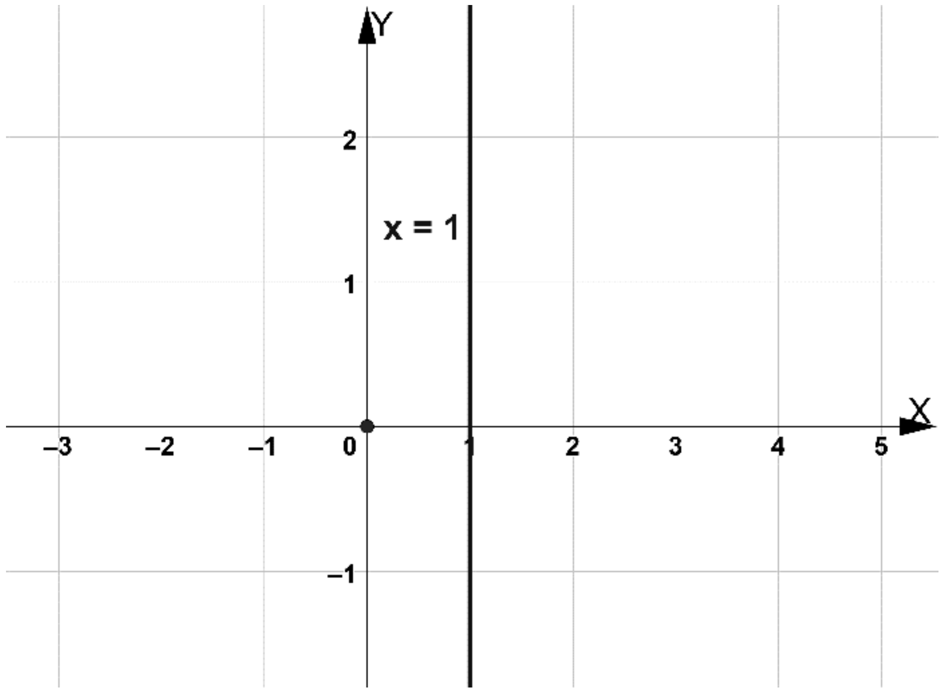
Comprobamos si cumple la inecuación. Sustituyendo, resulta $0 > 2$ (no se cumple).

Luego, el semiplano solución es el que no contiene al $(0, 0)$; es un semiplano abierto porque la recta no está incluida en él al ser la desigualdad $>$.



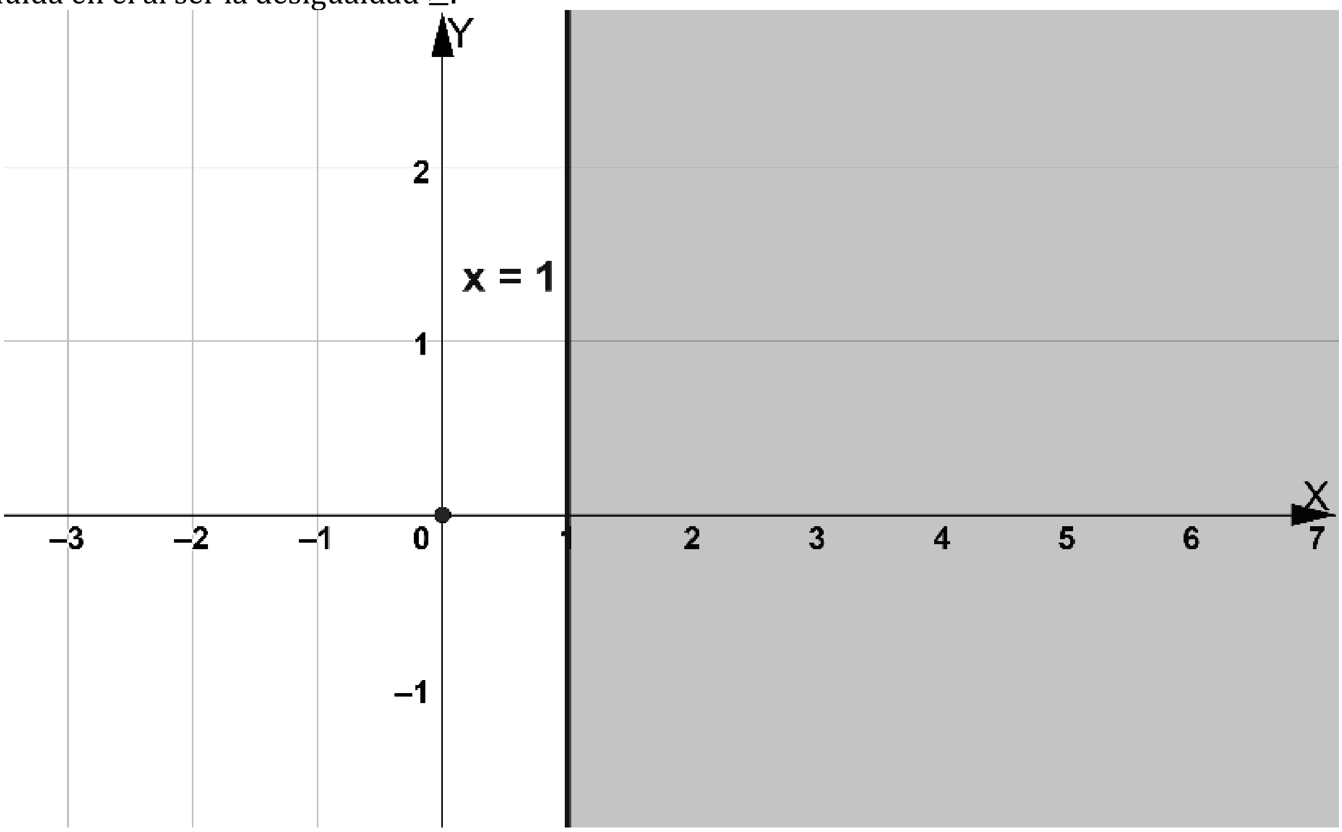
g) $x \geq 1$
Se dibuja la recta $x = 1$, que es la recta vertical que pasa por (1, 0). La recta divide al plano en dos semiplanos. Tomamos cualquier punto de uno de los semiplanos (¡¡ojo!! el punto que tomes no debe pertenecer a la recta), por ejemplo, el (0, 0).

Dibujamos los ejes de coordenadas y hacemos la escala adecuada teniendo en cuenta que en el eje X los valores que hay que representar son 0 y 1



Comprobamos si cumple la inecuación. Sustituyendo, resulta $1 \geq 0$ (se cumple).

Luego, el semiplano solución es el que contiene al (0, 0); es un semiplano cerrado porque la recta está incluida en él al ser la desigualdad $\geq$.



h) $x + 2y \geq 11$

Resolución

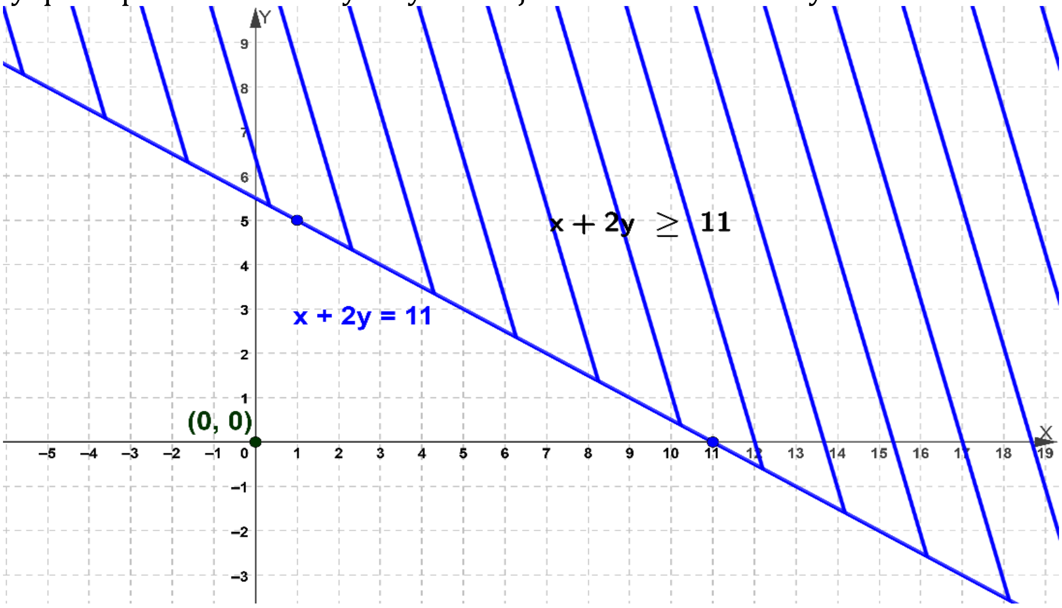
$x + 2y \geq 11 \rightarrow$ Recta: $x + 2y = 11$

$x = 1, \quad 1 + 2y = 11, \quad y = 5$
$y = 0, \quad x + 2.0 = 11, \quad x = 11$

x	1	11
y	5	0

$(0, 0) \rightarrow 0 + 2.0 \geq 11$ (falso).

La solución es el semiplano cerrado que no contiene al (0, 0).
Dibujamos los ejes de coordenadas y hacemos la escala adecuada teniendo en cuenta que en el eje X los valores que hay que representar son 1 y 11 y en el eje Y los valores son 0 y 5



i) $x \geq 2y - 5$

Resolución

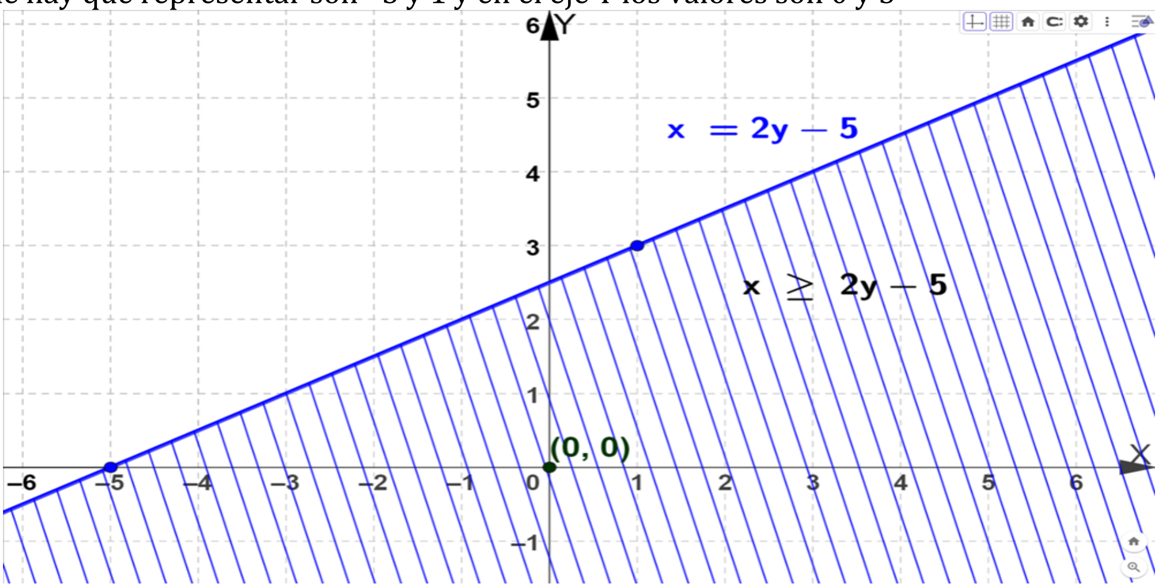
$x \geq 2y - 5 \rightarrow$ Recta: $x = 2y - 5$

$x = 1, \quad x = 2y - 5, \quad y = 3$
$y = 0, \quad x = 2.0 - 5, \quad x = -5$

x	1	–5
y	3	0

$(0, 0) \rightarrow 0 \geq 2.0 - 5$ (cierto). La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 0).

Dibujamos los ejes de coordenadas y hacemos la escala adecuada teniendo en cuenta que en el eje X los valores que hay que representar son –5 y 1 y en el eje Y los valores son 0 y 3



j) $3x - 2y \leq 0$

Resolución

$3x - 2y \leq 0 \rightarrow$ Recta: $3x - 2y = 0$

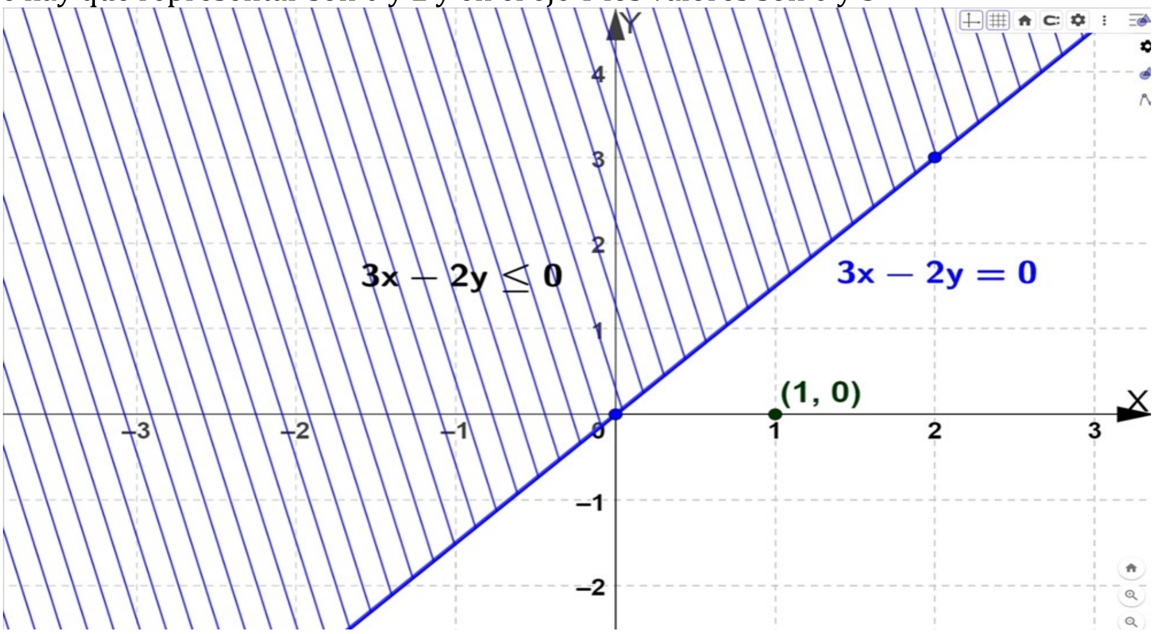
$x = 0, \quad 3.0 - 2y = 0, \quad y = 0$
$y = 3, \quad 3x - 2.3 = 0, \quad x = 2$

x	0	2
y	0	3

$(1, 0) \rightarrow 3.1 - 2.0 \leq 0$ (falso).

La solución es el semiplano cerrado que no contiene al (1, 0).

Dibujamos los ejes de coordenadas y hacemos la escala adecuada teniendo en cuenta que en el eje X los valores que hay que representar son 0 y 2 y en el eje Y los valores son 0 y 3



k) $x \leq 1200$

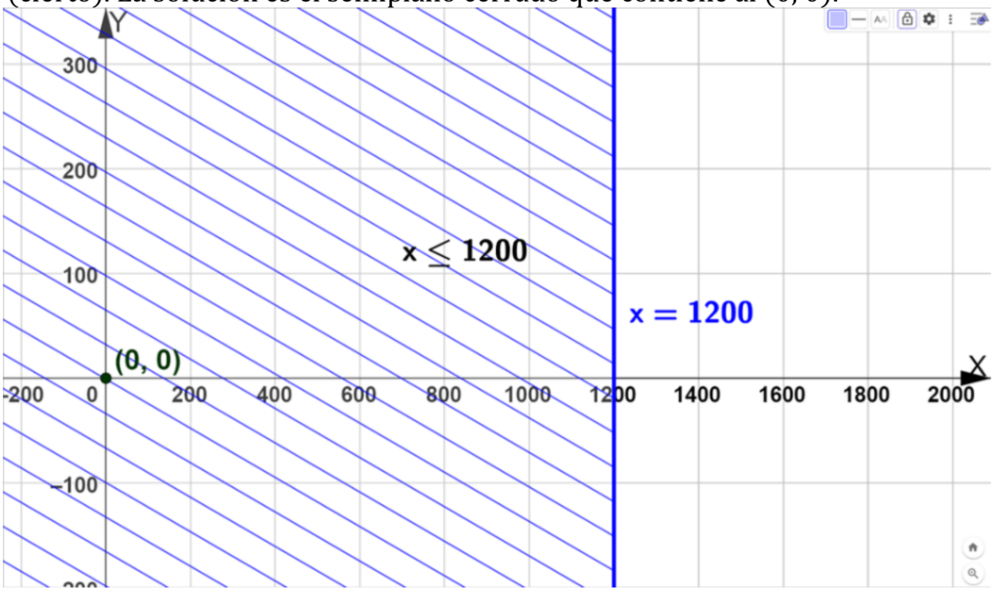
Resolución

$x \leq 1200 \rightarrow$ Recta: $x = 1200$

Es la recta vertical que pasa por (1200, 0).

x	1200
y	0

$(0, 0) \rightarrow 0 \leq 1200$ (cierto). La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 0).



Sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas

Un sistema de inecuaciones es un conjunto de dos o más inecuaciones.

Para resolver un sistema de inecuaciones lineales con dos incógnitas, se resuelve cada inecuación, representando las rectas en los mismos ejes de coordenadas, y luego se determina la región común que contiene a todas las soluciones de las inecuaciones.

Actividad resuelta

Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas:

a) $\begin{cases} x+2y \le 160 \\ 2x+2y \le 240 \\ x \ge 0,\ \ y \ge 0 \end{cases}$

Resolución

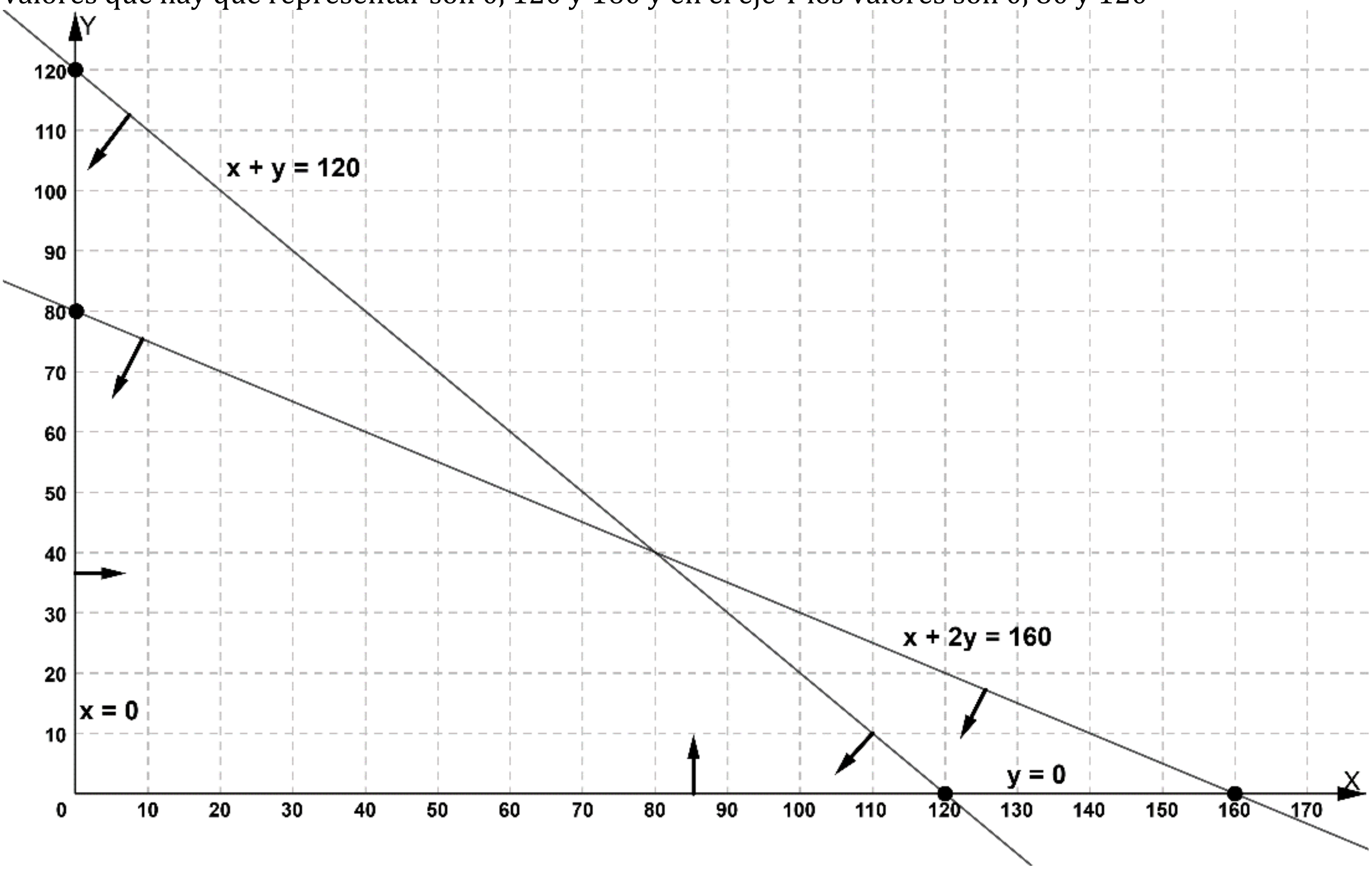
Simplificamos la 2ª inecuación entre 2 y nos queda $\begin{cases} x+2y \le 160 \\ x+y \le 120 \\ x \ge 0,\ \ y \ge 0 \end{cases}$

