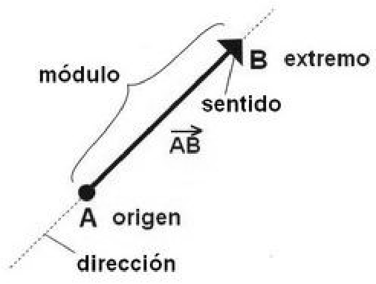
VECTORES EN EL ESPACIO

Vector fijo

Un vector fijo $\overrightarrow{AB}$ es un segmento orientado con origen en el punto A y extremo en el punto B

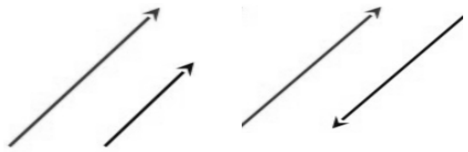


Todo vector fijo $\overrightarrow{AB}$ tiene tres elementos:

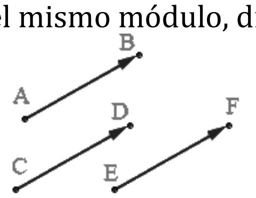
Módulo: Es la longitud del segmento $\overline{AB}$. El módulo del vector $\overrightarrow{AB}$ se representa por $|\overrightarrow{AB}|$.
Los vectores de módulo 1 se llaman unitarios.

Sentido: Es el que va del punto A al punto B. Viene determinado por la punta de flecha. En una dirección siempre hay dos sentidos: el que va de A a B y el que va de B a A.

Dirección: Es la que determina la recta que pasa por A y B.
Cuando dos vectores tienen la misma dirección decimos que son paralelos.
Dos vectores paralelos pueden tener el mismo sentido o distinto sentido:



Dos o más vectores son equipolentes entre sí si tienen el mismo módulo, dirección y sentido

Por ejemplo, los vectores $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ y $\overline{EF}$  son equipolentes

Vector libre

Un vector libre es un conjunto de vectores fijos equipolentes entre sí. Cada uno de estos vectores se llama representante del vector libre.

Para representar un vector libre se toma cualquiera de sus representantes.

Los vectores libres se suelen expresar con letras minúsculas

De ahora en adelante cuando hablemos de vector sin especificar el origen y el extremo nos estamos refiriendo a un vector libre.

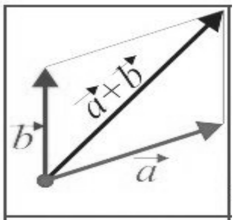
El conjunto de todos los vectores del espacio se llama espacio vectorial y se suele representar por V^3.

Operaciones con vectores de forma gráfica

Para sumar dos vectores se puede hacer de dos formas:

- Regla del paralelogramo: Se toman dos representantes, $\vec{a}$ y $\vec{b}$ con el mismo origen

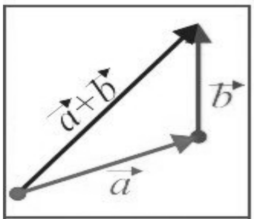
Por el extremo de $\vec{a}$ se traza una paralela al vector $\vec{b}$ y por el extremo de $\vec{b}$ se traza una paralela al vector $\vec{a}$ que se cortarán en un punto. El vector $\vec{a} + \vec{b}$ es el vector que va desde el origen común de ambos vectores a dicho punto de corte



Regla del paralelogramo

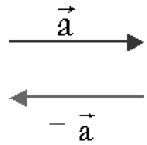
- Regla del triángulo: Se dibuja un representante del vector $\vec{b}$ cuyo origen sea el extremo de $\vec{a}$

El vector $\vec{a} + \vec{b}$ es el vector que va desde el origen de $\vec{a}$ al extremo de $\vec{b}$



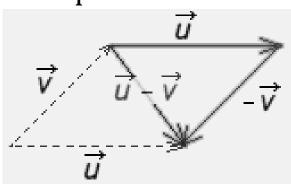
Regla del triángulo

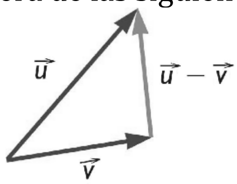
Dos vectores son opuestos si son paralelos con el mismo módulo, pero sentidos opuestos

