1.- Enunciar el teorema de Rolle y utilizarlo de una manera razonada para demostrar que la

ecuación ex = 1 + x tiene solamente una solución.

**Resolución**

Teorema de Rolle: Si f es continua en [a, b], derivable en (a, b) y además f(a) = f(b) entonces existe por lo menos un c ∈ (a, b), tal que f´(c) = 0.

Como e0 = 1 + 0, el valor x = 0 es solución de la ecuación. Veamos que la solución es única.

f(x) = ex – 1 – x es continua en R por ser el resultado de operar con funciones continuas.

Si hubiese otra solución, s, entonces f(0) = f(s) = 0. Por el teorema de Rolle, si s > 0 existiría un c ∈ (0, s) tal que f´(c) = 0 y si s < 0 existiría un c´∈ (s, 0) tal que f´(c´) = 0.

Como f´(x) = ex – 1, entonces si s > 0, f´(c) > 0 (contradicción) y si s < 0, f´(c´) < 0 (contradicción).

Luego, hay solución única.

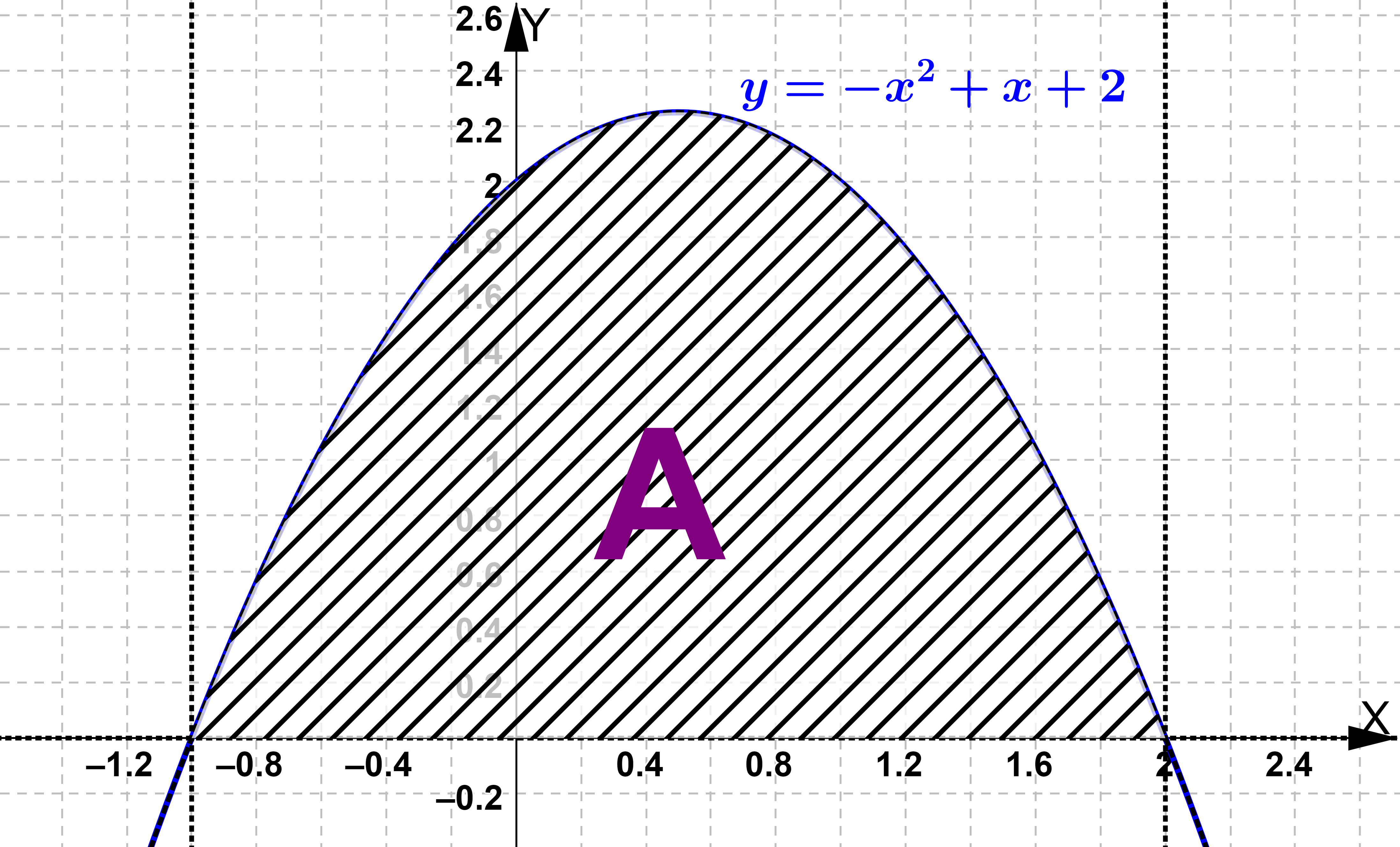
2.- Representa gráficamente y de una manera razonada la región del plano cuya área viene dada por la siguiente integral definida:

**Resolución**

f(x) = –x2 + x + 2 = 0 ⇔ , x = –1, x = 2 ; si x = 0, y = f(0) = –02 + 0 + 2 = 2

f´(x) = –2x + 1 = 0 ⇔ ,

Esto significa que La curva y = –x2 + x + 2 es una parábola cóncava de vértice que corta a los ejes en (–1, 0), (2, 0) y (0, 2). La representación gráfica de la región sería:



3.- ¿Es cierto que todo punto crítico (o punto singular) de una función es un máximo o un mínimo relativo? Justifica e ilustra la respuesta con algún ejemplo.

