

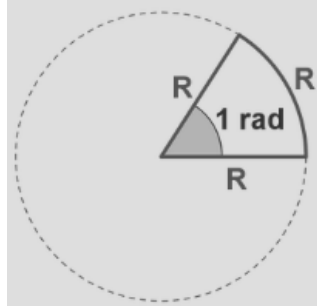
MEDIDA DE ÁNGULOS EN EL SISTEMA SEXAGESIMAL Y CIRCULARMedida de ángulos

Para medir ángulos se usan principalmente dos sistemas de medida:

- El sistema sexagesimal que usa como unidad de medida el grado. Un grado es $1/90$ del ángulo recto.

Los submúltiplos del grado son el minuto ($1'$) y el segundo ($1''$): $1^\circ = 60'$ y $1' = 60''$

- El sistema circular que usa como unidad de medida el radián. Un radián es el ángulo que abarca un arco igual al radio.



Hay otro sistema de medida de ángulos que es el sistema centesimal, que se usa en algunos ámbitos, que usa como unidad de medida el grado centesimal. Un grado es $1/100$ del ángulo recto.

Ángulos en la calculadora científica

En la calculadora científica CASIO primero debemos elegir el sistema con el que vamos a trabajar

tecleando varias veces la tecla **MODE** hasta que nos aparezca

Deg	Rad	Gra
1	2	3

.

Después pulsamos 1 (DEG) si vamos a trabajar con grados sexagesimales, 2 (RAD) si es con radianes y 3 (GRA) si es con grados centesimales.

Para introducir un ángulo del sistema sexagesimal o centesimal debemos usar la tecla **o, , ,**.

Si el ángulo x está en forma incompleja el proceso es x **o, , ,** **=**

Por ejemplo, para introducir el ángulo $35,27^\circ$, el proceso es 35.27 **o, , ,** **=**

Aparecerá en la pantalla $35^\circ 16' 12''$ que significa que $35,27^\circ$ son $35^\circ 16' 12''$

Si el ángulo está en forma compleja, $x^\circ y' z''$, el proceso es x **o, , ,** **y** **o, , ,** **z** **o, , ,** **=**

Por ejemplo, para introducir el ángulo $28^\circ 50' 12,5''$, el proceso es 28 **o, , ,** 50 **o, , ,** 12.5 **o, , ,** **=**

Aparecerá en la pantalla $28^\circ 50' 12,5''$

En ambos casos, si volvemos al pulsar **o, , ,** nos va cambiando de una forma a otra.

Paso de grados a radianes y viceversa

Para pasar de grados a radianes o viceversa, puedes usar que $360^\circ \leftrightarrow 2\pi R \leftrightarrow 2\pi \text{ rad} \Rightarrow 180^\circ \leftrightarrow \pi \text{ rad}$

Ejemplos:

1) Pasar 150° a rad: $\frac{180^\circ \leftrightarrow \pi \text{ rad}}{150^\circ \leftrightarrow x \text{ rad}} \Rightarrow x = \frac{150\pi}{180} \text{ rad} = \frac{5\pi}{6} \text{ rad}$

2) Pasar $84^{\circ} 25' 45''$ a rad: Lo expresamos en forma incompleja y obtenemos aproximadamente $84,43^{\circ}$

$$180^{\circ} \leftrightarrow \pi \text{ rad} \\ 84,43^{\circ} \leftrightarrow x \text{ rad} \Rightarrow x = \frac{84,43\pi}{180} \text{ rad} \cong 1,47 \text{ rad}$$

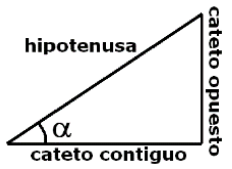
3) Pasar $\frac{11\pi}{6}$ rad a grados sexagesimales: $\frac{11 \cdot 180^{\circ}}{6} = 330^{\circ}$

4) Pasar $3,72$ rad a grados sexagesimales: $\frac{180^{\circ} \leftrightarrow \pi \text{ rad}}{x \leftrightarrow 3,72 \text{ rad}} \Rightarrow x = \frac{3,72 \cdot 180}{\pi} \cong 213,14^{\circ} = 213^{\circ} 8' 25,08''$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO AGUDO

Concepto de razón trigonométrica

Si consideramos un ángulo agudo cualquiera, α . Se definen las razones trigonométricas (r.t.) de α así:



seno de α : $\boxed{\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}}$

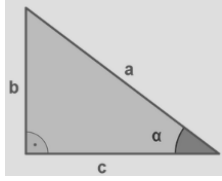
r.t. directas: coseno de α : $\boxed{\text{cos } \alpha = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}}}$

tangente de α : $\boxed{\text{tg } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}}}$

cosecante de α : $\boxed{\text{cosec } \alpha = \frac{1}{\text{sen } \alpha}}$

r.t. inversas: secante de α : $\boxed{\text{sec } \alpha = \frac{1}{\text{cos } \alpha}}$

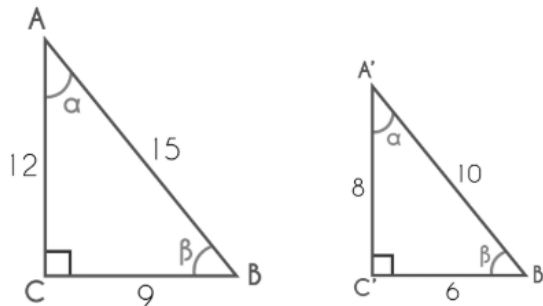
cotangente de α : $\boxed{\text{cotg } \alpha = \frac{1}{\text{tg } \alpha}}$

Observa 

$$\frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} = \frac{b/a}{c/a} = \frac{b}{c} = \text{tg } \alpha \Rightarrow \boxed{\frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} = \text{tg } \alpha}$$

$$\text{cotg } \alpha = \frac{1}{\text{tg } \alpha} = \frac{\text{cos } \alpha}{\text{sen } \alpha} \Rightarrow \boxed{\text{cotg } \alpha = \frac{\text{cos } \alpha}{\text{sen } \alpha}}$$

Veamos que las r.t. solo dependen del valor del ángulo y no de las medidas de los lados del triángulo rectángulo:



Observa que estos dos triángulos son semejantes pues tienen los ángulos iguales y los lados proporcionales.

Veamos que las r.t. son las mismas independientemente del triángulo que usemos

En el primer triángulo $\text{sen } \alpha = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$ y en el segundo $\text{sen } \alpha = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

Lo mismo ocurre con las demás r.t., que son iguales.

Esto mismo ocurre para cualquier ángulo.

Razones trigonométricas con la calculadora científica

Las r.t. de un ángulo también se pueden hallar con la calculadora científica CASIO usando las teclas $\boxed{\sin}$ $\boxed{\cos}$ y $\boxed{\tan}$, según el caso. Por ejemplo, para calcular $\sin 30^\circ$ tecleamos $\boxed{\sin}$ 30 $\boxed{=}$. Nos da 0.5.

De igual forma se calcula el coseno y la tangente usando las teclas $\boxed{\cos}$ y $\boxed{\tan}$, respectivamente.

También se puede hallar el ángulo α conocido el valor de una r.t. directa.

Por ejemplo, si queremos hallar el ángulo agudo α que cumple $\cos \alpha = 0,5$ (este ángulo se llama el arcocoseno de 0,5 y se representa por $\arccos 0,5$ ó por $\cos^{-1}0,5$) tecleamos $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\cos}$ 0.5 $\boxed{=}$.

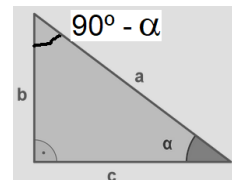
Nos da 60.

Luego, $\alpha = \cos^{-1} 0,5 = 60^\circ$, que significa que $\cos 60^\circ = 0,5$

De igual forma se hace usando las teclas $\boxed{\sin}$ y $\boxed{\tan}$ si nos dieran $\sin \alpha$ ó $\text{tg } \alpha$

Razones trigonométricas de ángulos complementarios

Recuerda que dos ángulos son complementarios si suman 90° . En general, los ángulos α y $90^\circ - \alpha$ son complementarios.



Observa que los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios:

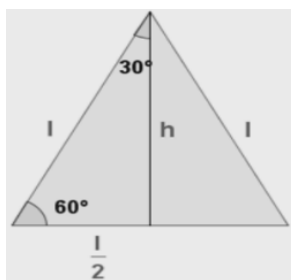
$$\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{c}{a} = \cos \alpha \Rightarrow \boxed{\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha}$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{b}{a} = \sin \alpha \Rightarrow \boxed{\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha}$$

$$\text{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{c}{b} = \cot g \alpha \Rightarrow \boxed{\text{tg}(90^\circ - \alpha) = \cot g \alpha}$$

Razones trigonométricas de 60° , 30° y 45°

Tomemos un triángulo equilátero



Por el teorema de Pitágoras: $h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = l^2 \rightarrow h^2 + \frac{l^2}{4} = l^2 \rightarrow h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4} = \frac{3l^2}{4} \rightarrow h = \sqrt{\frac{3l^2}{4}} = \frac{l\sqrt{3}}{2}$

$$\sin 60^\circ = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

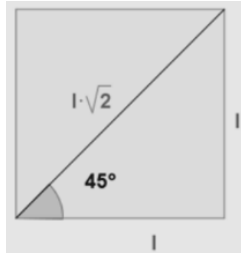
Luego: $\cos 60^\circ = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \cos 30^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg } 60^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\text{tg } 30^\circ = \cot g 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Tomemos ahora un cuadrado



Por el teorema de Pitágoras: $D^2 = l^2 + l^2 = 2l^2 \rightarrow D = \sqrt{2l^2} = l\sqrt{2}$

$$\text{Luego: } \sin 45^\circ = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \cos 45^\circ = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{tg } 45^\circ = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

Para recordar mejor las r.t. de 30° , 45° y 60° construimos este cuadro donde los denominadores son siempre 2 y los numeradores de la 1ª fila van aumentando $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ y en la 2ª fila igual, pero en sentido inverso

	$30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$	$45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$	$60^\circ = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

Resolución de triángulos

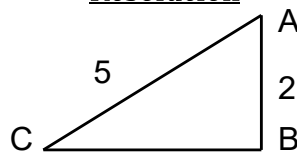
Resolver un triángulo es calcular todos sus lados y sus ángulos. La trigonometría nos ayuda a resolver triángulos.

