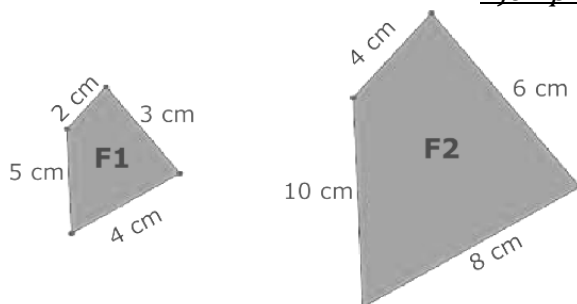


Figuras semejantes

Dos figuras son semejantes cuando tienen la misma forma y las medidas de ambas son proporcionales.

Ejemplo:



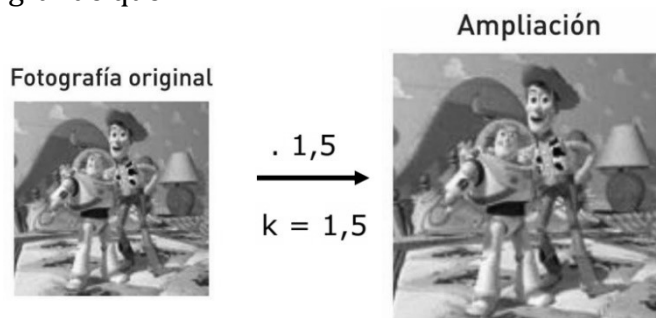
Observa que: $\frac{10}{5} = \frac{8}{4} = \frac{6}{3} = \frac{4}{2} = 2$.

Las figuras F1 y F2 son semejantes porque los ángulos correspondientes son iguales y las medidas son proporcionales, pues: $\frac{10}{5} = \frac{8}{4} = \frac{6}{3} = \frac{4}{2}$.

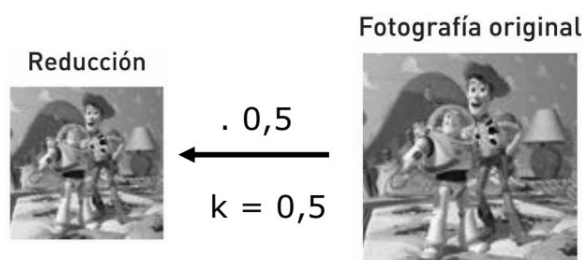
Como en este caso la razón vale 2, significa que los lados de la figura F2 se obtienen multiplicando por 2 los lados de F1

Si dos figuras F1 y F2 son semejantes, las medidas de la figura F2 se obtienen multiplicando las correspondientes medidas de F1 por un mismo número positivo, k, llamado razón de semejanza.

Si $k > 1$, entonces F2 es más grande que F1.



Si $k < 1$, entonces F2 es más pequeña que F1

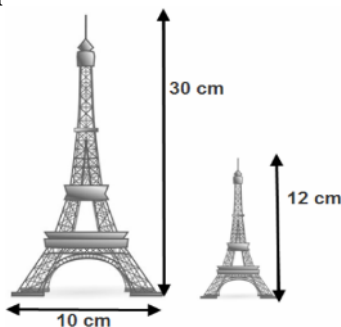


La razón de semejanza se puede calcular dividiendo cualquier medida de F2 entre la correspondiente medida de F1.

Observa que también se cumple que la razón entre dos medidas de F1 es igual a la razón entre las correspondientes medidas de F2: $\frac{5}{4} = \frac{10}{8}$ $\frac{3}{2} = \frac{6}{4}$, etc

Actividades resueltas

1) En una tienda de souvenir venden reproducciones de la Torre Eiffel de diferentes tamaños.



a) Calcula la razón de semejanza.

Resolución

$$\text{como } \frac{30}{12} = 2,5 \Rightarrow \text{la razón de semejanza es } r = 2,5$$

b) ¿Cuánto mide el lado de la base de la pequeña?

Resolución

$$\text{lado torre pequeña: } x \Rightarrow \frac{10}{x} = 2,5 \Rightarrow x = \frac{10}{2,5} = 4 \text{ cm}$$

c) Si el lado de la base de la auténtica Torre Eiffel es 108 m, ¿cuál es su altura?