**Resolución**

No. Por ejemplo, f(x) = x3, f´(x) = 3x2 = 0 ⇔ x = 0 ; f´´(x) = 6x, f´´(0) = 6.0 = 0

Si x < 0, f´´(x) < 0 (cóncava) y si x > 0, f´´(x) > 0 (convexa).

Luego, x = 0 es un punto crítico y no es máximo ni mínimo relativo, sino que es un punto de inflexión.

4.- Calcular la siguiente integral, explicando el procedimiento que se utiliza:

**Resolución**

Usamos la integración por partes:

. Otra vez por partes:

. Luego,

5.- Estudiar las asíntotas y la posición relativa de la gráfica con respecto de ellas de la función f definida

por

**Resolución**

x2 – 1 ≥ 0 ⇔ x ≤ –1 ó x ≥ 1. Luego, Dom(f) = (–∞, –1] ∪ [1, +∞) y f es continua en él.

Por tanto, f no tiene asíntotas verticales.

. Luego, f NO tiene asíntota horizontal en ±∞.

Veamos si tiene asíntota oblicua, AO: y = mx + n

.

Luego, la asíntota oblicua en ±∞ es la recta de ecuación AO:

Luego, la gráfica está “por debajo” de la asíntota en ±∞

6.- Se sabe que la derivada segunda de una función f es la función g(x) = x + 1. Se conoce también que la gráfica de f pasa por el punto (2, 1) y en este punto su recta tangente es la de ecuación 3x – y – 5 = 0. Calcular razonadamente la función f y hacer un dibujo de su gráfica.

**Resolución**

Usando el teorema fundamental del cálculo integral, .

Como la recta tangente en (2, 1), y = 3x – 5, tiene pendiente 3, entonces f´(2) = 3 ⇒

Luego, a = –1 y queda . Volviendo a usar el teorema fundamental del

cálculo integral, .

Como la gráfica de f pasa por el punto (2, 1), entonces f(2) = 1 ⇒

Nos queda

Vamos a dibujar la gráfica de f de forma aproximada:

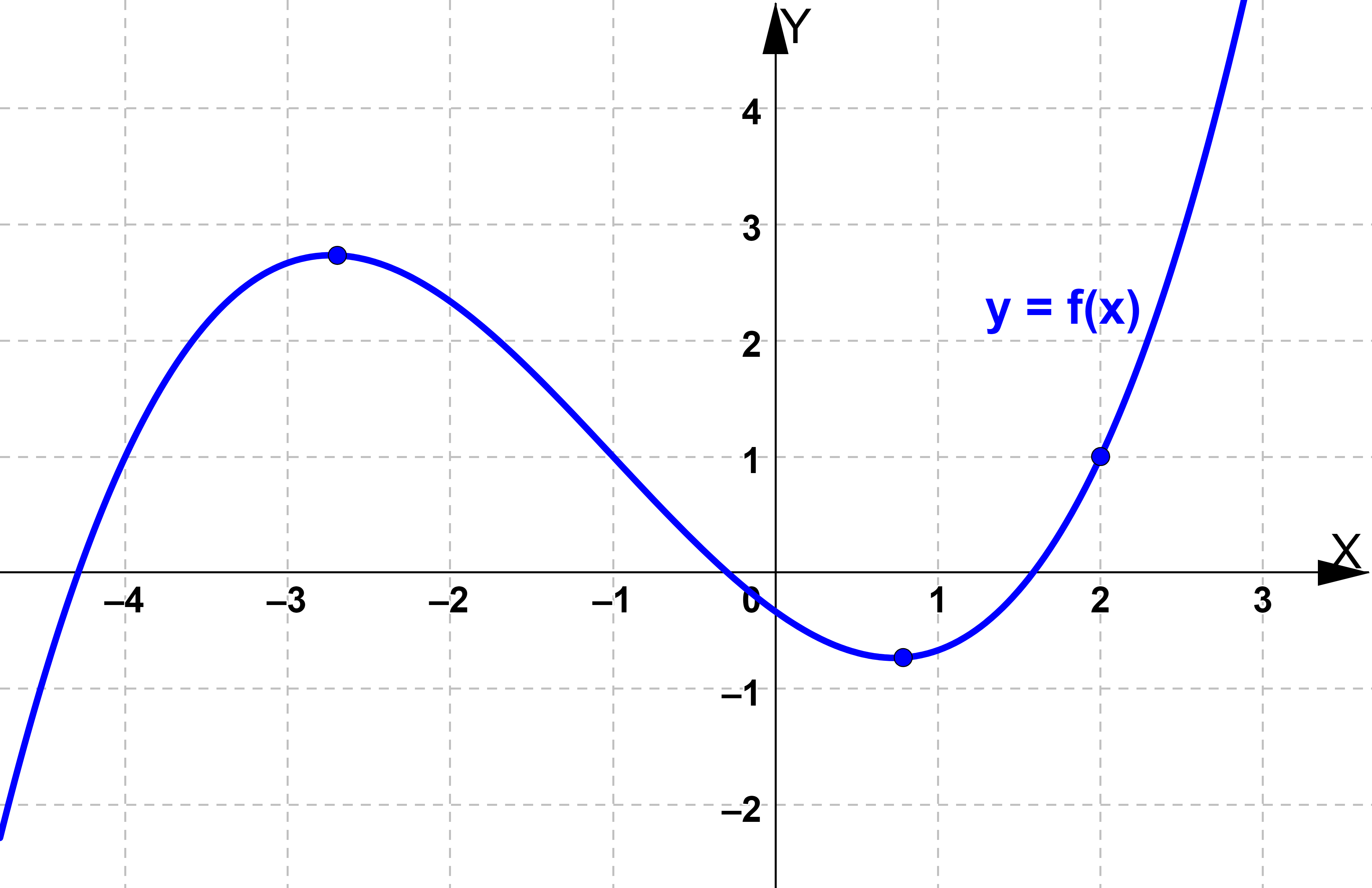
x ≅ 0,7 ó x ≅ –2,7. Hagamos una tabla de signos de f´(x):