<table>
<tr>
<td rowspan="2">$x + 2y \le 160 \rightarrow x + 2y = 160$

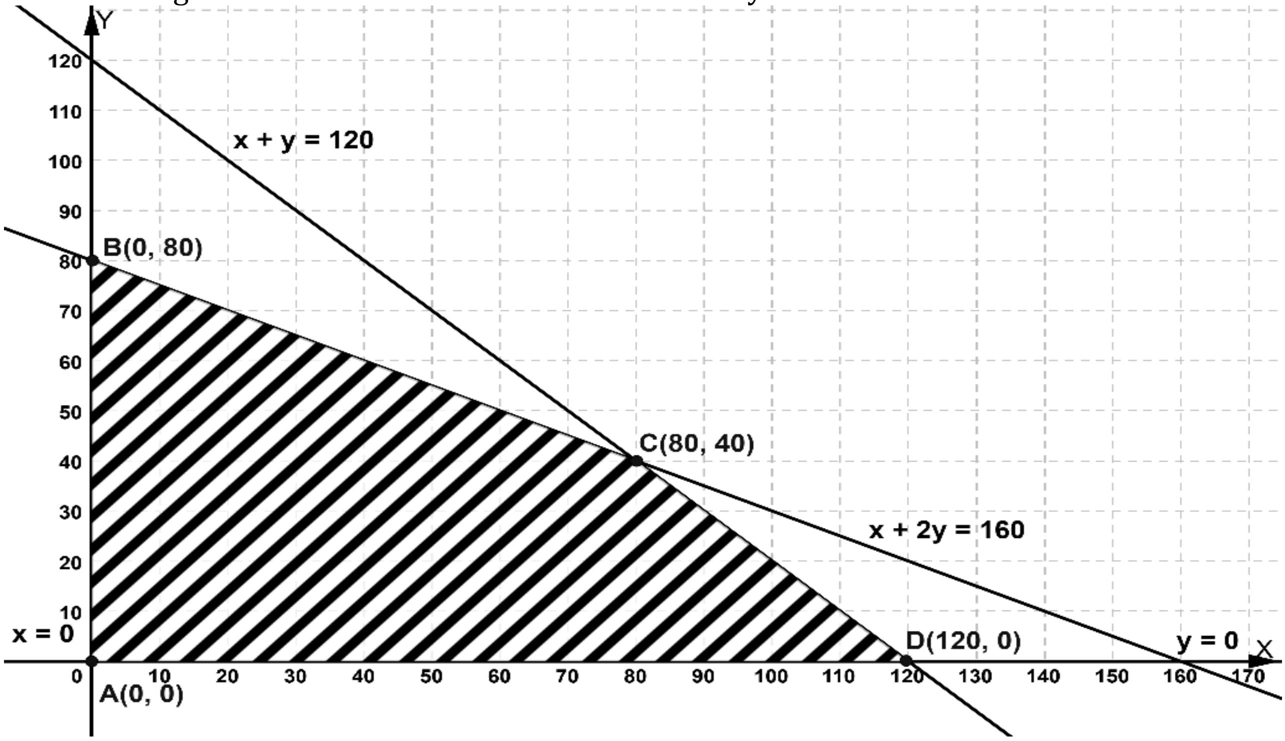
$x = 0,\ 0 + 2y = 160,\ \ y = 80$
$y = 0,\ x + 2.0 = 160,\ \ x = 160$
<table><tr><td>x</td><td>0</td><td>160</td></tr><tr><td>y</td><td>80</td><td>0</td></tr></table>
$(0, 0) \rightarrow 0 + 2.0 \le 160$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 0).</td>
<td rowspan="2">$x + y \le 120 \rightarrow x + y = 120$

$x = 0,\ 0 + y = 120,\ \ y = 120$
$y = 0,\ x + 0 = 120,\ \ x = 120$
<table><tr><td>x</td><td>0</td><td>120</td></tr><tr><td>y</td><td>120</td><td>0</td></tr></table>
$(0, 0) \rightarrow 0 + 0 \le 120$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 0).</td>
<td>$x \ge 0 \rightarrow x = 0$ (eje Y)
$(1, 0) \rightarrow 1 \ge 0$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (1, 0).</td>
</tr>
<tr>
<td>$y \ge 0 \rightarrow y = 0$ (eje X)
$(0, 1) \rightarrow 1 \ge 0$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 1).</td>
</tr>
</table>

Dibujamos los ejes de coordenadas y hacemos la escala adecuada teniendo en cuenta que en el eje X los valores que hay que representar son 0, 120 y 160 y en el eje Y los valores son 0, 80 y 120



Obtención de la región solución del sistema de inecuaciones y cálculo de los vértices:



Cálculo de los vértices:

$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow A(0, 0)$ $\quad\quad$ $\begin{cases} x + 2y = 160 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow 0 + 2y = 160, \quad y = 80 \rightarrow B(0, 80)$

$\begin{cases} x + 2y = 160 \\ x + y = 120 \end{cases}$; restando, $y = 40$; $\quad x + 40 = 120, \quad x = 80 \rightarrow C(80, 40)$

$\begin{cases} x + y = 120 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow x + 0 = 120, \quad x = 120 \rightarrow D(120, 0)$

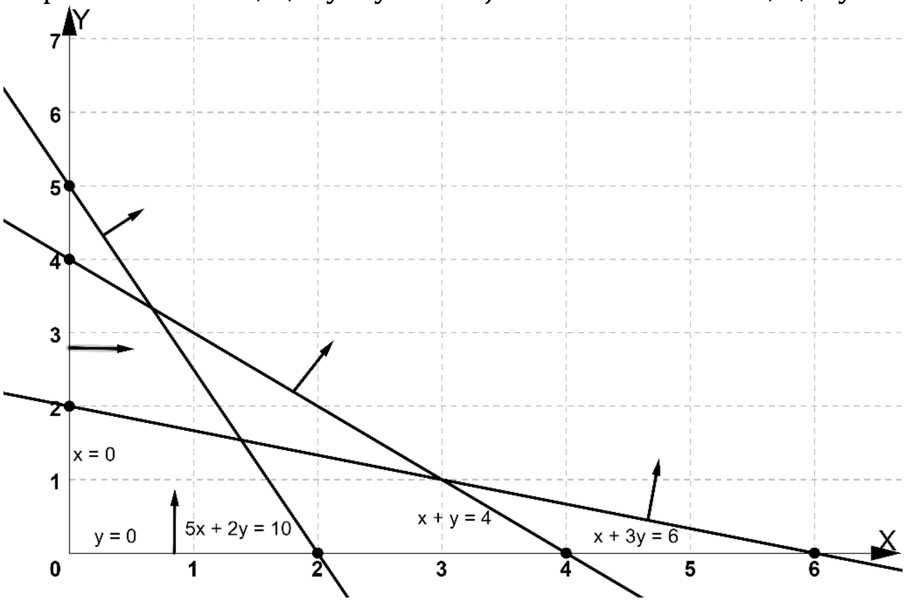
b) $\begin{cases} 5x + 2y \geq 10 \\ 5x + 5y \geq 20 \\ x + 3y \geq 6 \\ x \geq 0, \ y \geq 0 \end{cases}$

<u>Resolución</u>

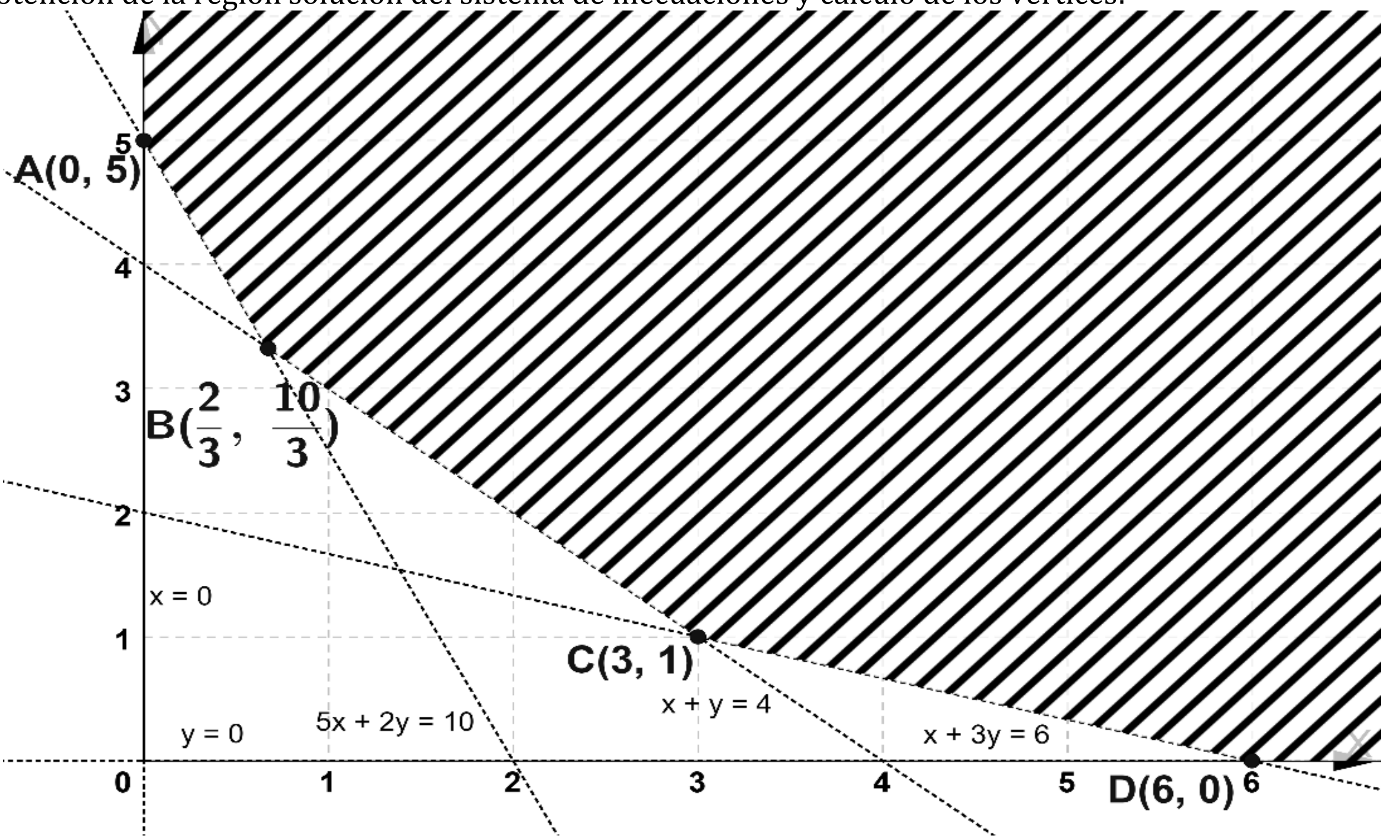
Simplificamos la 2ª inecuación entre 5 y nos queda: $\begin{cases} 5x + 2y \geq 10 \\ x + y \geq 4 \\ x + 3y \geq 6 \\ x \geq 0, \ y \geq 0 \end{cases}$

$5x + 2y \geq 10 \rightarrow 5x + 2y = 10$ $x = 0, \ 5.0 + 2y = 10, \ \ y = 5$ $y = 0, \ 5x + 2.0 = 10, \ x = 2$ $\begin{array}{\|c\|c\|c\|} \hline x & 0 & 2 \\ \hline y & 5 & 0 \\ \hline \end{array}$ $(0, 0) \rightarrow 5.0 + 2.0 \geq 10$ (falso). La solución es el semiplano cerrado que no contiene al (0, 0).	$x + y \geq 4 \rightarrow x + y = 4$ $x = 0, 0 + y = 4, \ \ y = 4$ $y = 0, x + 0 = 4, \ x = 4$ $\begin{array}{\|c\|c\|c\|} \hline x & 0 & 4 \\ \hline y & 4 & 0 \\ \hline \end{array}$ $(0, 0) \rightarrow 0 + 0 \geq 4$ (falso). La solución es el semiplano cerrado que no contiene al (0, 0).	$x + 3y \geq 6 \rightarrow x + 3y = 6$ $x = 0, 0 + 3y = 6, \ y = 2$ $y = 0, x + 3.0 = 6, \ x = 6$ $\begin{array}{\|c\|c\|c\|} \hline x & 0 & 6 \\ \hline y & 2 & 0 \\ \hline \end{array}$ $(0, 0) \rightarrow 0 + 3.0 \geq 6$ (falso). La solución es el semiplano cerrado que no contiene al (0, 0).	$x \geq 0 \rightarrow x = 0$ (eje Y) $(1, 0) \rightarrow 1 \geq 0$ (cierto). La solución es el semiplano cerrado que contiene al (1, 0). $y \geq 0 \rightarrow y = 0$ (eje X) $(0, 1) \rightarrow 1 \geq 0$ (cierto). La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 1).

Dibujamos los ejes de coordenadas y hacemos la escala adecuada teniendo en cuenta que en el eje X los valores que hay que representar son 0, 2, 4 y 6 y en el eje Y los valores son 0, 2, 4 y 5



Obtención de la región solución del sistema de inecuaciones y cálculo de los vértices:



Cálculo de los vértices:

$\begin{cases} 5x+2y=10=28 \\ x=0 \end{cases} \rightarrow 5.0+2y=10,\ y=5 \rightarrow \text{A}(0,\ 5)$

$\begin{cases} 5x+2y=10 \\ x+y=4 \xrightarrow{.\,2} \end{cases} \begin{cases} 5x+2y=10 \\ 2x+2y=8 \end{cases};\ \text{restando},\ 3x=2,\ x=\dfrac{2}{3};\ \ \dfrac{2}{3}+y=4,\ \ y=4-\dfrac{2}{3},\ y=\dfrac{10}{3} \rightarrow\ \text{B}(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{10}{3})$

$\begin{cases} x+3y=6 \\ x+y=4 \end{cases};\ \text{restando},2y=2,\ y=1;\ \ x+1=4,\ x=3 \rightarrow\ \text{C}(3,\ 1)$

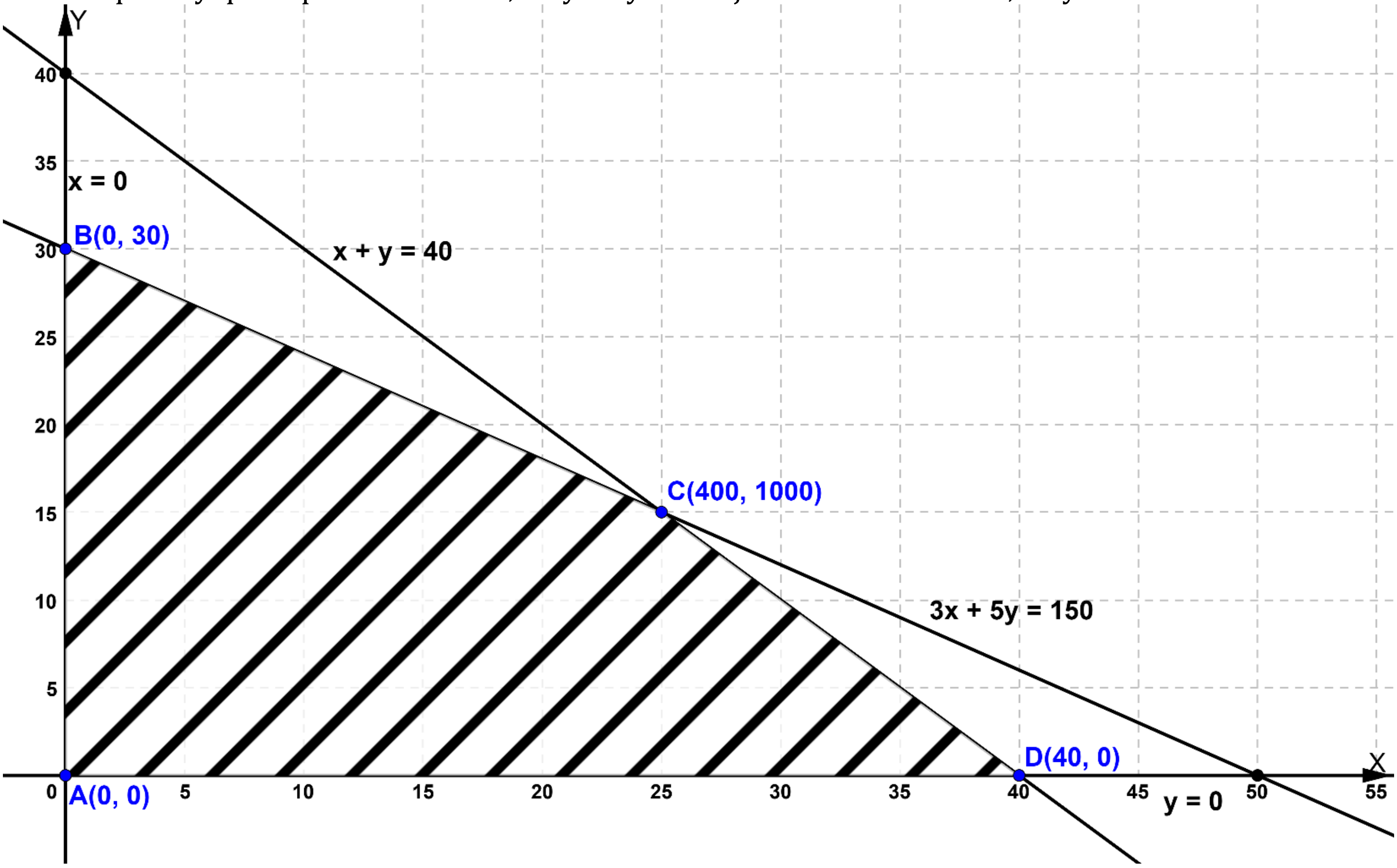
$\begin{cases} x+3y=6 \\ y=0 \end{cases} \rightarrow x+3.0=6,\ x=6 \rightarrow \text{D}(6,\ 0)$

c) $\begin{cases} 3x+5y \le 150 \\ x+y \le 40 \\ x \ge 0, \quad y \ge 0 \end{cases}$

Resolución

$3x + 5y \le 150 \to$ Recta: $3x + 5y = 150$ $x = 0, \quad 3.0 + 5y = 150, \quad y = 30$ $y = 0, \quad 3x + 5.0 = 150, \quad x = 50$ x: 0, 50; y: 30, 0 $(0, 0) \to 3.0 + 5.0 \le 150$ (cierto). La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 0).	$x + y \le 40 \to$ Recta: $x + y = 40$ $x = 0, \quad 0 + y = 40, \quad y = 40$ $y = 0, \quad x + 0 = 40, \quad x = 40$ x: 0, 40; y: 40, 0 $(0, 0) \to 0 + 0 \le 40$ (cierto). La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 0).	$x \ge 0 \to x = 0$ (eje Y) $(1, 0) \to 1 \ge 0$ (cierto). La solución es el semiplano cerrado que contiene al (1, 0). $y \ge 0 \to y = 0$ (eje X) $(0, 1) \to 1 \ge 0$ (cierto). La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 1).

Dibujamos los ejes de coordenadas y hacemos la escala adecuada teniendo en cuenta que en el eje X los valores que hay que representar son 0, 40 y 50 y en el eje Y los valores son 0, 30 y 40



Obtención de los vértices:

$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \to A(0, 0) \qquad \begin{cases} x = 0 \\ 3x + 5y = 150 \end{cases} \to 3.0 + 5y = 150 \to y = 30 \to B(0, 30)$

$\begin{cases} x + y = 40 \\ 3x + 5y = 150 \end{cases} \xrightarrow{.3} \begin{cases} 3x + 3y = 120 \\ 3x + 5y = 150 \end{cases}$; restando, $2y = 30$, $y = 15$; $\quad x + 15 = 40$, $\quad x = 25 \to C(25, 15)$

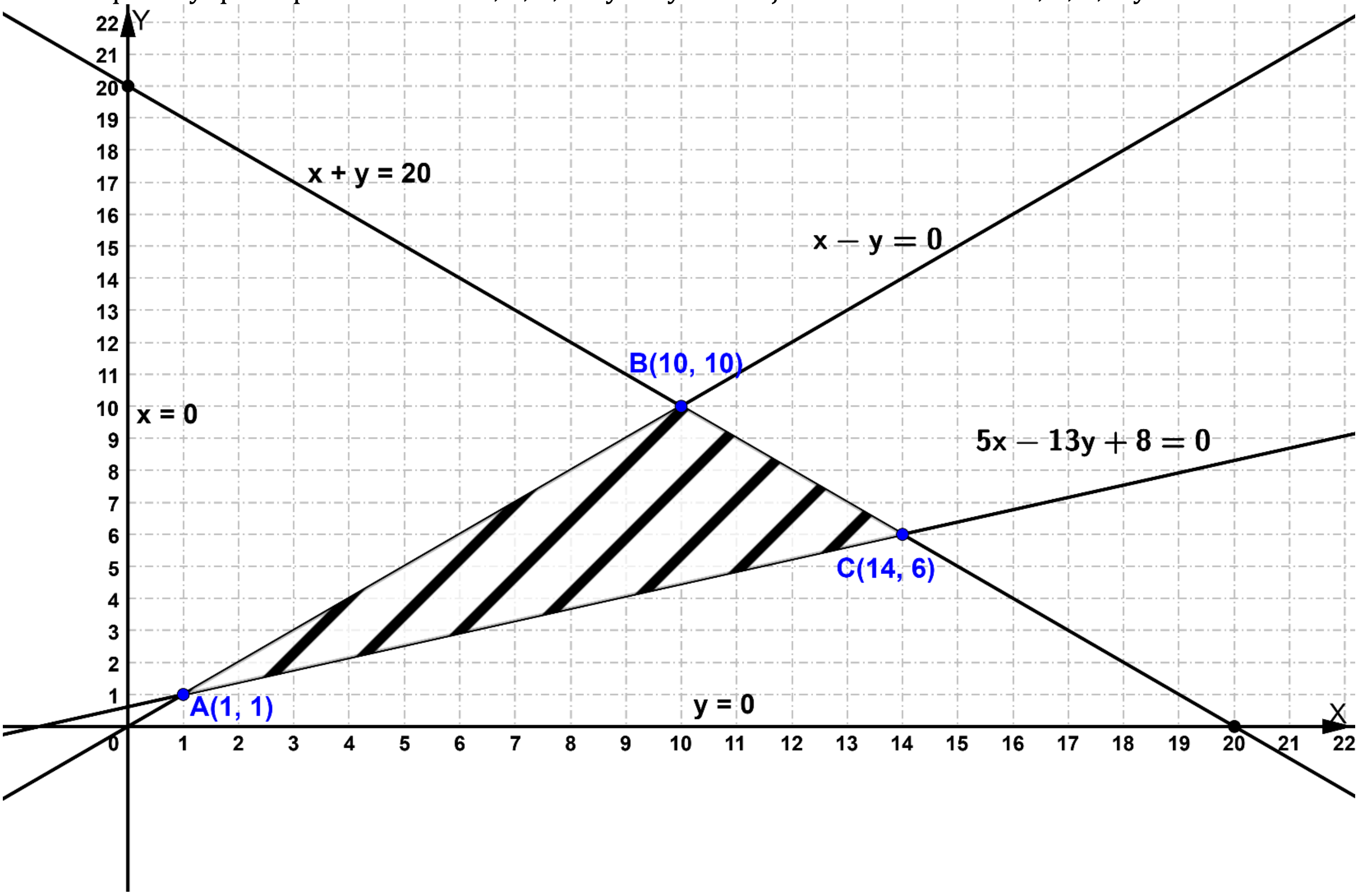
$\begin{cases} x + y = 40 \\ y = 0 \end{cases}$; $x + 0 = 40$, $x = 40 \to D(40, 0)$

d) $\begin{cases} x+y\le 20 \\ x-y\ge 0 \\ 5x-13y+8\le 0 \end{cases}$

Resolución

$x + y \le 20 \to$ Recta: $x + y = 20$ $x = 0,\quad 0 + y = 20,\quad y = 20$ $y = 0,\quad x + 0 = 20,\quad x = 20$ <table><tr><td>x</td><td>0</td><td>20</td></tr><tr><td>y</td><td>20</td><td>0</td></tr></table> $(0, 0)\to 0 + 0 \le 20$ (cierto). La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 0).	$x - y \ge 0 \to$ Recta: $x - y = 0$ $x = 0,\quad 0 - y = 0,\quad y = 0$ $y = 2,\quad x - 2 = 0,\quad x = 2$ <table><tr><td>x</td><td>0</td><td>2</td></tr><tr><td>y</td><td>0</td><td>2</td></tr></table> $(1, 0)\to 1 - 0 \le 0$ (falso). La solución es el semiplano cerrado que no contiene al (1, 0).	$5x - 13y + 8 \le 0 \to$ Recta: $5x - 13y + 8 = 0$ $x = 1,\quad 5.1 - 13y + 8 = 0,\quad y = 1$ $y = 6,\quad 5x - 13.6 + 8 = 0,\quad x = 14$ <table><tr><td>x</td><td>1</td><td>14</td></tr><tr><td>y</td><td>1</td><td>6</td></tr></table> $(0, 0)\to 5.0 - 13.0 + 8 \le 0$ (falso). La solución es el semiplano cerrado que no contiene al (0, 0).