Resolución

$$\text{altura torre auténtica: } x \Rightarrow \frac{x}{108} = \frac{30 \text{ cm}}{10 \text{ cm}} = 3 \Rightarrow x = 108 \cdot 3 = 324 \text{ m}$$

2) Una foto de 6,5 cm x 10,5 cm se amplía a un ancho de 13 cm. ¿Cuánto mide de largo la foto ampliada?

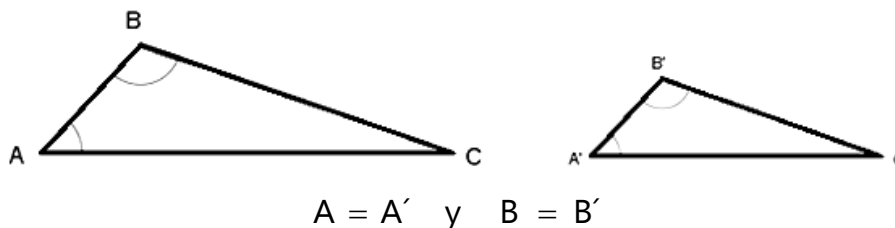
Resolución

$$\text{largo de la foto ampliada: } x \Rightarrow \frac{x}{13} = \frac{10,5}{6,5} \Rightarrow x = \frac{10,5 \cdot 13}{6,5} = 21 \text{ cm}$$

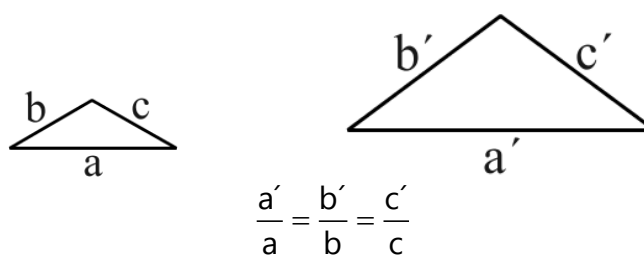
Criterios de semejanza en los triángulos

Dos triángulos son semejantes si ocurre cualquiera de las siguientes tres cosas:

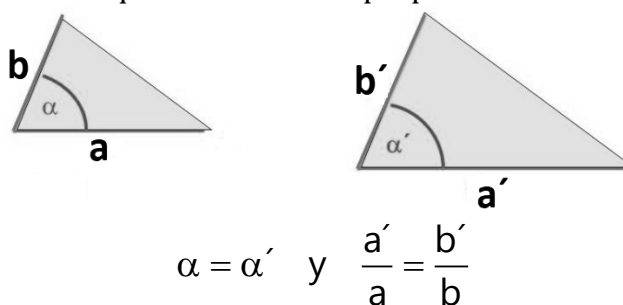
1) Tienen dos ángulos correspondientes iguales



2) Tienen los lados correspondientes proporcionales

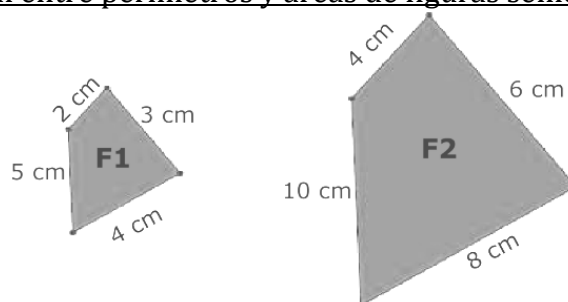


3) Tienen un ángulo igual y los lados que lo forman son proporcionales



No es necesario comprobar las tres cosas a la vez

Razón entre perímetros y áreas de figuras semejantes



El perímetro de la figura F1 es $P = 2 + 3 + 4 + 5 = 14 \text{ cm}$

El perímetro de la figura F2 es $P' = 4 + 6 + 8 + 10 = 28 \text{ cm}$

La razón entre los perímetros es $\frac{P'}{P} = \frac{28 \text{ cm}}{14 \text{ cm}} = 2 = \text{razón de semejanza}$

En general, siempre se cumple que la razón entre los perímetros de dos figuras semejantes coincide con la razón de semejanza, k:

$$\boxed{\frac{P'}{P} = r \Rightarrow P' = r P}$$

De forma análoga se puede ver que:

- La razón entre las áreas de dos figuras semejantes coincide con el cuadrado de la razón de

semejanza, k^2 : $\boxed{\frac{A'}{A} = r^2 \Rightarrow A' = r^2 A}$

Actividad resuelta

Dado un triángulo de lados $a = 5 \text{ cm}$, $b = 8 \text{ cm}$, $c = 12 \text{ cm}$. Queremos construir otro triángulo semejante lados a' , b' y c' de forma que $b' = 5 \text{ cm}$. Halla: a) La razón de semejanza b) Los restantes lados
c) La razón entre sus perímetros d) La razón entre sus áreas

Resolución

a) $k = \frac{b'}{b} = \frac{5}{8} = \boxed{0,625}$

b) $a' = 5 \cdot 0,625 \rightarrow \boxed{a' = 3,125}$

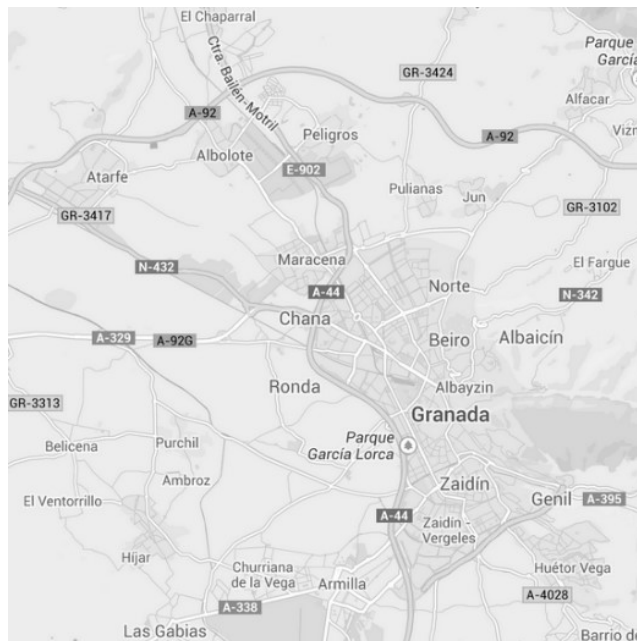
$c' = 12 \cdot 0,625 \rightarrow \boxed{c' = 7,5}$

c) $\frac{P'}{P} = k = \boxed{0,625}$

d) $\frac{A'}{A} = k^2 = 0,625^2 = \boxed{0,390625}$

Escalas

Un mapa es la representación gráfica reducida de una zona geográfica (una provincia, región, país, etc) Por ejemplo,



Un plano es la representación gráfica reducida de elementos tales como una ciudad, una vivienda, un circuito de carreras, etc



Al realizar una representación mediante un mapa, plano las dimensiones se reducen en la misma proporción: Lo que representamos es semejante a la realidad.

Si un plano está hecho a escala E 1:250, entonces 1 cm del plano corresponde a 250 cm de la realidad. La razón de semejanza plano-realidad es $250:1 = 250$

Actividades resueltas

1) ¿Qué distancia real, en km, hay entre dos ciudades que están separadas por 40 cm en un mapa a escala 1 : 500 000?

Resolución

$$\text{como } r = \frac{500\,000}{1} = 500\,000 = 5 \cdot 10^5 \Rightarrow \text{distancia real} = 40 \text{ cm} \cdot 5 \cdot 10^5 = 2 \cdot 10^7 \text{ cm} \xrightarrow{: 10^5} 200 \text{ km}$$

2) En el plano de la vivienda de Rocío, su habitación es de 15 cm x 18 cm. Calcula las dimensiones reales si se sabe que el plano tiene una escala 1 : 21.

Resolución

como $r = \frac{21}{1} = 21 \Rightarrow$ las dimensiones reales se obtienen multiplicando por 21.

$$15 \text{ cm} \cdot 21 = 315 \text{ cm} = 3,15 \text{ m} \quad \text{y} \quad 18 \text{ cm} \cdot 21 = 378 \text{ cm} = 3,78 \text{ m}$$

3) ¿Cuál es la escala de un mapa sabiendo que 80 km en la realidad vienen representados por 2 cm en el mapa?