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | (–∞ ; –2,7) | –2,7 | (–2,7 ; 0,7) | 0,7 | (0,7 ; +∞) |
| f´(x) | + | 0 | – | 0 | + |
| f(x) | creciente | máximo | decreciente | mínimo | creciente |

f es creciente en (–∞ ; –2,7) ∪ (0,7 ; +∞) y decreciente en (–2,7 ; 0,7)

El máximo relativo es: x = –2,7, . Punto .

El mínimo relativo es: x = 0,7, . Punto .



7.- Calcular de manera razonada el área de la región del plano limitada por la gráfica de la función f definida por f(x) = x2, la recta de ecuación y = –x + 2 y el eje de abscisas. Hacer también un dibujo

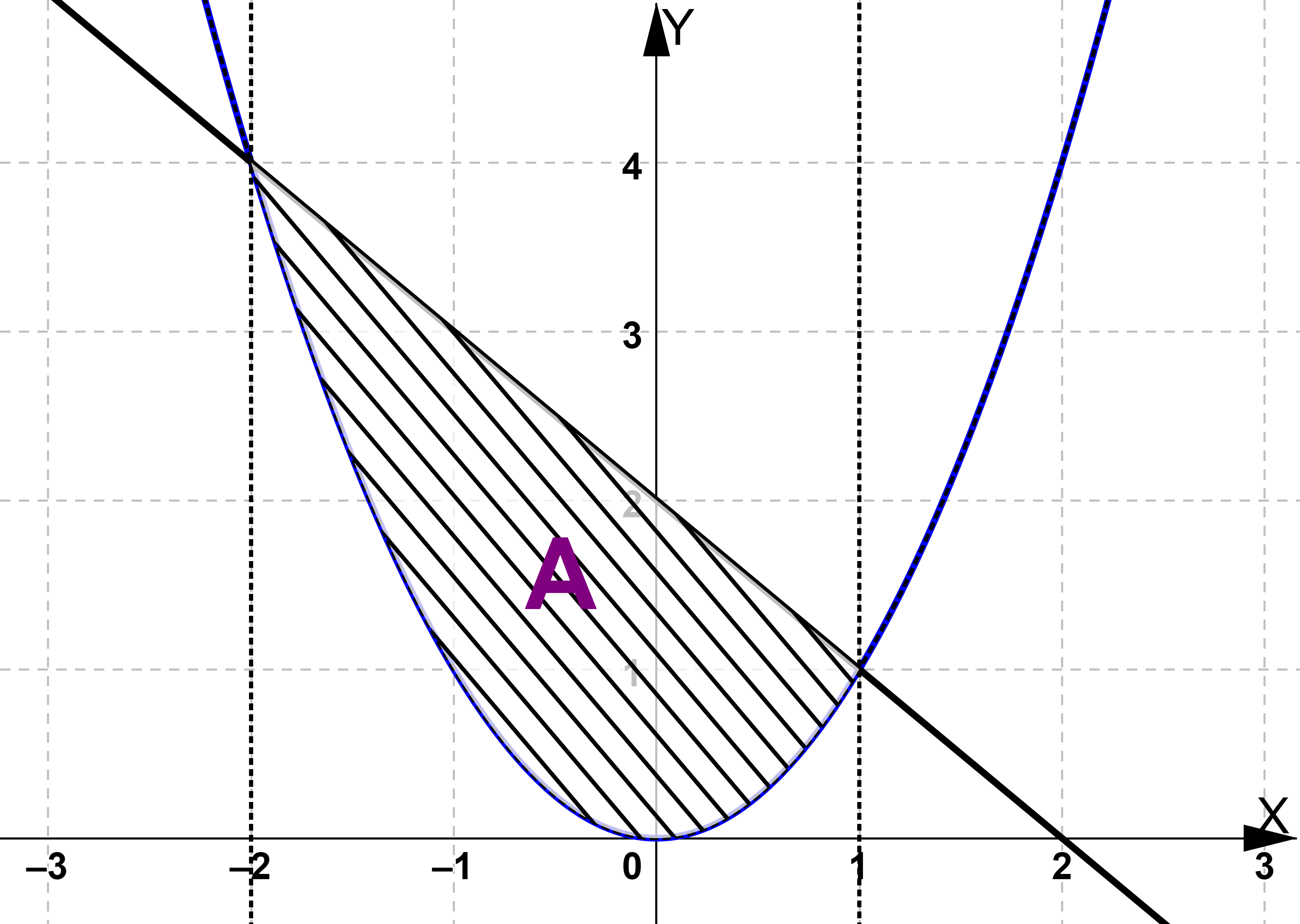
de dicha región del plano.