Dibujamos los ejes de coordenadas y hacemos la escala adecuada teniendo en cuenta que en el eje X los valores que hay que representar son 0, 1, 2, 14 y 20 y en el eje Y los valores son 0, 1, 2, 6 y 20



Obtención de los vértices:

$\begin{cases} x-y=0\to x=y \\ 5x-13y+8=0 \end{cases} \to 5y-13y+8=0,\ -8y=-8,\ y=1;\quad x=1\to A(1,1)$

$\begin{cases} x+y=20 \\ x-y=0 \end{cases}$; sumando, $2x=20,\ x=10;\quad 10+y=20,\quad y=10\to B(10,10)$

$\begin{cases} x+y=20\to x=20-y \\ 5x-13y+8=0 \end{cases} \to 5(20-y)-13y+8=0$

$100-5y-13y+8=0,\ \ 108=18y,\ \ y=6;\quad x=20-6,\ x=14\to C(14,6)$

e) $\begin{cases} x + y \le 1000 \\ x \ge 100 \\ y \ge 200 \\ y \ge x \\ x \ge 0, \quad y \ge 0 \end{cases}$

Resolución

$x + y \le 1000 \rightarrow$ Recta: $x + y = 1000$

$x = 0, \quad 0 + y = 1000, \quad y = 1000,$
$y = 0, \quad x + 0 = 1000, \quad x = 1000$

x	0	1000
y	1000	0

$(0, 0) \rightarrow 0 + 0 \le 1000$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 0).

$x \ge 100 \rightarrow$ Recta: $x = 100$

Es la recta vertical que pasa por (100, 0).

x	100
y	0

$(0, 0) \rightarrow 0 \ge 100$ (falso).
La solución es el semiplano cerrado que no contiene al (0, 0).

$y \ge 200 \rightarrow$ Recta: $y = 200$

Es la recta horizontal que pasa por (0, 200).

x	0
y	200

$(0, 0) \rightarrow 0 \ge 200$ (falso).
La solución es el semiplano cerrado que no contiene al (0, 0).

$y \ge x \rightarrow$ Recta: $y = x$

$x = 0, \quad y = 0$
$y = 500, \quad x = 500$

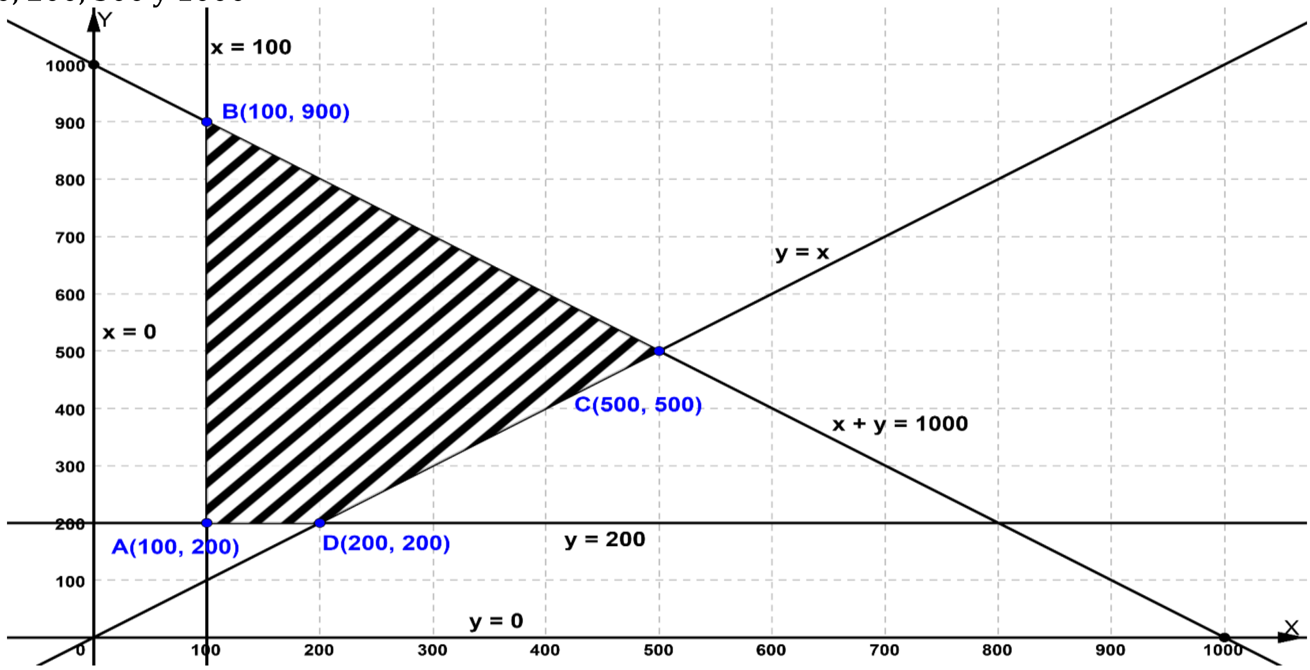
x	0	500
y	0	500

$(1, 0) \rightarrow 0 \ge 1$ (falso).
La solución es el semiplano cerrado que nocontiene al (0, 0).

$x \ge 0 \rightarrow x = 0$ (eje Y)
$(1, 0) \rightarrow 1 \ge 0$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (1, 0).

$y \ge 0 \rightarrow y = 0$ (eje X)
$(0, 1) \rightarrow 1 \ge 0$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 1).

Dibujamos los ejes de coordenadas y hacemos la escala adecuada teniendo en cuenta que en el eje X los valores que hay que representar son 0, 100, 500 y 1000 y en el eje Y los valores son 0, 200, 500 y 1000



Obtención de los vértices:

$\begin{cases} x = 100 \\ y = 200 \end{cases} \rightarrow A(100, 200)$

$\begin{cases} x = 100 \\ x + y = 1000 \end{cases} \rightarrow 100 + y = 1000, \ y = 900 \rightarrow B(100, 900)$

$\begin{cases} y = x \\ x + y = 1000 \end{cases} \rightarrow x + x = 1000, \ x = 500; \ \ y = 500 \rightarrow C(500, 500)$

$\begin{cases} y = x \\ y = 200 \end{cases} \rightarrow D(200, 200)$

PROGRAMACIÓN LINEAL

Concepto de programación lineal

La programación lineal consiste en optimizar (maximizar o minimizar) una expresión del tipo $F(x, y) = Ax + By + C$, llamada <u>función objetivo</u> donde x e y cumplen un sistema de inecuaciones, llamadas restricciones

Por ejemplo, supongamos que queremos averiguar para qué valores de x e y la función $F(x, y) = 6x + 4y + 1$ (función objetivo) toma el valor máximo (o mínimo) si sabemos que x e y cumplen las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} x \geq 0\ ,\ \ y \geq 0 \\ x - y > -3 \\ x + y \leq 8 \end{cases} \quad \text{(estas son las restricciones)}$$

Está demostrado que si el recinto solución del sistema de inecuaciones es acotado el problema de encontrar la solución óptima siempre tiene solución y se encuentra en los vértices. Ten en cuenta que puede ocurrir que el máximo (o el mínimo) se alcance en 2 vértices consecutivos. En este caso, la solución óptima del problema es el segmento cerrado que une los vértices.
Para recintos no acotados, es posible que no exista la solución óptima.

Para resolver un problema de programación lineal, se pueden seguir los siguientes pasos:
1º) Resolvemos el sistema de inecuaciones formado por las restricciones obteniendo así el recinto solución ó región factible.
2º) Hallamos los vértices del recinto, que serán los posibles puntos donde alcance el máximo o mínimo la función objetivo.
3º) Calculamos lo que vale la función objetivo en cada vértice del recinto y determinamos en qué vértice se halla el máximo o mínimo valor.

Actividades resueltas

1) Resuelve el siguiente problema de programación lineal:
a) Representa la región factible definida por las siguientes inecuaciones y determina sus vértices:

$$x + 2y \leq 13 \qquad x - y \leq 4 \qquad x - 2y \geq -7 \qquad x + y \geq 5$$

Resolución

$x + 2y \leq 13 \rightarrow$ Recta: $x + 2y = 13$

$x = 1$, $1 + 2y = 13$, $y = 6$
$y = 0$, $x + 2.0 = 13$, $x = 13$

x	1	13
y	6	0

$(0, 0) \rightarrow 0 + 2.0 \leq 13$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 0).

$x - y \leq 4 \rightarrow$ Recta: $x - y = 4$

$x = 0$, $0 - y = 4$, $y = -4$
$y = 0$, $x - 0 = 4$, $x = 4$

x	0	4
y	–4	0

$(0, 0) \rightarrow 0 - 0 \leq 4$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 0).

$x - 2y \geq -7 \rightarrow$ Recta: $x - 2y = -7$

$x = 1$, $1 - 2y = -7$, $y = 4$
$y = 0$, $x - 2.0 = -7$, $x = -7$

x	1	–7
y	4	0

$(0, 0) \rightarrow 0 - 2.0 \geq -7$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 0).

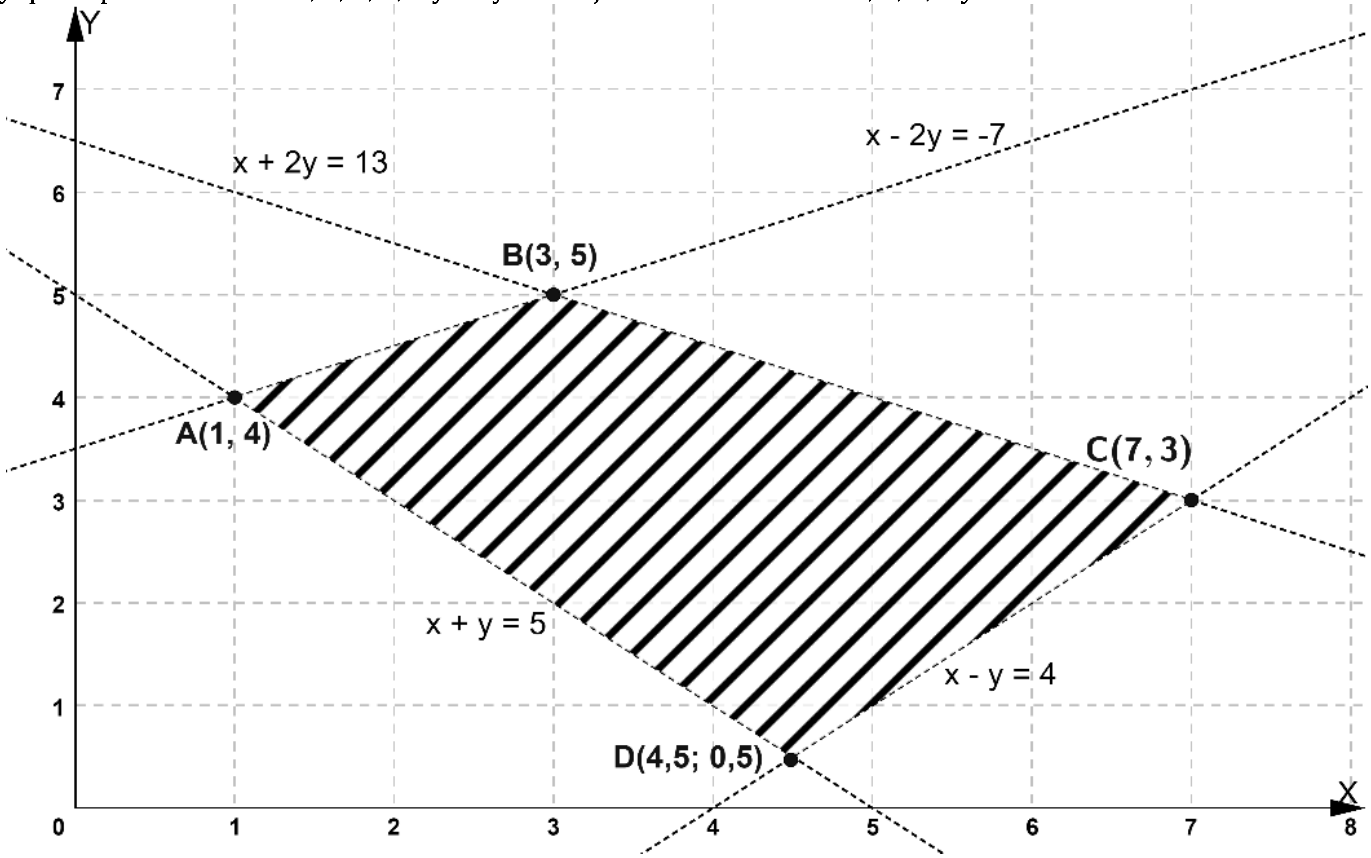
$x + y \geq 5 \rightarrow$ Recta: $x + y = 5$

$x = 0$, $0 + y = 5$, $y = 5$
$y = 0$, $x + 0 = 5$, $x = 5$

x	0	5
y	5	0

$(0, 0) \rightarrow 0 + 0 \geq 5$ (falso).
La solución es el semiplano cerrado que no contiene al (0, 0).

Dibujamos los ejes de coordenadas y hacemos la escala adecuada teniendo en cuenta que en el eje X los valores que hay que representar son –7, 0, 1, 4, 5 y 13 y en el eje Y los valores son –4, 0, 4, 5 y 6



Obtención de los vértices:

$\begin{cases} x+y=5 \\ x-2y=-7 \end{cases}$; restando, $3y=12$, $y=4$; $x+4=5$, $x=1 \rightarrow A(1, 4)$

$\begin{cases} x+2y=13 \\ x-2y=-7 \end{cases}$; sumando, $2x=6$, $x=3$; $3+3y=13$, $y=5 \rightarrow B(3, 5)$

$\begin{cases} x+2y=13 \\ x-y=4 \end{cases}$; restando, $3y=9$, $y=3$; $x-3=4$, $x=7 \rightarrow C(7, 3)$

$\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=4 \end{cases}$; sumando, $2x=9$, $x=4{,}5$; $4{,}5+y=5$, $y=0{,}5 \rightarrow D(4{,}5; 0{,}5)$

b) Calcula los valores máximo y mínimo de la función objetivo $F(x, y) = x + y$ en la región anterior y determina los puntos en los que se alcanzan.

<u>Resolución</u>

Los puntos donde alcanza el máximo y mínimo $F(x, y) = x + y$ deben estar en los vértices de la región:

$F(A) = F(1, 4) = 1 + 4 = 5$ $\quad$ $F(B) = F(3, 5) = 3 + 5 = 8$

$F(C) = F(7, 3) = 7 + 3 = 10$ $\quad$ $F(D) = F(4{,}5; 0{,}5) = 4{,}5 + 0{,}5 = 5$

Luego, el valor máximo de F es 10 y se alcanza en el punto C(7, 3); el valor mínimo de F es 5 y se alcanza en el segmento cerrado AD

2) Consideremos el recinto definido por las siguientes desigualdades:

$$7y \leq 15 + 3x \quad ; \quad y \geq x - 3 \quad ; \quad 3y \geq -x + 11$$

a) Representa gráficamente el recinto anterior y calcula sus vértices.

Resolución

Resolvemos el sistema de inecuaciones:

$7y \leq 15 + 3x \rightarrow$ Recta: $7y = 15 + 3x$

$x = 0, \quad 7y = 15 + 3.0, \quad y = \dfrac{15}{7} \cong 2{,}1$

$y = 0, \quad 7.0 = 15 + 3x, \quad x = -5$

x	0	–5
y	2,1	0

$(0, 0) \rightarrow 7.0 \leq 15 + 3.0$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 0).

$y \geq x - 3 \rightarrow$ Recta: $y = x - 3$

$x = 0, \quad y = 0 - 3, \quad y = -3$
$y = 0, \quad 0 = x - 3, \quad x = 3$

x	0	4
y	4	0

$(0, 0) \rightarrow 0 \geq 0 - 3$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 0).

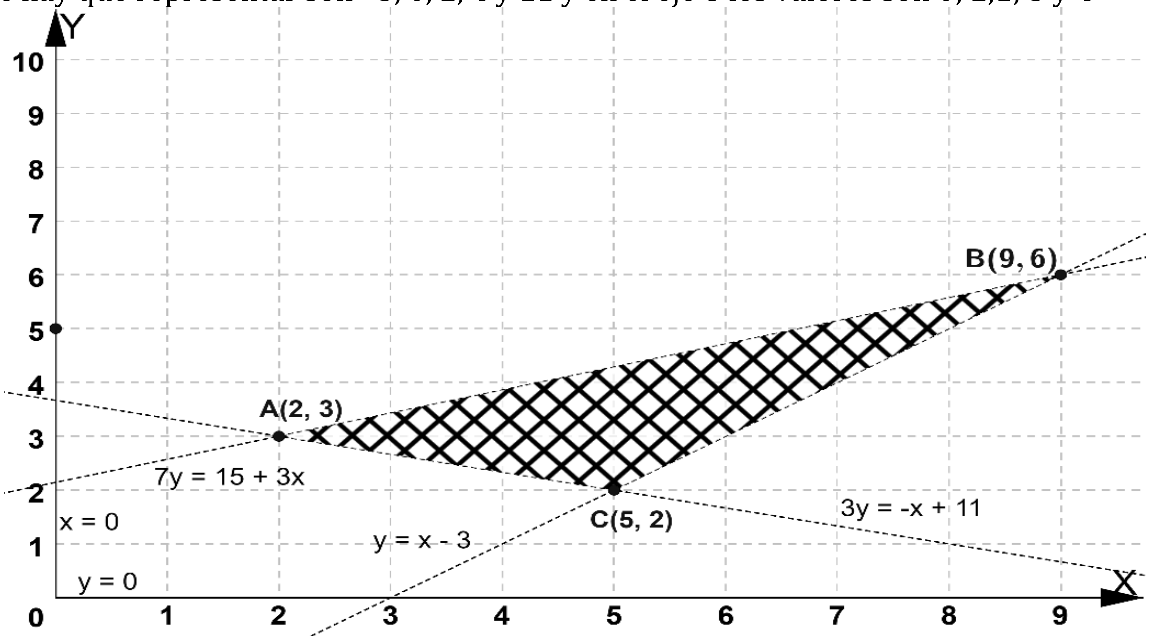
$3y \geq -x + 11 \rightarrow$ Recta: $3y = -x + 11$

$x = 2, \quad 3y = -2 + 11, \quad y = 3$
$y = 0, \quad 3.0 = -x + 11, \quad x = 11$

x	2	11
y	3	0

$(0, 0) \rightarrow 3.0 \geq 0 + 11$ (falso).
La solución es el semiplano cerrado que no contiene al (0, 0).

Dibujamos los ejes de coordenadas y hacemos la escala adecuada teniendo en cuenta que en el eje X los valores que hay que representar son –5, 0, 2, 4 y 11 y en el eje Y los valores son 0; 2,1; 3 y 4



Obtención de los vértices:

$$\begin{cases} 7y = 15 + 3x \\ 3y = -x + 11 \rightarrow x = -3y + 11 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} 7y = 15 + 3(-3y + 11);\ 7y = 15 - 9y + 33;\ y = 3 \\ x = -3.3 + 11;\ x = 2 \end{matrix} \rightarrow A(2, 3)$$

$$\begin{cases} 7y = 15 + 3x \\ y = x - 3 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} 7(x-3) = 15 + 3x;\ 7x - 21 = 15 + 3x;\ x = 9 \\ y = 9 - 3;\ y = 6 \end{matrix} \rightarrow B(9, 6)$$

$$\begin{cases} 3y = -x + 11 \\ y = x - 3 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} 3(x-3) = -x + 11;\ 3x - 9 = -x + 11;\ x = 5 \\ y = 5 - 3;\ y = 2 \end{matrix} \rightarrow C(5, 2)$$

b) Calcula en qué puntos se alcanzan los valores máximo y mínimo de la función $H(x, y) = 4x - y - 16$ restringida al anterior recinto y obtén dichos valores.

Resolución

Los puntos en los que alcanzan máximo y mínimo $H(x, y) = 4x - y - 16$ deben estar en los vértices de la región:

$H(A) = H(2, 3) = 4.2 - 3 - 16 = -11$ $\qquad$ $H(B) = H(9, 6) = 4.9 - 6 - 16 = 14$

$$H(C) = H(5, 2) = 4.5 - 2 - 16 = 2$$

Luego, el valor máximo de H es 14 y se alcanza en el punto B(9, 6), o sea para x = 9, y = 6; el valor mínimo de H es −11 y se alcanza en el punto A(2, 3), o sea para x = 2, y = 3

3) Resuelve el siguiente problema de programación lineal:

a) Representa el recinto dado por las siguientes inecuaciones:

$$y \le x + 3 \qquad x + 5y \ge 3 \qquad 2x + 7y \le 30 \qquad y \ge 0$$

Resolución

Resolvemos el sistema de inecuaciones:

$y \le x + 3 \rightarrow$ Recta: $y = x + 3$

$x = 0, \quad y = 0 + 3, \quad y = 3$
$y = 0, \quad 0 = x + 3, \quad x = -3$

x	0	−3
y	3	0

$(0, 0) \rightarrow 0 \le 0 + 3$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 0).

$x + 5y \ge 3 \rightarrow$ Recta: $x + 5y = 3$

$x = -2, \quad -2 + 5y = 3, \quad y = 1$
$y = 0, \quad x + 5y = 3, \quad x = 3$

x	−2	3
y	1	0

$(1, 0) \rightarrow 0 + 5.0 \ge 3$ (falso).
La solución es el semiplano cerrado que no contiene al (0, 0).