Actividad resuelta

Resuelve los siguientes triángulos rectángulos haciendo primero un dibujo aproximado del triángulo correspondiente:

a) La hipotenusa mide 5 cm y un cateto mide 2 cm.

Resolución



$$\sin C = \frac{2}{5} \Rightarrow C = \arcsin \frac{2}{5} \cong 23,58^\circ \cong 23^\circ 34' 42'' \quad A = 90^\circ - C \cong 66,42^\circ \cong 66^\circ 25' 19''$$

Para hallar el cateto \overline{BC} podemos usar el teorema de Pitágoras o las r.t de cualquiera de los ángulos. Usaremos, por ser más cómodo, las r.t.:

$$\text{Usando tg } C : \text{tg } C = \frac{2}{\overline{BC}} \Rightarrow \overline{BC} \cdot \text{tg } C = 2 \Rightarrow \overline{BC} = \frac{2}{\text{tg } C} = \frac{2}{\text{tg } 23,58^\circ} \cong 4,6 \text{ cm}$$

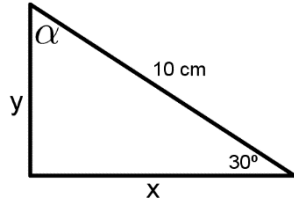
$$\text{Usando cos } C : \cos C = \frac{\overline{BC}}{5} \Rightarrow \overline{BC} = 5 \cdot \cos C = 5 \cdot \cos 23,58^\circ \cong 4,6 \text{ cm}$$

$$\text{Usando el teorema de Pitágoras: } 5^2 = 2^2 + \overline{BC}^2 \Rightarrow 25 = 4 + \overline{BC}^2 \Rightarrow \overline{BC}^2 = 21 \Rightarrow \overline{BC} = \sqrt{21} \cong 4,6 \text{ cm}$$

b) La hipotenusa mide 10 cm y tiene un ángulo agudo de $\frac{\pi}{6}$ rad.

Resolución

$$\frac{\pi}{6} \text{ rad} = \frac{180^\circ}{6} = 30^\circ$$

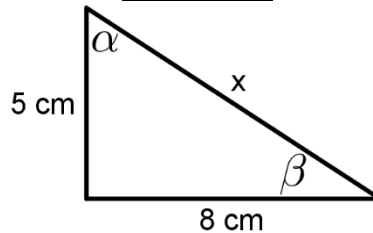


$$\alpha = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

$$\cos 30^\circ = \frac{x}{10} \Rightarrow x = 10 \cdot \cos 30^\circ \cong 8,66 \text{ cm} \quad \sin 30^\circ = \frac{y}{10} \Rightarrow y = 10 \cdot \sin 30^\circ = 5 \text{ cm}$$

c) Los catetos miden 5 cm y 8 cm, respectivamente.

Resolución



$$\text{tg} \alpha = \frac{8}{5} = 1,6 \Rightarrow \alpha = \arctg 1,6 \cong 58^\circ \quad \beta = 90^\circ - 58^\circ = 32^\circ ; \quad \sin 58^\circ = \frac{8}{x} \Rightarrow x = \frac{8}{\sin 58^\circ} \cong 9,43 \text{ cm}$$

APLICACIONES DE LA TRIGONOMETRÍA

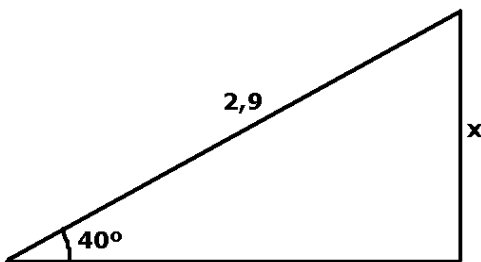
Aplicaciones reales

La trigonometría nos permite resolver problemas cotidianos en los que sea posible usar triángulos rectángulos y las r.t. de alguno de sus ángulos.

Actividades resueltas

1) El tobogán de un parque mide 2,9 m y forma un ángulo de 40° con el suelo. ¿Qué altura, x, tendrá la escalerilla?

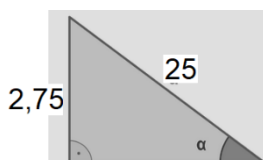
Resolución



$$\sin 40^\circ = \frac{x}{2,9} \rightarrow x = 2,9 \sin 40^\circ = 1,86; \text{ Respuesta: } \boxed{1,86 \text{ m}}$$

2) Se quiere construir una rampa de saltos de exhibición de motocicletas de 25 m de longitud. Si se quiere que, en el momento de salir de la rampa, las motocicletas se encuentren a 2,75 m del suelo, ¿qué ángulo de inclinación ha de tener la rampa?

Resolución



$$\sin \alpha = 2,75/25 = 0,11 \Rightarrow \alpha = \arcsen 0,11 = 6^\circ 18' 55,14''$$

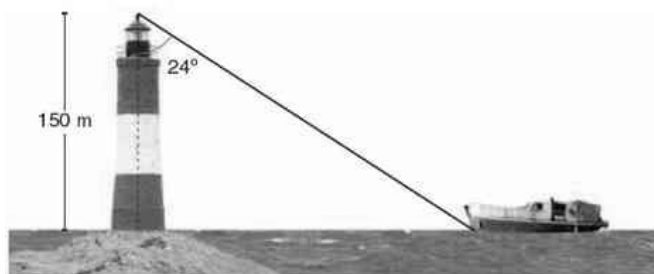
3) Encuentra la altura de la torre eólica y la longitud del tirante que la sostiene.



Resolución

$$\cos 65^\circ = 30/x \Rightarrow x = 30/\cos 65^\circ \approx 71, \text{ m} \quad \text{tg } 65^\circ = y/30 \Rightarrow y = 30.\text{tg } 65^\circ \approx 64,3 \text{ m}$$

4) Desde un faro situado a 150 m sobre el nivel del mar se observa un barco bajo un ángulo de 24° como se muestra en la figura. ¿A qué distancia se encuentra el barco de la base del faro?



Resolución

Sea d = la distancia que se pide: $\text{tg } 24^\circ = d/150 \Rightarrow d = 150.\text{tg } 24^\circ \approx 66,78 \text{ m}$

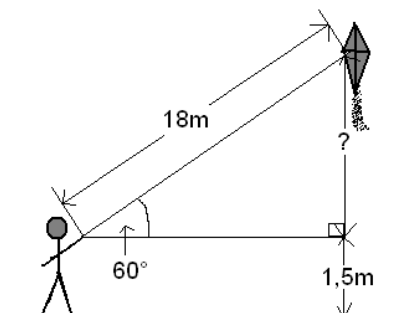
5) Un edificio proyecta una sombra de 150 m cuando los rayos del Sol forman un ángulo de 20° 30' con el suelo. Halla la altura del edificio.

Resolución

$$20^\circ 30' = 20,5^\circ$$

$$\text{tg } 20,5^\circ = \frac{x}{150} \Rightarrow x = 150.\text{tg } 20,5^\circ \approx 56,08 \text{ m}$$

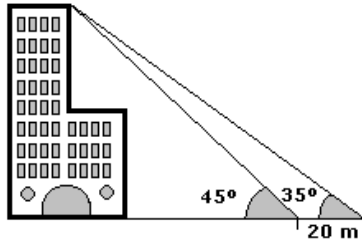
6) Calcula la altura de la cometa



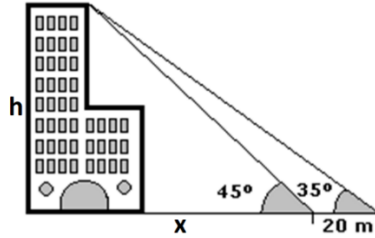
Resolución

$$\text{sen } 60^\circ = \frac{?}{18} \rightarrow ? = 18 \text{ sen } 60^\circ = 15,59 \text{ m} \Rightarrow \text{Altura de la cometa : } 15,59 + 1,5 = \boxed{17,09 \text{ m}}$$

7) Halla la altura h del edificio representado en la imagen

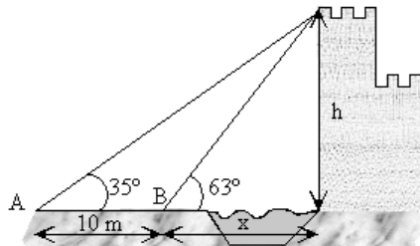


Resolución



$$\begin{cases} \operatorname{tg} 45^\circ = \frac{h}{x} \\ \operatorname{tg} 35^\circ = \frac{h}{x+20} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = \frac{h}{x} \\ 0,7 = \frac{h}{x+20} \end{cases} \Rightarrow x = h; \text{ luego, } 0,7 = \frac{h}{h+20} \Rightarrow 0,7h + 14 = h \Rightarrow \boxed{h = 46,67 \text{ m}}$$

8) Calcula la altura, h , de la torre del castillo

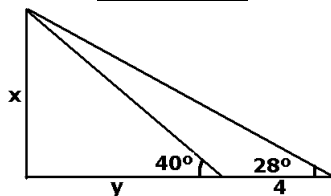


Resolución

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 63^\circ = \frac{h}{x} \\ \operatorname{tg} 35^\circ = \frac{h}{x+10} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1,963 = \frac{h}{x} \rightarrow 1,963x = h \\ 0,7 = \frac{h}{x+10} \end{cases} \Rightarrow 0,7(x+10) = 1,963x \Rightarrow x \cong 5,54. \text{ Luego, } h = 1,963 \cdot 5,54 \cong 10,88 \text{ m}$$

9) Desde la orilla de un río se ve un árbol en la otra orilla bajo un ángulo de 40° , y si se retrocede 4 m se ve bajo un ángulo de 28° . Calcula la altura del árbol y la anchura del río.