**Resolución**

Puntos de corte entre la parábola y la recta: ; ; x2 + x – 2 = 0

, x = 1, y = 12 = 1, punto (1, 1) ; x = –2, y = (–2)2 = 4, punto (–2, 4)

Además, la recta corta a los ejes en (2, 0) y (0, 2). Un esbozo de la región sería:



El área que se pide es .

Una primitiva es .

Por la regla de Barrow, .

8.- Se considera la función f definida por f(x) = x3. ¿Cuáles son sus puntos críticos? ¿Tiene algún máximo relativo? ¿Tiene algún mínimo relativo? Justifica la respuesta.

**Resolución**

f(x) = x3, f´(x) = 3x2 = 0 ⇔ x = 0 ; f´´(x) = 6x, f´´(0) = 6.0 = 0

Si x < 0, f´´(x) < 0 (cóncava) y si x > 0, f´´(x) > 0 (convexa).

Luego, x = 0 es un punto crítico y no es máximo ni mínimo relativo, sino que es un punto de inflexión.

9.- Se dice que una raíz real de una ecuación ha sido separada si se ha hallado un intervalo (a, b) en el que se encuentra esta raíz y no se encuentra ninguna otra.

Separar las cuatro raíces reales de la ecuación: 2x4 – 14x2 + 14x – 1 = 0.

**Resolución**

Vamos a usar el teorema de Bolzano: Si f es continua en [a, b] y cambia de signo en los extremos de dicho intervalo entonces existe por lo menos un c ∈ (a, b), tal que f(c) = 0.

En este caso, f(x) = 2x4 – 14x2 + 14x – 1, continua en R.

f(–4) = 2(–4)4 – 14(–4)2 + 14(–4) – 1 = 231 > 0, f(–3) = 2(–3)4 – 14(–3)2 + 14(–3) – 1 = –7 < 0

Por el teorema de Bolzano, existe x1 ∈ (–4, –3) tal que f(x1) = 0, x1 es una raíz de la ecuación.

f(0) = 2.04 – 14.02 + 14.0 – 1 = –1 < 0, f(1) = 2.14 – 14.12 + 14.1 – 1 = 1 > 0

Por el teorema de Bolzano, existe x2 ∈ (0, 1) tal que f(x2) = 0, x2 es una raíz de la ecuación.

f(1) = 2.14 – 14.12 + 14.1 – 1 = 1 > 0, f(1,5) = 2.1,54 – 14.1,52 + 14.1,5 – 1 = –1,375 < 0

Por el teorema de Bolzano, existe x3 ∈ (1 ; 1,5) tal que f(x3) = 0, x3 es una raíz de la ecuación.

f(1,5) = 2.1,54 – 14.1,52 + 14.1,5 – 1 = –1,375 < 0, f(2) = 2.24 – 14.22 + 14.2 – 1 = 3 > 0

Por el teorema de Bolzano, existe x3 ∈ (1 ; 1,5) tal que f(x3) = 0, x3 es una raíz de la ecuación.

Como la ecuación es de polinómica de grado 4, tiene como máximo 4 raíces reales.

Ya tenemos separadas las 4 raíces de la ecuación en los intervalos (–4, –3), (0, 1), (1 ; 1,5) y (1,5 ; 2).

10.- Calcula el área del recinto plano formado por los puntos de coordenadas (x, y) que verifican:

x + y ≥ 0 , x2 – 2x + y ≤ 0

**Resolución**

y = –x2 + 2x = x(2 – x) = 0 ⇔ x = 0, x = 2 y además (–x2 + 2x)´= 2 – 2x = 0 ⇔ x = 1, y = –12 + 2.1 = 1.

