
1.- Enunciar el teorema de Bolzano y utilizarlo para probar que todo número positivo, a, tiene una raíz cuadrada.

Resolución

Teorema de Bolzano: Si f es continua en $[m, n]$, y cambia de signo en los extremos de dicho intervalo entonces existe por lo menos un $p \in (m, n)$, tal que $f(p) = 0$.

En este caso, tomamos $f(x) = x^2 - a$, continua en R.

$f(0) = 0^2 - a = -a < 0$; como $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, habrá un $n > 0$ tal que $f(n) > 0$

Aplicamos el teorema de Bolzano a f en el intervalo $[0, n]$ y entonces existe $b \in (0, n)$ tal que $f(b) = 0$.
Es decir, $b^2 - a = 0$. Luego, b verifica $b^2 = a$ y, por tanto, b es la raíz cuadrada de a.

2.- Determinar todas las funciones f(x) que verifiquen:
(i) f(x) es un polinomio de tercer grado y (ii) $f'(-1) = f'(1) = 0$. Utilizar el teorema de Rolle para responder a la siguiente pregunta: ¿Puede existir alguna función de las determinadas anteriormente que verifique $f(0) = f(1) = 0$?

Resolución

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Como $f'(-1) = f'(1) = 0$, entonces $3a(-1)^2 + 2b(-1) + c = 3a.1^2 + 2b.1 + c = 0$

Queda $3a - 2b + c = 3a + 2b + c = 0$. Restando las ecuaciones, $4b = 0$, $b = 0$ y queda $3a + c = 0$, $c = -3a$

Luego, las funciones son $f(x) = ax^3 - 3ax + d$, con $a, d \in R$

Si fuese $f(0) = f(1) = 0$, entonces $a0^3 - 3a0 + d = a1^3 - 3a1 + d = 0 \Rightarrow d = 0$ y $-2a = 0$, $a = 0$.

Quedaría entonces la función $f(x) = 0$, que no es polinómica de tercer grado. Luego, no puede existir tal función.

3.- Se considera en el plano la recta $x = 2$. Encontrar dos funciones cuyas gráficas admitan a dicha recta como asíntota y tengan distintas posiciones respecto a ella. Representar dichas posiciones.

Resolución

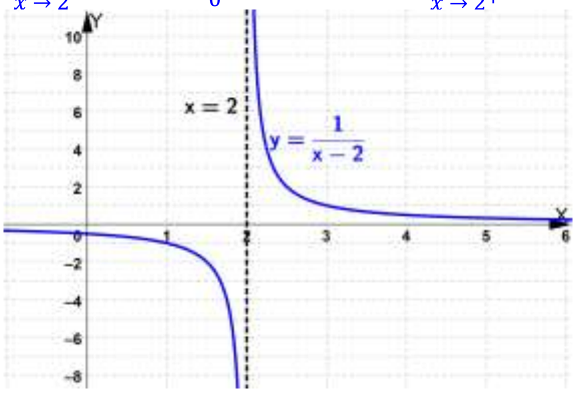
Por ejemplo, las funciones $f(x) = \frac{1}{x-2}$, $g(x) = \frac{-1}{x-2}$

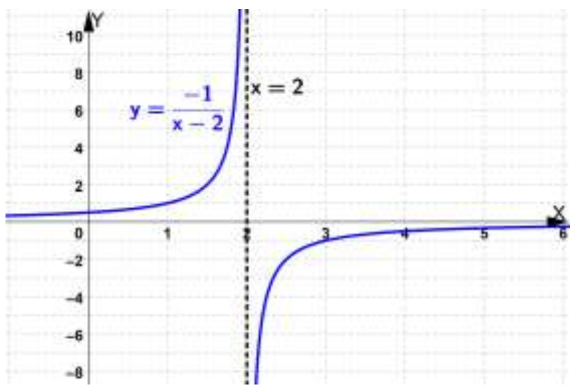
$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \frac{1}{2-2} = \frac{1}{0} = \pm\infty \Rightarrow$ f tiene una asíntota vertical en $x = 2$, A.V. : $x = 2$