Por ejemplo, los vectores $\vec{a}$ y $-\vec{a}$  son opuestos

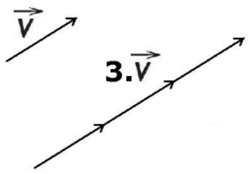
Para restar dos vectores se le suma al primero el opuesto del segundo: $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$

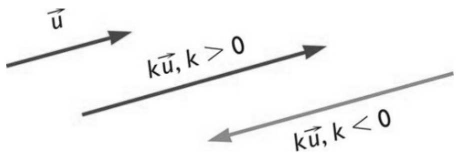
Gráficamente se puede hacer de cualquiera de las siguientes formas:

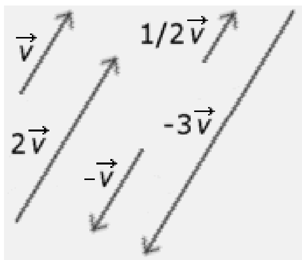




Para multiplicar un número por un vector: Dado un vector $\vec{v}$ y un escalar $k \in R$, el vector $k\,\vec{v}$ es un vector paralelo a $\vec{v}$ con el mismo sentido que $\vec{v}$, si $k > 0$ y con sentido opuesto, si $k < 0$ y de módulo $|k|\,|\vec{v}|$







Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son paralelos o linealmente dependientes, $\vec{u} \,//\, \vec{v}$, si $\vec{u} = \lambda\,\vec{v}$

Propiedades de las operaciones con vectores

Si $\alpha, \beta \in R$ y $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ vectores, se cumplen las siguientes propiedades:

1) Conmutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

2) Asociativa: $\left(\vec{u} + \vec{v}\right) + \vec{w} = \vec{u} + \left(\vec{v} + \vec{w}\right)$

3) Elemento neutro: $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$

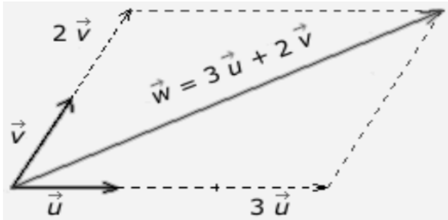
4) Elemento opuesto: $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

5) Distributivas: $\alpha\left(\vec{u} + \vec{v}\right) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$ $\quad (\alpha+\beta)\vec{u} = \alpha\,\vec{u} + \beta\vec{v}$ $\quad \alpha\left(\beta\vec{u}\right) = (\alpha\beta)\,\vec{u}$

Combinación lineal de vectores

Dados tres vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, decimos $\vec{w}$ es combinación lineal (c.l.) de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ si $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$, con $a, b \in R$, siendo a y b números reales no todos nulos

Por ejemplo, el vector $\vec{w} = 3\vec{u} + 2\vec{v}$ es c.l. de $\vec{u}$ y $\vec{v}$

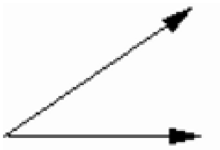


Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ paralelos son siempre l.d.

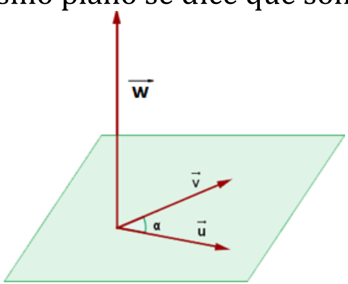
En general, dado un conjunto de n vectores $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$, ..., $\vec{u_n}$ una combinación lineal (c.l.) de ellos es un vector $\vec{x} = a_1\vec{u_1} + a_2\vec{u_2} + ... + a_n\vec{u_n}$, siendo $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ números reales no todos nulos.

Dependencia lineal. Base del espacio vectorial, componentes

- Dos vectores no nulos $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son l.d. si no son paralelos. Es decir, $\exists\, k \in R$ tal que $\vec{u} = k\,\vec{v}$
En otro caso, se dice que son l.i.

Por ejemplo, los vectores  son l.i.

- Tres o más vectores no nulos son l.d. cuando al menos uno de ellos se puede poner como c.l. de los otros.
Esto ocurre cuando los vectores están en el mismo plano.
Cuando tres vectores no están en el mismo plano se dice que son l.i.