Resolución



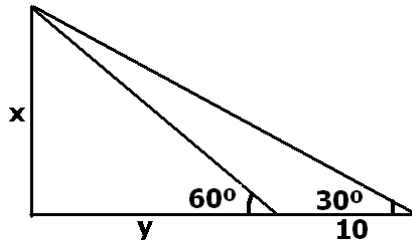
$$\begin{cases} \operatorname{tg} 40^\circ = \frac{x}{y} \\ \operatorname{tg} 28^\circ = \frac{x}{y+4} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = y \operatorname{tg} 40^\circ \\ x = (y+4) \operatorname{tg} 28^\circ \end{cases}; y \operatorname{tg} 40^\circ = (y+4) \operatorname{tg} 28^\circ$$

$$y \operatorname{tg} 40^\circ = y \operatorname{tg} 28^\circ + 4 \operatorname{tg} 28^\circ \rightarrow y \operatorname{tg} 40^\circ - y \operatorname{tg} 28^\circ = 4 \operatorname{tg} 28^\circ \rightarrow y \cdot (\operatorname{tg} 40^\circ - \operatorname{tg} 28^\circ) = 4 \operatorname{tg} 28^\circ$$

$$y = \frac{4 \operatorname{tg} 28^\circ}{\operatorname{tg} 40^\circ - \operatorname{tg} 28^\circ} \cong \frac{4 \cdot 0,532}{0,839 - 0,532} = 6,93; x = y \operatorname{tg} 40^\circ = 6,93 \cdot 0,839 = 5,81$$

Por tanto, aproximadamente, el árbol mide 5,81 m y la anchura del río es 6,93 m

10) Desde la orilla de un río se ve un árbol en la otra orilla bajo un ángulo de 60° , y si se retrocede 10 m se ve bajo un ángulo de 30° . Calcula la altura del árbol y la anchura del río. (Da los resultados redondeados a las décimas).



$$\begin{cases} \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{x}{y} \\ \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{x}{y+10} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = y \operatorname{tg} 60^\circ \\ x = (y+10) \operatorname{tg} 30^\circ \end{cases} ; y \operatorname{tg} 60^\circ = (y+10) \operatorname{tg} 30^\circ$$

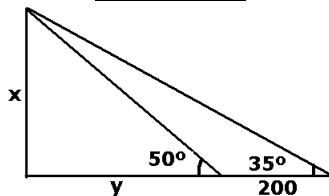
$$y \operatorname{tg} 60^\circ = y \operatorname{tg} 30^\circ + 10 \operatorname{tg} 30^\circ \rightarrow y \operatorname{tg} 60^\circ - y \operatorname{tg} 30^\circ = 10 \operatorname{tg} 30^\circ \rightarrow y \cdot (\operatorname{tg} 60^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ) = 10 \operatorname{tg} 30^\circ$$

$$y = \frac{10 \operatorname{tg} 30^\circ}{\operatorname{tg} 60^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ} \cong \frac{10 \cdot 0,577}{1,732 - 0,577} = 5 ; x = y \operatorname{tg} 60^\circ \cong 5 \cdot 1,732 = 8,7$$

Por tanto, aproximadamente, el árbol mide 8,7 m y la anchura del río es 5 m

11) Desde un cierto punto del terreno se mira a lo alto de una montaña y la visual forma un ángulo de 35° con el suelo. Al acercarse 200 m hacia la montaña, la visual forma 50° con el suelo. Halla la altura de la montaña.

Resolución



$$\begin{cases} \operatorname{tg} 50^\circ = \frac{x}{y} \\ \operatorname{tg} 35^\circ = \frac{x}{y+200} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = y \operatorname{tg} 50^\circ \\ x = (y+200) \operatorname{tg} 35^\circ \end{cases} ; y \operatorname{tg} 50^\circ = (y+200) \operatorname{tg} 35^\circ$$

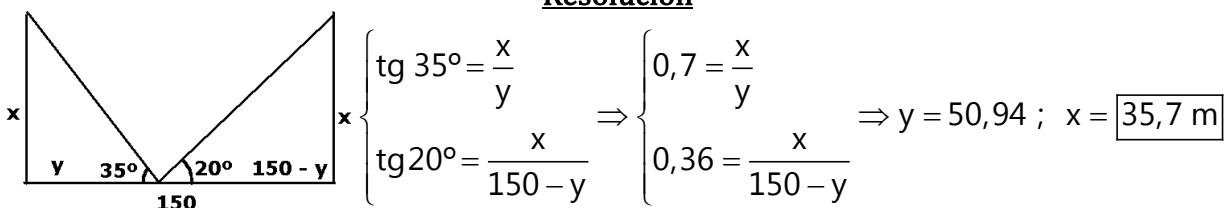
$$y \operatorname{tg} 50^\circ - y \operatorname{tg} 35^\circ = 200 \operatorname{tg} 35^\circ \rightarrow y \cdot (\operatorname{tg} 50^\circ - \operatorname{tg} 35^\circ) = 200 \operatorname{tg} 35^\circ$$

$$y = \frac{200 \operatorname{tg} 35^\circ}{\operatorname{tg} 50^\circ - \operatorname{tg} 35^\circ} \cong \frac{200 \cdot 0,7}{1,192 - 0,7} = 284,55 ; x = y \operatorname{tg} 50^\circ \cong 284,55 \cdot 1,192 = 339,18$$

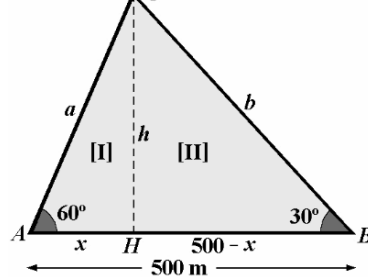
Por tanto, aproximadamente, la altura de la montaña es 339,18 m

12) Dos edificios distan entre sí 150 m. Desde un punto que está entre los dos edificios, las visuales a los puntos más altos de éstos forman con la horizontal ángulos de 35° y 20° , respectivamente. Halla la altura de los edificios, si sabemos que los dos miden lo mismo.

Resolución



$$\begin{cases} \operatorname{tg} 35^\circ = \frac{x}{y} \\ \operatorname{tg} 20^\circ = \frac{x}{150-y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0,7 = \frac{x}{y} \\ 0,36 = \frac{x}{150-y} \end{cases} \Rightarrow y = 50,94 ; x = \boxed{35,7 \text{ m}}$$



13) Calcula la altura de la avioneta

Resolución

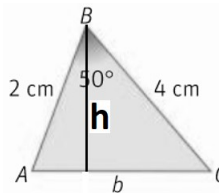
$$\begin{cases} \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{h}{x} \rightarrow 1,732 = \frac{h}{x} \rightarrow x = \frac{h}{1,732} \rightarrow x = 0,577h \\ \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{h}{500-x} \rightarrow 0,577 = \frac{h}{500-0,577h} \end{cases} \Rightarrow 288,5 - 0,333h = h \Rightarrow 288,5 = 1,333h \Rightarrow h \cong 216,4$$

Cálculo de medidas en figuras y cuerpos geométricos

La trigonometría nos permite resolver problemas con figuras planas o cuerpos geométricos en los que sea posible usar triángulos rectángulos y las r.t. de alguno de sus ángulos.

Actividades resueltas

1) Resuelve el siguiente triángulo y calcula su área



Resolución

Por el teorema del coseno: $b^2 = 2^2 + 4^2 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \cos 50^\circ = 4 + 16 - 16 \cos 50^\circ = 9,72 \Rightarrow \boxed{b = 3,12}$

Por el teorema del seno: $\frac{4}{\operatorname{sen} A} = \frac{3,12}{\operatorname{sen} 50^\circ} \Rightarrow \operatorname{sen} A = \frac{4 \operatorname{sen} 50^\circ}{3,12} = 0,982 \rightarrow \boxed{A = 79,1^\circ}$

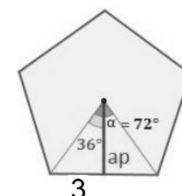
Como los 3 ángulos suman $180^\circ \Rightarrow C = 180^\circ - 50^\circ - 79,1^\circ \Rightarrow \boxed{C = 50,9^\circ}$

$\operatorname{sen} C = \frac{h}{4} \Rightarrow h = 4 \cdot \operatorname{sen} C = 4 \cdot \operatorname{sen} 50,9^\circ = 3,1$

2) Hallar el área de un pentágono regular de 30 cm de perímetro.

Resolución

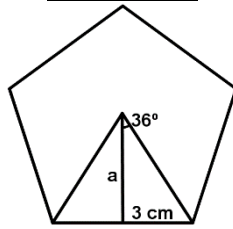
El lado es $30 : 5 = 6 \text{ cm}$; el ángulo central es $360^\circ : 5 = 72^\circ$



$\operatorname{tg} 36^\circ = \frac{3}{ap} \Rightarrow ap = \frac{3}{\operatorname{tg} 36^\circ} \cong 4,129 \Rightarrow A(\text{pentágono}) = \frac{30 \cdot 4,129}{2} = 61,9 \text{ cm}^2$

3) Hallar el área de un pentágono regular de 30 dm de perímetro

Resolución

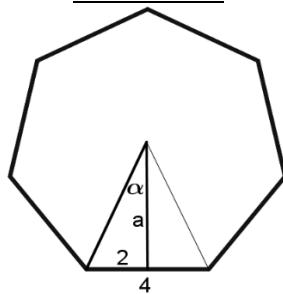


Como el perímetro es 30 dm, cada lado mide $30:5 = 6$ dm

$$\operatorname{tg} 36^\circ = \frac{3}{a} \rightarrow a = \frac{3}{\operatorname{tg} 36^\circ} = 4,13; \quad A = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{30 \cdot 4,13}{2} = 61,95; \quad \text{Respuesta: } \boxed{61,95 \text{ cm}^2}$$

4) Halla el área de un heptágono regular de 28 m de perímetro.

Resolución

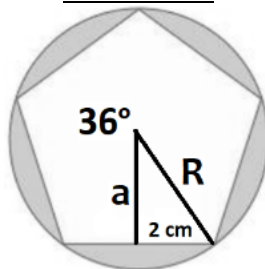


Como $\frac{28}{7} = 4$, el lado mide 4 m

$$\alpha = \frac{360^\circ}{7} : 2 = 25,7^\circ \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{2} \rightarrow a = 2 \cdot \operatorname{tg} \alpha = 2 \cdot \operatorname{tg} 25,7^\circ = 0,96 \Rightarrow A = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{28 \cdot 0,96}{2} = \boxed{13,44 \text{ m}^2}$$

5) Halla el área comprendida entre un pentágono regular de 20 cm de perímetro y su circunferencia circunscrita

Resolución

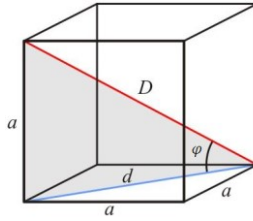


$$\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ \Rightarrow \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ \Rightarrow \operatorname{sen} 36^\circ = \frac{2}{R} \Rightarrow R = \frac{2}{\operatorname{sen} 36^\circ} = 3,4 \Rightarrow A(\text{círculo}) = \pi R^2 = 3,14 \cdot 3,4^2 = 36,3$$

$$\operatorname{tg} 36^\circ = \frac{2}{a} \Rightarrow a = \frac{2}{\operatorname{tg} 36^\circ} = 2,8 \Rightarrow A(\text{pentágono}) = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{(4 \cdot 5) \cdot 2,8}{2} = 28$$

$$A(\text{sombreada}) = 36,3 - 28 = \boxed{8,3 \text{ cm}^2}$$

6) Calcula el ángulo φ que forma la diagonal D del cubo con la base sabiendo que la arista a del cubo mide 5 cm.