Además, $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 2} g(x) = \frac{-1}{2-2} = \frac{-1}{0} = \pm\infty \Rightarrow$ g tiene una asíntota vertical en $x = 2$, A.V. : $x = 2$

Además, $\lim\limits_{x \to 2^-} g(x) = \frac{-1}{0^-} = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to 2^+} g(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$





4.- Comentar brevemente un método de integración para calcular la siguiente integral y aplicarlo al cálculo de la misma: $\int \frac{2x+1}{x^2-3x+2}dx$

Resolución

Es la integral de una función racional impropia. Para hallarla factorizamos el denominador (veremos que tiene dos raíces reales) y luego descomponemos en suma de fracciones simples. Nos va a quedar dos integrales inmediatas (tipo ln).

Factorizamos $x^2 - 3x + 2$; $x = \frac{3 \pm \sqrt{9-4.1.2}}{2.1} = \frac{3\pm 1}{2}, x = 1, x = 2$. Nos queda $(x - 1)(x - 2)$

Descomponemos la fracción en suma de fracciones simples:

$$\frac{2x+1}{x^2-3x+2} = \frac{2x+1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$$

Multiplicando los dos miembros por $(x - 1)(x - 2)$, tenemos $2x + 1 = A(x - 2) + B(x - 1)$

Para $x = 1$ se tiene $3 = -A$, de donde $A = -3$; para $x = 2$ se tiene $5 = B$

$$\int \frac{2x+1}{x^2-3x+2}dx = \int \left(\frac{-3}{x-1} + \frac{5}{x-2}\right)dx = -3\ln|x-1| + 5\ln|x-2| + k.$$

5.- Dada la función $f(x) = |x^2 - 4|$, se pide:

a) Dígase razonadamente en cuáles puntos f(x) es derivable y cuáles no.

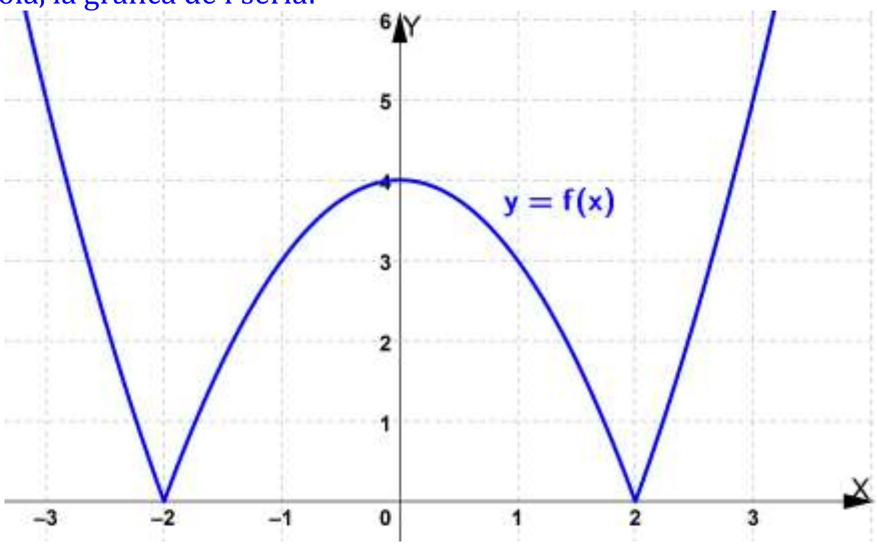
b) Estúdiese la existencia de máximos y mínimos relativos y absolutos.

c) Muéstrese la representación gráfica de la función.

Resolución

Como $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2, x = 2$, $(x^2 - 4)' = 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $y = 0^2 - 4 = -4$, la curva $y = x^2 - 4$ es una parábola convexa de vértice $(0, -4)$ que corta al eje X en -2 y en 2.

