

1.- Dados los sistemas lineales $\begin{cases} 2x + y - (3 + 2a)z = 0 \\ x - y + (3 - a)z = 0 \end{cases}$ y $\begin{cases} x + (1 + b)z = 0 \\ (b - 1)x + y + b(b - 1)z = 0 \end{cases}$
 Determinése a y b para que se trate de sistemas equivalentes.

Resolución

Para el primer sistema, las matrices de coeficientes y ampliada son

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 - 2a \\ 1 & -1 & 3 - a \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 - 2a & 0 \\ 1 & -1 & 3 - a & 0 \end{pmatrix}.$$

Como $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, entonces $\text{rg } A = 2 = \text{rg } A^* < n^\circ$ de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones. Hallémoslas:

La matriz del sistema es

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 - 2a & 0 \\ 1 & -1 & 3 - a & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f1 - 2f2} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -9 & 0 \\ 1 & -1 & 3 - a & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f1 : 3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 3 - a & 0 \end{pmatrix}$$

que corresponde al sistema $\begin{cases} y - 3z = 0 \\ x - y + (3 - a)z = 0 \end{cases}$. En la 1ª ecuación, $y = 3z$ y en la 2ª ecuación,

$$x = y + (a - 3)z = 3z + (a - 3)z = az$$

Llamando $z = k$, las infinitas soluciones son $S_1: \begin{cases} x = ak \\ y = 3k \\ z = k \end{cases}$, con $k \in \mathbb{R}$

Para el 2º sistema las matrices de coeficientes y ampliada son

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 + b \\ b - 1 & 1 & b(b - 1) \end{pmatrix} \text{ y } B^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 + b & 0 \\ b - 1 & 1 & b(b - 1) & 0 \end{pmatrix}.$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ b - 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, entonces $\text{rg } B = 2 = \text{rg } B^* < n^\circ$ de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones. Hallémoslas:

La matriz de este sistema es $B^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 + b & 0 \\ b - 1 & 1 & b(b - 1) & 0 \end{pmatrix}$ que corresponde al sistema

$$\begin{cases} x + (1 + b)z = 0 \\ (b - 1)x + y + b(b - 1)z = 0 \end{cases}; x = (-1 - b)z$$

Sustituyendo, $y = (1 - b)x + b(1 - b)z = (1 - b)(-1 - b)z + b(1 - b)z = (1 - b)(-1)z = (b - 1)z$

Llamando $z = k$, las infinitas soluciones son $S_2: \begin{cases} x = (-1 - b)k \\ y = (b - 1)k \\ z = k \end{cases}$, con $k \in \mathbb{R}$

Como los sistemas deben ser equivalentes, entonces $S_1 = S_2$.

Luego, $\begin{cases} a = -1 - b \\ 3 = b - 1 \end{cases}$; de la 2ª ecuación, $b = 4$; sustituyendo en la 1ª ecuación, $a = -1 - 4 = -5$.

Conclusión: debe ser $a = -5$, $b = 4$

2.- Calcúlese la matriz X que verifica $XAB - 3A = I$, siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Resolución

Sumando $3A$ en los dos miembros, $XAB = I + 3A$. Llamando $C = AB$ queda la ecuación $XC = I + 3A$.

$$C = AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}; \det C = 35 \neq 0.$$

$$\text{Luego, existe } C^{-1} = \frac{1}{\det C} (\text{adj } C)^t = \frac{1}{35} \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{35} \begin{pmatrix} 10 & -1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$$

Multiplicando por C^{-1} , por la derecha, en los dos miembros: $XCC^{-1} = (I + 3A)C^{-1} \Rightarrow X = (I + 3A)C^{-1}$

$$X = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \right] \frac{1}{35} \begin{pmatrix} 10 & -1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{35} \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -3 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{35} \begin{pmatrix} 55 & 5 \\ -80 & 43 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{16}{7} & \frac{43}{35} \end{pmatrix}$$

OTROS DEL 1991

1.- Discutir según los valores de λ y resolver cuando sea compatible indeterminado el sistema

$$\begin{cases} -x + \lambda y + z = 1 \\ 2x - y - 2z = -1 \\ \lambda x - 3y - z = -3 \end{cases}$$