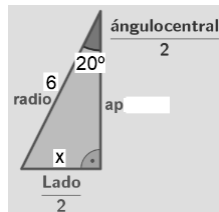
Resolución

$$d = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50}, \quad \text{tg } \varphi = \frac{5}{\sqrt{50}} = 0,707 \rightarrow \varphi \cong 35,26^\circ \quad \text{Respuesta: } \boxed{35^\circ 15' 36''}$$

7) Calcula el área y el volumen de un prisma regular eneagonal de 16 cm de altura sabiendo que el eneágono está inscrito en una circunferencia de radio 6 cm.

Resolución

Hallamos el área de la base:



El ángulo central es $360^\circ : 9 = 40^\circ$

$$\text{sen } 20^\circ = \frac{x}{6} \Rightarrow x = 6 \cdot \text{sen } 20^\circ \cong 2,052 \quad (\text{lado} : 2,052 \cdot 2 = 4,104); \quad \text{cos } 20^\circ = \frac{ap}{6} \Rightarrow ap = 6 \cdot \text{cos } 20^\circ \cong 5,638$$

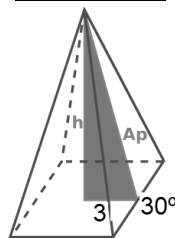
$$A(\text{base}) = A(\text{eneágono}) = \frac{(4,104 \cdot 9) \cdot 5,638}{2} \cong 104,123$$

El área de una cara lateral, rectángulo de base 4,104 cm y altura 16 cm, es $4,104 \cdot 16 = 65,664$

El área del prisma es la suma de las áreas de todas las caras: $104,123 \cdot 2 + 65,664 \cdot 9 = 799,222 \text{ cm}^2$.

El volumen del prisma es $A(\text{base}) \cdot \text{altura} = 104,123 \cdot 16 = 1665,968 \text{ cm}^3$.

8) Calcula el área y el volumen de una pirámide regular cuadrangular sabiendo que el lado del cuadrado es 6 cm y que las caras laterales forman un ángulo de 30° con la base.

Resolución

Área de la base: $A(\text{cuadrado}) = 6^2 = 36$

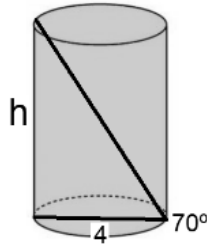
$$\text{tg } 30^\circ = \frac{h}{3} \Rightarrow h = 3 \cdot \text{tg } 30^\circ \cong 1,732; \quad \text{cos } 30^\circ = \frac{3}{Ap} \Rightarrow Ap = \frac{3}{\text{cos } 30^\circ} \cong 3,464$$

$$A(\text{cara lateral}) = A(\text{triángulo}) = \frac{6 \cdot 3,464}{2} \cong 10,392$$

El área de la pirámide es la suma de las áreas de todas las caras: $36 + 10,392 \cdot 4 \approx 77,6 \text{ cm}^2$.

$$\text{El volumen de la pirámide es } V = \frac{A(\text{base}) \cdot \text{altura}}{3} = \frac{36 \cdot 1,732}{3} \cong 20,8 \text{ cm}^3$$

9) Halla el área y volumen de un cilindro de 2 cm de radio sabiendo que el ángulo que forma su diagonal con la base es de 70° .

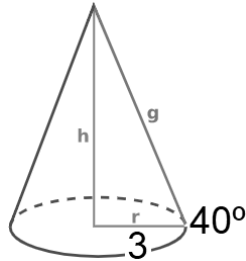
Resolución

$$\operatorname{tg} 70^\circ = \frac{h}{4} \Rightarrow h = 4 \cdot \operatorname{tg} 70^\circ \cong 10,99 ; A(\text{cilindro}) = 2A(\text{base}) + A(\text{lateral}) = 2 \cdot \pi r^2 + 2\pi r h =$$

$$= 2\pi r(r+h) = 2\pi \cdot 2(2+10,99) \cong 163 \text{ cm}^2$$

$$V(\text{cilindro}) = A(\text{base}) \cdot \text{altura} = \pi 2^2 \cdot 10,99 \cong 138,1 \text{ cm}^3$$

10) Halla el área y volumen de un cono de 6 cm de diámetro sabiendo que la generatriz forma un ángulo de 40° con la base.

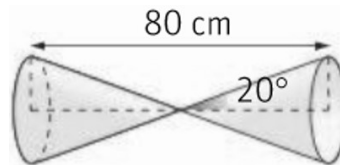
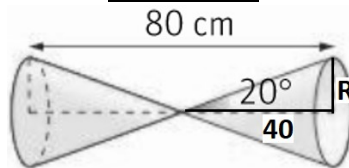
Resolución

$$\operatorname{tg} 40^\circ = \frac{h}{3} \Rightarrow h = 3 \cdot \operatorname{tg} 40^\circ \cong 2,517 ; \cos 40^\circ = \frac{3}{g} \Rightarrow g = \frac{3}{\cos 40^\circ} \cong 3,916$$

$$A(\text{cono}) = \pi r(g+r) = \pi \cdot 3(3,916+3) \cong 65,2 \text{ cm}^2$$

$$V(\text{cono}) = \frac{A(\text{base}) \cdot \text{altura}}{3} = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi 3^2 2,517}{3} \cong 23,7 \text{ cm}^3$$

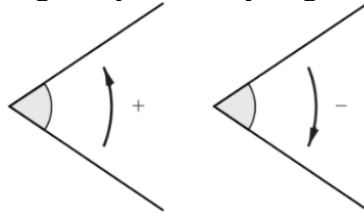
11) Calcula el volumen del siguiente cuerpo geométrico

**Resolución**

$$\operatorname{tg} 20^\circ = \frac{R}{40} \Rightarrow R = 40 \operatorname{tg} 20^\circ = 14,6 ; V(\text{cuerpo}) = 2 \cdot V(\text{cono}) = 2 \cdot \frac{\pi R^2 h}{3} = 2 \cdot \frac{3,14 \cdot 14,6^2 \cdot 40}{3} = \boxed{17848,6 \text{ cm}^3}$$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO CUALQUIERA

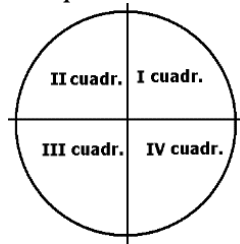
Ángulos positivos y negativos



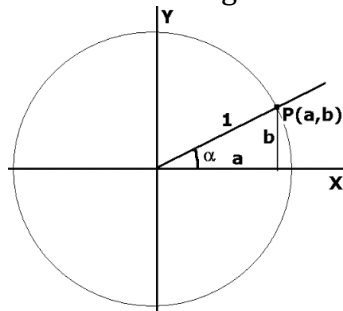
Se consideran positivos los ángulos cuyo sentido de giro sea contrario al de las manecillas del reloj.

Circunferencia goniométrica o trigonométrica. Ángulos en posición normal

Se llama circunferencia trigonométrica a la circunferencia de radio 1 con centro en el origen de coordenadas. La circunferencia trigonométrica queda dividida en 4 cuadrantes:



Decimos que un ángulo está dibujado en posición normal si el vértice es el origen de coordenadas y el lado inicial la parte positiva del eje X. El lado final del ángulo corta a la circunferencia en un punto P(a, b)



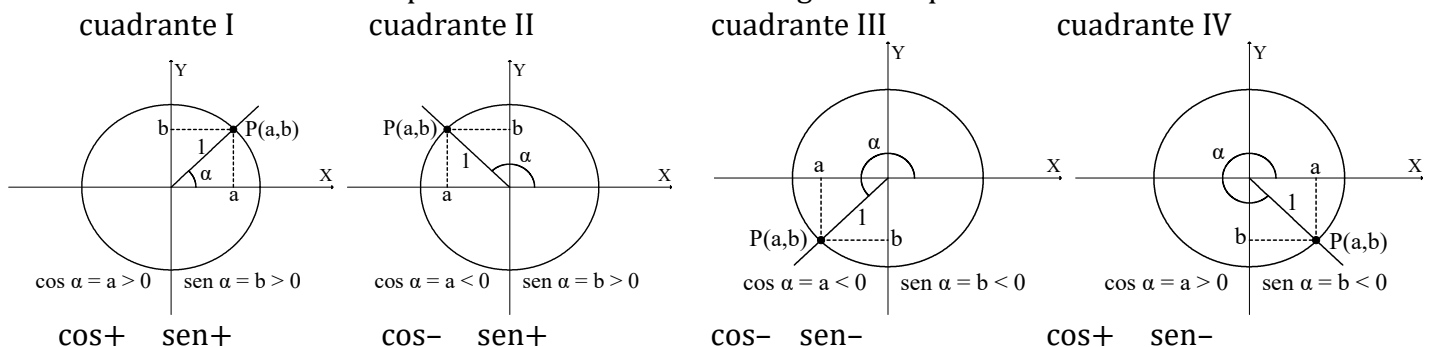
Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera

Las r.t. de un ángulo cualquiera α se deducen a partir de las r.t. de un ángulo agudo estudiadas anteriormente. Veamos cómo:

Usando la definición de las r.t.:

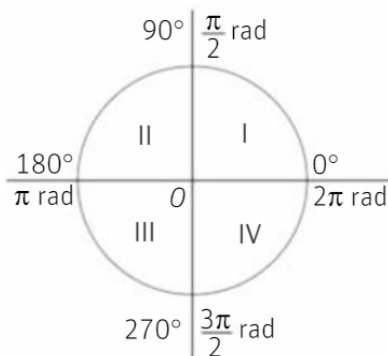
$$\begin{aligned} \text{sen } \alpha &= \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{1} = b \\ \text{cos } \alpha &= \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{1} = a \end{aligned} \Rightarrow \text{tg } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{b}{a}$$

Esta misma definición se usa para calcular las r.t. de un ángulo cualquiera:



El signo del seno y coseno de un ángulo depende del cuadrante en el que esté dicho ángulo.