$2x + 7y \le 30 \rightarrow$ Recta: $2x + 7y = 30$

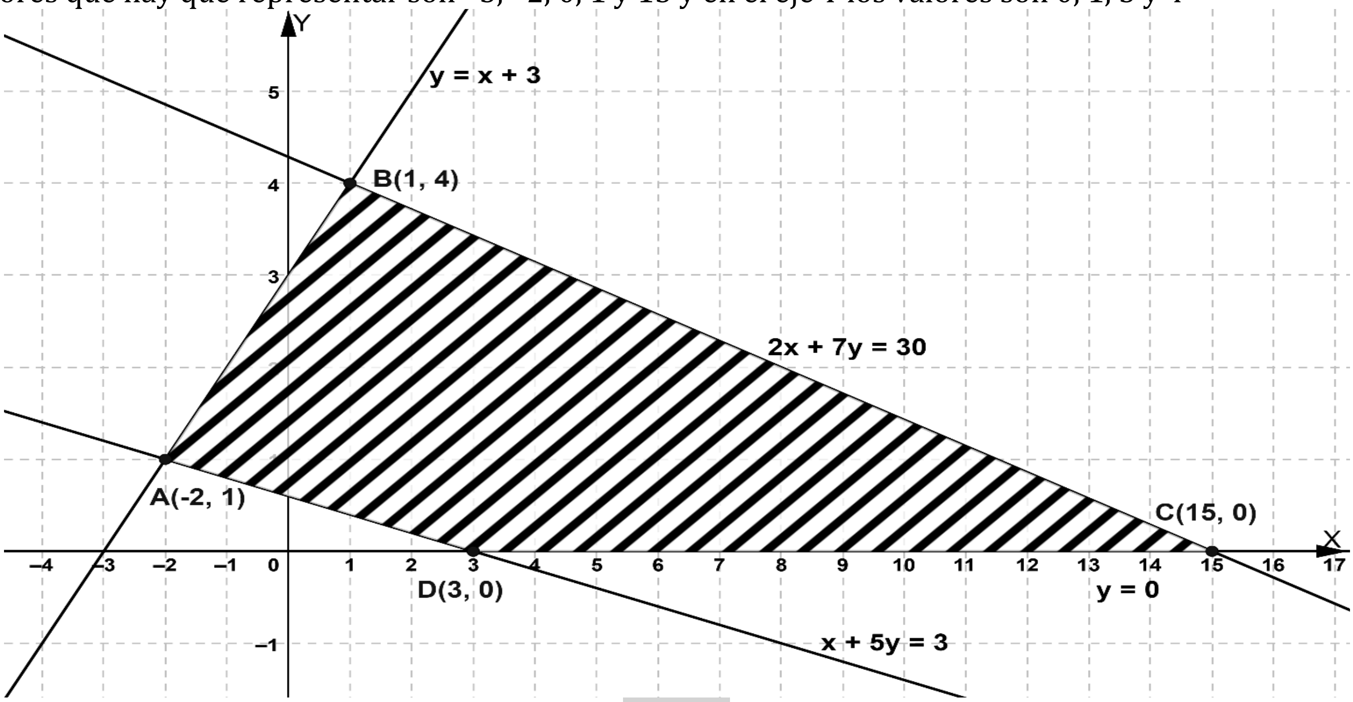
$x = 1, \quad 2.1 + 7y = 30, \quad y = 4$
$y = 0, \quad 2x + 7.0 = 30, \quad x = 15$

x	1	15
y	4	0

$(0, 0) \rightarrow 2.0 + 7.0 \le 30$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 0).

$y \ge 0 \rightarrow y = 0$ (eje X)
$(0, 1) \rightarrow 1 \ge 0$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 1).

Dibujamos los ejes de coordenadas y hacemos la escala adecuada teniendo en cuenta que en el eje X los valores que hay que representar son −3, −2, 0, 1 y 15 y en el eje Y los valores son 0, 1, 3 y 4



Obtención de los vértices:

$$\begin{cases} y = x + 3 \\ x + 5y = 3 \end{cases}; \text{ sustituyendo} : x + 5(x+3) = 3, \;\; x + 5x + 15 = 3, \;\; 6x = -12, \;\; x = -2; \;\; y = -2 + 3 = 1 \to A(-2, 1)$$

$$\begin{cases} y = x + 3 \\ 2x + 7y = 30 \end{cases}; \text{ sustituyendo} : 2x + 7(x+3) = 30, \;\; 9x = 9, \;\; x = 1; \;\;\; y = 1 + 3 = 4 \to B(1, 4)$$

$$\begin{cases} 2x + 7y = 30 \\ y = 0 \end{cases}; \; 2x + 7.0 = 30, \;\;\; x = 15 \to C(15, 0)$$

$$\begin{cases} x + 5y = 3 \\ y = 0 \end{cases}; \; x + 5.0 = 3, \;\;\; x = 3 \to D(3, 0)$$

b) Razona si el punto (5, 3) pertenece al recinto anterior.

Resolución

Tenemos que comprobar si cumple todas las restricciones, $\begin{cases} y \le x + 3 \xrightarrow[y\,=\,3]{x\,=\,5} 3 \le 5 + 3 \text{ (sí)} \\ x + 5y \ge 3 \xrightarrow[y\,=\,3]{x\,=\,5} 5 + 5.3 \ge 3 \text{ (sí)} \\ 2x + 7y \le 30 \xrightarrow[y\,=\,3]{x\,=\,5} 2.5 + 7.3 \le 30 \text{ (no)} \\ y \ge 0 \xrightarrow[y\,=\,3]{x\,=\,5} 3 \ge 0 \text{ (sí)} \end{cases}$

Luego, el punto no pertenece al recinto porque no cumple la 3ª restricción

c) Obtén los valores mínimo y máximo de la función F(x, y)= x − y en ese recinto, indicando en qué puntos se alcanzan.

Resolución

Los puntos donde alcanza el máximo y mínimo F(x, y) = x – y deben estar en los vértices de la región:

F(A) = F(–2, 1) = –2 – 1 = –3 F(B) = F(1, 4) = 1 – 4 = –3

F(C) = F(15, 0) = 15 – 0 = 15 F(D) = F(3, 0) = 3 – 0 = 3

Luego, el valor máximo de F es 15 y se alcanza en el punto C(15, 0); el valor mínimo de F es –3 y se alcanza en el segmento cerrado AB

4) Resuelve el siguiente problema de programación lineal:

a) Representa el recinto definido por las siguientes inecuaciones: $x + y \leq 3$; $2x + y \geq 4$; $y \geq -1$

Resolución

Resolvemos el sistema de inecuaciones:

$x + y \leq 3 \rightarrow$ Recta: $x + y = 3$

$x = 0, \quad 0 + y = 3, \quad y = 3$
$y = 0, \quad x + 0 = 3, \quad x = 3$

x	0	3
y	3	0

$(0, 0) \rightarrow 0 + 0 \leq 3$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 0).

$2x + y \geq 4 \rightarrow$ Recta: $2x + y = 4$

$x = 0, \quad 2.0 + y = 4, \quad y = 4$
$y = 0, \quad 2x + 0 = 4, \quad x = 2$

x	0	2
y	4	0

$(0, 0) \rightarrow 2.0 + 0 \geq 4$ (falso).
La solución es el semiplano cerrado que no contiene al (0, 0).

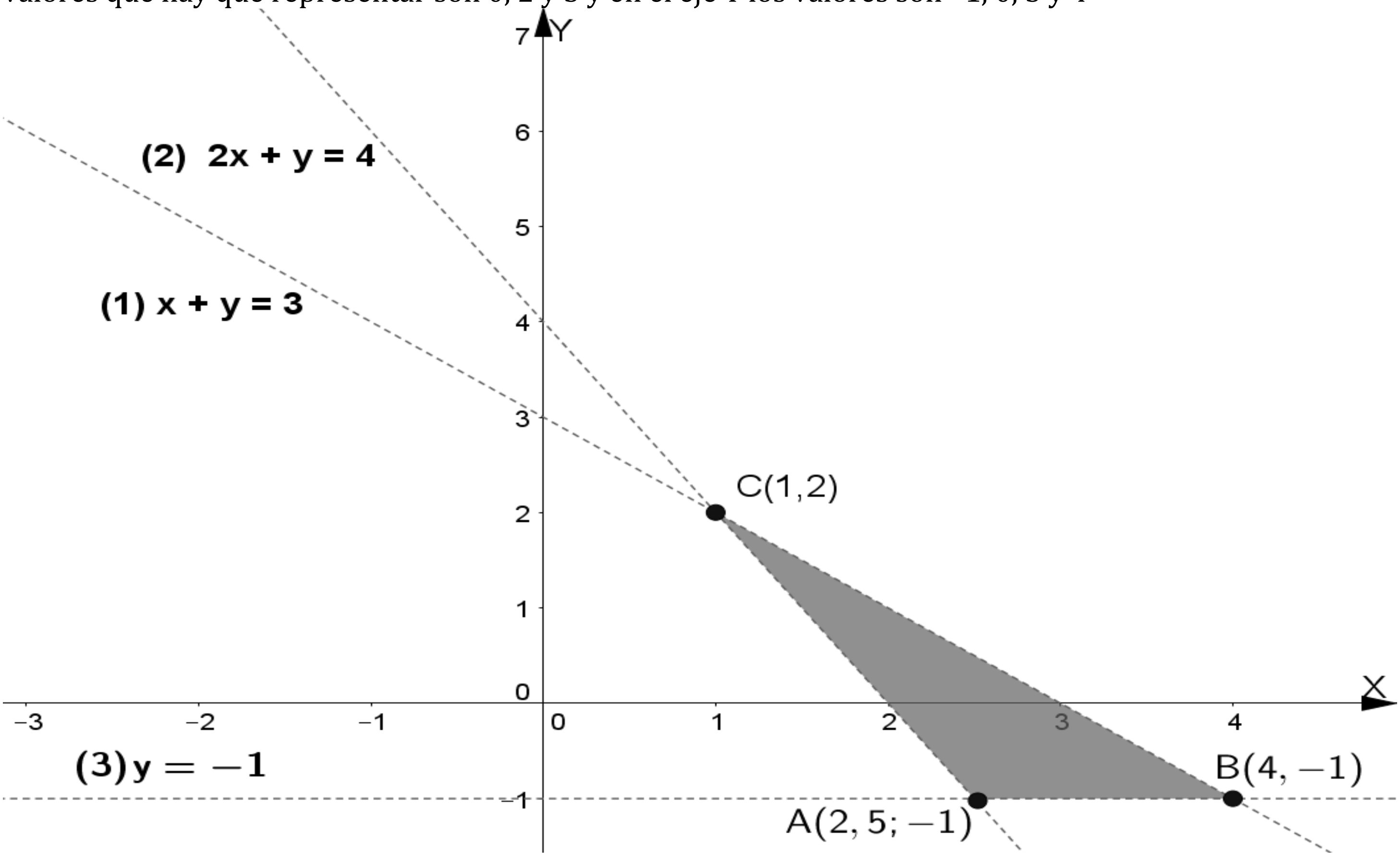
$y \geq -1 \rightarrow$ Recta: $y = -1$

Es la recta horizontal que pasa por (0, –1).

x	0
y	–1

$(0, 0) \rightarrow 0 \geq -1$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 0).

Dibujamos los ejes de coordenadas y hacemos la escala adecuada teniendo en cuenta que en el eje X los valores que hay que representar son 0, 2 y 3 y en el eje Y los valores son –1, 0, 3 y 4



b) Razona si el punto (2, 1) pertenece al recinto anterior.

Resolución

Comprobamos si cumple todas las inecuaciones : $2 + 1 \leq 3$ (sí la cumple)
$2.2 + 1 \geq 4$ (sí la cumple) $\quad 1 \geq -1$ (sí la cumple). Luego, (2,1) pertenece al recinto

c) Obtén los vértices del recinto y los valores mínimo y máximo de la función $F(x, y) = 5x + 4y$ en ese recinto, indicando en que puntos se alcanzan.

Resolución

Obtención de los vértices:

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ y = -1 \end{cases} \rightarrow 2x - 1 = 4, \quad x = 2{,}5 \rightarrow A(2{,}5;\ -1)$$

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ y = -1 \end{cases} \rightarrow x - 1 = 3, \quad x = 4 \rightarrow B(4,\ -1)$$

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + y = 4 \end{cases} ;\text{restando, } x = 1;\ \ 1 + y = 3, \quad y = 2 \rightarrow\ C(1,\ 2)$$

Veamos en qué vértices se alcanza el máximo y mínimo $F(x, y) = 5x + 4y$:

$F(A) = F(2{,}5; -1) = 5.2{,}5 + 4.(-1) = 8{,}5$ $\qquad F(B) = F(4, -1) = 5.4 + 4.(-1) = 16$

$F(C) = F(1, 2) = 5.1 + 4.2 = 13$

Luego, el máximo es 16 y se alcanza en $B(4, -1)$ y el mínimo es 8,5 y se alcanza en $A(2{,}5; -1)$

d) Razona si la función F puede alcanzar el valor 9 en el recinto anterior.

Resolución

Sí, porque 9 está comprendido entre el valor mínimo de F, que es 8,5 y el máximo, que es 16

5) Represente el recinto definido por las siguientes inecuaciones y calcule sus vértices:

$$x + 2y \geq 7 \qquad 4x - y \geq 1 \qquad 2x - y \leq 4 \qquad 3x + 2y \leq 20 \qquad x \geq 0 \qquad y \geq 0$$

Obtén el valor mínimo de la función $F(x, y) = 2x + y$ en el recinto anterior, así como el punto en el que se alcanza.

Resolución

Resolvemos el sistema de inecuaciones:

$x + 2y \geq 7 \rightarrow$ Recta: $x + 2y = 7$

$x = 1, \quad 1 + 2y = 7, \quad y = 3$

$y = 0, \quad x + 2.0 = 7, \quad x = 7$

x	1	7
y	3	0

$(0, 0) \rightarrow 0 + 2.0 \geq 7$ (falso).

La solución es el semiplano cerrado que no contiene al (0, 0).

$4x - y \geq 1 \rightarrow$ Recta: $4x - y = 1$

$x = 0, \quad 4.0 - y = 1, \quad y = -1$

$y = 3, \quad 4x - 3 = 1, \quad x = 1$

x	0	1
y	−1	3

$(0, 0) \rightarrow 4.0 - 0 \geq 1$ (falso).

La solución es el semiplano cerrado que no contiene al (0, 0).

$2x - y \leq 4 \rightarrow$ Recta: $2x - y = 4$

$x = 0, \quad 2.0 - y = 4, \quad y = -4$

$y = 0, \quad 2x - 0 = 4, \quad x = 2$

x	0	2
y	−4	0

$(0, 0) \rightarrow 2.0 - 0 \leq 4$ (cierto).

La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 0).

$3x + 2y \leq 20 \rightarrow$ Recta: $3x + 2y = 20$

$x = 0, \quad 3.0 + 2y = 20, \quad y = 10$

$y = 1, \quad 3x + 2.1 = 20, \quad x = 6$

x	0	6
y	10	0

$(0, 0) \rightarrow 3.0 + 2.0 \leq 20$ (cierto).

La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 0).

$x \geq 0 \rightarrow x = 0$ (eje Y)

$(1, 0) \rightarrow 1 \geq 0$ (cierto).

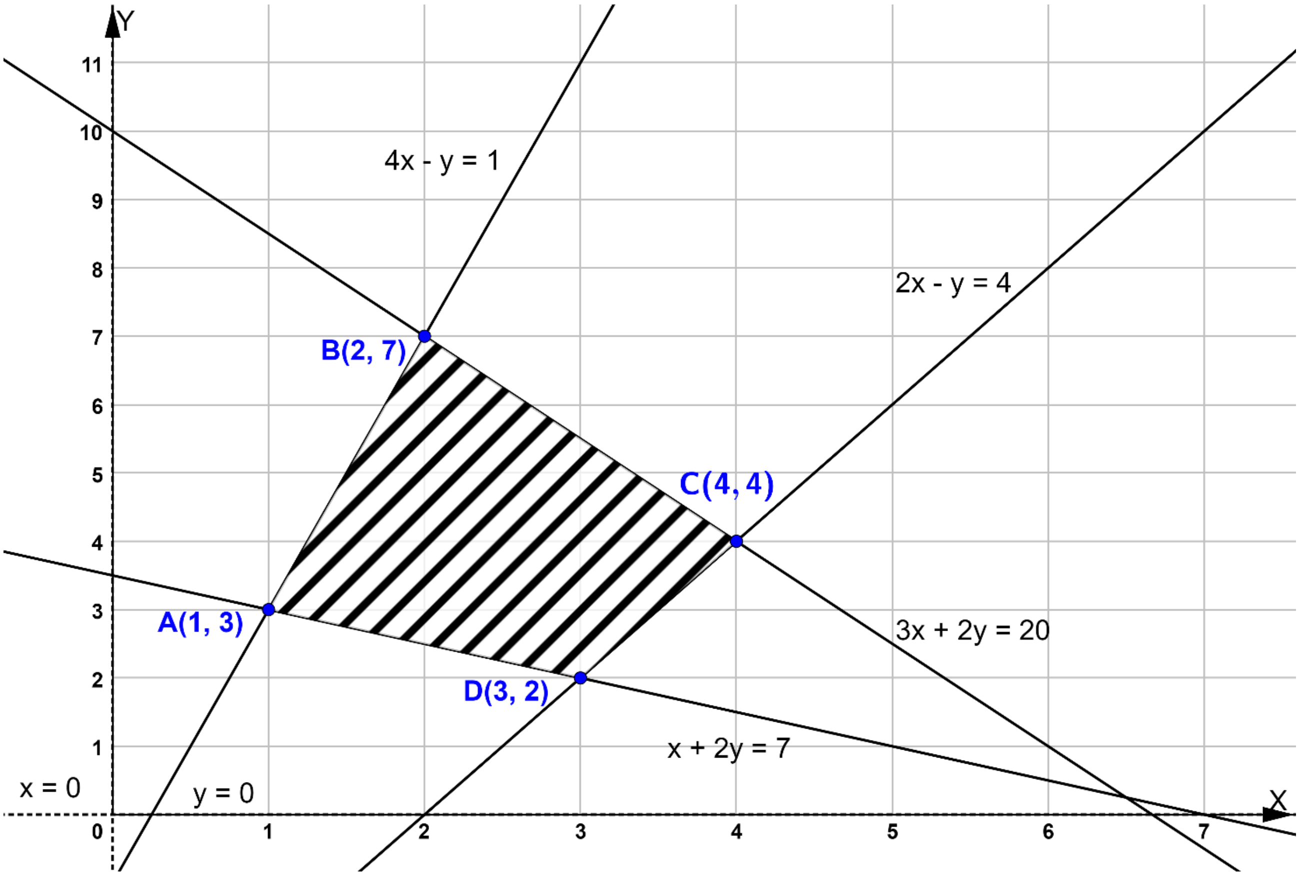
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (1, 0).

$y \geq 0 \rightarrow y = 0$ (eje X)

$(0, 1) \rightarrow 1 \geq 0$ (cierto).

La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 1).

Dibujamos los ejes de coordenadas y hacemos la escala adecuada teniendo en cuenta que en el eje X los valores que hay que representar son 0, 1, 2, 6 y 7 y en el eje Y los valores son −4, −1, 0, 3 y 10



Obtención de los vértices:

$$\begin{cases} x+2y=7 \\ 4x-y=1 \end{cases} \xrightarrow{.2} \begin{cases} x+2y=7 \\ 8x-2y=2 \end{cases}; \text{ sumando, } 9x=9,\ x=1;\ \ 1+2y=7,\ y=3 \to A(1,\ 3)$$

$$\begin{cases} 3x+2y=20 \\ 4x-y=1 \end{cases} \xrightarrow{.2} \begin{cases} 3x+2y=20 \\ 8x-2y=2 \end{cases}; \text{ sumando, } 11x=22,\ \ x=2;\ \ 4.2-y=1,\ \ y=7 \to\ B(2,\ 7)$$

$$\begin{cases} 3x+2y=20 \\ 2x-y=4 \end{cases} \xrightarrow{.2} \begin{cases} 3x+2y=20 \\ 4x-2y=8 \end{cases}; \text{ sumando, } 7x=28,\ \ x=4;\ \ 2.4-y=4,\ \ y=4 \to\ C(4,\ 4)$$

$$\begin{cases} x+2y=7 \\ 2x-y=4 \end{cases} \xrightarrow{.2} \begin{cases} x+2y=7 \\ 4x-2y=8 \end{cases}; \text{ sumando, } 5x=15,\ x=3;\ \ 3+2y=7,\ y=2 \to D(3,\ 2)$$

Veamos en qué vértice alcanza el valor mínimo $F(x, y) = 2x + y$:

$$f(A) = f(1, 3) = 2.1 + 3 = 5 \qquad f(B) = f(2, 7) = 2.2 + 7 = 11$$

$$f(C) = f(4, 4) = 2.4 + 4 = 12 \qquad f(D) = f(3, 2) = 2.3 + 2 = 8$$

Luego, el valor mínimo de F es 5 y se alcanza en el punto A(1, 3), o sea para $x = 1, y = 3$

6) Se considera la región del plano definida por las siguientes inecuaciones:

$$x + y \le 4 \qquad x - y \ge -2 \qquad x + 3y \ge 2 \qquad y \le 2$$

a) Represéntala gráficamente y determina sus vértices.

Resolución

Resolvemos el sistema de inecuaciones:

$x + y \le 4 \rightarrow$ Recta: $x + y = 4$

$x = 0, \quad 0 + y = 4, \quad y = 4$
$y = 0, \quad x + 0 = 4, \quad x = 4$

x	0	4
y	4	0

$(0, 0) \rightarrow 0 + 0 \le 4$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 0).

$x - y \ge -2 \rightarrow$ Recta: $x - y = -2$

$x = 0, \quad 0 - y = -2, \quad y = 2$
$y = 0, \quad x - 0 = -2, \quad x = -2$

x	0	−2
y	2	0

$(0, 0) \rightarrow 0 - 0 \ge -2$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 0).

$x + 3y \ge 2 \rightarrow$ Recta: $x + 3y = 2$

$x = -1, \quad -1 + 3y = 2, \quad y = 1$
$y = 0, \quad x + 3.0 = 2, \quad x = 2$

x	−1	2
y	1	0

$(0, 0) \rightarrow 0 + 3.0 \ge 2$ (falso).
La solución es el semiplano cerrado que no contiene al (0, 0).

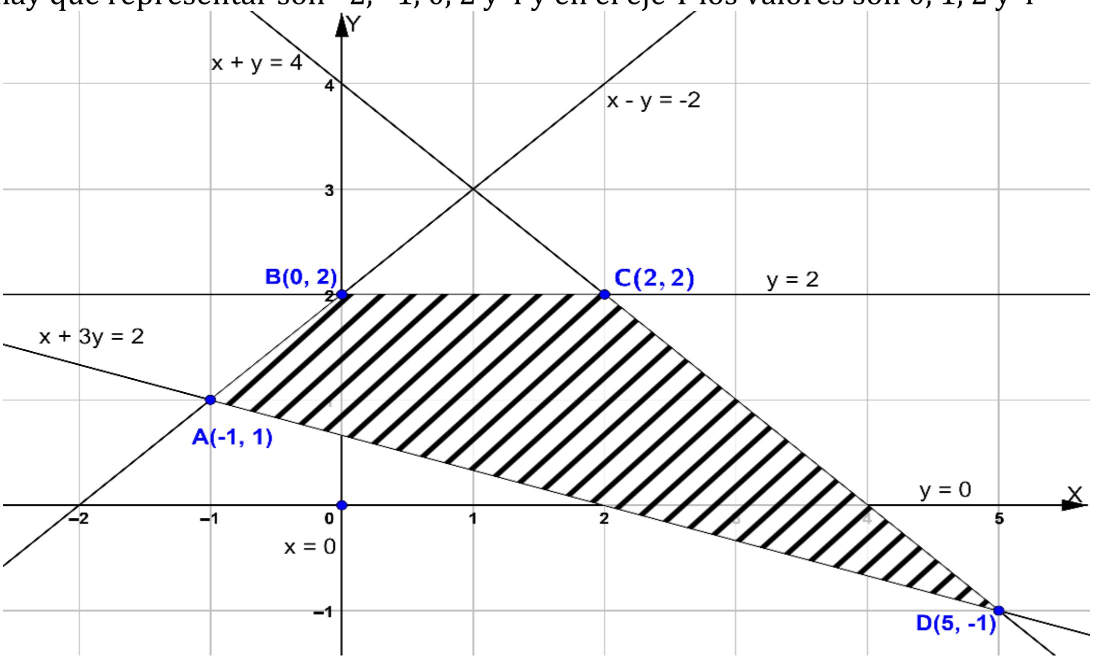
$y \le 2 \rightarrow$ Recta: $y = 2$

Es la recta horizontal que pasa por (0, 2).

x	0
y	2

$(0, 0) \rightarrow 0 \le 2$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 0).