Resolución

$$\text{como } r = \frac{80 \text{ km}}{2 \text{ cm}} = \frac{80 \cdot 10^5 \text{ cm}}{2 \text{ cm}} = 4\,000\,000, \text{ la escala es } E \quad 1 : 4\,000\,000$$

4) ¿Cuál es la escala de un mapa si se sabe que 180 km en la realidad vienen representados por 4,5 cm en el mapa?

Resolución

$$\text{La razón de semejanza mapa-realidad es } \frac{180 \text{ km}}{4,5 \text{ cm}} = \frac{18\,000\,000 \text{ cm}}{4,5 \text{ cm}} = 4\,000\,000.$$

Luego, la escala es $1 : 4\,000\,000$

5) ¿Qué distancia, en cm, habrá entre dos pueblos de Granada distanciados en 18 km en un mapa a escala 1 : 600 000 ?

Resolución

$$\text{como } r = \frac{600\,000}{1} = 600\,000 = 6 \cdot 10^5 \text{ y distancia real} = \text{distancia en el mapa} \cdot r$$

$$\text{Entonces, distancia en el mapa} = \frac{\text{distancia real}}{r} = \frac{18 \text{ km}}{6 \cdot 10^5} = \frac{18 \cdot 10^5 \text{ cm}}{6 \cdot 10^5} = 3 \text{ cm}$$

6) Si en un mapa a escala 2 : 1000 la superficie de una región es 4 cm², ¿cuál es la superficie real?

Resolución

$$\text{como } r = \frac{1000}{2} = 500 \Rightarrow A' = r^2 A = 500^2 \cdot 4 = 1\,000\,000 \text{ cm}^2 \xrightarrow{:10^4} 100 \text{ m}^2.$$

7) Una figura de 63 cm² de área tiene una superficie de 7 cm² en un plano.

a) ¿Cuál es la escala del plano?

b) Si el perímetro de la figura en el plano es 12 cm, ¿cuál es el perímetro en la realidad?

Resolución

$$\text{a) como } A' = r^2 A \Rightarrow r^2 = \frac{A'}{A} = \frac{63 \text{ cm}^2}{7 \text{ cm}^2} = 9. \text{ Luego, } r = \sqrt{9} = 3. \text{ La escala es } E \quad 1 : 3 \quad \text{b) } P' = rP = 3 \cdot 12 = 48 \text{ cm}$$

8) Una figura de 1125 cm^2 de área tiene una superficie de 45 cm^2 en un plano.

a) ¿Cuál es la escala del plano?

b) ¿Cuántas veces es mayor el perímetro de la figura en la realidad que el perímetro de la figura en el plano?

Resolución

a) como $A' = r^2 A \Rightarrow r^2 = \frac{A'}{A} = \frac{1125 \text{ cm}^2}{45 \text{ cm}^2} = 25$. Luego, $r = \sqrt{25} = 5$. La escala es $E 1 : 5$

b) $P' = rP = 3P \Rightarrow$ es 3 veces mayor

9) Una figura de 42 cm de perímetro tiene un perímetro de 7 cm en un plano.

a) ¿Cuál es la escala del plano?

b) Si la superficie en la realidad es 612 cm^2 , ¿cuál es la superficie en el plano?

Resolución

a) como $P' = rP \Rightarrow r = \frac{P'}{P} = \frac{42 \text{ cm}}{7 \text{ cm}} = 6$. La escala es $E 1 : 6$ b) como $A' = r^2 A \Rightarrow A = \frac{A'}{r^2} = \frac{63 \text{ cm}^2}{6^2} = 1,75 \text{ cm}^2$

$3,5 - 1,6 = 1,9$ y $25,5 + 1,5 = 27$. Por otra parte, $\frac{x}{1,9} = \frac{27}{1,5} \Rightarrow x = 34,2 \Rightarrow \text{altura} = 34,2 + 1,6 = 35,8 \text{ m}$

10) Una región tiene una superficie real de 3430 km^2 . ¿Cuál será su superficie o área, en cm^2 , en un mapa a escala $1 : 700\,000$?