Hay ángulos que no pertenecen a ningún cuadrante

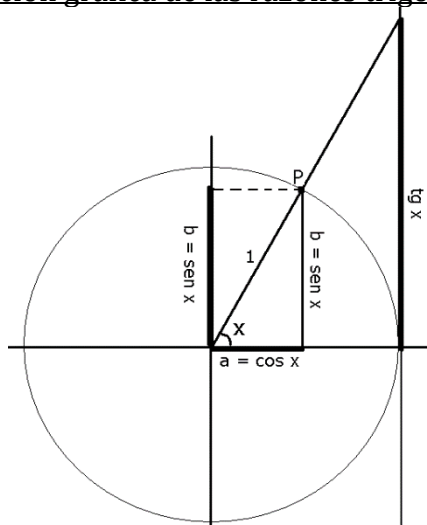


	$0^\circ = 0 \text{ rad} = 360^\circ = 2\pi \text{ rad}$	$90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$	$180^\circ = \pi \text{ rad}$	$270^\circ = \frac{3\pi}{2} \text{ rad}$
punto P	(1, 0)	(0, 1)	(-1, 0)	(0, -1)
sen	0	1	0	-1
cos	1	0	-1	0
tg	0	∄	0	∄

Observa que puesto que la circunferencia tiene radio 1 siempre se cumple que

$$-1 \leq \text{sen } \alpha \leq 1 \quad -1 \leq \text{cos } \alpha \leq 1$$

Interpretación gráfica de las razones trigonométricas



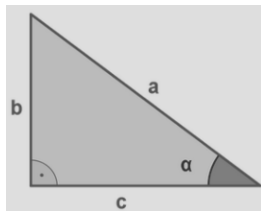
Ángulos equivalentes

Dos ángulos son equivalentes cuando al dibujarlos en posición normal coinciden sus lados finales. Los ángulos equivalentes tienen las mismas r.t.

Reducir un ángulo a la primera vuelta consiste en obtener otro ángulo equivalente de la primera vuelta. Para reducir un ángulo mayor de 360° a la primera vuelta lo dividimos entre 360° para saber cuántas vueltas ha dado a la circunferencia el lado final del ángulo y el resto de la división es un ángulo equivalente.

Por ejemplo, vamos a obtener un ángulo equivalente a 2580° :

$$\frac{2580}{360} \Rightarrow 2580^\circ = 7 \cdot 360^\circ + 60^\circ = 7 \text{ vueltas y } 60^\circ. \text{ Luego, un ángulo equivalente es } 60^\circ.$$

RELACIONES ENTRE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICASRelación fundamental de la trigonometría

Vamos a deducir algunas fórmulas que relacionan entre sí a las r.t. de un ángulo α :

$$(\operatorname{sen} \alpha)^2 + (\operatorname{cos} \alpha)^2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{b^2 + c^2}{a^2} \xrightarrow{\text{por el teorema de Pitágoras}} \frac{a^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \boxed{\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1}$$

A partir de esta fórmula podemos deducir otras:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 \xrightarrow{\text{dividiendo entre } \operatorname{cos}^2 \alpha} \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\operatorname{cos}^2 \alpha} + \frac{\operatorname{cos}^2 \alpha}{\operatorname{cos}^2 \alpha} = \frac{1}{\operatorname{cos}^2 \alpha} \Rightarrow \boxed{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \operatorname{sec}^2 \alpha}$$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 \xrightarrow{\text{dividiendo entre } \operatorname{sen}^2 \alpha} \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha} + \frac{\operatorname{cos}^2 \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \alpha} \Rightarrow \boxed{1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha = \operatorname{cosec}^2 \alpha}$$

Estas fórmulas son válidas para cualquier ángulo α

Ejemplos:

1) Si $\operatorname{cos} x = \frac{-\sqrt{3}}{5}$ y $\pi < x < 3\pi/2$ entonces como $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{cos}^2 x = 1 \rightarrow \operatorname{sen} x = \pm \sqrt{1 - \operatorname{cos}^2 x}$. Como

$x \in \text{III cuadrante}$, su seno es negativo. Luego, $\operatorname{sen} x = -\sqrt{1 - \operatorname{cos}^2 x} = -\sqrt{1 - \left(\frac{-\sqrt{3}}{5}\right)^2} = -\sqrt{1 - \frac{3}{25}} = \frac{-\sqrt{22}}{5}$

2) Si $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{-2}{3}$ y $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ entonces $\operatorname{tg} \alpha = \frac{-3}{2}$ y como $\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \operatorname{sec}^2 \alpha$

$\operatorname{sec} \alpha = \pm \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}$. Como $\alpha \in \text{II cuadrante}$, su coseno es negativo. Luego, su secante también.

$$\operatorname{sec} \alpha = -\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1} = -\sqrt{\left(\frac{-3}{2}\right)^2 + 1} = \frac{-\sqrt{13}}{2} \rightarrow \operatorname{cos} \alpha = \frac{-2}{\sqrt{13}} = \frac{-2\sqrt{13}}{13}$$

$$\text{Como } \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} = \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{cos} \alpha = \frac{-3}{2} \cdot \frac{-2\sqrt{13}}{13} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$$

Actividad resuelta

Usando la relación fundamental de la trigonometría, halla las restantes r.t. directas del ángulo agudo x sabiendo que $\operatorname{cos} x = \frac{1}{2}$

Resolución

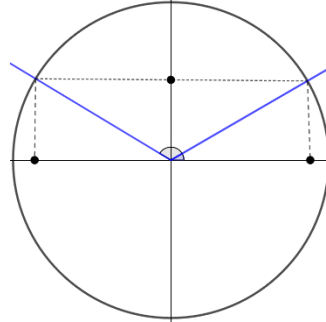
$$\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{cos}^2 x = 1 \rightarrow \operatorname{sen}^2 x = 1 - \operatorname{cos}^2 x \rightarrow \operatorname{sen} x = \sqrt{1 - \operatorname{cos}^2 x} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} \rightarrow \boxed{\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} \rightarrow \frac{2\sqrt{3}}{2} \rightarrow \boxed{\operatorname{tg} x = \sqrt{3}}$$

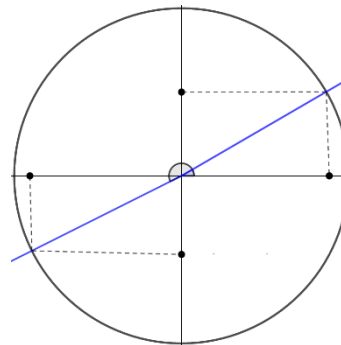
Simplificación de expresiones trigonométricas y demostración de igualdades trigonométricas

Usando las relaciones trigonométricas podemos simplificar expresiones trigonométricas.

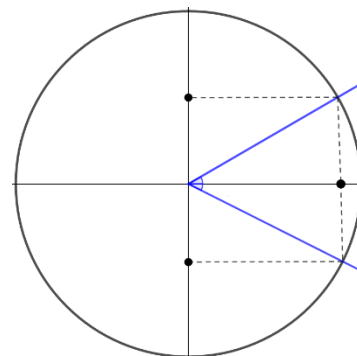
$$\text{Por ejemplo, } \frac{\operatorname{cosec} x}{\cos x} - \cot g x = \frac{1/\operatorname{sen} x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{\operatorname{sen} x \cos x} - \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{1 - \cos^2 x}{\operatorname{sen} x \cos x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x \cos x} = \operatorname{tg} x$$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS POR REDUCCIÓN AL PRIMER CUADRANTECálculo de las r.t. por reducción al primer cuadranteReducción del II cuadrante al I cuadrante

Por ejemplo, para hallar las r.t. de 150° comparamos con $180^\circ - 150^\circ = 30^\circ \Rightarrow$
 $\operatorname{sen} 150^\circ = \operatorname{sen} 30^\circ$
 $\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ$

Reducción del III cuadrante al I cuadrante

Por ejemplo, para hallar las r.t. de 220° comparamos con $220^\circ - 180^\circ = 40^\circ \Rightarrow$
 $\operatorname{sen} 220^\circ = -\operatorname{sen} 40^\circ$
 $\cos 220^\circ = -\cos 40^\circ$

Reducción del IV cuadrante al I cuadrante

Por ejemplo, para hallar las r.t. de -25° comparamos con $25^\circ \Rightarrow$
 $\operatorname{sen} (-25^\circ) = -\operatorname{sen} 25^\circ$
 $\cos (-25^\circ) = \cos 25^\circ$

Actividad resuelta

Sin usar las funciones trigonométricas de la calculadora científica, calcula:

a) $\operatorname{cosec} \frac{4\pi}{3}$

Resolución

$$\frac{4\pi}{3} = 240^\circ \in \text{III cuadrante} \Rightarrow \operatorname{cosec} 240^\circ = \frac{1}{\operatorname{sen} 240^\circ} = \frac{1}{-\operatorname{sen} 60^\circ} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-2}{\sqrt{3}} = \frac{-2\sqrt{3}}{3}$$

b) $\operatorname{cotg}(-210^\circ)$

Resolución

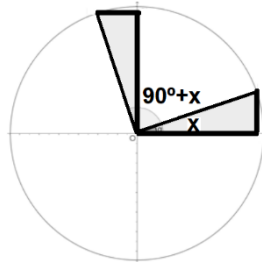
$$-210^\circ \in \text{II cuadrante} \Rightarrow \operatorname{cotg}(-210^\circ) = \frac{\operatorname{cos}(-210^\circ)}{\operatorname{sen}(-210^\circ)} = \frac{-\operatorname{cos} 30^\circ}{\operatorname{sen} 30^\circ} = -\operatorname{cotg} 30^\circ = -\operatorname{tg} 60^\circ = -\sqrt{3}$$

c) $\operatorname{sec}(2700^\circ)$

Resolución

$$2700 = 7 \cdot 360 + 180 \Rightarrow \operatorname{sec} 2700^\circ = \operatorname{sec} 180^\circ = \frac{1}{\operatorname{cos} 180^\circ} = \frac{1}{-1} = -1$$