Dibujamos los ejes de coordenadas y hacemos la escala adecuada teniendo en cuenta que en el eje X los valores que hay que representar son −2, −1, 0, 2 y 4 y en el eje Y los valores son 0, 1, 2 y 4



Obtención de los vértices:

$$\begin{cases} x + 3y = 2 \\ x - y = -2 \end{cases}; \text{restando, } 4y = 4, \ y = 1; \quad x - 1 = -2, \ x = -1 \rightarrow A(-1, 1)$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases} \begin{cases} 3x + 2y = 20 \\ 8x - 2y = 2 \end{cases} \rightarrow B(0, 2) \qquad \begin{cases} x + y = 4 \\ y = 2 \end{cases} \rightarrow x + 2 = 4, \ x = 2 \rightarrow C(2, 2)$$

$$\begin{cases} x + 3y = 2 \\ x + y = 4 \end{cases}; \text{restando, } 2y = -2, \ y = -1; \quad x - 1 = 4, \ x = 5 \rightarrow D(5, -1)$$

b) Indica razonadamente si el punto (4; –0,75) pertenece a dicha región.

Resolución

Tenemos que comprobar si cumple todas las restricciones, $\begin{cases} x+y\le 4 \xrightarrow[y=-0,75]{x=4} 4-0,75\le 4 \text{ (sí)} \\ x-y\ge -2 \xrightarrow[y=-0,75]{x=4} 4+0,75\ge -2 \text{ (sí)} \\ x+3y\ge 2 \xrightarrow[y=-0,75]{x=4} 4+3.(-0,75)\ge 2 \text{ (no)} \\ y\le 2 \xrightarrow[y=-0,75]{x=4} -0,75\le 2 \text{ (sí)} \end{cases}$

Luego, el punto no pertenece a la región porque no cumple la 3ª restricción

c) ¿En qué puntos de la región anterior la función $F(x, y) = x + y$ alcanza los valores máximo y mínimo y cuáles son estos valores?

Resolución

Veamos en qué vértices se alcanza el máximo y mínimo $F(x, y) = x + y$:

$F(A) = F(-1, 1) = -1 + 1 = 0$ $\quad F(B) = F(0, 2) = 0 + 2 = 2$ $\quad F(C) = F(2, 2) = 2 + 2 = 4$

$F(D) = F(5, -1) = 5 - 1 = 4$

Luego, el máximo es 4 y se alcanza en el segmento cerrado CD y el mínimo es 0 y se alcanza en A(–1, 1)

7) Sea el siguiente sistema de inecuaciones: $x + 2y \le 11$; $x \ge 2y - 5$; $3x + y \le 18$; $x \ge 0$; $y \ge 0$

a) Representa gráficamente la región que definen y calcula sus vértices.

Resolución

Resolvemos el sistema de inecuaciones:

$x + 2y \le 11 \rightarrow$ Recta: $x + 2y = 11$

$x = 1,\quad 1 + 2y = 11,\quad y = 5$
$y = 0,\quad x + 2.0 = 11,\quad x = 11$

x	1	11
y	5	0

$(0, 0) \rightarrow 0 + 2.0 \le 11$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 0).

$x \ge 2y - 5 \rightarrow$ Recta: $x = 2y - 5$

$y = 3,\quad x = 2.3 - 5,\quad x = 1$
$y = 4,\quad x = 2.4 - 5,\quad x = 3$

x	1	3
y	3	4

$(0, 0) \rightarrow 0 \ge 2.0 - 5$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 0).

$3x + y \le 18 \rightarrow$ Recta: $3x + y = 18$

$x = 0,\quad 3.0 + y = 18,\quad y = 18$
$y = 0,\quad 3x + 0 = 18,\quad x = 6$

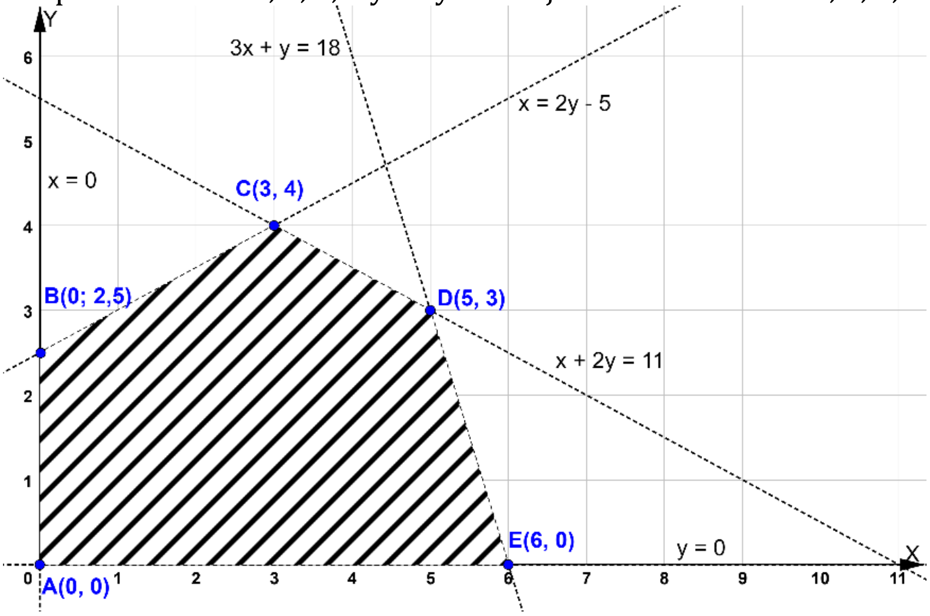
x	0	6
y	18	0

$(0, 0) \rightarrow 3.0 + 0 \le 18$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 0).

$x \ge 0 \rightarrow x = 0$ (eje Y)
$(1, 0) \rightarrow 1 \ge 0$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (1, 0).

$y \ge 0 \rightarrow y = 0$ (eje X)
$(0, 1) \rightarrow 1 \ge 0$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 1).

Dibujamos los ejes de coordenadas y hacemos la escala adecuada teniendo en cuenta que en el eje X los valores que hay que representar son 0, 1, 3, 6 y 11 y en el eje Y los valores son 0, 3, 4, 5 y 18



Obtención de los vértices:

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow A(0, 0)$$

$$\begin{cases} x = 2y - 5 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow 0 = 2y - 5,\ y = 2{,}5 \rightarrow B(0;\ 2{,}5)$$

$$\begin{cases} x = 2y - 5 \\ x + 2y = 11 \end{cases};\ 2y - 5 + 2y = 11,\ 4y = 16,\ \ y = 4;\ \ x = 2.4 - 5 = 3 \rightarrow\ C(3,\ 4)$$

$$\begin{cases} 3x + y = 18 \\ x + 2y = 11 \end{cases} \xrightarrow{.\,2} \begin{cases} 6x + 2y = 36 \\ x + 2y = 11 \end{cases};\ \text{restando},\ 5x = 25,\ x = 5;\ 5 + 2y = 11, y = 3 \rightarrow\ D(5,\ 3)$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ 3x + y = 18 \end{cases} \rightarrow 3x = 18,\ x = 6 \rightarrow E(6,\ 0)$$

b) Halla los puntos de esa región en los que la función F(x, y) = 2x + 3y alcanza los valores máximo y mínimo y calcula dichos valores.

<u>Resolución</u>

Veamos en qué vértices se alcanza el máximo y mínimo F(x, y) = 2x + 3y:

F(A) = F(0, 0) = 2.0 + 3.0 = 0 F(B) = F(0; 2,5) = 2.0 + 3.2,5 = 7,5 F(C) = F(3, 4) = 2.3 + 3.4 = 18

F(D) = F(5, 3) = 2.5 + 3.3 = 19 F(E) = F(6, 0) = 2.6 + 3.0 = 12

Luego, el máximo es 19 y se alcanza en D(5, 3) y el mínimo es 0 y se alcanza en A(0, 0)

c) Justifica si el punto (5,5; 2) pertenece a la región factible.

<u>Resolución</u>

Tenemos que comprobar si (5,5; 2) cumple todas las restricciones,

$$\begin{cases} x + 2y \le 11 \xrightarrow[y\,=\,2]{x\,=\,5{,}5} 5{,}5 + 2.2 \le 11 \text{ (sí)} \\ x \ge 2y - 5 \xrightarrow[y\,=\,2]{x\,=\,5{,}5} 5{,}5 \ge 2.2 - 5 \text{ (sí)} \\ 3x + y \le 18 \xrightarrow[y\,=\,2]{x\,=\,5{,}5} 3.5{,}5 + 2 \le 18 \rightarrow 18{,}5 \le 18 \text{ (no)} \\ x \ge 0,\ \ y \ge 0 \end{cases}$$

Luego, no pertenece porque no verifica la 3ª restricción

8) Sea el recinto definido por las siguientes inecuaciones:

$$y \leq 2x + 1 \qquad y \leq 13 - 4x \qquad x \geq 4 - y$$

a) Razona si el punto de coordenadas (1,1; 2,8) pertenece al recinto.

Resolución

Tenemos que comprobar si cumple todas las restricciones, $\begin{cases} y \leq 2x+1 \xrightarrow[y\,=\,2,8]{x\,=\,1,1} 2,8 \leq 2.1,1+1 \text{ (sí)} \\ y \leq 13-4x \xrightarrow[y\,=\,2,8]{x\,=\,1,1} 2,8 \leq 13-4.1,1 \text{ (sí)} \\ x \geq 4-y \xrightarrow[y\,=\,2,8]{x\,=\,1,1} 1,1 \geq 4-2,8 \text{ (no)} \end{cases}$

Luego, el punto no pertenece al recinto porque no cumple la 3ª restricción

b) ¿En qué puntos alcanza la función $F(x, y) = -3x + 1,5y$ sus valores extremos y cuáles son éstos?

Resolución

Los puntos que se piden deben ser los vértices del recinto

$$\begin{cases} y = 2x+1 \\ y = 13-4x \end{cases}; \; 2x+1 = 13-4x, \quad 6x = 12, \; x = 2; \quad y = 2.2+1 = 5 \to A(2, 5)$$

$$\begin{cases} y = 2x+1 \\ x = 4-y \to y = 4-x \end{cases}; \; 2x+1 = 4-x, \quad 3x = 3, \; x = 1; \quad y = 4-1 = 3 \to B(1, 3)$$

$$\begin{cases} y = 13-4x \\ x = 4-y \to y = 4-x \end{cases}; \; 13-4x = 4-x, \quad 9 = 3x, \; x = 3; \quad y = 4-3 = 1 \to B(3, 1)$$

Los puntos donde alcanza los valores extremos $F(x, y) = -3x + 1,5y$ deben ser en los vértices de la región:

$$F(A) = F(2, 5) = -3.2 + 1,5.5 = 1,5 \qquad F(B) = F(1, 3) = -3.1 + 1,5.3 = 1,5$$

$$F(C) = F(3, 1) = -3.3 + 1,5.1 = -7,5$$

Luego, el valor mínimo de F es −7,5 y se alcanza en el punto C(3, 1); el valor máximo de F es 1,5 y se alcanza en el segmento cerrado AB

c) Razona si existe algún punto del recinto en el que la función F se anule.

Resolución

Sí, porque F toma todos los valores desde el valor mínimo que es −7,5 hasta el valor máximo, que es 1,5

PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓN LINEAL EN CONTEXTOS REALES

Hay muchos casos reales que se resuelven mediante un problema de programación lineal.
Para plantear el problema elegimos las incógnitas y vemos la relación entre los datos e incógnitas para así obtener la función objetivo y las restricciones.

Actividades resueltas

1) Un cocinero tiene que hacer el postre para una cena y le han encargado dos de sus mejores creaciones: Delicia Roja y Delicia Negra. Para elaborar 1 kg de Delicia Roja son necesarias 3 tarrinas de fresas y 1 tableta de chocolate y para elaborar 1 kg de Delicia Negra se necesita 1 tarrina de fresas y 2 tabletas de chocolate. Dispone de 15 tarrinas de fresas y 10 tabletas de chocolate. Además, la cantidad de Delicia Negra no debe ser inferior a 1,5 kg y tampoco debe ser superior al doble de Delicia Roja.
Si cada kilogramo de Delicia Roja le reporta un beneficio de 3 euros y el de Delicia Negra 5 euros, averigua qué cantidad de cada postre debe elaborar para conseguir un beneficio máximo y a cuánto asciende ese beneficio.

Resolución

Representamos en una tabla los datos del problema:

	cantidad (kg)	nº de tarrinas de fresa	nº de tabletas de chocolate	beneficio (en €)
Delicia Roja	x	$3x$	$1x$	$3x$
Delicia Negra	y	$1y$	$2y$	$5y$
total	$x + y$	$3x + y$	$x + 2y$	$3x + 5y$

Las restricciones son

$$\begin{cases} \text{Dispone de 15 tarrinas de fresa}: 3x + y \leq 15 \\ \text{Dispone de 10 tabletas de chocolate}: x + 2y \leq 10 \\ \text{La cantidad de Delicia Negra no debe ser inferior a 1,5 kg}: y \geq 1{,}5 \\ \text{La cantidad de Delicia Negra no debe ser superior al doble de Delicia Roja}: y \leq 2x \\ \text{Las cantidades no pueden ser negativas}: x \geq 0,\ \ y \geq 0 \end{cases}$$

La función a optimizar (maximizar) es el beneficio: $f(x, y) = 3x + 5y$

Obtención de la región factible (resolvemos el sistema de inecuaciones):

$3x + y \leq 15 \rightarrow$ Recta: $3x + y = 15$

$x = 0, \quad 3.0 + y = 15, \quad y = 15$
$y = 0, \quad 3x + 0 = 15, \quad x = 5$

x	0	5
y	15	0

$(0, 0) \rightarrow 3.0 + 0 \leq 15$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 0).

$x + 2y \leq 10 \rightarrow$ Recta: $x + 2y = 10$

$x = 0, \quad 0 + 2y = 10, \quad y = 5$
$y = 0, \quad x + 2.0 = 10, \quad x = 10$

x	0	10
y	5	0

$(0, 0) \rightarrow 0 + 2.0 \leq 10$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 0).

$y \geq 1{,}5 \rightarrow$ Recta: $y = 1{,}5$

Es la recta horizontal que pasa por (0; 1,5).

x	0
y	1,5

$(0, 0) \rightarrow 0 \geq 1{,}5$ (falso).
La solución es el semiplano cerrado que no contiene al (0, 0).

$y \leq 2x \rightarrow$ Recta: $y = 2x$

$x = 0, \quad y = 2.0, \quad y = 0$
$x = 1, \quad y = 2.1, \quad y = 2$

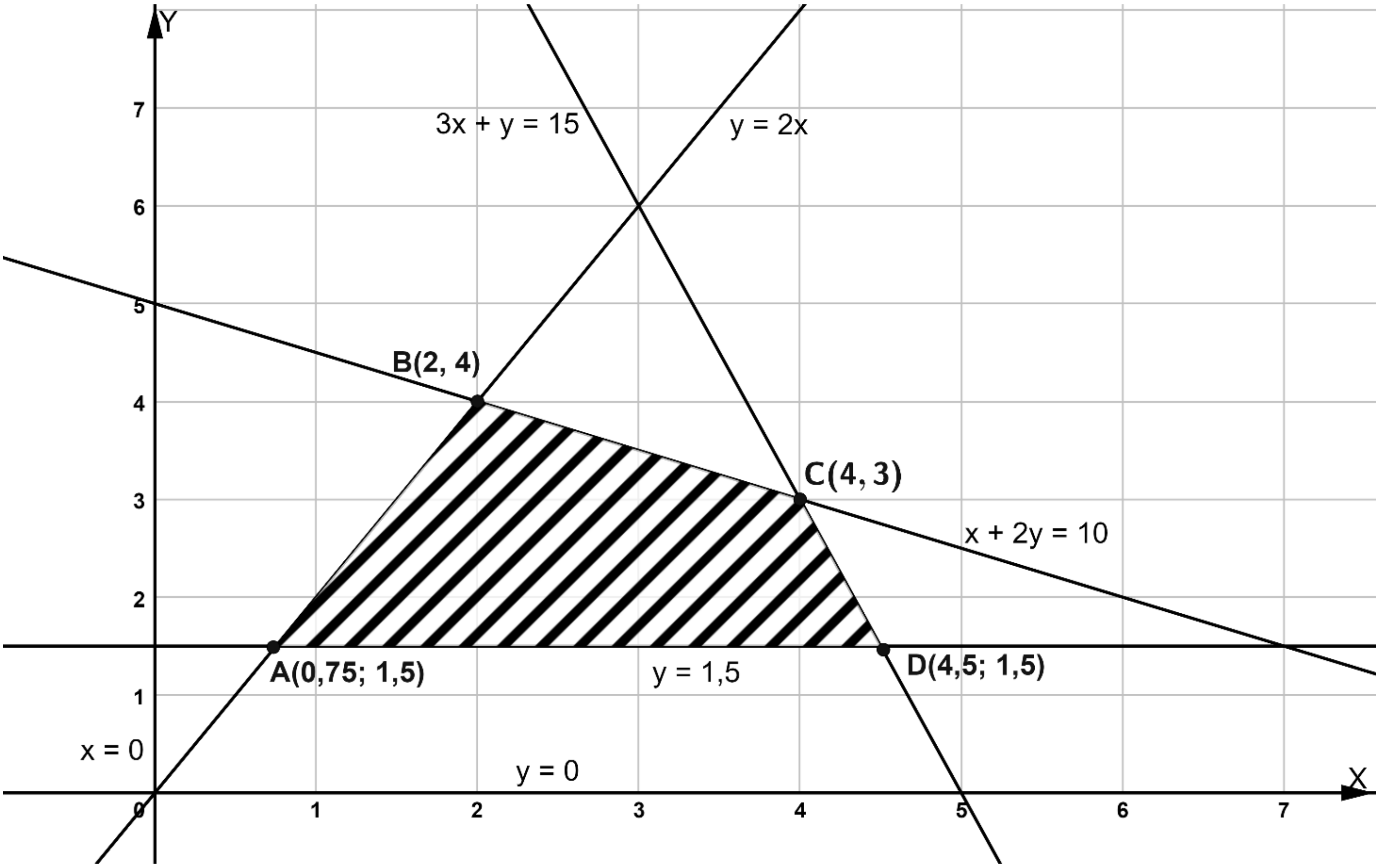
x	0	1
y	0	2

$(1, 0) \rightarrow 0 \leq 2.1$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 0).

$x \geq 0 \rightarrow x = 0$ (eje Y)
$(1, 0) \rightarrow 1 \geq 0$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (1, 0).

$y \geq 0 \rightarrow y = 0$ (eje X)
$(0, 1) \rightarrow 1 \geq 0$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 1).

Dibujamos los ejes de coordenadas y hacemos la escala adecuada teniendo en cuenta que en el eje X los valores que hay que representar son 0, 1, 5 y 10 y en el eje Y los valores son 0; 1,5; 2; 5 y 15



Obtención de los vértices:

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = 1{,}5 \end{cases} \rightarrow 2x = 1{,}5;\ x = 0{,}75 \rightarrow A(0{,}75;\ 1{,}5)$$

$$\begin{cases} x + 2y = 10 \\ y = 2x \end{cases} \rightarrow x + 2(2x) = 10,\ \ x = 2;\ y = 2.2 = 4 \rightarrow B(2,\ 4)$$

$$\begin{cases} 3x + y = 15 \\ x + 2y = 10 \end{cases} \xrightarrow{.\,2} \begin{cases} 6x + 2y = 30 \\ x + 2y = 10 \end{cases};\ \text{restando},\ 5x = 20,\ x = 4;\quad 4 + 2y = 10,\ \ y = 3 \rightarrow C(4,\ 3)$$

$$\begin{cases} 3x + y = 15 \\ y = 1{,}5 \end{cases};\ 3x + 1{,}5 = 15,\ x = 4{,}5 \rightarrow D(4{,}5;\ 1{,}5)$$

Veamos en qué vértices alcanza el valor máximo f(x, y) = 3x + 5y:
f(A) = f(075; 1,5) = 3.0,75 + 5.1,5 = 9,75 f(B) = f(2, 4) = 3.2 + 5.4 = 26
f(C) = f(4, 3) = 3.4 + 5.3 = 27 f(D) = f(4,5; 1,5) = 3.4,5 + 5.1,5 = 21

Luego, el beneficio máximo es 27 € y se alcanza para x = 4, y = 3.
Es decir, debe elaborar 4 kg de Delicia Roja y 3 kg de Delicia Negra

2) Se quiere elaborar dos suplementos alimenticios UNAL y DOSAL con idea de completar la dieta de ciertos individuos. Cada comprimido de UNAL aporta 5 unidades de calcio, 5 de proteínas y 1 caloría y tiene un coste 0.6 euros, mientras que un comprimido de DOSAL aporta 2 unidades de calcio, 5 de proteínas y 3 calorías, siendo su coste de 1 euro. Sabiendo que los mínimos diarios requeridos son 10 unidades de calcio, 20 de proteínas y 6 calorías, encuentra la combinación de comprimidos de los dos suplementos que satisfacen las necesidades diarias con el menor coste.

Resolución

Representamos en una tabla los datos del problema:

	cantidad	calcio	proteínas	calorías	coste (en €)
UNAL	x	5x	5x	1x	0,6x
DOSAL	y	2y	5y	3y	1y
total	x + y	5x + 2y	5x + 5y	x + 3y	0,6x + y

Las restricciones son

$$\begin{cases} \text{mínimo diarío de 10 unidades de calcio}: 5x+2y \geq 10 \\ \text{mínimo diarío de 20 proteínas}: 5x+5y \geq 20 \xrightarrow{:5} x+y \geq 4 \\ \text{mínimo diarío de 6 calorías}: x+3y \geq 6 \\ \text{Las cantidades no pueden ser negativas}: x \geq 0,\ \ y \geq 0 \end{cases}$$

La función a optimizar (minimizar) es el coste total: $f(x, y) = 0,6x + y$

Obtención de la región factible (resolvemos el sistema de inecuaciones):

$5x + 2y \geq 10 \rightarrow$ Recta: $5x + 2y = 10$

$x = 0,\ \ 5.0 + 2y = 10,\ \ y = 5$
$y = 0,\ \ 5x + 2.0 = 10,\ \ x = 2,5$

x	0	2,5
y	5	0

$(0, 0) \rightarrow 5.0 + 2.0 \geq 10$ (falso).
La solución es el semiplano cerrado que no contiene al (0, 0).

$x + y \geq 4 \rightarrow$ Recta: $x + y = 4$

$x = 0,\ \ 0 + y = 4,\ \ \ y = 4$
$y = 0,\ \ x + 0 = 4,\ \ \ x = 4$

x	0	4
y	4	0

$(0, 0) \rightarrow 0 + 0 \geq 4$ (falso).
La solución es el semiplano cerrado que no contiene al (0, 0).