La curva y = –x2 + 2x representa a la parábola cóncava de vértice V(1, 1) que corta a los ejes en los puntos (0, 0) y (2, 0)

La ecuación x + y = 0 representa a la recta y = –x (bisectriz del II y IV cuadrantes)

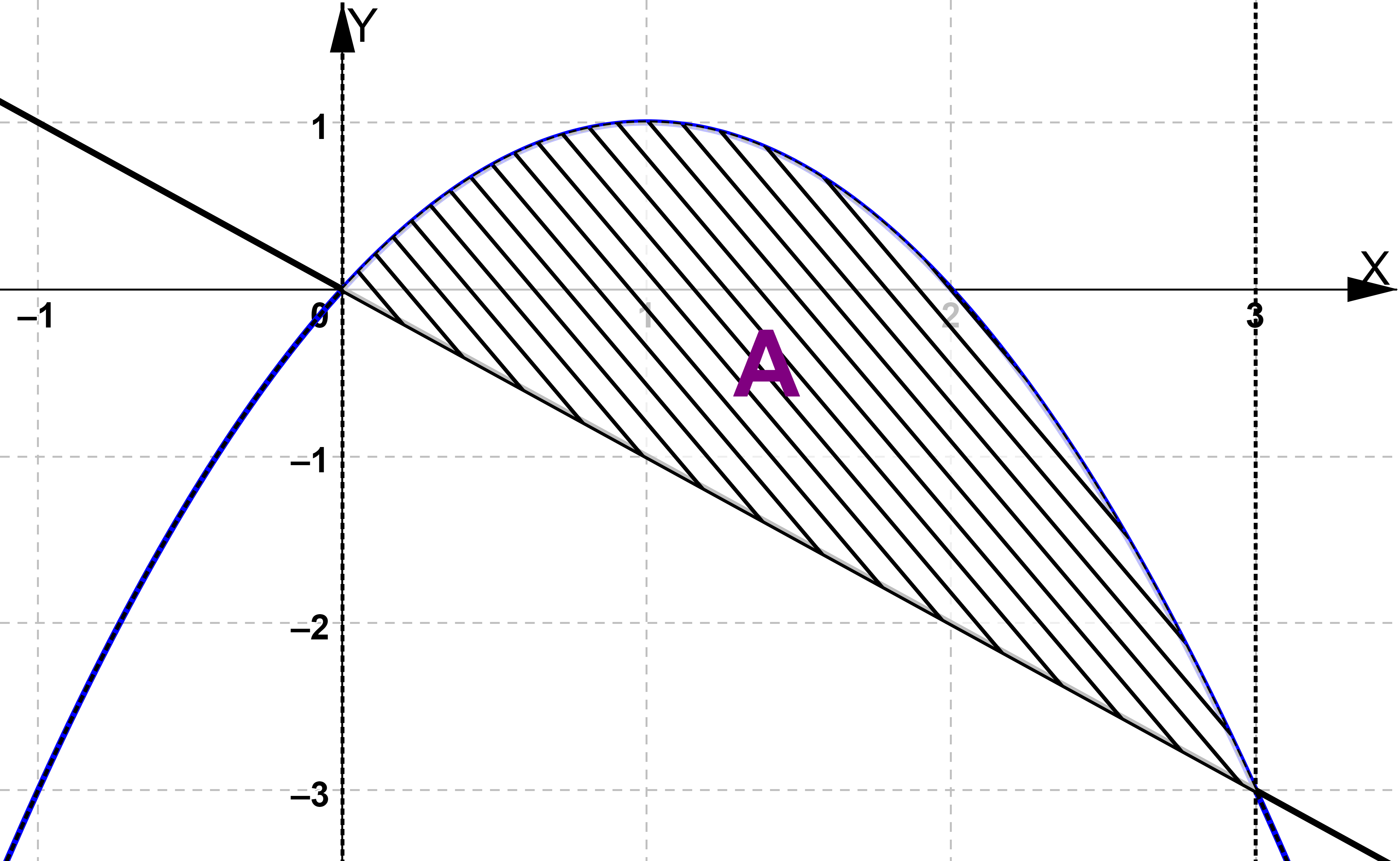
Puntos de corte entre la recta y la parábola: ;

Se cortan en (0, 0) y (3, –3).

x + y ≥ 0 ⇔ y ≥ –x representa el semiplano cerrado “por encima” de la bisectriz.

x2 – 2x + y ≤ 0 ⇔ y ≤ –x2 + 2x es la porción de plano “por debajo” de la parábola.

El recinto sería entonces el de los puntos (x, y) que cumplen –x ≤ y ≤ –x2 + 2x:



El área que se pide es .

Una primitiva es .

Por la regla de Barrow, .

11.- Calcular a, b y c para que la función cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [0, 8]. Encontrar el punto (o puntos) correspondiente a la tesis del teorema.

**Resolución**

Teorema de Rolle: Si f(x) es continua en [m, n], derivable en (m, n) y además f(m) = f(n) entonces existe por lo menos un p ∈ (m, n), tal que f´(p) = 0.

En este caso, , [m, n] = [0, 8].