Relación entre los ángulos x y $90^\circ + x$



$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(90^\circ + x) &= \operatorname{cos} x \\ \operatorname{cos}(90^\circ + x) &= -\operatorname{sen} x \end{aligned}$$

Por ejemplo, para hallar las r.t. de 100° comparamos con $100^\circ - 90^\circ = 10^\circ \Rightarrow$
 $\operatorname{sen} 100^\circ = \operatorname{cos} 10^\circ$
 $\operatorname{cos} 100^\circ = -\operatorname{sen} 10^\circ$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE LA SUMA, RESTA, ÁNGULO DOBLE Y MITAD

Suma: $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \beta + \operatorname{sen} \beta \operatorname{cos} \alpha$
 $\operatorname{cos}(\alpha + \beta) = \operatorname{cos} \alpha \operatorname{cos} \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

Resta: $\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}[\alpha + (-\beta)] \xrightarrow[\operatorname{sen}(-\beta) = -\operatorname{sen} \beta]{\operatorname{cos}(-\beta) = \operatorname{cos} \beta} \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \beta - \operatorname{sen} \beta \operatorname{cos} \alpha$
 $\operatorname{cos}(\alpha - \beta) = \operatorname{cos}[\alpha + (-\beta)] \xrightarrow[\operatorname{sen}(-\beta) = -\operatorname{sen} \beta]{\operatorname{cos}(-\beta) = \operatorname{cos} \beta} \operatorname{cos}(\alpha - \beta) = \operatorname{cos} \alpha \operatorname{cos} \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

Ángulo doble: $\operatorname{sen}(2\alpha) = \operatorname{sen}(\alpha + \alpha) = \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha \Rightarrow \operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha$
 $\operatorname{cos}(2\alpha) = \operatorname{cos}(\alpha + \alpha) = \operatorname{cos} \alpha \operatorname{cos} \alpha - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \alpha \Rightarrow \operatorname{cos}(2\alpha) = \operatorname{cos}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha$

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$1 = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\cos \alpha = \cos(2\frac{\alpha}{2}) = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Rightarrow \boxed{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}}$$

$$\text{Restando: } 1 - \cos \alpha = 2 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Ángulo mitad:

$$1 = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\cos \alpha = \cos(2\frac{\alpha}{2}) = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Rightarrow \boxed{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}}$$

$$\text{Sumando: } 1 + \cos \alpha = 2 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}}$$

Actividad resuelta

Sean x , y dos ángulos tales que $\cos x = \frac{-1}{5}$, $x \in \text{III cuadrante}$ $\text{tg } y = -2$, $90^\circ < y < 180^\circ$

Sin calcular los ángulos y sin usar las funciones trigonométricas de la calculadora científica, calcula:

a) Las restantes r.t. directas de los ángulos x e y

Resolución

$$\sin x = -\sqrt{1 - \cos^2 x} = -\sqrt{1 - \frac{1}{25}} = -\sqrt{\frac{24}{25}} = \frac{-\sqrt{24}}{5} \quad \text{tg } x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-\sqrt{24}/5}{-1/5} = \sqrt{24}$$

$$\sec y = -\sqrt{1 + \text{tg}^2 y} = -\sqrt{1 + 4} = -\sqrt{5} \quad \cos y = \frac{-1}{\sqrt{5}} = \frac{-\sqrt{5}}{5} \quad \sin y = \cos y \cdot \text{tg } y = \frac{-\sqrt{5}}{5} \cdot (-2) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

b) $\text{tg}(x - y)$ **Resolución** $\text{tg}(x - y) = \frac{\text{tg } x - \text{tg } y}{1 + \text{tg } x \text{tg } y} = \frac{\sqrt{24} + 2}{1 + \sqrt{24} \cdot (-2)} = \frac{\sqrt{24} + 2}{1 - 2\sqrt{24}}$

c) $\cos(2y)$ **Resolución** $\cos(2y) = \cos^2 y - \sin^2 y = \frac{1}{5} - \frac{4}{5} = \frac{-3}{5}$

d) $\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ **Resolución** $\sin \frac{x}{2} \xrightarrow{\frac{x}{2} \in \text{II cuadrante}} \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{-1}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{6}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{3}{5}}$

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Son ecuaciones donde la incógnita está bajo alguna razón trigonométrica.

Ecuaciones trigonométricas básicas

Son del tipo $\text{sen } x = m$, $\text{cos } x = m$ ó $\text{tg } x = m$

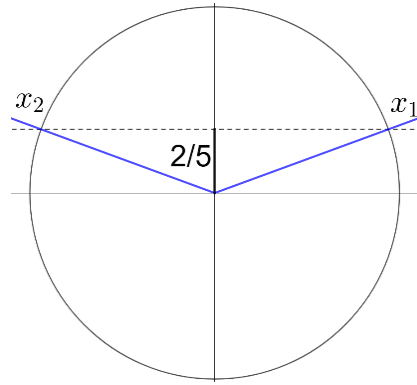
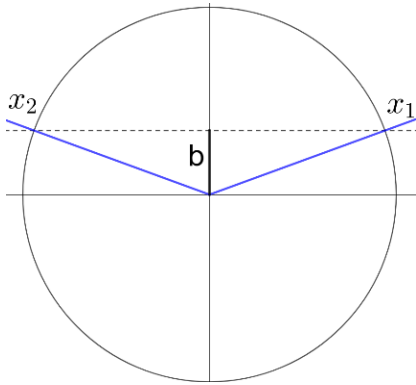
Para resolver este tipo de ecuaciones, hallamos primero los ángulos x_1, x_2 de la primera vuelta o equivalentes que verifican la ecuación.

Las soluciones serán los ángulos que se obtengan al sumarle (o restarle) vueltas completas a dichos

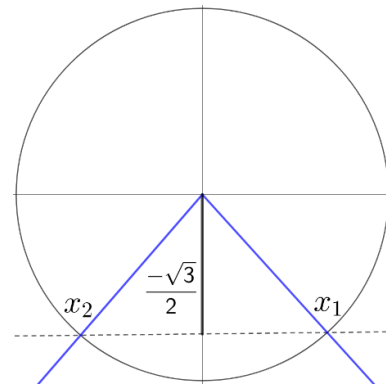
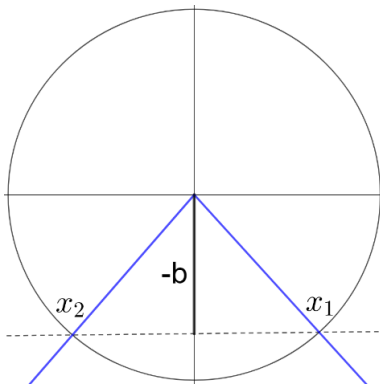
ángulos, es decir $S: \begin{matrix} x = x_1 + 360^\circ k \\ x = x_2 + 360^\circ k' \end{matrix}$, con $k \in \mathbb{Z}$

Casos que se pueden dar:

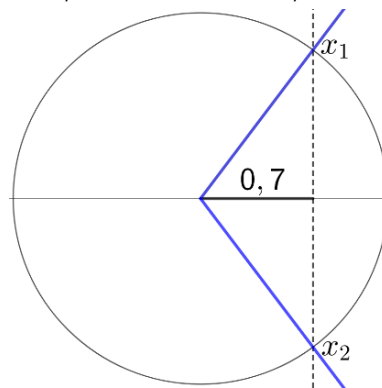
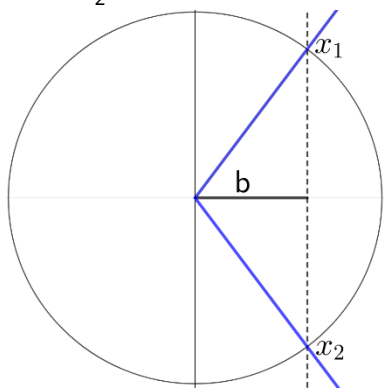
sen x = b $\Rightarrow S: \begin{matrix} x = x_1 + 360^\circ k \\ x = x_2 + 360^\circ k' \end{matrix}$, con $k \in \mathbb{Z}$ Ej: $\text{sen } x = \frac{2}{5} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = \text{arcsen } \frac{2}{5} \cong 23,6^\circ \\ x_2 = 180^\circ - x_1 \cong 156,4^\circ \end{matrix} \Rightarrow S: \begin{matrix} x = 23,6^\circ + 360^\circ k \\ x = 156,4^\circ + 360^\circ k' \end{matrix}$, con $k \in \mathbb{Z}$



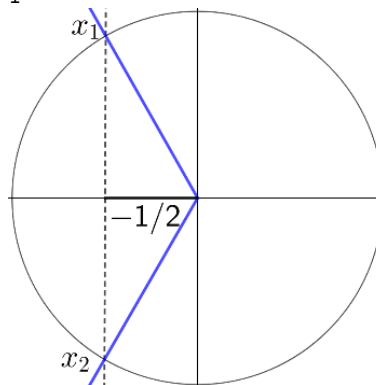
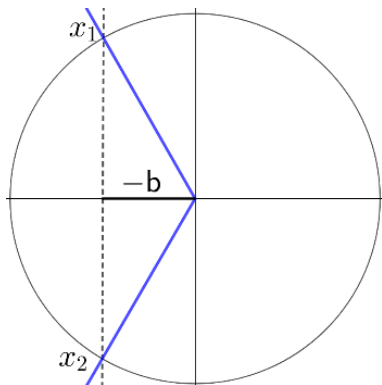
sen x = -b $\Rightarrow S: \begin{matrix} x = x_1 + 360^\circ k \\ x = x_2 + 360^\circ k' \end{matrix}$, con $k \in \mathbb{Z}$ Ej: $\text{sen } x = \frac{-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = \text{arcsen } \frac{-\sqrt{3}}{2} = -60^\circ \\ x_2 = 180^\circ + 60^\circ = 240^\circ \end{matrix} \Rightarrow S: \begin{matrix} x = -60^\circ + 360^\circ k \\ x = 240^\circ + 360^\circ k' \end{matrix}$, con $k \in \mathbb{Z}$



$\cos x = b \Rightarrow S: \begin{matrix} x = x_1 + 360^\circ k \\ x = x_2 + 360^\circ k \end{matrix}, \text{ con } k \in \mathbb{Z}$ Ej: $\cos x = 0,7 \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = \arccos(0,7) \cong 45,6^\circ \\ x_2 = -x_1 \cong -45,6^\circ \end{matrix} \Rightarrow S: \begin{matrix} x = 45,6^\circ + 360^\circ k \\ x = -45,6^\circ + 360^\circ k \end{matrix}, \text{ con } k \in \mathbb{Z}$