$x + 3y \geq 6 \rightarrow$ Recta: $x + 3y = 6$

$x = 0,\ \ 0 + 3y = 6,\ \ \ y = 2$
$y = 0,\ \ x + 3.0 = 6,\ \ \ x = 6$

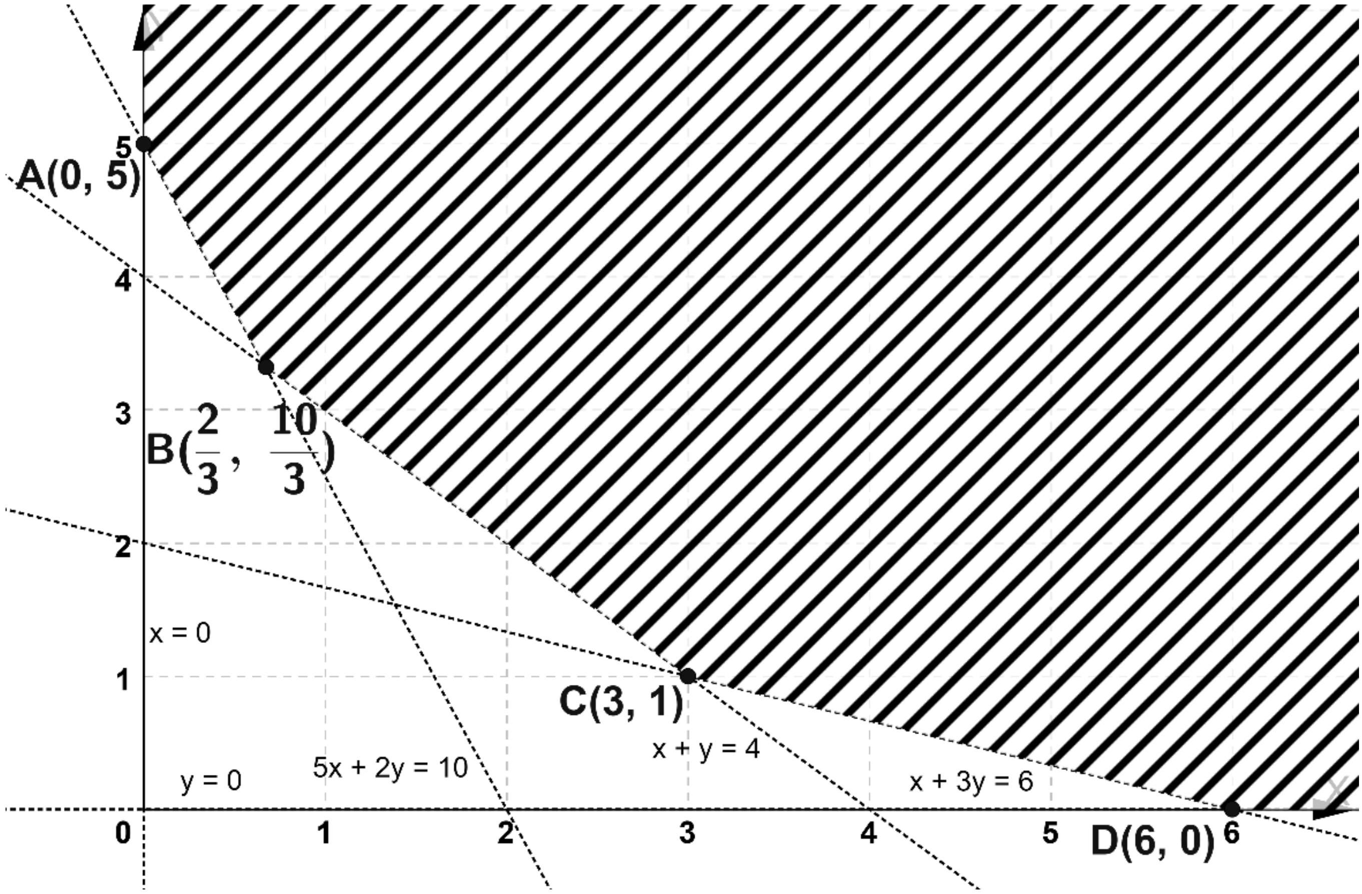
x	0	6
y	2	0

$(0, 0) \rightarrow 0 + 3.0 \geq 6$ (falso).
La solución es el semiplano cerrado que no contiene al (0, 0).

$x \geq 0 \rightarrow x = 0$ (eje Y)
$(1, 0) \rightarrow 1 \geq 0$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (1, 0).

$y \geq 0 \rightarrow y = 0$ (eje X)
$(0, 1) \rightarrow 1 \geq 0$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 1).

Dibujamos los ejes de coordenadas y hacemos la escala adecuada teniendo en cuenta que en el eje X los valores que hay que representar son 0; 2,5; 4 y 6 y en el eje Y los valores son 0, 2, 4 y 5



Obtención de los vértices:

$$\begin{cases} 5x+2y=10=28 \\ x=0 \end{cases} \rightarrow 5.0+2y=10,\ y=5 \rightarrow A(0,5)$$

$$\begin{cases} 5x+2y=10 \\ x+y=4 \xrightarrow{.2} \end{cases} \begin{cases} 5x+2y=10 \\ 2x+2y=8 \end{cases} ;\ \text{restando},\ 3x=2,\ x=\frac{2}{3};\ \ \frac{2}{3}+y=4,\ \ y=4-\frac{2}{3},\ y=\frac{10}{3} \rightarrow\ B(\frac{2}{3},\ \frac{10}{3})$$

$$\begin{cases} x+3y=6 \\ x+y=4 \end{cases} ;\ \text{restando}, 2y=2,\ y=1;\ \ x+1=4,\ x=3 \rightarrow\ C(3,1)$$

$$\begin{cases} x+3y=6 \\ y=0 \end{cases} \rightarrow x+3.0=6,\ x=6 \rightarrow D(6,0)$$

Veamos en qué vértices alcanza el valor mínimo $f(x, y) = 0{,}6x + y$:

$f(A) = f(0, 5) = 0{,}6.0 + 5 = 5$ $\qquad$ $f(B) = f(\frac{2}{3}, \frac{10}{3}) = 0{,}6.\frac{2}{3} + \frac{10}{3} \cong 3{,}73$

$f(C) = f(3, 1) = 0{,}6 \,.\, 3 + 1 = 2{,}8$ $\qquad$ $f(D) = f(6, 0) = 0{,}6 \,.\, 6 + 0 = 3{,}6$

Luego, el coste mínimo es 2,8 € y se alcanza en el punto C(3, 1), o sea para $x = 3$, $y = 1$.

Es decir, en la dieta hay que combinar 3 comprimidos de UNAL con 1 comprimido de DOSAL para que el coste sea mínimo

3) Una empresa comercializa dos tipos de concentrado de café, A y B, que se obtienen a partir de tres tipos de grano: de Colombia, de Etiopía y de Costa Rica. Para elaborar 1 kg de concentrado A se necesitan 4.5 kg de grano de Colombia y 3 kg de grano de Etiopía. Por otra parte, se requieren 7,5 kg de grano de Colombia y 1,5 kg de grano de Costa Rica para elaborar 1 kg de concentrado B. Actualmente la empresa dispone de un máximo de 67,5 kg de grano de Colombia, 30 kg de grano de Etiopía y 9 kg de grano de Costa Rica. Además, se exige que el número de kilogramos de concentrado A producidos debe ser mayor o igual que la mitad de los kilogramos de concentrado B.

a) Representa la región factible que describe el problema anterior y determina sus vértices.

Resolución

Representamos en una tabla los datos del problema:

	nº de kg	kg de Colombia	kg de Etiopía	kg de Costa Rica
tipo A	x	4,5x	3x	-
tipo B	y	7,5y	-	1,5y
total	x + y	4,5x + 7,5y	3x	1,5y

Las restricciones son

$$\begin{cases} \text{Se dispone de un máximo de 67,5 kg de grano de Colombia}: 4{,}5x + 7{,}5y \le 67{,}5 \xrightarrow{\cdot 10} 45x + 75y \le 675 \xrightarrow{:15} 3x + 5y \le 45 \\ \text{Se dispone de un máximo de 30 kg de grano de Etiopía}: 3x \le 30 \to x \le 10 \\ \text{Se dispone de un máximo de 9 kg de grano de Costa Rica}: 1{,}5y \le 9 \to y \le 6 \\ \text{Nº kg de A debe ser mayor o igual que la mitad de los de B}: x \ge \dfrac{y}{2} \xrightarrow{\cdot 2} 2x \ge y \\ \text{El nº de kg de A y B no puede ser negativo}: x \ge 0,\ \ y \ge 0 \end{cases}$$

Obtención de la región factible (resolvemos el sistema de inecuaciones):

$3x + 5y \le 45 \to$ Recta: $3x + 5y = 45$

$x = 0,\quad 3.0 + 5y = 45,\quad y = 9$
$y = 0,\quad 3x + 5.0 = 45,\quad x = 15$

x	0	15
y	9	0

$(0, 0) \to 3.0 + 5.0 \le 45$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 0).

$x \le 10 \to$ Recta: $x = 10$

Es la recta vertical que pasa por (10, 0).

x	00
y	0

$(0, 0) \to 0 \le 10$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 0).

$y \le 6 \to$ Recta: $y = 6$

Es la recta horizontal que pasa por (0, 6).

x	0
y	6

$(0, 0) \to 0 \le 6$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 0).

$2x \ge y \to$ Recta: $2x = y$

$x = 0,\quad 2.0 = y,\quad y = 0$
$x = 1,\quad 2.1 = y,\quad y = 2$

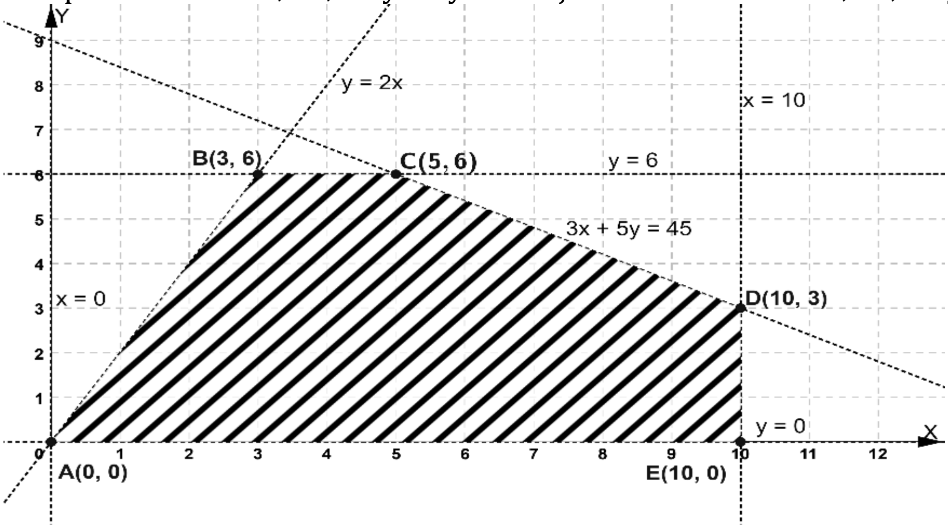
x	0	1
y	0	2

$(1, 0) \to 2.1 \ge 0$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 0).

$x \ge 0 \to x = 0$ (eje Y)
$(1, 0) \to 1 \ge 0$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (1, 0).

$y \ge 0 \to y = 0$ (eje X)
$(0, 1) \to 1 \ge 0$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 1).

Dibujamos los ejes de coordenadas y hacemos la escala adecuada teniendo en cuenta que en el eje X los valores que hay que representar son 0, 20, 40 y 60 y en el eje Y los valores son 0, 10, 70 y 80



Obtención de los vértices:

$\begin{cases} y = 2x \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow 0 = 2x, \quad x = 0 \rightarrow A(0, 0)$ $\qquad$ $\begin{cases} y = 2x \\ y = 6 \end{cases} \rightarrow 6 = 2x, \quad x = 3 \rightarrow B(3,6)$

$\begin{cases} 3x + 5y = 45 \\ y = 6 \end{cases} \rightarrow 3x + 5.6 = 45, \quad x = 5 \rightarrow C(5, 6)$ $\qquad$ $\begin{cases} 3x + 5y = 45 \\ x = 10 \end{cases} \rightarrow 3.10 + 5y = 45, \quad y = 3 \rightarrow D(10, 3)$

$$\begin{cases} x = 10 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow E(10, 0)$$

b) Indica de manera razonada si con las condiciones dadas sería posible producir 7 kg del concentrado A y 5 kg del concentrado B.

Resolución

Tenemos que comprobar si la pareja (7, 5) cumple todas las restricciones,

$$\begin{cases} 3x + 5y \le 45 \xrightarrow[y=5]{x=7} 3.7 + 5.5 \le 45 \rightarrow 46 \le 45 \text{ (no)} \\ x \le 10 \\ y \le 6 \\ 2x \ge y \\ x \ge 0, \; y \ge 0 \end{cases}$$

Luego, no es posible porque no verifica la 1ª restricción

c) Sabiendo que el beneficio obtenido por la venta de cada kilogramo de concentrado del tipo A es 2 euros y de cada kilogramo del tipo B es 4 euros, ¿cuántos kilogramos del tipo A y cuántos del tipo B se habrán de producir para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál es ese beneficio?

Resolución

	nº de kg	beneficio (en €)
tipo A	x	2x
tipo B	y	4y
total	x + y	2x + 4y

La función a optimizar (maximizar) es el beneficio total: f(x, y) = 2x + 4y

Veamos en qué vértices alcanza f el valor máximo:

f(A) = f(0, 0) = 2.0 + 4.0= 0 $\qquad$ f(B) = f(3, 6) = 2.3 + 4.6 = 30 $\qquad$ f(C) = f(5, 6) = 2.5 + 4.6 = 34

f(D) = f(10, 3) = 2.10 + 4.3 = 32 $\qquad$ f(E) = f(10, 0) = 2.10 + 4.0= 20

Luego, el beneficio máximo es 34 € y se alcanza para x = 5, y = 6.

Es decir, 5 kg del tipo A y 6 kg del tipo B para que el beneficio sea máximo

4) Un fabricante de complementos alimenticios elabora dos tipos de bebidas energéticas a partir de tres componentes: taurina, cafeína y L-carnitina. Un envase del primer tipo de bebida precisa 30 g de taurina, 40 g de cafeína y 20 g de L-carnitina, mientras que uno del segundo necesita 40 g de taurina, 30 g de cafeína y 10 g de L-carnitina.
Sabiendo que dispone de 52 kg de taurina, 46 kg de cafeína y 20 kg de L-carnitina, que cada envase del primer tipo se vende por 1.5 € y cada envase del segundo tipo por 1 €, ¿cuántos envases de cada tipo de bebida tendría que elaborar para obtener la ganancia máxima? ¿A cuánto ascendería esta ganancia?

Resolución

Representamos en una tabla los datos del problema:

	nº de envases	g de taurina	g de cafeína	g de L-carnitina	ganancia (en €)
1er tipo	x	30x	40x	20x	1,5x
2º tipo	y	40y	30y	10y	1y
total	x + y	30x + 40y	40x + 30y	20x + 10y	1,5x + y

Las restricciones son

$$\begin{cases} \text{Dispone de 52 kg (52000 g) de taurina}: 30x + 40y \leq 52000 \xrightarrow{:10} 3x + 4y \leq 5200 \\ \text{Dispone de 46 kg (46000 g) de cafeína}: 40x + 30y \leq 46000 \xrightarrow{:10} 4x + 3y \leq 4600 \\ \text{Dispone de 20 kg (20000 g) de L}-\text{carnitina}: 20x + 10y \leq 20000 \xrightarrow{:10} 2x + y \leq 2000 \\ \text{El nº de envases no puede ser negativo}: x \geq 0,\ y \geq 0 \end{cases}$$

La función a optimizar (maximizar) es la ganancia: $f(x, y) = 1,5x + y$

Obtención de la región factible (resolvemos el sistema de inecuaciones):

$3x + 4y \leq 5200 \rightarrow$ Recta: $3x + 4y = 5200$

$x = 0, \quad 3.0 + 4y = 5200, \quad y = 1300$
$y = 1000, \quad 3x + 4.1000 = 5200, \quad 3x = 1200, \quad x = 400$

x	0	400
y	1300	0

$(0, 0) \rightarrow 3.0 + 4.0 \leq 5200$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 0).

$4x + 3y \leq 4600 \rightarrow$ Recta: $4x + 3y = 4600$

$x = 1000, \quad 4.1000 + 3y = 4600, \quad y = 200$
$y = 0, \quad 4x + 3.0 = 4600, \quad x = 1150$

x	1000	1150
y	200	0

$(0, 0) \rightarrow 4.0 + 3.0 \leq 4600$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 0).

$2x + y \leq 2000 \rightarrow$ Recta: $2x + y = 2000$

$x = 0, \quad 2.0 + y = 2000, \quad y = 2000$
$y = 0, \quad 2x + 0 = 2000, \quad x = 1000$

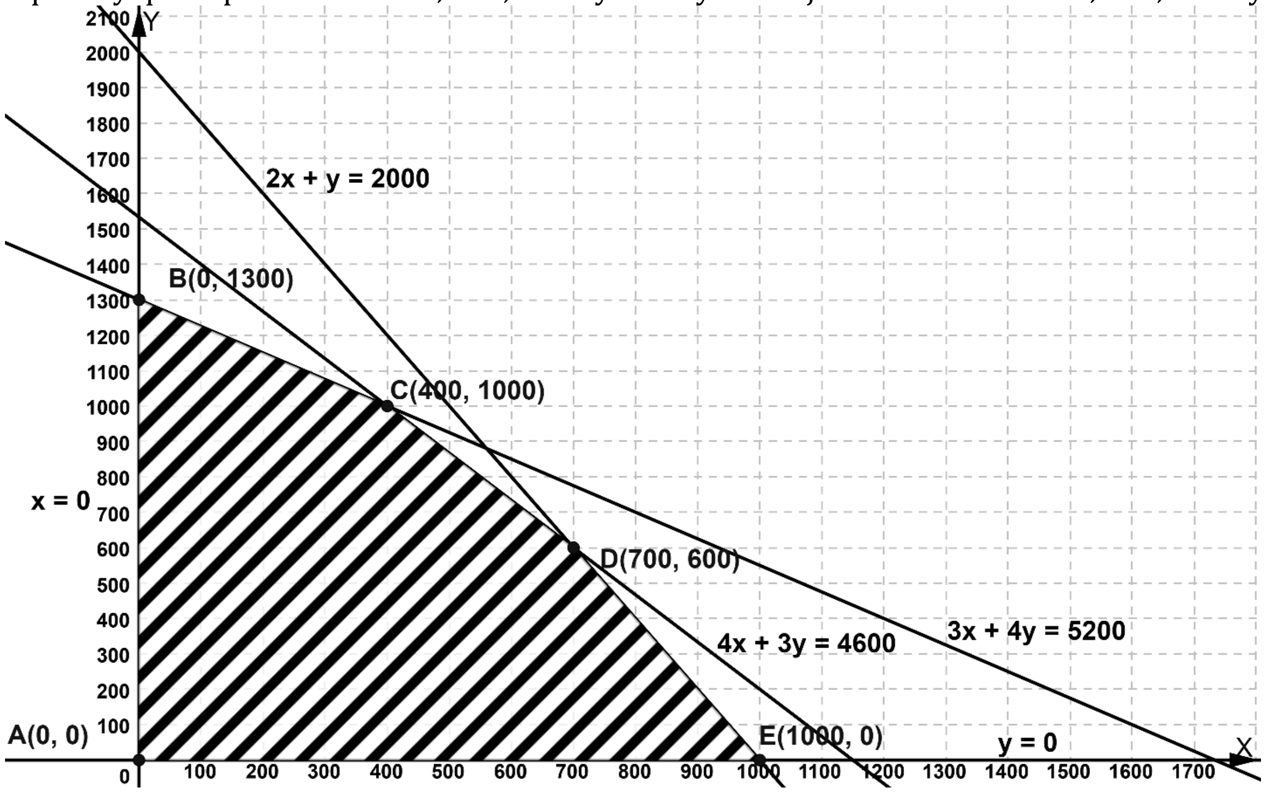
x	0	1000
y	2000	0

$(0, 0) \rightarrow 2.0 + 0 \leq 2000$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 0).

$x \geq 0 \rightarrow x = 0$ (eje Y)
$(1, 0) \rightarrow 1 \geq 0$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (1, 0).

$y \geq 0 \rightarrow y = 0$ (eje X)
$(0, 1) \rightarrow 1 \geq 0$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 1).

Dibujamos los ejes de coordenadas y hacemos la escala adecuada teniendo en cuenta que en el eje X los valores que hay que representar son 0, 400, 1000 y 1150 y en el eje Y los valores son 0, 200, 1300 y 2000



Obtención de los vértices:

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow A(0,\ 0)$$

$$\begin{cases} 3x + 4y = 5200 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow 3.0 + 4y = 5200, \quad y = 1300 \rightarrow B(0,\ 1300)$$

$$\begin{cases} 3x + 4y = 5200 \xrightarrow{.4} \\ 4x + 3y = 4600 \xrightarrow{.3} \end{cases} \begin{cases} 12x + 16y = 20800 \\ 12x + 9y = 13800 \end{cases}; \text{restando, } 7y = 7000, \quad y = 1000$$

$$3x + 4.1000 = 5200, \quad 3x = 1200, \quad x = 400 \rightarrow C(400,\ 1000)$$

$$\begin{cases} 4x + 3y = 4600 \\ 2x + y = 2000 \xrightarrow{.3} \end{cases} \begin{cases} 4x + 3y = 4600 \\ 6x + 3y = 6000 \end{cases}; \text{restando, } 2x = 1400, \quad x = 700$$

$$2.700 + y = 2000, \quad y = 600 \rightarrow D(700,\ 600)$$

$$\begin{cases} 2x + y = 2000 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow 2x + 0 = 2000, \quad x = 1000 \rightarrow E(1000,\ 0)$$

Veamos en qué vértices alcanza el valor máximo $f(x, y) = 1{,}5x + y$:

$f(A) = f(0, 0) = 1{,}5.0 + 0 = 0$ $\qquad$ $f(B) = f(0, 1300) = 1{,}5.0 + 1300 = 1300$

$f(C) = f(400, 1000) = 1{,}5.400 + 1000 = 1060$ $\qquad$ $f(D) = f(700, 600) = 1{,}5.700 + 600 = 1650$

$f(E) = f(1000, 0) = 1{,}5.1000 + 0 = 1500$

Luego, la ganancia máxima que se puede obtener es 1650 € y se alcanza para $x = 700$, $y = 600$.

Es decir, tendría que elaborar 700 envases del primer tipo y 600 de segundo

5) Con el fin de recaudar dinero para el viaje de fin de curso, los alumnos de un instituto van a poner a la venta dos tipos de bolsas de merienda. El primer tipo contendrá dos bocadillos, un refresco y una pieza de fruta y el segundo tipo tendrá un bocadillo, un refresco y dos piezas de fruta. Por cada bolsa del primer tipo cobrarán 6 euros y por las del segundo tipo 5 euros. Sabiendo que disponen de 120 bocadillos, 70 refrescos y 110 piezas de fruta y que se tiene garantizada la venta de todas las bolsas, ¿cuántas convendría preparar de cada tipo para que la cantidad de dinero obtenida por su venta sea máxima y a cuánto asciende la misma?
¿Es posible que vendan 40 bolsas de cada tipo? ¿Hay alguna posibilidad de que el importe de las ventas sea de 410 euros?