Si x ≠ 3, f es continua y derivable independientemente de los valores de a, b y c por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables siendo

Para que f cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en [0, 8]:

Debe ser continua en x = 3 ⇒

Debe ser derivable en x = 3 ⇒

Deber ser

Nos queda el sistema . Sustituyo en la 1ª ecuación:

. Luego, ;

Conclusión: debe ser , c = –9 ; ,

El punto p ∈ (0, 8) sería tal que f´(p) = 0 ⇒ , que está en (0, 8)

Conclusión: el punto correspondiente a la tesis del teorema es

12.- Calcular

**Resolución**

(Indeterminación).

Regla de L´Hôpital: . Dividiendo entre ex queda

y como la exponencial es un infinito de orden superior a 3x2 y x3, el límite es

Luego, aplicando la regla de L´Hôpital,

13.- Calcular el área comprendida entre las curvas y = x2 e y2 = 5x.

**Resolución**

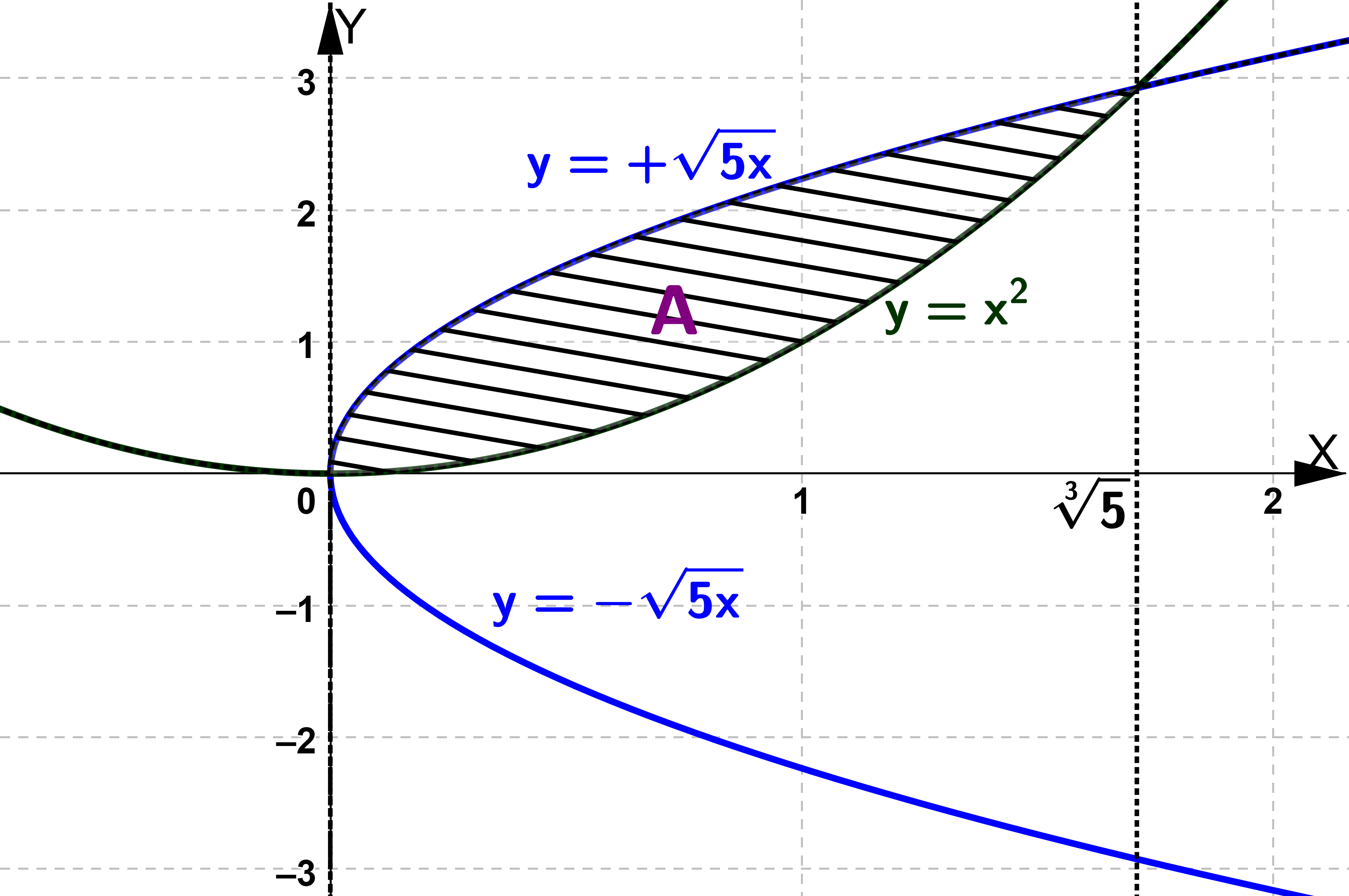
La parábola y2 = 5x tiene las ramas hacía la derecha, el vértice es (0, 0) y el eje de simetría es el eje X.

La parábola x2 = y tiene las ramas hacía arriba, el vértice es (0, 0) y el eje de simetría es el eje Y.

Cortes entre las parábolas: ;  ; x4 – 5x = x(x3 – 5) = 0.

x = 0, y = 0, punto (0, 0) ; , , punto

Un esbozo del recinto comprendido entre las curvas sería:



El área que se pide es ; es una primitiva.