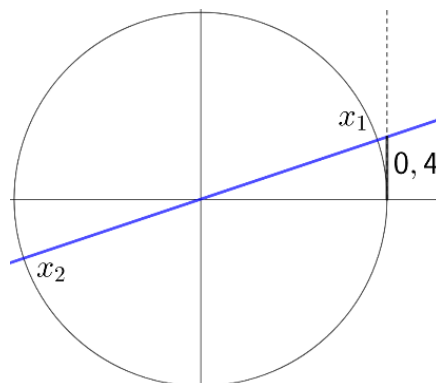
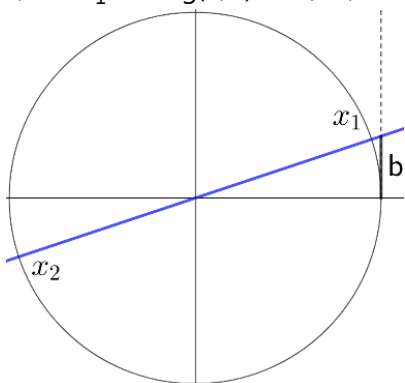


$\cos x = -b \Rightarrow S: \begin{matrix} x = x_1 + 360^\circ k \\ x = x_2 + 360^\circ k \end{matrix}, \text{ con } k \in \mathbb{Z}$ Ej: $\cos x = \frac{-1}{2} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = \arccos\left(\frac{-1}{2}\right) = 120^\circ \\ x_2 = -x_1 = -120^\circ \end{matrix} \Rightarrow S: \begin{matrix} x = 120^\circ + 360^\circ k \\ x = -120^\circ + 360^\circ k \end{matrix}, \text{ con } k \in \mathbb{Z}$



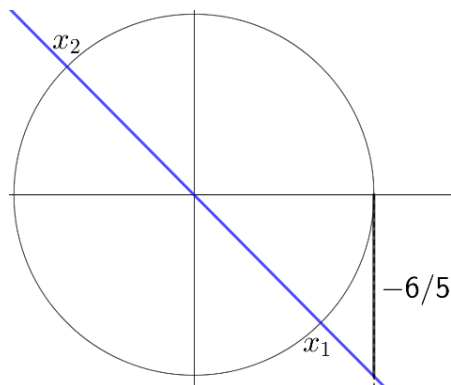
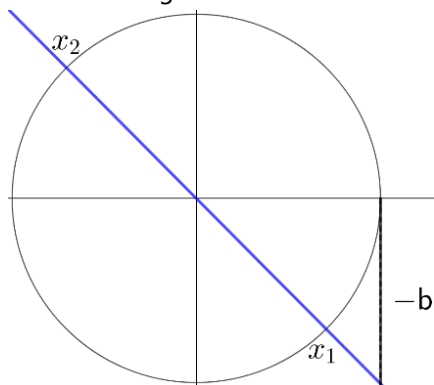
$\text{tg } x = b \Rightarrow$ Como $x_2 = x_1 + 180^\circ$, las soluciones son $S: x = x_1 + 180^\circ k, \text{ con } k \in \mathbb{Z}$

Ej: $\text{tg } x = 0,4 \Rightarrow x_1 = \text{arctg}(0,4) \cong 21,8^\circ, S: x = 21,8^\circ + 180^\circ k, \text{ con } k \in \mathbb{Z}$

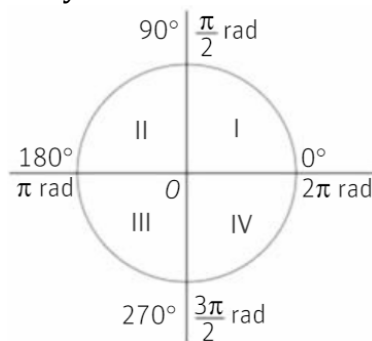


$\text{tg } x = -b \Rightarrow$ Como $x_2 = x_1 + 180^\circ$, las soluciones son $S: x = x_1 + 180^\circ k, \text{ con } k \in \mathbb{Z}$

Ej: $\text{tg } x = \frac{-6}{5} \Rightarrow x_1 = \text{arctg}\frac{-6}{5} \cong -50,2^\circ, S: x = -50,2^\circ + 180^\circ k, \text{ con } k \in \mathbb{Z}$



Teniendo en cuenta las r.t. de 0° , 90° , 180° y -90°



obtenemos fácilmente las soluciones de las siguientes ecuaciones:

$$\text{sen } x = 0 \Leftrightarrow x = 0^\circ + 180^\circ k = 180^\circ k$$

$$\text{cos } x = 0 \Leftrightarrow x = 90^\circ + 180^\circ k$$

$$\text{sen } x = 1 \Leftrightarrow x = 90^\circ + 360^\circ k, \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{cos } x = 1 \Leftrightarrow x = 0^\circ + 360^\circ k = 360^\circ k, \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{sen } x = -1 \Leftrightarrow x = -90^\circ + 360^\circ k$$

$$\text{cos } x = -1 \Leftrightarrow x = 180^\circ + 360^\circ k$$

Si $m < -1$ ó $m > 1$ las ecuaciones $\text{sen } x = m$ y $\text{cos } x = m$ no tienen solución pues los valores de $\text{sen } x$ y $\text{cos } x$ siempre están entre -1 y 1 .

Otras ecuaciones trigonométricas

Para resolver otros tipos de ecuaciones trigonométricas usaremos las fórmulas trigonométricas y resultados conocidos para conseguir llegar a una ecuación trigonométrica básica.

Ejemplos:

$$1) 2\cos^2 x + 3\text{sen } x = 3 \Rightarrow 2(1 - \text{sen}^2 x) + 3\text{sen } x - 3 = 0 \Rightarrow -2\text{sen}^2 x + 3\text{sen } x - 1 = 0 \quad (t = \text{sen } x)$$

$$-2t^2 + 3t - 1 = 0 \Rightarrow t = 1/2, \quad t = 1. \text{ Deshaciendo el cambio:}$$

$$\text{sen } x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = \arcsen\left(\frac{1}{2}\right) = 30^\circ \\ x_2 = 180^\circ - x_1 = 150^\circ \end{matrix} \Rightarrow S: \begin{matrix} x = 30^\circ + 360^\circ k \\ x = 150^\circ + 360^\circ k \end{matrix}, \text{ con } k \in \mathbb{Z} \quad \text{sen } x = 1 \Leftrightarrow x = 90^\circ + 360^\circ k, \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

$$2) \text{cos } x - 2\text{sen } x = 2 \Rightarrow \sqrt{1 - \text{sen}^2 x} - 2\text{sen } x = 2 \quad (t = \text{sen } x) \Rightarrow \sqrt{1 - t^2} - 2t = 2 \Rightarrow \sqrt{1 - t^2} = 2t + 2$$

Elevando al cuadrado: $1 - t^2 = 4t^2 + 8t + 4 \Rightarrow 5t^2 + 8t + 3 = 0 \Rightarrow t = -3/5, \quad t = -1.$

Deshaciendo el cambio: $\text{sen } x = \frac{-3}{5} \Rightarrow \text{cos } x - 2 \cdot \frac{-3}{5} = 2 \Rightarrow \text{cos } x = \frac{4}{5} \Rightarrow x \in \text{IV cuadr} \Rightarrow S: x = -36,87^\circ + 360^\circ k, \text{ con } k \in \mathbb{Z}$

$$\text{sen } x = -1 \Rightarrow \text{cos } x - 2 \cdot (-1) = 2 \Rightarrow \text{cos } x = 0 \Leftrightarrow x = -90^\circ + 360^\circ k$$

$$3) \text{sen}^2 x + \text{cos}(2x) = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x - \text{sen}^2 x = 1 \Rightarrow \text{cos}^2 x = 1 \Rightarrow \text{cos } x = \pm 1$$

$$\text{cos } x = 1 \Leftrightarrow x = 0^\circ + 360^\circ k = 360^\circ k, \quad \text{cos } x = -1 \Leftrightarrow x = 180^\circ + 360^\circ k, \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Luego, las soluciones son: $S: x = 180^\circ k, \text{ con } k \in \mathbb{Z}$

$$4) 6\text{sen}^3 x - \text{sen}(2x) \cos x = 0 \Rightarrow 6\text{sen}^3 x - (2\text{sen} x \cos x) \cos x = 0$$

$$2\text{sen} x [3\text{sen}^2 x - \cos^2 x] = 0 \Rightarrow 2\text{sen} x [3\text{sen}^2 x - (1 - \text{sen}^2 x)] = 0 \Rightarrow 2\text{sen} x (4\text{sen}^2 x - 1) = 0$$

$$2\text{sen} x = 0 \Rightarrow \text{sen} x = 0 \Rightarrow x = 180^\circ k, \text{ con } k \in \mathbb{Z} \quad \text{ó} \quad 4\text{sen}^2 x - 1 = 0 \Rightarrow \text{sen} x = \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \pm \frac{1}{2}$$

$$\text{sen} x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = \arcsen\left(\frac{1}{2}\right) = 30^\circ \\ x_2 = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ \end{matrix} \Rightarrow S: \begin{matrix} x = 30^\circ + 360^\circ k \\ x = 150^\circ + 360^\circ k \end{matrix}, \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{sen} x = \frac{-1}{2} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = \arcsen\left(\frac{-1}{2}\right) = -30^\circ \\ x_2 = 180^\circ + 30^\circ = 210^\circ \end{matrix} \Rightarrow S: \begin{matrix} x = -30^\circ + 360^\circ k \\ x = 210^\circ + 360^\circ k \end{matrix}, \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

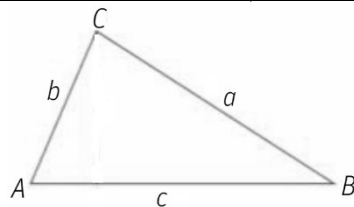
$$5) \text{sen}^2 x + \cos x = \frac{5}{4}$$

$$1 - \cos^2 x + \cos x = \frac{5}{4} \xrightarrow{\cos x = t} 1 - t^2 + t = \frac{5}{4} \xrightarrow{\cdot 4} 4 - 4t^2 + 4t = 5 \Rightarrow 4t^2 - 4t + 1 = 0 \rightarrow t = \frac{1}{2}$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = \arccos\frac{1}{2} = 60^\circ \\ x_2 = -x_1 = -60^\circ \end{matrix} \Rightarrow S: \begin{matrix} x = 60^\circ + 360^\circ k \\ x = -60^\circ + 360^\circ k \end{matrix}, \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