Teniendo en cuenta que la curva $y = |x^2 - 4|$ se obtiene "doblando" por el eje X hacía arriba la parte negativa de la parábola, la gráfica de f sería:



f es derivable en $R - \{-2 ; 2\}$ y no es derivable en -2 ni en 2 (por no ser | | derivable en 0)

Máximo relativo: $x = 0$, $y = f(0) = |0^2 - 4| = 4$, punto $(0, 4)$. No hay máximo absoluto

Mínimos absolutos: $x = -2$, $y = f(-2) = 0$, punto $(-2, 0)$; $x = 2$, $y = f(2) = 0$, punto $(2, 0)$.
No hay mínimos relativos

6.- Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, determínese a, b, c, d para que la función tenga un máximo en $x = 0$ con $f(0) = 4$ y un mínimo en $x = 2$ con $f(2) = 0$.

Resolución

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

f tiene un máximo en $x = 0 \Rightarrow f'(0) = 0 \Rightarrow 3a0^2 + 2b0 + c = 0 \Rightarrow c = 0$

f tiene un mínimo en $x = 2 \Rightarrow f'(2) = 0 \Rightarrow 3a2^2 + 2b2 + c = 0 \Rightarrow$ como $c = 0$, $12a + 4b = 0 \Rightarrow b = -3a$

Nos queda entonces $f(x) = ax^3 - 3ax^2 + d$

$f(0) = 4 \Rightarrow a0^3 - 3a0^2 + d = 4 \Rightarrow d = 4$

$f(2) = 0 \Rightarrow a2^3 - 3a2^2 + d = 0 \Rightarrow -4a + d = 0 \Rightarrow$ y como $d = 4$, $-4a + 4 = 0$, $a = 1$; $b = -3.1 = -3$

Conclusión: $a = 1$, $b = -3$, $c = 0$ y $d = 4$ quedando entonces $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

7.-

a) Probar que la ecuación $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ tiene siempre alguna solución real.

¿Es también esto cierto para $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$? Justifíquese la respuesta.

Resolución

Para la ecuación $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, si $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Luego, existe algún intervalo [a, b] donde f(a) y f(b) tienen distinto signo y, por el teorema de Bolzano, hay al menos un $t \in (a, b)$ tal que $f(t) = 0$. O sea, t es una solución real de la ecuación.

Para la ecuación $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, si $g(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$,

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$. Luego, no se puede asegurar que siempre tenga solución real.

Por ejemplo, para $a = b = c = 0$, $d = 1$ la ecuación sería $x^4 + 1 = 0$, que no tiene solución real

b) ¿Cuántas raíces reales tiene la ecuación $x^3 + 6x^2 + 15x - 25 = 0$?

Resolución

$f(x) = x^3 + 6x^2 + 15x - 25$, $f'(x) = 3x^2 + 12x + 15 = 3(x^2 + 4x + 5) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4.1.5}}{2.1}$ (incomp.)

Y como $y = x^2 + 4x + 5$ representa a una parábola convexa, entonces $f'(x) > 0$ (f es creciente)

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$. Luego, existe algún intervalo [a, b] donde f(a) y f(b) tienen distinto signo y, por el teorema de Bolzano, hay un $t \in (a, b)$ tal que $f(t) = 0$. O sea, t es una raíz real de la ecuación.

La solución es única por ser f creciente y, por tanto, inyectiva. Luego, la ecuación sólo tiene una raíz real.

8.- Calcular el área encerrada por la curva $y = \frac{3x-2}{x^2-4}$, el eje de abscisas y las rectas x = 0 y $x = \frac{3}{4}$.

Resolución

$f(x) = \frac{3x-2}{x^2-4} = 0 \Leftrightarrow 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$; $f(0) = \frac{3.0-2}{0^2-4} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ corta a los ejes en $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ y $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

$\lim_{x \to 2} f(x) = \frac{3.2-2}{2^2-4} = \frac{4}{0} = \pm\infty \Rightarrow$ f tiene una asíntota vertical en x = 2, A.V. : x = 2

Además, $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \frac{4}{0^-} = -\infty$ y $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \frac{4}{0^+} = +\infty$

$\lim_{x \to -2} f(x) = \frac{3.(-2)-2}{(-2)^2-4} = \frac{-8}{0} = \pm\infty \Rightarrow$ f tiene una asíntota vertical en x = –2, A.V. : x = –2

Además, $\lim_{x \to -2^-} f(x) = \frac{-8}{0^+} = -\infty$ y $\lim_{x \to -2^+} f(x) = \frac{-8}{0^-} = +\infty$

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x}{x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3}{x} = 0 \Rightarrow$ asíntota horizontal en $\pm\infty$, AH: $y = 0$ (eje X)

$y_{gráfica} - y_{asíntota} = \frac{3x-2}{x^2-4} - 0 = \frac{3x-2}{x^2-4}$.