Resolución

Las matrices de coeficientes y ampliada son $A = \begin{pmatrix} -1 & \lambda & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ \lambda & -3 & -1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} -1 & \lambda & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \\ \lambda & -3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

$$\det A = -1 - 2\lambda^2 - 6 + \lambda + 6 + 2\lambda = -2\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot (-2) \cdot (-1)}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-3 \pm 1}{-4}, \lambda = 1, \lambda = \frac{1}{2}$$

- Si $\lambda \neq 1$; $\lambda \neq \frac{1}{2}$, $\det A \neq 0$ y $\text{rg } A = 3 = \text{rg } A^* = n^\circ$ de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene solución única.

- Si $\lambda = 1$, $\det A = 0$ y $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$. Como $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, $\text{rg } A = 2$.

$$A^* = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{f2 + 2f1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{f3 + f1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{f2 = -f3} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, entonces $\text{rg } A^* = 2$. Luego, $\text{rg } A^* = \text{rg } A = 2 < n^\circ$ de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

Hallemos las soluciones: La matriz del sistema es equivalente a $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ que corresponde al sistema $\begin{cases} -x + y + z = 1 \\ y = 1 \end{cases}$. Sustituyendo, $-x + 1 + z = 1$. Despejando, $x = z$.

Llamando $z = k$, las infinitas soluciones son $\begin{cases} x = k \\ y = 1 \\ z = k \end{cases}$, con $k \in \mathbb{R}$

Si $\lambda = \frac{1}{2}$, la matriz del sistema es

$$A^* = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \\ \frac{1}{2} & -3 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2f1 \\ 2f2 \\ 2f3 \end{matrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & -6 & -2 & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} f1 + f2 \\ f1 + f2 \\ f1 + f2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & -6 & -2 & -6 \end{pmatrix}.$$

La 1ª fila corresponde a la ecuación $0 = 1$, que es incompatible. Luego, el sistema es incompatible

2.- Hallar los valores de λ para los que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ \lambda & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ tiene inversa.

Calcular su inversa para $\lambda = 1$

Resolución

$$\det A = 2 + \lambda^2 - 3 - 6\lambda + 1 - \lambda = \lambda^2 - 7\lambda = \lambda(\lambda - 7) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0, \lambda = 7$$

Luego, para $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 7$ la matriz A tiene inversa.

Para $\lambda = 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\det A = 1(1 - 7) = -6 \neq 0$, existe la inversa de A.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{adj } A)^t = \frac{1}{-6} \begin{pmatrix} 3 & -4 & -5 \\ 0 & -2 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^t = \frac{-1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -4 & -2 & 2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{5}{6} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{6} \end{pmatrix}$$

3.- ¿Para qué valores de λ es compatible el sistema $\begin{cases} \lambda x + y = 1 \\ 2x + y = 0 \\ \lambda^2 x + \lambda y = 3 \end{cases}$?

Es un sistema de 3 ecuaciones y 2 incógnitas.

Las matrices de coeficientes y ampliada son $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 2 & 1 \\ \lambda^2 & \lambda \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ \lambda^2 & \lambda & 3 \end{pmatrix}$

$$\det A^* = 3\lambda + 2\lambda - \lambda^2 - 6 = -\lambda^2 + 5\lambda - 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot (-1) \cdot (-6)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-5 \pm 1}{-2}, \lambda = 2, \lambda = 3$$

- Si $\lambda \neq 2$ y $\lambda \neq 3$, $\det A^* \neq 0$ y $\text{rg } A^* = 3 \neq \text{rg } A$, que es como mucho 2. Luego, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es incompatible, no tiene solución.

Si $\lambda = 2$, la matriz del sistema es $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} f2 - f1 \\ f3 - 2f1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. La 3ª fila corresponde a la ecuación $0 = 1$, que es incompatible. Luego, el sistema también es incompatible

Si $\lambda = 3$, la matriz del sistema es $A^* = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 9 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} f3 = 3f1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Como $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, $\text{rg } A^* = 2 = \text{rg } A$

Luego, $\text{rg } A^* = \text{rg } A = 2 = n^\circ$ de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene solución única.