TEOREMAS DEL SENO, COSENO Y TANGENTE

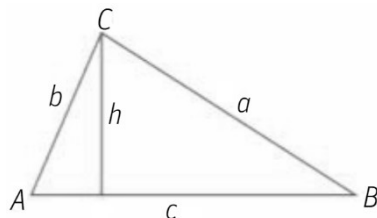
Dado un triángulo cualquiera ABC



se cumple:

Teorema del seno: $\frac{a}{\text{sen} A} = \frac{b}{\text{sen} B} = \frac{c}{\text{sen} C}$

Demostración



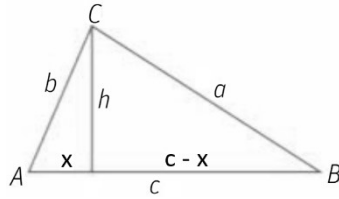
$$\begin{aligned} \text{sen} A &= \frac{h}{b} \rightarrow h = b \text{sen} A \\ \text{sen} B &= \frac{h}{a} \rightarrow h = a \text{sen} B \end{aligned} \Rightarrow a \text{sen} B = b \text{sen} A \Rightarrow \frac{a}{\text{sen} A} = \frac{b}{\text{sen} B} .$$

De forma análoga se demuestran las otras igualdades.

Teorema del coseno:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{aligned}$$

Demostración:



$$\cos A = \frac{x}{b} \rightarrow x = b \cos A$$

Por otra parte, aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo de la izquierda:

$$b^2 = h^2 + x^2 \rightarrow h^2 = b^2 - x^2$$

Y ahora aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo de la derecha:

$$a^2 = h^2 + (c-x)^2 = (b^2 - x^2) + c^2 + x^2 - 2cx = b^2 + c^2 - 2cx = b^2 + c^2 - 2c(b \cos A) = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

De forma análoga se demuestran las otras igualdades.

Teorema de la tangente

La razón entre la suma de dos lados (a, b o c) de un triángulo y su resta es igual a la razón entre la tangente de la media de los dos ángulos opuestos a dichos lados y la tangente de la mitad de la diferencia de éstos.

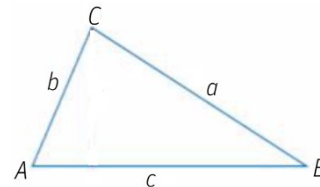
Teorema de la tangente:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}} ; \frac{a+c}{a-c} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A+C}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A-C}{2}} ; \frac{b+c}{b-c} = \frac{\operatorname{tg} \frac{B+C}{2}}{\operatorname{tg} \frac{B-C}{2}}$$

El uso de los teoremas del seno, del coseno y de la tangente nos permite resolver triángulos y, por tanto, muchos problemas donde intervienen dichos triángulos.

Ejemplos:

1) Resuelve el triángulo de lados $a = 7$ cm, $b = 10$ cm y $c = 6$ cm

**Resolución**

Por el teorema del coseno

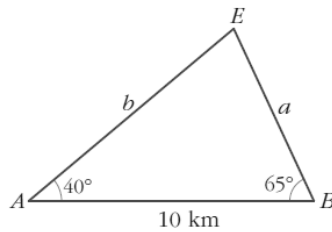
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A \Rightarrow 2bc \cdot \cos A = b^2 + c^2 - a^2 \Rightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{10^2 + 6^2 - 7^2}{2 \cdot 10 \cdot 6} = 0,725 \Rightarrow A = \arccos(0,725) \cong \boxed{43,5^\circ}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B \Rightarrow \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{7^2 + 6^2 - 10^2}{2 \cdot 7 \cdot 6} \cong -0,179 \Rightarrow B = \arccos(-0,179) \cong \boxed{100,3^\circ}$$

Como la suma de los tres ángulos de un triángulo vale 180° , $C = 180^\circ - A - B \approx \boxed{36,2^\circ}$

2) Para localizar una emisora clandestina, dos receptores, A y B, que distan entre sí 10 km, orientan sus antenas hacia el punto donde está la emisora. Estas direcciones forman con AB ángulos de 40° y 65° . ¿A qué distancia de A y B se encuentra la emisora?

Resolución



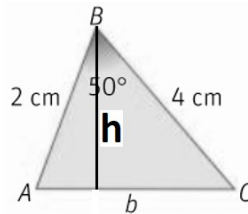
Como la suma de los tres ángulos de un triángulo vale 180° , $E = 180^\circ - A - B = 75^\circ$

Por el teorema del seno $\frac{a}{\text{sen } 40^\circ} = \frac{b}{\text{sen } 65^\circ} = \frac{10}{\text{sen } 75^\circ} \Rightarrow$

$$a = \frac{10 \text{ sen } 40^\circ}{\text{sen } 75^\circ} \cong \boxed{6,65 \text{ km}}$$

$$b = \frac{10 \text{ sen } 65^\circ}{\text{sen } 75^\circ} \cong \boxed{9,38 \text{ km}}$$

3) Resuelve este triángulo y calcula su área



Resolución

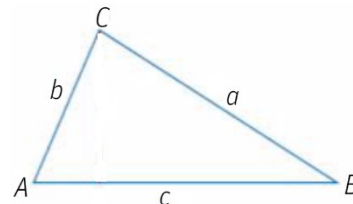
Por el teorema del coseno: $b^2 = 2^2 + 4^2 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \cos 50^\circ \cong 9,715 \Rightarrow \boxed{b \cong 3,117}$

Por el teorema del seno: $\frac{4}{\text{sen } A} = \frac{3,12}{\text{sen } 50^\circ} \Rightarrow \text{sen } A = \frac{4 \text{ sen } 50^\circ}{3,117} \cong 0,983$ A debe ser obtuso \rightarrow $\boxed{A \cong 100,56^\circ}$

Como los tres ángulos suman $180^\circ \Rightarrow C = 180^\circ - 50^\circ - 100,56^\circ \Rightarrow \boxed{C \cong 29,44^\circ}$

$\text{sen } C = \frac{h}{4} \Rightarrow h = 4 \cdot \text{sen } C = 4 \cdot \text{sen } 29,44^\circ \cong 1,966 \Rightarrow A(\text{triángulo}) = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{3,117 \cdot 1,966}{2} \Rightarrow \boxed{A(\text{triángulo}) \cong 3,06 \text{ cm}^2}$

4) Resuelve el triángulo ABC siendo $a = 3 \text{ m}$, $b = 4 \text{ m}$ y $A = 30^\circ$



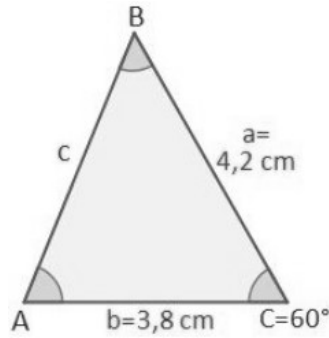
Resolución

Por el teorema del seno: $\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} \Rightarrow \frac{3}{\text{sen } 30^\circ} = \frac{4}{\text{sen } B} \Rightarrow \text{sen } B = \frac{4 \text{ sen } 30^\circ}{3} = \frac{2}{3} \rightarrow \boxed{B \cong 41,8^\circ}$

Como los tres ángulos suman $180^\circ \Rightarrow C = 180^\circ - 30^\circ - 41,8^\circ \Rightarrow \boxed{C \cong 108,2^\circ}$

Por el teorema del coseno: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos 108,2^\circ \cong 32,496 \Rightarrow \boxed{c \cong 32,496}$

5) Sea un triángulo con dos lados conocidos ($a = 4,2$ cm y $b = 3,8$ cm) y un ángulo conocido ($C = 60^\circ$). Se desea hallar A , B y c .

Resolución

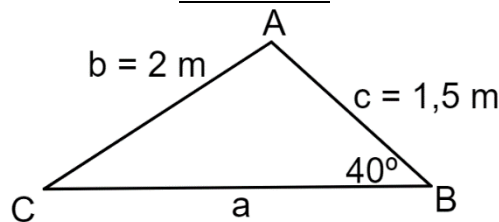
Como los ángulos suman 180° , $A + B + C = 180^\circ \rightarrow A + B = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}} \Rightarrow \frac{4,2+3,8}{4,2-3,8} = \frac{\operatorname{tg} 60^\circ}{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}} \Rightarrow \frac{8}{0,4} = \frac{\sqrt{3}}{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}} \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{A-B}{2} = \frac{0,4\sqrt{3}}{8} \cong 0,0866 \Rightarrow \frac{A-B}{2} \cong 4,95^\circ$$

Luego, $A - B = 9,9^\circ$. Resolviendo el sistema, $\begin{cases} A+B=120 \\ A-B=9,9 \end{cases}$ obtenemos, $A = 64,95^\circ$ $B = 55,05^\circ$

Por el teorema del seno: $\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} \Rightarrow \frac{4,2}{\operatorname{sen} 64,95^\circ} = \frac{c}{\operatorname{sen} 60^\circ} \Rightarrow c = \frac{4,2 \operatorname{sen} 60^\circ}{\operatorname{sen} 64,95^\circ} \cong 4,01$ cm

6) Un carpintero quiere construir una mesa triangular de tal forma que un lado mida 2 m otro 1,5 m y el ángulo opuesto al primero debe ser de 40° . Halla el resto de las medidas para que el carpintero pueda construirlo.

Resolución

$$\frac{2}{\operatorname{sen} 40^\circ} = \frac{1,5}{\operatorname{sen} C} \Rightarrow \operatorname{sen} C = \frac{1,5 \operatorname{sen} 40^\circ}{2} \cong 0,482 \Rightarrow C \cong 28,8^\circ. \text{ Luego, } A = 180^\circ - 40^\circ - 28,8^\circ = 111,2^\circ$$

Por el teorema del coseno: $a^2 = 2^2 + 1,5^2 - 2 \cdot 2 \cdot 1,5 \cdot \cos 111,2^\circ \cong 8,42 \Rightarrow a \cong 2,9$ m