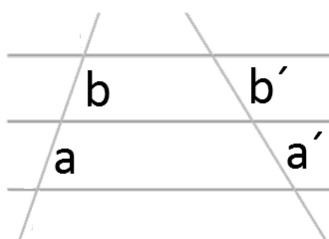
Resolución

Solución. La razón de semejanza es $r = 700\,000 = 7 \cdot 10^5$. Si A y A' son las áreas, $A' = 3430 \text{ km}^2 = 3430 \cdot 10^{10} \text{ cm}^2$

Como $A' = r^2 A \rightarrow A = \frac{A'}{r^2} = \frac{3430 \cdot 10^{10}}{49 \cdot 10^{10}} = 70 \text{ cm}^2$

Teorema de Thales

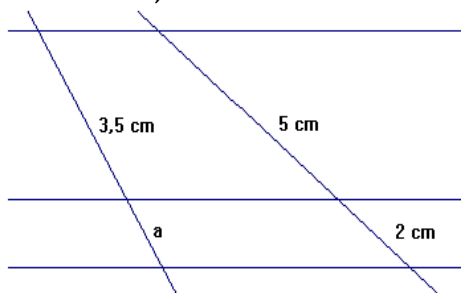
Si varias rectas paralelas son cortadas por dos secantes, los segmentos que determinan son proporcionales



También se cumple que $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$

Ejemplo

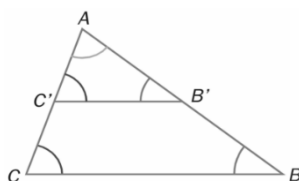
Usando el teorema de Thales, calcula cuanto mide el segmento a:



$$\frac{a}{2} = \frac{3,5}{5} \Rightarrow a = \frac{3,5 \cdot 2}{5} = 1,4 \text{ cm}$$

Triángulos en posición de Thales

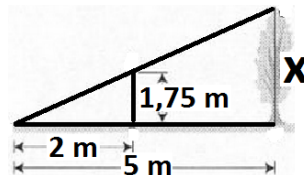
Dos triángulos están en posición de Thales si tienen un vértice común y los lados opuestos a dicho vértice son paralelos.



Por ejemplo, en la siguiente figura

los triángulos ABC y AB'C' están en posición de

Thales. Estos triángulos siempre son semejantes porque tienen los ángulos iguales



Ejemplo: Usando la semejanza, calcula la altura x del árbol:

Sea x la altura del árbol. Como los triángulos son semejantes, $\frac{5}{2} = \frac{x}{1,75} \Rightarrow x = \frac{5 \cdot 1,75}{2} = 4,375 \text{ m}$

División de un segmento en partes iguales o proporcionales a números dados

Usando el teorema de Thales se puede dividir cualquier segmento en partes iguales o proporcionales a números dados.

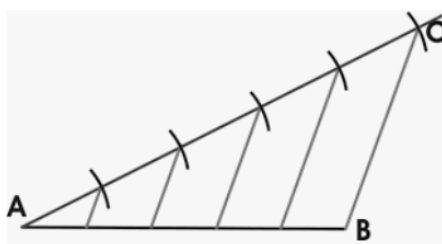
Por ejemplo, dividamos un segmento AB en 5 partes iguales.

1º) Se dibuja el segmento AB y luego se traza una semirrecta desde A con la inclinación que se quiera

2º) Con el compás, con la apertura que se quiera, se trazan desde A 5 arcos iguales

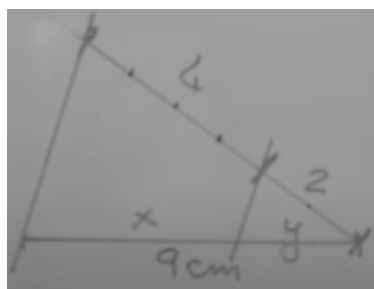
3º) Se traza el segmento AC y se dibujan paralelas a dicho segmento (véase el dibujo)

Los puntos obtenidos en el segmento AB lo dividen en 5 partes iguales



También se puede dividir un segmento dado en partes proporcionales a dos o más números.

Por ejemplo, fíjate como se ha dividido un segmento de 9 cm en dos partes proporcionales a 2 y 4:



Como $\frac{x}{4} = \frac{y}{2} = \frac{9}{6} = 1,5 \Rightarrow x = 4 \cdot 1,5 = 6 \text{ cm}$, $y = 2 \cdot 1,5 = 3 \text{ cm}$