$Si\ x \to +\infty,\ y_{gráfica} - y_{asíntota} > 0$. Luego, la gráfica está “por encima” de la asíntota en $+\infty$

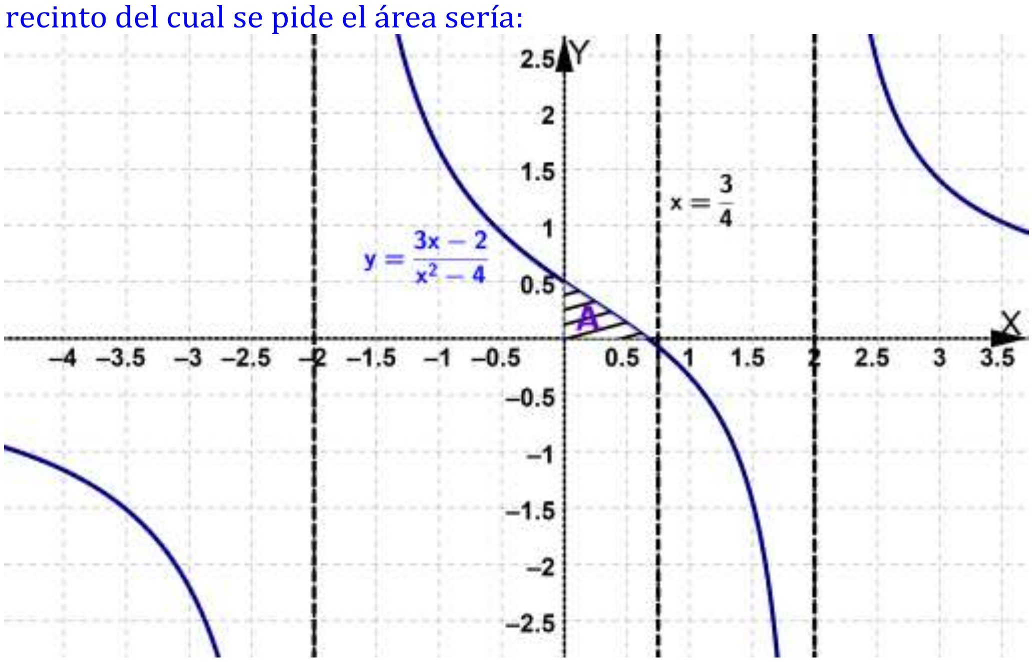
$Si\ x \to -\infty,\ y_{gráfica} - y_{asíntota} < 0$. Luego, la gráfica está “por debajo” de la asíntota en $-\infty$

$f'(x) = \frac{3(x^2-4) - (3x-2)2x}{(x^2-4)^2} = \frac{-3x^2+4x-12}{(x^2-4)^2} = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4.3.12}}{2.3}$ (incomp.)

Luego, la parábola $y = -3x^2 + 4x - 12$ es cóncava y no corta al eje X $\Rightarrow$ f´(x) < 0 (f es decreciente)

Por otra parte, para $x = \frac{3}{4}$, $y = \frac{3\frac{3}{4} - 2}{\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 4} = \frac{3\frac{3}{4} - 2}{\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 4} = \frac{1/4}{-55/16} = \frac{-4}{55} \cong -0{,}1$

Un esbozo del recinto del cual se pide el área sería:



El área que se pide es $A = \int_0^{3/4} \frac{3x-2}{x^2-4}\, dx$.