Por la regla de Barrow,

14.- Sea la función . Calcular su derivada. Utilizando el teorema del

valor medio de Lagrange, ¿qué puede decirse del crecimiento o decrecimiento de esta función?

**Resolución**

Observamos que Dom(f) = R – {1} y f es derivable en su dominio por ser resta y composición de funciones derivables siendo

. Sabemos que, por el Teorema del valor medio de

Lagrange, si una función f continua en [a, b] y derivable en (a, b) entonces: Si f´(x) = 0 en todos los puntos de (a, b) entonces f(x) es constante en [a, b].

Luego f es constante en (–∞, 1) y en (1, +∞)

Luego, que puede considerarse decreciente (no estrictamente) porque

15.- Calcular el área encerrada por la curva el eje de abscisas entre x = 2, x = 3.

**Resolución**

Sea ; , x = 1, x = 4.

Por ser una parábola convexa que corta al eje X en (1, 0) y (4, 0) deducimos

que en el intervalo (1, 4) y , por tanto, f(x) < 0 en el intervalo [2, 3].

Luego, el área que se pide es

Descomponemos la fracción en suma de fracciones simples:

Multiplicando los dos miembros por (x – 1)(x – 4), tenemos –3 = A(x – 4) + B(x – 1)

Para x = 1 se tiene –3 = –3A, de donde A = 1; para x = 4 se tiene –3 = 3B, de donde B = –1

. Una primitiva es .

Por Barrow,

16.- Enunciar el teorema de Rolle. Aplicarlo a la función f(x) = –x2 + x + 2 en el intervalo [–2, 3].

**Resolución**

Teorema de Rolle: Si f(x) es continua en [a, b], derivable en (a, b) y además f(a) = f(b) entonces existe por lo menos un c ∈ (a, b), tal que f´(c) = 0.

En este caso, f es continua y derivable en R, en particular es continua en [–2, 3] y derivable en [–2, 3].

f(–2) = –(–2)2 + (–2) + 2 = –4 = f(3) = –32 + 3 + 2 = –4.

Luego, f cumple las hipótesis del teorema de Rolle en [–2, 3] y, por tanto, existe al menos c ∈ (–2, 3),

tal que f´(c) = 0.

Como f´(x) = –2x + 1, entonces f´(c) = –2c + 1 = 0 ⇔

17.- Calcular

**Resolución**

18.- Sea la función ¿Es f continua? ¿Es f derivable?

**Resolución**

Si x ≠ 0, f es continua y derivable por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables siendo

Indeterminación. Aplicamos la regla de L´Hôpital:

. Por la regla de L´Hôpital, el límite vale 1.

Luego, f es continua en x = 0

Indeterminación. Aplicamos la regla de L´Hôpital:

.

Por la regla de L´Hôpital, el límite vale 0. Luego, f es derivable en x = 0

Conclusión: f es continua y derivable en (–1, 1) y

19.- Sea f la función definida en el intervalo (0, π/2] por . Calcular

**Resolución**

Observa que . Luego, una primitiva de es

. Por Barrow,

20.- Decir razonadamente si es posible aplicar el teorema de Rolle a la función definida en el intervalo

por

**Resolución**

Teorema de Rolle: Si f(x) es continua en [a, b], derivable en (a, b) y además f(a) = f(b) entonces existe por lo menos un c ∈ (a, b), tal que f´(c) = 0.

Si x ≠ 0, f es continua y derivable en y derivable en

⇒ f no es continua en x = 0 y, por tanto, no lo es en

Luego, no es posible aplicar el teorema de Rolle a f en el intervalo

21.- Enunciar el teorema de Bolzano para funciones continuas. Comprobar que la

ecuación x3 – 3x + 1 = 0 tiene tres raíces reales.

**Resolución**

Teorema de Bolzano: Si f es continua en [a, b], y cambia de signo en los extremos de dicho intervalo entonces existe por lo menos un c ∈ (a, b), tal que f(c) = 0. En este caso, f(x) = x3 – 3x + 1, continua en R.

f(–2) = (–2)3 – 3(–2) + 1 = –1 < 0, f(–1) = (–1)3 – 3(–1) + 1 = 3 > 0

Por el teorema de Bolzano, existe x1 ∈ (–2, –1) tal que f(x1) = 0, x1 es una raíz de la ecuación.

f(0) = 03 – 3.0 + 1 = 1 > 0, f(1) = 13 – 3.1 + 1 = –1 < 0

Por el teorema de Bolzano, existe x2 ∈ (0, 1) tal que f(x2) = 0, x2 es una raíz de la ecuación.

f(1) = 13 – 3.1 + 1 = –1 < 0, f(2) = 23 – 3.2 + 1 = 3 > 0

Por el teorema de Bolzano, existe x3 ∈ (1, 2) tal que f(x3) = 0, x3 es una raíz de la ecuación.

Como la ecuación es polinómica de grado 3, tiene como máximo 3 raíces reales.