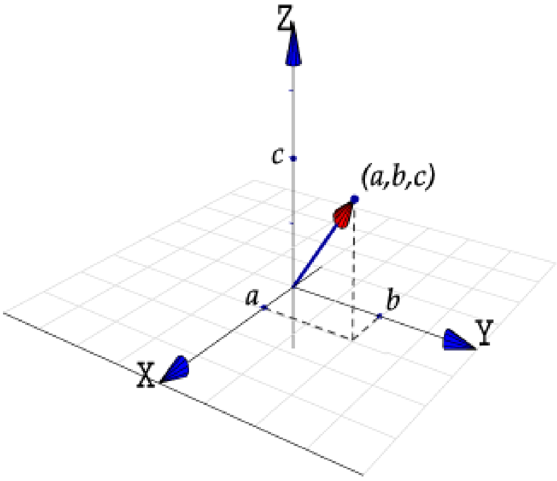
Por ejemplo, los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$  son l.i.

Se puede demostrar que más de tres vectores son siempre l.d.
Una base de V^3 es un conjunto de tres vectores l.i. , es decir tres vectores no nulos y no coplanarios

Si $B = \left\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\right\}$ es una base de V^3 y $\vec{v}$ es cualquier vector entonces sabemos que $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$, $\vec{u_3}$ y $\vec{v}$ son l.d. por tanto $\vec{v}$ se puede expresar como combinación lineal de los vectores de la base:

$\vec{v} = a\vec{u_1} + b\vec{u_2} + c\vec{u_3}$

Se puede demostrar que la expresión de $\vec{v}$ como c.l. de los vectores de la base es única.



Los terna de números (a, b, c) se llaman <u>componentes</u> del vector $\vec{v}$ en la base B y se escribe así:

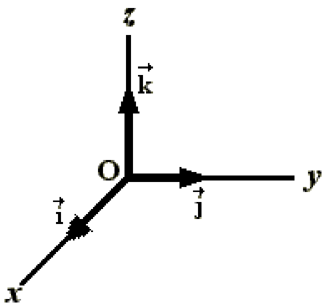
$$\vec{v} = (a, b, c)$$

De esta forma a cada vector de V^3 le corresponde una terna de números de R^3 $\quad \begin{array}{l} V^3 \to R^3 \\ \vec{v} \mapsto (a,b,c) \end{array}$

Por ejemplo, si $B = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\}$ es una base de V^3 y nos dan el vector $\vec{v} = 5\vec{u_1} - 3\vec{u_2} + \vec{u_3}$, las componentes de $\vec{v}$ en la base B son (5, – 3, 1)

Observa que las componentes del vector nulo son $\vec{0} = (0,0,0)$

La <u>base canónica</u> está formada por los vectores unitarios en la dirección de los ejes de coordenadas y es $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, donde $\vec{i} = (1,0,0)$ $\vec{j} = (0,1,0)$ y $\vec{k} = (0,0,1)$



Observa que cualquier vector $\vec{v} = (a, b, c) = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$

<u>Dependencia lineal de vectores y operaciones</u>

Sean $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ vectores del espacio

$B = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ es base de $V^3 \leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ son l.i. $\leftrightarrow$ rg($\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$) = 3 $\leftrightarrow \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \neq 0$

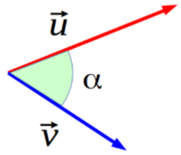
Sean los vectores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y k ∈ R un escalar. Entonces

$\boxed{\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1,\ u_2 + v_2,\ u_3 + v_3)}$ $\boxed{\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1,\ u_2 - v_2,\ u_3 - v_3)}$ $\boxed{k\,\vec{u} = (k\,u_1, k\,u_2, k\,u_3)}$

PRODUCTO ESCALAR DE VECTORES

Definición de producto escalar

Dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$,



el producto escalar de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se puede hallar con la fórmula $\boxed{\vec{u}\,.\,\vec{v} = |\vec{u}|\,.\,|\vec{v}|\,.\cos\alpha}$, siendo α el ángulo que va de $\vec{u}$ a $\vec{v}$. Observa:

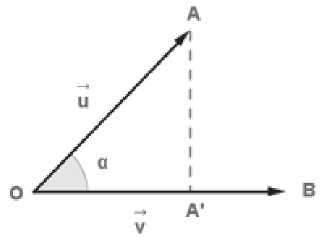
1) Si α es agudo $\Rightarrow \cos\alpha > 0 \Rightarrow \vec{u}\,.\,\vec{v} > 0$ 2) Si α es obtuso $\Rightarrow \cos\alpha < 0 \Rightarrow \vec{u}\,.\,\vec{v} < 0$