Resolución

Representamos en una tabla los datos del problema:

	nº de bolsas	nº de bocadillos	nº de refrescos	piezas de fruta	dinero (en €)
1er tipo	x	2x	1x	1x	6x
2º tipo	y	1y	1y	2y	5y
total	x + y	2x + y	x + y	x + 2y	6x + 5y

Las restricciones son

$$\begin{cases} \text{Disponen de 120 bocadillos}: 2x+y\le 120 \\ \text{Disponen de 70 refrescos}: x+y\le 70 \\ \text{Disponen de 110 piezas de fruta}: x+2y\le 110 \\ \text{El nº de bolsas no puede ser negativo}: x\ge 0,\ \ y\ge 0 \end{cases}$$

La función a optimizar (maximizar) es la cantidad de dinero: $f(x, y) = 6x + 5y$

Obtención de la región factible (resolvemos el sistema de inecuaciones):

Restricción $2x + y \le 120$:

$2x + y \le 120 \rightarrow$ Recta: $2x + y = 120$

$x = 0, \quad 2.0 + y = 120, \quad y = 120$
$y = 0, \quad 2x + 0 = 120, \quad x = 60$

x	0	60
y	120	0

$(0, 0)\rightarrow 2.0 + 0 \le 120$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 0).

Restricción $x + y \le 70$:

$x + y \le 70 \rightarrow$ Recta: $x + y = 70$

$x = 0, \quad 0 + y = 70, \quad y = 70$
$y = 0, \quad x + 0 = 70, \quad x = 70$

x	0	70
y	70	0

$(0, 0)\rightarrow 0 + 0 \le 70$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 0).

Restricción $x + 2y \le 110$:

$x + 2y \le 110 \rightarrow$ Recta: $x + 2y = 110$

$x = 0, \quad 0 + 2y = 110, \quad y = 55$
$y = 0, \quad x + 2.0 = 110, \quad x = 110$

x	0	110
y	55	0

$(0, 0)\rightarrow 0 + 2.0 \le 110$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 0).

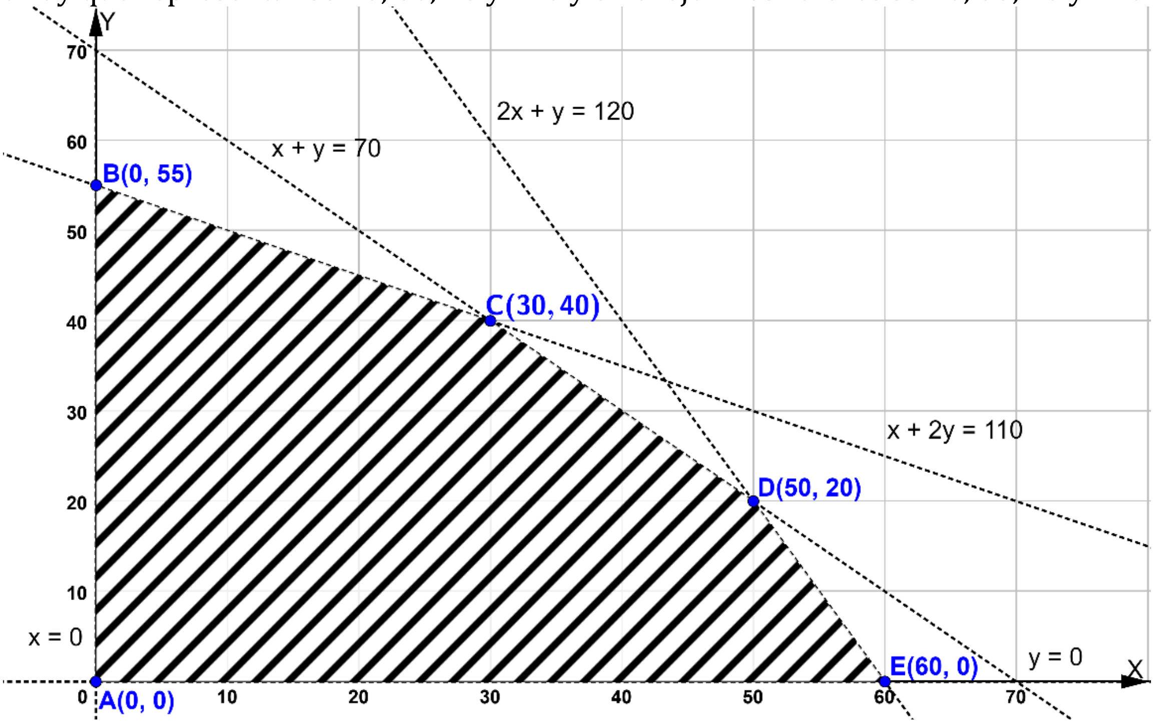
Restricción $x \ge 0$:

$x \ge 0 \rightarrow x = 0$ (eje Y)
$(1, 0)\rightarrow 1 \ge 0$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (1, 0).

Restricción $y \ge 0$:

$y \ge 0 \rightarrow y = 0$ (eje X)
$(0, 1)\rightarrow 1 \ge 0$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 1).

Dibujamos los ejes de coordenadas y hacemos la escala adecuada teniendo en cuenta que en el eje X los valores que hay que representar son 0, 60, 70 y 110 y en el eje Y los valores son 0, 55, 70 y 120



Obtención de los vértices:

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow A(0,\ 0)$$

$$\begin{cases} x + 2y = 110 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow 0 + 2y = 110,\ y = 55 \rightarrow B(0,\ 55)$$

$$\begin{cases} x + y = 70 \\ x + 2y = 110 \end{cases};\ \text{restando},\ y = 40;\quad x + 40 = 70,\ \ y = 30 \rightarrow\ C(30,\ 40)$$

$$\begin{cases} x + y = 70 \\ 2x + y = 120 \end{cases};\ \text{restando},\ x = 50;\quad 50 + y = 70,\ \ y = 20 \rightarrow\ D(50,\ 20)$$

$$\begin{cases} 2x + y = 120 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow 2x + 0 = 120,\quad x = 60 \rightarrow E(60,\ 0)$$

Veamos en qué vértices alcanza el valor máximo $f(x, y) = 6x + 5y$:

$f(A) = f(0, 0) = 6.0 + 5.0 = 0$ $f(B) = B(0, 55) = 6.0 + 5.55 = 275$

$f(C) = f(30, 40) = 6.30 + 5.40 = 380$ $f(D) = B(50, 20) = 6.50 + 5.20 = 400$

$f(E) = B(60, 0) = 6.60 + 5.0 = 360$

Luego, el dinero máximo que se puede obtener es 400 € y se alcanza para $x = 50$, $y = 20$.

Es decir, hay que vender 50 bolsas del primer tipo y 20 de segundo

Para responder a la pregunta, ¿Es posible que vendan 40 bolsas de cada tipo?, tenemos que comprobar si

$$(40,\ 40)\ \text{cumple todas las restricciones},\ \begin{cases} 2x + y \le 120 \xrightarrow[y\,=\,40]{x\,=\,40} 2.40 + 40 \le 120;\ 120 \le 120\ \ (\text{sí}) \\ x + y \le 70 \xrightarrow[y\,=\,40]{x\,=\,40} 40 + 40 \le 70;\ 80 \le 70\ \ (\text{no}) \\ x + 2y \le 110 \\ x \ge 0,\ \ y \ge 0 \end{cases}$$

Luego, no es posible porque no verifica la 2ª restricción

Para responder a la pregunta, ¿Hay alguna posibilidad de que el importe de las ventas sea de 410 euros?, tenemos en cuenta que el valor máximo de f es 400, luego no puede valer nunca más de 400.

Por tanto, la respuesta es negativa.

6) Una fábrica de electrodomésticos dispone de dos cadenas de montaje. En una hora de trabajo, la cadena A produce 10 lavadoras y 5 frigoríficos, mientras que la cadena B produce 7 lavadoras y 6 frigoríficos. El coste de cada hora de trabajo en las cadenas A y B es de 1200 y 1500 euros, respectivamente. La cadena A puede funcionar, como máximo, el doble de horas que la cadena B.
Si deben producir como mínimo 400 lavadoras y 280 frigoríficos, formula, sin resolver, el problema que permite obtener las horas de funcionamiento de las cadenas A y B para minimizar el coste de producción de esos electrodomésticos.

Resolución

Representamos en una tabla los datos del problema:

	horas	lavadoras	frigoríficos	coste (en €)
cadena A	x	10x	5x	1200x
cadena B	y	7y	6y	1500y
total	x + y	10x + 7y	5x + 6y	1200x + 1500y

Las restricciones son

$$\begin{cases} \text{A puede funcionar, como máximo, el doble que B}: x \leq 2y \\ \text{Producen como mínimo de 400 lavadoras}: 10x + 7y \geq 400 \\ \text{Producen como mínimo de 280 frigoríficos}: 5x + 6y \geq 280 \\ \text{El nº de horas no puede ser negativo}: x \geq 0,\ \ y \geq 0 \end{cases}$$

La función a optimizar (minimizar) es el coste: $f(x, y) = 1200x + 1500y$

7) Una confitería elabora dos tipos de tartas, unas de chocolate y otras de merengue y chocolate.
Para ello dispone de 100 kg de bizcocho, 80 kg de crema de chocolate y 46 kg de merengue.
Para elaborar una tarta de chocolate, se requieren 1 kg de bizcocho y 2 kg de crema de chocolate y para la tarta de chocolate y merengue se requieren 2 kg de bizcocho, 1 kg de crema de chocolate y 1 kg de merengue. Por cada tarta de chocolate se obtiene un beneficio de 10 euros y de 12 euros por cada una de merengue y chocolate. Suponiendo que se vende todo lo que se elabora, ¿cuántas tartas de cada tipo debe preparar para obtener un beneficio máximo? ¿Cuál es dicho beneficio?

Resolución

Representamos en una tabla los datos del problema:

	unidades	kg de bizcocho	kg de crema de chocolate	kg de merengue	beneficio (en €)
Tartas de chocolate	x	1x	2x	-	10x
Tartas de merengue/chocolate	y	2y	1y	1y	12y
total	x + y	x + 2y	2x + y	y	10x + 12y

Las restricciones son

$$\begin{cases} \text{Dispone de 100 kg de bizcocho}: x + 2y \leq 100 \\ \text{Dispone de 80 kg de crema de chocolate}: 2x + y \leq 80 \\ \text{Dispone de 46 kg de merengue}: y \leq 46 \\ \text{El nº de tartas no puede ser negativo}: x \geq 0,\ \ y \geq 0 \end{cases}$$

La función a optimizar (maximizar) es el beneficio: $f(x, y) = 10x + 12y$

Obtención de la región factible (resolvemos el sistema de inecuaciones):

$x + 2y \leq 100 \rightarrow$ Recta: $x + 2y = 100$

$x = 0, \quad 0 + 2y = 100, \quad y = 50,$
$y = 0, \quad x + 2.0 = 100, \quad x = 100$

x	0	100
y	50	0

$(0, 0) \rightarrow 0 + 2.0 \leq 100$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 0).

$2x + y \leq 80 \rightarrow$ Recta: $2x + y = 80$

$x = 0, \quad 2.0 + y = 80, \quad y = 80$
$y = 0, \quad 2x + 0 = 80, \quad x = 40$

x	0	40
y	80	0

$(0, 0) \rightarrow 2.0 + 0 \leq 80$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 0).

$y \leq 46 \rightarrow$ Recta: $y = 46$

Es la recta horizontal que pasa por (0, 46).

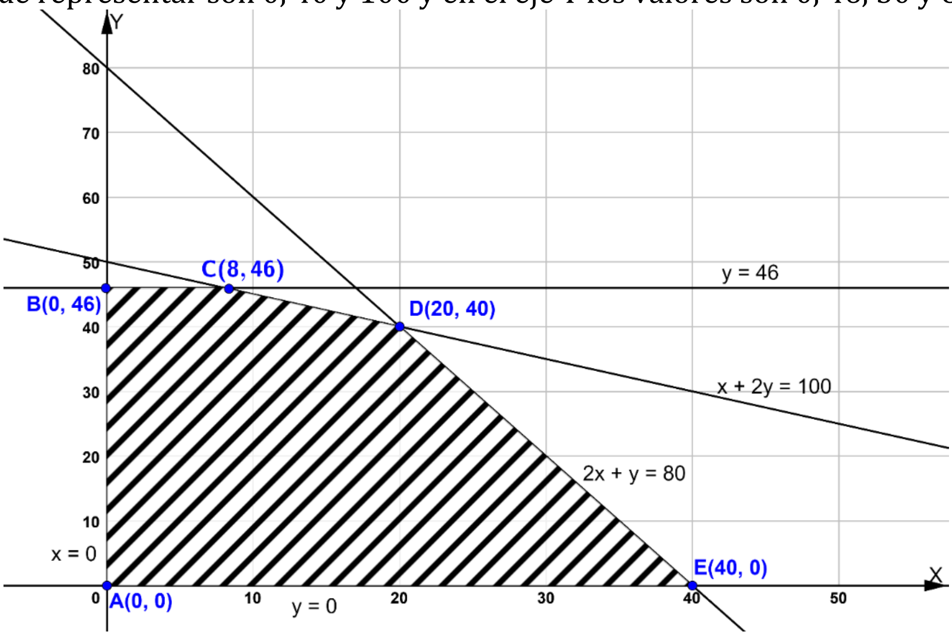
x	0
y	46

$(0, 0) \rightarrow 0 \leq 46$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 0).

$x \geq 0 \rightarrow x = 0$ (eje Y)
$(1, 0) \rightarrow 1 \geq 0$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (1, 0).

$y \geq 0 \rightarrow y = 0$ (eje X)
$(0, 1) \rightarrow 1 \geq 0$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 1).

Dibujamos los ejes de coordenadas y hacemos la escala adecuada teniendo en cuenta que en el eje X los valores que hay que representar son 0, 40 y 100 y en el eje Y los valores son 0, 46, 50 y 80



Obtención de los vértices:

$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow A(0, 0) \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = 46 \end{cases} \rightarrow B(0, 46) \qquad \begin{cases} x + 2y = 100 \\ y = 46 \end{cases} \rightarrow x + 2.46 = 100, \ x = 8 \rightarrow C(8, 46)$

$\begin{cases} 2x + y = 80 \\ x + 2y = 100 \end{cases} \xrightarrow{.2} \begin{cases} 4x + 2y = 160 \\ x + 2y = 100 \end{cases}$; restando, $3x = 60, \ x = 20; \quad 2.20 + y = 80, \ y = 40 \rightarrow D(20, 40)$

$\begin{cases} 2x + y = 80 \\ y = 0 \end{cases}$; $2x + 0 = 80, \ x = 40 \rightarrow E(40, 0)$

Veamos en qué vértices alcanza el valor máximo $f(x, y) = 10x + 12y$:

$f(A) = f(0, 0) = 10.0 + 12.0 = 0 \qquad f(B) = f(0, 46) = 10.0 + 12.46 = 552$
$f(C) = f(8, 46) = 10.8 + 12.46 = 632 \qquad f(D) = f(20, 40) = 10.20 + 12.40 = 680$
$f(E) = f(40, 0) = 10.40 + 12.0 = 400$

Luego, el beneficio máximo es 680 € y se alcanza para $x = 20$, $y = 40$.
Es decir, debe elaborar 20 tartas de chocolate y 40 tartas de merengue/chocolate

8) Una granja elabora una dieta mezclando dos tipos de pienso A y B. El pienso A aporta 2 unidades de Calcio y 1 de Hierro por cada kilogramo, mientras que el B aporta 1 de Calcio y 2 de Hierro.
El coste por kilogramo tanto del pienso A como del pienso B es 1 euro por kilogramo. La dieta deberá aportar al menos 2 unidades de Calcio y 2 de Hierro. Determina los kilogramos que se han de mezclar de cada tipo de pienso para que el coste de la dieta sea mínimo. ¿Cuál sería dicho coste? ¿Cuántas unidades de Hierro y de Calcio se administrarían a los animales con esta dieta?

<u>Resolución</u>

Representamos en una tabla los datos del problema:

	nº de kg	**unidades de Calcio**	**unidades de Hierro**	**coste (en €)**
tipo A	x	2x	1x	1x
tipo B	y	1y	2y	1y
total	x + y	2x + y	x + 2y	x + y

Las restricciones son

$$\begin{cases} \text{Dieta de al menos 2 unidades de Calcio}: 2x + y \geq 2 \\ \text{Dieta de al menos 2 unidades de Hierro}: x + 2y \geq 2 \\ \text{El nº de kg no puede ser negativo}: x \geq 0,\ \ y \geq 0 \end{cases}$$

La función a optimizar (minimizar) es el coste: $f(x, y) = x + y$

Resolvemos el sistema de inecuaciones:

$2x + y \geq 2 \rightarrow$ Recta: $2x + y = 2$

$x = 0, \quad 2.0 + y = 2, \quad y = 2$

$y = 0, \quad 2x + 0 = 2, \quad x = 1$

x	0	1
y	2	0

$(0, 0) \rightarrow 2.0 + 0 \geq 2$ (falso).

La solución es el semiplano cerrado que no contiene al (0, 0).

$x + 2y \geq 2 \rightarrow$ Recta: $x + 2y = 2$

$x = 0, \quad 0 + 2y = 2, \quad y = 1$

$y = 0, \quad x + 2.0 = 2, \quad x = 2$

x	0	2
y	1	0

$(0, 0) \rightarrow 0 + 2.0 \geq 2$ (falso).

La solución es el semiplano cerrado que no contiene al (0, 0).

$x \geq 0 \rightarrow x = 0$ (eje Y)

$(1, 0) \rightarrow 1 \geq 0$ (cierto).

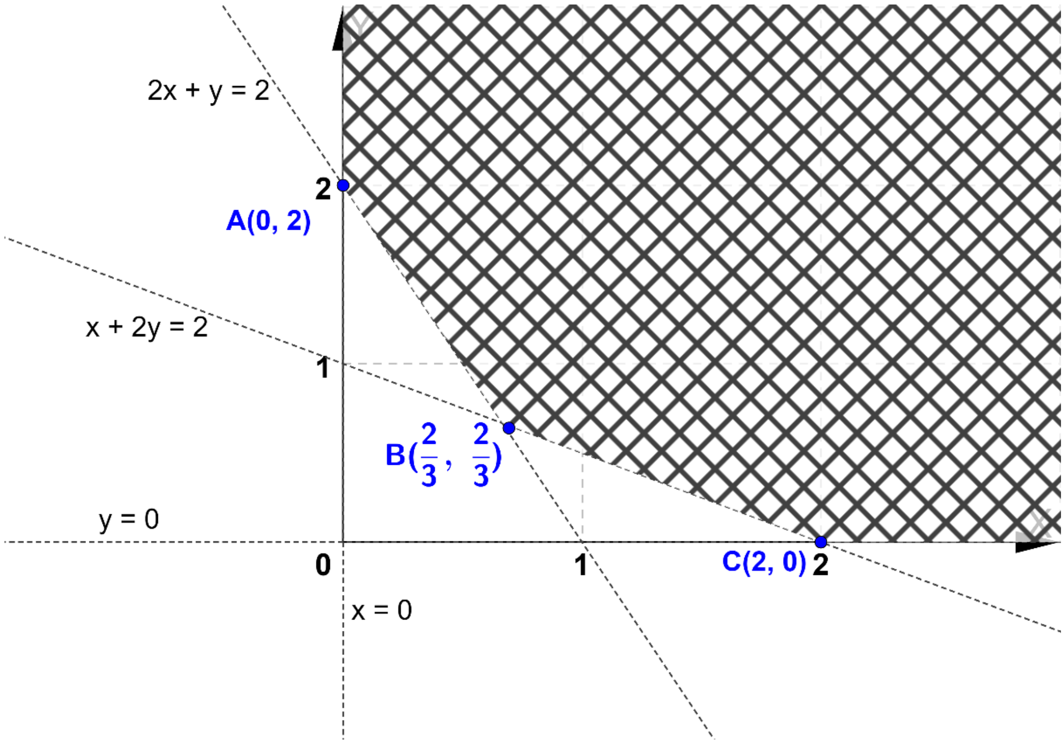
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (1, 0).

$y \geq 0 \rightarrow y = 0$ (eje X)

$(0, 1) \rightarrow 1 \geq 0$ (cierto).

La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 1).

Dibujamos los ejes de coordenadas y hacemos la escala adecuada teniendo en cuenta que tanto en el eje X como en el eje Y los valores que hay que representar son 0, 1 y 2



Obtención de los vértices:

$$\begin{cases} 2x+y=2 \\ x=0 \end{cases} \rightarrow 2.0+y=2,\ y=2 \rightarrow A(0,\ 2)$$

$$\begin{cases} 2x+y=2 \\ x+2y=2 \end{cases} \xrightarrow{\cdot 2} \begin{cases} 4x+2y=4 \\ x+2y=2 \end{cases};\ \text{restando},\ 3x=2,\quad x=\frac{2}{3};\quad 2\frac{2}{3}+2y=2,\quad y=\frac{2}{3} \rightarrow B(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3})$$

$$\begin{cases} x+2y=2 \\ y=0 \end{cases} \rightarrow x+2.0=2,\ x=2 \rightarrow C(2,\ 0)$$

Veamos en qué vértices alcanza el valor mínimo $f(x, y) = x + y$:

$f(A) = f(0, 2) = 0 + 2 = 2$ $\qquad$ $f(B)=f(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3})=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{4}{3}\cong 1,33$

$f(C) = f(2, 0) = 2 + 0 = 2$

Luego, aproximadamente el coste mínimo es 1,33 € y se obtiene para $x=\frac{2}{3},\ y=\frac{2}{3}$, 0,67 kg de cada tipo.

Las unidades que se administrarían: $2\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=2$ unidades de Calcio y $\frac{2}{3}+2\frac{2}{3}=2$ unidades de Hierro

9) Una empresa textil quiere fabricar dos tipos de camisetas, lisas y estampadas. Para fabricar una camiseta lisa necesita 70 g de algodón y 20 g de poliéster y para cada camiseta estampada 60 g de algodón y 10 g de poliéster. La empresa dispone para ello de 4 200 g de algodón y 800 g de poliéster. Para que sea rentable debe fabricar al menos 10 estampadas y además, el doble de las estampadas debe ser al menos igual al número de lisas. Sabiendo que cada camiseta lisa da un beneficio de 5 euros y cada estampada de 4 euros, ¿cuántas camisetas de cada tipo debería fabricar para obtener el máximo beneficio? ¿Cuál es ese beneficio?

Resolución

Representamos en una tabla los datos del problema:

	unidades	g de algodón	g de poliéster	beneficio (en €)
camisetas lisas	x	70x	20x	5x
camisetas estampadas	y	60y	10y	4y
total	x + y	70x + 60y	20x + 10y	5x + 4y

Las restricciones son

$$\begin{cases} \text{Se dispone de 4200 g de algodón}: 70x+60y \le 4200 \xrightarrow{:10} 7x+6y \le 420 \\ \text{Se dispone de 800 g de poliéster}: 20x+10y \le 800 \xrightarrow{:10} 2x+y \le 80 \\ \text{Se quiere fabricar al menos 10 estampadas}: y \ge 10 \\ \text{El doble de estampadas es al menos las lisas}: 2y \ge x \\ \text{El nº de camisetas no puede ser negativo}: x \ge 0,\ \ y \ge 0 \end{cases}$$

La función a optimizar (maximizar) es el beneficio: $f(x, y) = 5x + 4y$

Obtención de la región factible (resolvemos el sistema de inecuaciones):

$7x + 6y \le 420 \rightarrow$ Recta: $7x + 6y = 420$

$x = 0, \quad 7.0 + 6y = 420, \quad y = 70$
$y = 0, \quad 7x + 6.0 = 420, \quad y = 60$

x	0	60
y	70	0

$(0, 0) \rightarrow 7.0 + 6.0 \le 420$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 0).