Descomponemos la fracción en suma de fracciones simples: $\frac{3x-2}{x^2-4} = \frac{3x-2}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$

Multiplicando los dos miembros por (x – 2)(x + 2), tenemos 3x – 2 = A(x + 2) + B(x – 2)

Para x = 2 se tiene 4 = 4A, de donde A = 1; para x = –2 se tiene –8 = –4B, de donde B = 2

$\int \frac{3x-2}{x^2-4} dx = \int \left(\frac{1}{x-2} + \frac{2}{x+2}\right) dx$. Una primitiva es $p(x) = \ln|x-2| + 2\ln|x+2|$. Por Barrow,

$$A = p\left(\frac{3}{4}\right) - p(0) = \ln\left|\frac{3}{4} - 2\right| + 2\ln\left|\frac{3}{4} + 2\right| - [\ln|0-2| + 2\ln|0+2|]$$

$$A = \ln\frac{5}{4} + 2\ln\frac{11}{4} - \ln 2 - 2\ln 2 = \ln 5 - \ln 4 + 2\ln 11 - 2\ln 4 - 3\ln 2$$

$$A = \ln 5 - 2\ln 2 + 2\ln 11 - 4\ln 2 - 3\ln 2 = \ln 5 + 2\ln 11 - 9\ln 2 \cong 0{,}167\ \ u^2$$

9.- Calcular a para que exista y sea finito el $\lim\limits_{x\to+\infty} [(x^2+x)^a - x]$. Para ese valor de a, calcula dicho límite.

Resolución

Si a = 0, $\lim\limits_{x\to+\infty} [(x^2+x)^0 - x] = -\infty$ y si a < 0, $\lim\limits_{x\to+\infty} [(x^2+x)^a - x] = 0 - \infty = -\infty$. Luego, a > 0.

Si fuese a ≥ 1 ⇒ $\lim\limits_{x\to+\infty} [(x^2+x)^a - x] = \lim\limits_{x\to+\infty} x[x^{a-1}(x+1)^a - 1] = +\infty$. Luego, 0 < a < 1

Observa que $(x^2+x)^a - x = x\left[\frac{(x^2+x)^a}{x} - 1\right] = x\left[\left(\frac{x^2+x}{x^{\frac{1}{a}}}\right)^a - 1\right] = x\left[\left(x^{2-1/a} + x^{1-1/a}\right)^a - 1\right] =$

$= x\left[\left(x^{\frac{2a-1}{a}} + x^{\frac{a-1}{a}}\right)^a - 1\right]$. Si fuese $a > \frac{1}{2}$, entonces $\lim\limits_{x\to+\infty} [(x^2+x)^a - x] =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} x\left[\left(x^{(2a-1)/a} + x^{(a-1)/a}\right)^a - 1\right] = +\infty[(+\infty+0)^a - 1] = +\infty \Rightarrow 0 < a \le \frac{1}{2}$

Si fuese $a < \frac{1}{2}$, entonces $\lim\limits_{x\to+\infty} [(x^2+x)^a - x] =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} x\left[\left(x^{(2a-1)/a} + x^{(a-1)/a}\right)^a - 1\right] = +\infty[(0+0)^a - 1] = -\infty$. Conclusión: debe ser $a = \frac{1}{2}$

Hallemos el límite: $\lim\limits_{x\to+\infty} [(x^2+x)^{1/2} - x] = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x} - x)(\sqrt{x^2+x} + x)}{\sqrt{x^2+x} + x} =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x} + x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x/x}{\sqrt{x^2/x^2 + x/x^2} + x/x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+1/x} + 1} = \frac{1}{2}$

10.- Determinar a para que se verifique $\lim\limits_{x\to\infty} \left[\frac{x(x+a)}{x+2} - \frac{x^2+1}{x-2}\right] = 0$

Resolución Operando, $0 = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x(x+a)(x-2) - (x^2+1)(x+2)}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x(x+a)(x-2) - (x^2+1)(x+2)}{x^2-4} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3 + (a-2)x^2 - 2ax - x^3 - 2x^2 - x - 2}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{(a-4)x^2 - (2a+1)x - 2}{x^2-4} = a - 4$. Luego, a = 4