Por ejemplo, si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores que miden 3 y 4, respectivamente y forman un ángulo de 60º entonces su producto escalar es $\vec{u}\,.\,\vec{v} = |\vec{u}|\,.\,|\vec{v}|\,.\cos\alpha = 3\,.\,4\,.\cos 60^{o} = 3\,.\,4\,.\,\frac{1}{2} = 6$

Recuerda las r.t de los ángulos más usados

	30º	45º	60º	0º	90º	180º
sen	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	1	0
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	1	0	-1

Interpretación geométrica del producto escalar



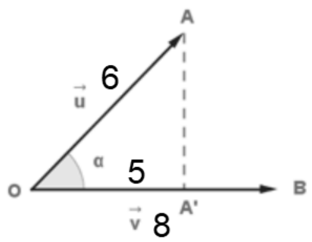
$\overrightarrow{OA'}$ es el vector proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$

Observa siempre que α sea un ángulo agudo: $\cos\alpha = \dfrac{|\overrightarrow{OA'}|}{|\vec{u}|} \Rightarrow |\vec{u}|.\cos\alpha = |\overrightarrow{OA'}|$.

Luego, como $\vec{u}\,.\,\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos\alpha$ entonces $\boxed{\vec{u}\,.\,\vec{v} = |\vec{v}|.|\overrightarrow{OA'}|}$

Interpretación: El producto escalar de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es igual al módulo de $\vec{v}$ por la medida de la proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$

Ejemplo:



$\vec{u}\,.\,\vec{v} = |\vec{v}|.|\overrightarrow{OA'}| = 8.5 = 40$

Ángulo entre dos vectores. Vectores ortogonales

Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores no nulos se puede despejar de la fórmula anterior el coseno:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\,.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}\text{. Por tanto, } \boxed{\alpha = \arccos\left(\frac{\vec{u}\,.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}\right)}$$

Recuerda que arcos (k) = ángulo cuyo coseno es k y se puede hallar con la calculadora científica.
Por ejemplo, arcos (0,5) se calcularía así: SHIFT cos 0.5 = . Nos da 60º

Por ejemplo, si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores cuyo producto escalar es 6 y que miden $\sqrt{3}$ y 4, respectivamente entonces el ángulo que forman es $\alpha = \arccos\left(\frac{6}{\sqrt{3}\,.\,4}\right) = \arccos\left(\frac{6\,.\sqrt{3}}{\sqrt{3}\,.\,4\,.\,\sqrt{3}}\right) = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 30^\circ$

$$\text{Si } \vec{u}\perp\vec{v} \Rightarrow \vec{u}\,.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos 90^\circ = |\vec{u}|.|\vec{v}|.0 = 0$$

$$\text{Si } \vec{u}\,.\vec{v} = 0 \Rightarrow |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos\alpha = 0 \Rightarrow \cos\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 90^\circ \Rightarrow \vec{u}\perp\vec{v} \quad .$$

Por tanto, si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores no nulos, $\boxed{\vec{u}\perp\vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\,.\vec{v} = 0}$

En este caso, se dice que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales

Observa que un vector ortogonal con $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ es $\vec{u'} = (-u_2, u_1, 0)$, porque $\vec{u}\,.\vec{u'} = -u_1u_2 + u_1u_2 + 0 = 0$. Por ejemplo, un vector ortogonal con $\vec{u} = (2, 5, -1)$ es $\vec{u'} = (-5, 2, 0)$

Propiedades del producto escalar

Si $\lambda \in R$ y $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ vectores, se cumplen las siguientes propiedades:

1) Conmutativa: $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \vec{v}\,.\,\vec{u}$
2) $\vec{u}\,.\,\vec{0} = 0$
3) Pseudoasociativa: $(\lambda\vec{u}).\vec{v} = \vec{u}.(\lambda\vec{v}) = \lambda(\vec{u}.\vec{v})$
4) Distributiva: $\vec{u}\,.\,(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}\,.\vec{v} + \vec{u}\,.\vec{w}$