$2x + y \le 80 \rightarrow$ Recta: $2x + y = 80$

$x = 0, \quad 2.0 + y = 80, \quad y = 80$
$y = 0, \quad 2x + 0 = 80, \quad x = 40$

x	0	40
y	80	0

$(0, 0) \rightarrow 2.0 + 0 \le 80$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 0).

$y \ge 10 \rightarrow$ Recta: $y = 10$

Es la recta horizontal que pasa por (0, 10).

x	0
y	10

$(0, 0) \rightarrow 0 \ge 10$ (falso).
La solución es el semiplano cerrado que no contiene al (0, 0).

$2y \ge x \rightarrow$ Recta: $2y = x$

$x = 0, \quad 2y = 0, \quad y = 0$
$y = 10, \quad 2.10 = x, \quad x = 20$

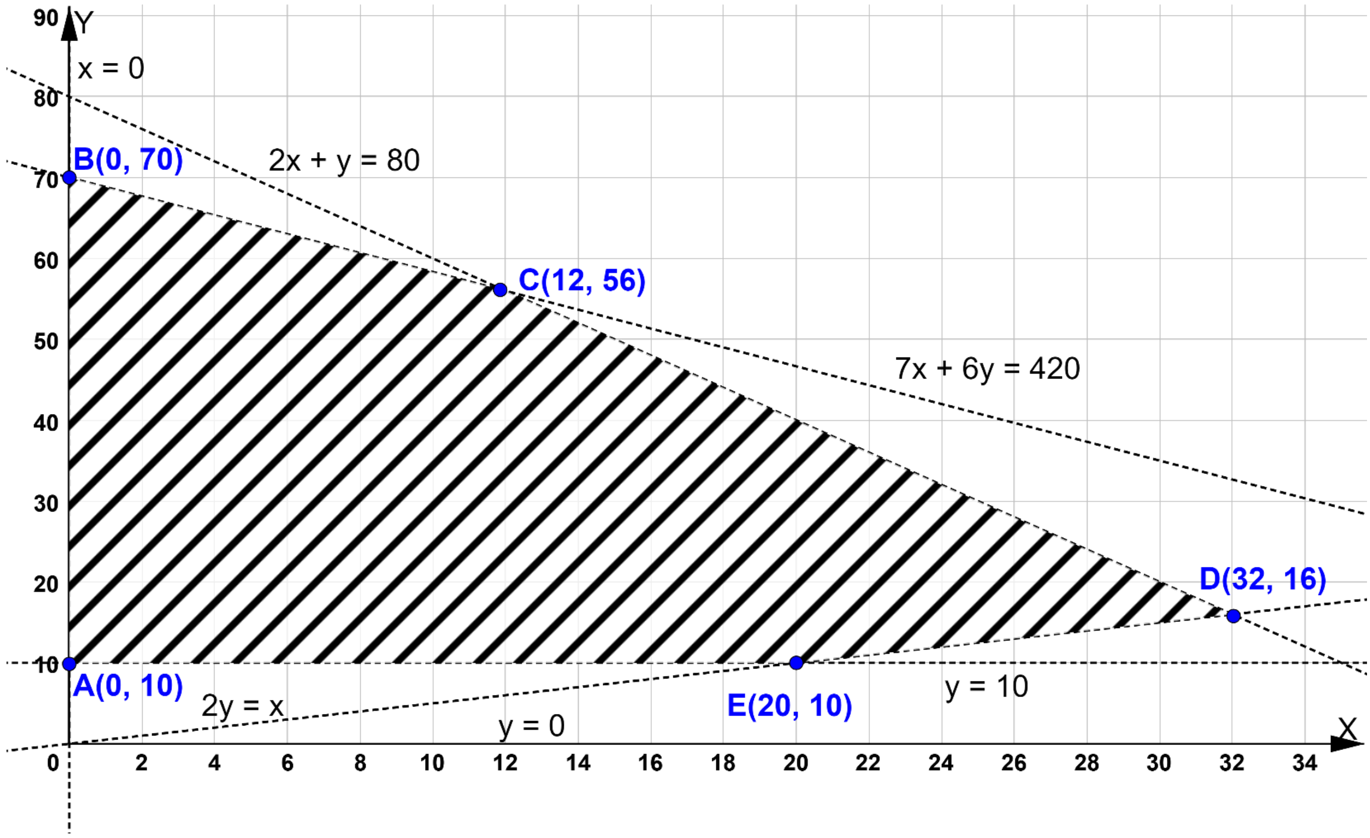
x	0	20
y	0	10

$(1, 0) \rightarrow 2.0 \ge 1$ (falso).
La solución es el semiplano cerrado que no contiene al (0, 0).

$x \ge 0 \rightarrow x = 0$ (eje Y)
$(1, 0) \rightarrow 1 \ge 0$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (1, 0).

$y \ge 0 \rightarrow y = 0$ (eje X)
$(0, 1) \rightarrow 1 \ge 0$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 1).

Dibujamos los ejes de coordenadas y hacemos la escala adecuada teniendo en cuenta que en el eje X los valores que hay que representar son 0, 20, 40 y 60 y en el eje Y los valores son 0, 10, 70 y 80



Obtención de los vértices:

$\begin{cases} x = 0 \\ y = 10 \end{cases} \to A(0,10)$ $\begin{cases} x = 0 \\ 7x + 6y = 420 \end{cases} \to 7.0 + 6y = 420, \quad y = 70 \to B(0,70)$

$\begin{cases} 2x + y = 80 \\ 7x + 6y = 420 \end{cases} \xrightarrow{.6} \begin{cases} 12x + 6y = 480 \\ 7x + 6y = 420 \end{cases}$; restando, $5x = 60, \quad x = 12; \quad 2.12 + y = 80, \ y = 56 \to C(12, 56)$

$\begin{cases} 2x + y = 80 \\ x = 2y \end{cases} \to 2.2y + y = 80, \quad y = 16; \quad x = 2.16 = 32 \to D(32, 16)$

$\begin{cases} y = 10 \\ x = 2y \end{cases} \to x = 2.10 = 20 \to E(20, 10)$

Veamos en qué vértices alcanza el valor máximo $f(x, y) = 5x + 4y$:

$f(A) = f(0, 10) = 5.0 + 4.10 = 40$ $f(B) = f(0, 70) = 5.0 + 4.70 = 280$

$f(C) = f(12, 56) = 5.12 + 4.56 = 284$ $f(D) = f(32, 16) = 5.32 + 4.16 = 224$

$f(E) = f(20, 10) = 5.20 + 4.10 = 140$

Luego, el beneficio máximo es 284 € y se alcanza en el punto $C(12, 56)$, o sea para $x = 12$, $y = 56$.
Es decir, hay que fabricar 12 camisetas lisas y 56 estampadas para que el beneficio sea máximo

10) Una fábrica de palas de pádel produce dos modelos A y B con los que obtiene un beneficio por cada pala de 30 y 20 euros respectivamente. Para la elaboración de una pala del modelo A se necesitan 90 g de fibra de carbono y 100 g de goma EVA, mientras que para una pala del modelo B son necesarios 100 g de fibra de carbono y 50 g de goma EVA. La fábrica dispone diariamente de 7.5 kg de fibra de carbono y 6.5 kg de goma EVA y quiere producir como máximo 60 unidades diarias del modelo A.
Calcula cuántas palas de cada modelo tiene que fabricar para que el beneficio sea máximo y determina su importe. ¿Sería posible una producción diaria de 49 palas del modelo A y 32 palas del modelo B?

Resolución

Representamos en una tabla los datos del problema:

	nº de palas	**g de fibra de carbono**	**g de goma EVA**	**beneficio (en €)**
modelo A	x	90x	100x	30x
modelo B	y	100y	50y	20y
total	x + y	90x + 100y	100x + 50y	30x + 20y

Las restricciones son

$$\begin{cases} \text{Se dispone de 7,5 kg (7500 g) de fibra de carbono}: 90x+100y \le 7500 \xrightarrow{:10} 9x+10y \le 750 \\ \text{Se dispone de 6,5 kg (6500 g) de goma EVA}: 100x+50y \le 6500 \xrightarrow{:50} 2x+y \le 130 \\ \text{Se quiere fabricar como máximo 60 unidades de tipo A}: x \le 60 \\ \text{El nº de palas no puede ser negativo}: x \ge 0,\ \ y \ge 0 \end{cases}$$

La función a optimizar (maximizar) es el beneficio total: $f(x, y) = 30x + 20y$

Obtención de la región factible (resolvemos el sistema de inecuaciones):

$9x + 10y \le 750 \rightarrow$ Recta: $2x + y = 90$

$x = 0,\quad 9.0 + 10y = 750,\quad y = 75$
$x = 50,\quad 9.50 + 10y = 750,\quad y = 30$

x	0	30
y	75	50

$(0, 0) \rightarrow 9.0 + 10.0 \le 750$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 0).

$2x + y \le 130 \rightarrow$ Recta: $2x + y = 130$

$x = 0,\quad 2.0 + y = 130,\quad y = 130$
$y = 0,\quad 2x + 0 = 130,\quad x = 65$

x	0	65
y	130	0

$(0, 0) \rightarrow 2.0 + 0 \le 130$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 0).

$x \ge 60 \rightarrow$ Recta: $x = 60$

Es la recta vertical que pasa por (60, 0).

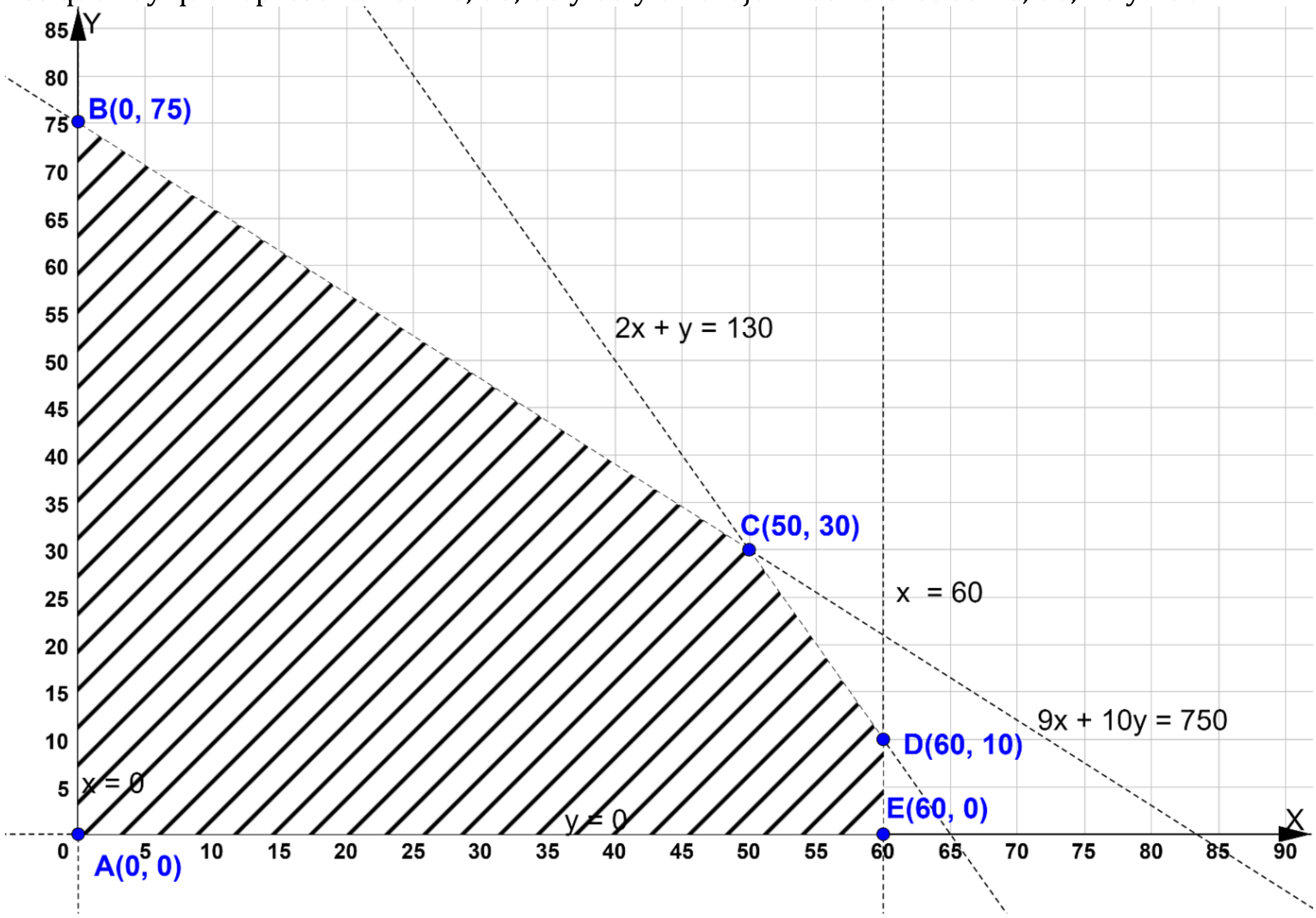
x	60
y	0

$(0, 0) \rightarrow 0 \ge 60$ (falso).
La solución es el semiplano cerrado que no contiene al (0, 0).

$x \ge 0 \rightarrow x = 0$ (eje Y)
$(1, 0) \rightarrow 1 \ge 0$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (1, 0).

$y \ge 0 \rightarrow y = 0$ (eje X)
$(0, 1) \rightarrow 1 \ge 0$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 1).

Dibujamos los ejes de coordenadas y hacemos la escala adecuada teniendo en cuenta que en el eje X los valores que hay que representar son 0, 30, 60 y 65 y en el eje Y los valores son 0, 50, 75 y 130



Obtención de los vértices:

$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \to A(0,\,0)$ $\begin{cases} 9x+10y=750 \\ x=0 \end{cases} \to 9.0+10y=750,\ y=75 \to B(0,\,75)$

$\begin{cases} 2x+y=130 \\ 9x+10y=750 \end{cases} \xrightarrow{.\,10} \begin{cases} 20x+10y=1300 \\ 9x+10y=750 \end{cases}$; restando, $11x=550,\ x=50;\ 2.50+y=130, y=30 \to\ C(50,\,30)$

$\begin{cases} x=60 \\ y=0 \end{cases} \to E(60,\,0)$ $\begin{cases} 2x+y=130 \\ x=60 \end{cases} \to 2.60+y=130,\ y=10 \to D(60,\,10)$

Veamos en qué vértices alcanza el valor máximo $f(x, y) = 30x + 20y$:

$f(A) = f(0, 0) = 30.0 + 20.0 = 0$ $f(B) = B(0, 75) = 30.0 + 20.75 = 1500$

$f(C) = f(50, 30) = 30.50 + 20.30 = 2100$ $f(D) = f(60, 10) = 30.60 + 20.10 = 2000$

$f(E) = f(60, 0) = 30.60 + 20.0 = 1800$

Luego, el beneficio máximo es 2100 € y se alcanza en el punto C(50, 30), o sea para $x = 50$, $y = 30$.
Es decir, hay que fabricar 50 palas de tipo A y 30 de tipo B para que el beneficio sea máximo

Para responder a la pregunta, ¿Sería posible una producción diaria de 49 palas del modelo A y 32 palas del modelo B?, tenemos que comprobar si (49, 32) cumple todas las restricciones,

$$\begin{cases} 9x+10y \le 750 \xrightarrow[y\,=\,32]{x\,=\,49} 9.49+10.32 \le 750 \to 761 \le 750 \text{ (no)} \\ 2x+y \le 130 \\ x \le 60 \\ x \ge 0,\ \ y \ge 0 \end{cases}$$

Luego, no es posible porque no verifica la 1ª restricción

11) Una empresa envasa y comercializa leche entera y leche desnatada. El litro de leche entera envasado genera un beneficio diario a la empresa de 0.4 € y el de leche desnatada de 0.1 €.
La tecnología de la empresa impone que el número de litros de leche entera que se envasan diariamente no supere el doble del número de litros de leche desnatada. Además, la cantidad máxima de leche que se puede envasar diariamente es un total de 3000 litros y solo se dispone de 1200 litros diarios de leche entera para envasar. ¿Cuánto debe envasar de cada producto para obtener el beneficio máximo? ¿A cuánto ascendería este beneficio?

Resolución

Representamos en una tabla los datos del problema:

	nº de litros	**beneficio (en €)**
leche entera	x	0,4x
leche desnatada	y	0,1y
total	x + y	0,4x +0,1y

Las restricciones son

$$\begin{cases} \text{nº de litros de leche entera no supera el doble de litros de desnatada}: x \le 2y \\ \text{el máximo que se envasa es 3000 litros}: x + y \le 3000 \\ \text{Dispone sólo de 1200 litros de leche entera}: x \le 1200 \\ \text{El nº de litros no puede ser negativo}: x \ge 0,\ \ y \ge 0 \end{cases}$$

La función a optimizar (maximizar) es la ganancia: $f(x, y) = 0{,}4x + 0{,}1y$

Obtención de la región factible (resolvemos el sistema de inecuaciones):

$x \le 2y \rightarrow$ Recta: $x = 2y$

$x = 0, \quad 0 = 2y, \quad y = 0$
$y = 1000, \quad x = 2.1000, \quad x = 2000$

x	0	2000
y	0	0

$(0, 0) \rightarrow 1 \le 2.0$ (falso).
La solución es el semiplano cerrado que no contiene al (0, 0).

$x + y \le 3000 \rightarrow$ Recta: $x + y = 3000$

$x = 0, \quad 0 + y = 3000, \quad y = 3000$
$y = 0, \quad x + 0 = 3000, \quad x = 3000$

x	0	3000
y	3000	0

$(0, 0) \rightarrow 0 + 0 \le 3000$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 0).

$x \le 1200 \rightarrow$ Recta: $x = 1200$

Es la recta vertical que pasa por (1200, 0).

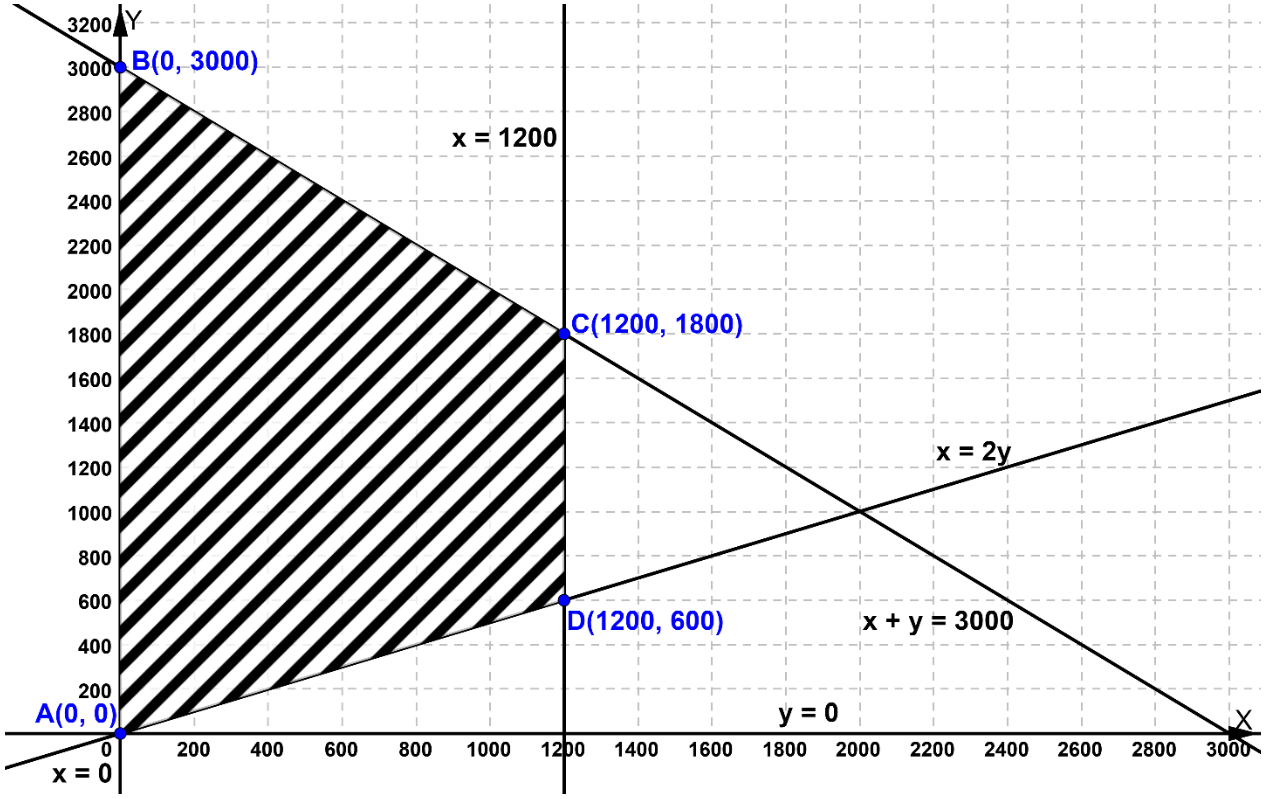
x	1200
y	0

$(0, 0) \rightarrow 0 \le 1200$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 0).

$x \ge 0 \rightarrow x = 0$ (eje Y)
$(1, 0) \rightarrow 1 \ge 0$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (1, 0).

$y \ge 0 \rightarrow y = 0$ (eje X)
$(0, 1) \rightarrow 1 \ge 0$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 1).

Dibujamos los ejes de coordenadas y hacemos la escala adecuada teniendo en cuenta que en el eje X los valores que hay que representar son 0, 1200, 2000 y 3000 y en el eje Y los valores son 0 y 3000



Obtención de los vértices:

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow A(0,\ 0)$$

$$\begin{cases} x + y = 3000 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow 0 + y = 3000, \quad y = 3000 \rightarrow B(0,\ 3000)$$

$$\begin{cases} x + y = 3000 \\ x = 1200 \end{cases} \rightarrow 1200 + y = 3000, \quad y = 1800 \rightarrow C(1200,\ 1800)$$

$$\begin{cases} x = 2y \\ x = 1200 \end{cases} \rightarrow 1200 = 2y, \quad y = 600 \rightarrow D(1200,\ 600)$$

Veamos en qué vértices alcanza el valor máximo $f(x, y) = 0{,}4x + 0{,}1y$:

$f(A) = f(0, 0) = 0{,}4.0 + 0{,}1.0 = 0$ $\qquad$ $f(B) = f(0, 1300) = 0{,}4.0 + 0{,}1.3000 = 300$

$f(C) = f(1200, 1800) = 0{,}4.1200 + 0{,}1.1800 = 660$ $\qquad$ $f(D) = f(1200, 600) = 0{,}4.1200 + 0{,}1.600 = 540$

Luego, el beneficio máximo que se puede obtener es 660 € y se alcanza para $x = 1200$, $y = 1800$.

Es decir, 1200 litros de leche entera y 1800 de leche desnatada