Módulo de un vector

$$\vec{u}\,.\vec{u} = |\vec{u}|.|\vec{u}|.\cos 0^\circ = |\vec{u}|^2.1 = |\vec{u}|^2\text{. Luego, } \boxed{|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u}\,.\vec{u}}}$$

Observa que $|k.\vec{u}| = \sqrt{k\vec{u}\,.k\vec{u}} = \sqrt{k^2\vec{u}\,.\vec{u}} = k\sqrt{\vec{u}\,.\vec{u}} = k|\vec{u}| \Rightarrow \boxed{|k.\vec{u}| = k|\vec{u}|}$

Normalización de vectores

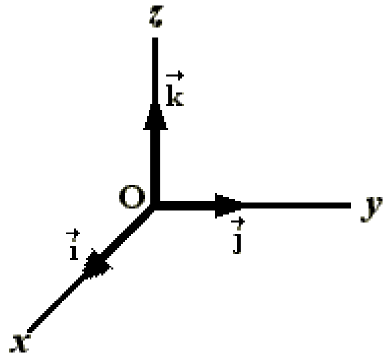
Normalizar un vector es calcular otro vector paralelo y unitario.

Observa que dado un vector no nulo $\vec{u}$ los vectores dados por la fórmula $\boxed{\vec{u'} = \pm\frac{1}{|\vec{u}|}.\vec{u}}$ son paralelos a $\vec{u}$ (pues son de la forma $k.\vec{u}$) y son unitarios porque $|\vec{u'}| = \frac{1}{|\vec{u}|}.|\vec{u}| = 1$

Base ortonormal del espacio

Una base del espacio vectorial V^3 es ortonormal si sus vectores son unitarios y ortogonales dos a dos

Observa, que la base canónica $B = \left\{ \vec{i}\,,\ \vec{j}\,,\ \vec{k} \right\}$ es ortonormal



En una base ortonormal, se llaman <u>cosenos directores</u> del vector $\vec{u}$ a los cosenos de los ángulos que forma el vector $\vec{u}$ con los vectores de la base.

Expresión analítica del producto escalar de vectores y del módulo

Producto escalar

$$\text{Sean } \begin{cases} \vec{u} = (u_1, u_2, u_3) = u_1\,\vec{i} + u_2\,\vec{j} + u_3\,\vec{k} \\ \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) = v_1\,\vec{i} + v_2\,\vec{j} + v_3\,\vec{k} \end{cases}$$

$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = \left(u_1\,\vec{i} + u_2\,\vec{j} + u_3\,\vec{k}\right)\left(v_1\,\vec{i} + v_2\,\vec{j} + v_3\,\vec{k}\right) = u_1v_1 \overbrace{\vec{i}\,.\,\vec{i}}^{\text{vale } |\vec{i}|^2 = 1} + u_1v_2 \overbrace{\vec{i}\,.\,\vec{j}}^{\text{vale } 0} + u_1v_3 \overbrace{\vec{i}\,.\,\vec{k}}^{\text{vale } 0} +$$

$$+ u_2v_1 \overbrace{\vec{j}\,.\,\vec{i}}^{\text{vale } 0} + u_2v_2 \overbrace{\vec{j}\,.\,\vec{j}}^{\text{vale } |\vec{j}|^2 = 1} + u_2v_3 \overbrace{\vec{j}\,.\,\vec{k}}^{\text{vale } 0} + u_3v_1 \overbrace{\vec{k}\,.\,\vec{i}}^{\text{vale } 0} + u_3v_2 \overbrace{\vec{k}\,.\,\vec{j}}^{\text{vale } 0} + u_3v_3 \overbrace{\vec{k}\,.\,\vec{k}}^{\text{vale } |\vec{k}|^2 = 1} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

Por tanto, $\boxed{\vec{u}\,.\,\vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3}$

Módulo

Sea $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$. Entonces, $\left|\vec{u}\right| = \sqrt{\vec{u}\,.\,\vec{u}} = \sqrt{u_1.u_1 + u_2.u_2 + u_3.u_3} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$

Por tanto, $\boxed{\left|\vec{u}\right| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}}$

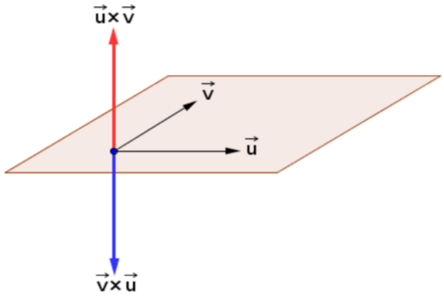
PRODUCTO VECTORIAL DE VECTORES

Definición

El producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es otro vector que se representa por $\vec{u} \times \vec{v}$ perpendicular a ambos es decir $(\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{u}$ y $(\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{v}$ y cuyo módulo es

$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$ sen α, siendo α el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$

Esta expresión nos serviría también para hallar el ángulo entre los vectores



Si $(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) < 180^\circ$ entonces $\vec{u} \times \vec{v}$ tiene sentido hacia arriba y si $(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) > 180^\circ$ entonces $\vec{u} \times \vec{v}$ tiene sentido hacia abajo

Se puede demostrar que si $\begin{cases} \vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \\ \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \end{cases}$ entonces $\boxed{\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}}$

Propiedades del producto vectorial

Si $\lambda \in R$ y $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ vectores, se cumplen las siguientes propiedades:

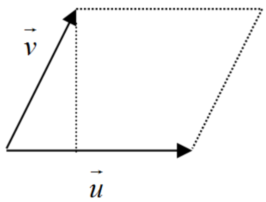
1) Anticonmutativa: $\vec{v} \times \vec{u} = -(\vec{u} \times \vec{v})$ 2) $\vec{u} \times \vec{0} = \vec{0}$ 3) $\vec{u} \times (\lambda \vec{v}) = \lambda (\vec{u} \times \vec{v})$

4) Distributivas: $\begin{cases} \vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w} \\ (\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w} \end{cases}$ 5) No asociativa: $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} \neq \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$

6) Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son paralelos, entonces $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$, como consecuencia $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$

7) Si $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ es la base canónica, entonces $\begin{cases} \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} \\ \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \\ \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} \\ \vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0} \end{cases}$

Aplicaciones geométricas



Área del paralelogramo $= |\vec{u} \times \vec{v}|$ Área del triángulo $= \dfrac{|\vec{u} \times \vec{v}|}{2}$

PRODUCTO MIXTO DE VECTORES

Definición

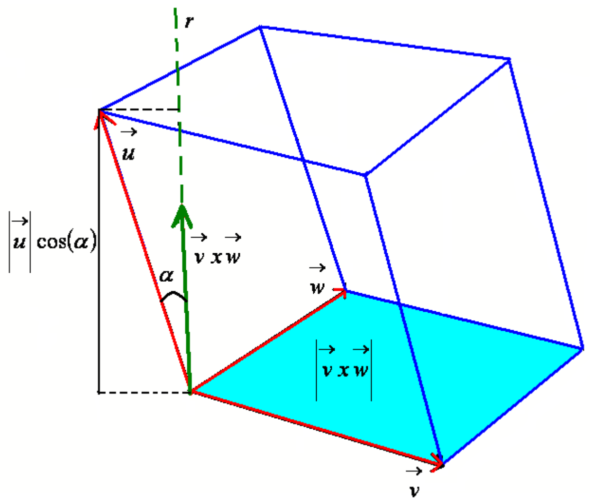
Se define el producto mixto de tres vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ así: $\left[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right] = \vec{u} \cdot \left(\vec{v} \times \vec{w}\right)$

Se puede demostrar que si $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$

entonces $\boxed{\left[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}}$

Si tres vectores son linealmente dependientes, es decir, si son coplanarios, su producto mixto vale 0.

Aplicaciones geométricas



$$\left|\left[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right]\right| = \left|\vec{u} \cdot \left(\vec{v} \times \vec{w}\right)\right| = \left|\vec{u}\right| \left|\vec{v} \times \vec{w}\right| \cos(\alpha) = \left|\vec{v} \times \vec{w}\right| \left|\vec{u}\right| \cos(\alpha) = \textit{área de la base . altura} = V_{paralelepípedo}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$$

$$\boxed{\left|\left[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right]\right| = V_{paralelepípedo}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})}$$

Además, como el paralelepípedo puede descomponerse en 6 tetraedros: $\boxed{V_{tetraedro} = \dfrac{\left|\left[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right]\right|}{6}}$