Luego, las tres raíces de la ecuación son x1, x2 y x3.

22.- Calcular

**Resolución**

(Indeterminación).

Regla de L´Hôpital:

que vale

Luego, aplicando L´Hôpital,

23.- Calcular α y β para que la función pase por el punto (–2, –6) y admita en este

punto una tangente horizontal.

**Resolución**

, . Como en (–2, –6) f admite tangente horizontal, entonces

y queda

Como f pasa por (–2, –6), entonces

Conclusión: y

24.- Calcular la derivada de la función . Enunciar el teorema que se ha utilizado.

**Resolución**

. Como la función es continua y derivable en R, por el teorema fundamental del cálculo integral f es derivable y

25.- Representar gráficamente la función: ¿Es continua? ¿Es derivable?

**Resolución**

Si x ≠ –1, x ≠ 1, f es continua y derivable por ser funciones polinómicas,

Luego, f es continua en x = –1

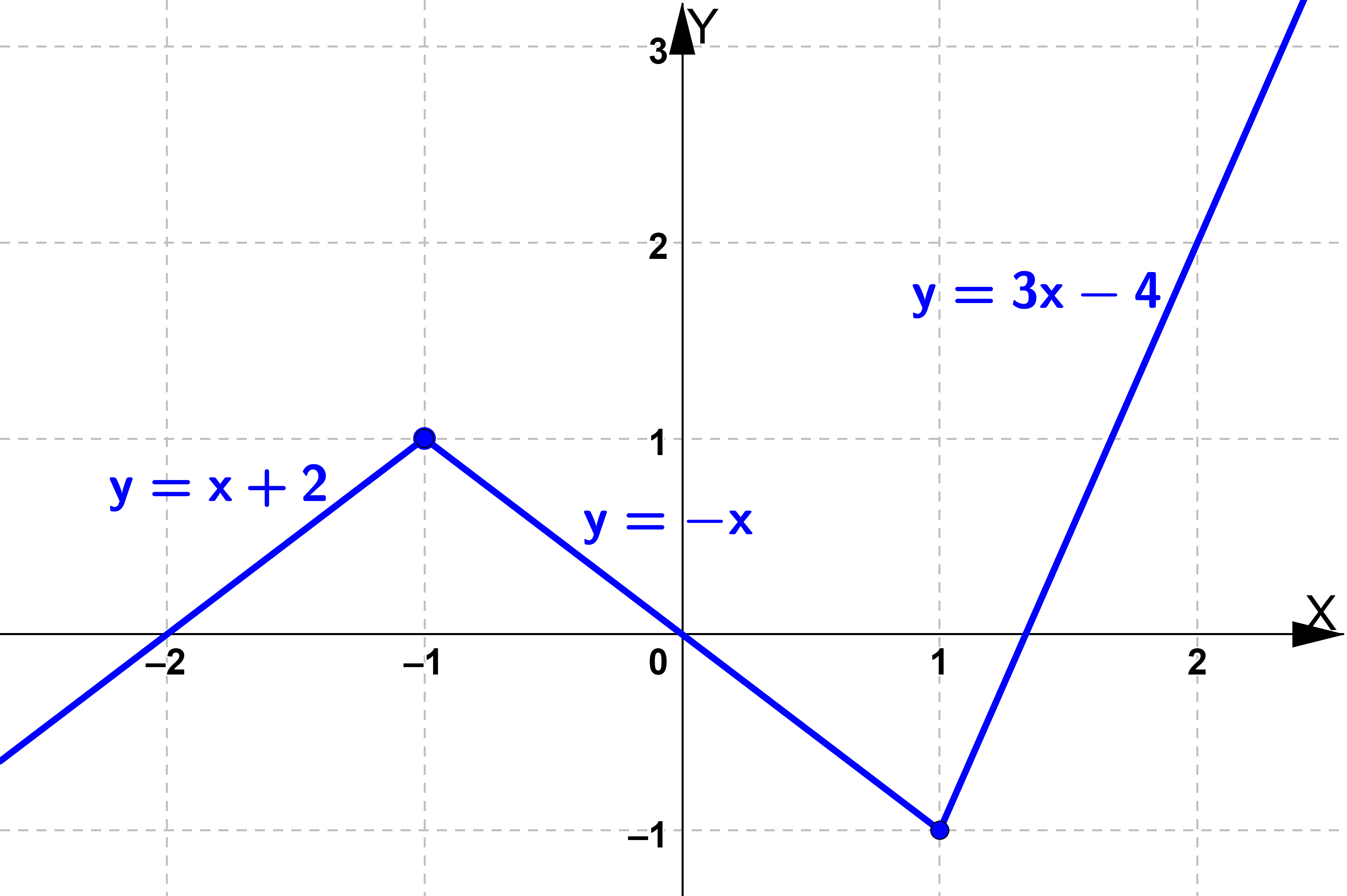
Luego, f NO es derivable en x = –1

Luego, f es continua en x = 1

Luego, f NO es derivable en x = 1

Conclusión: f es continua en R y derivable en R – {–1, 1} y

Para la gráfica usamos además que f(–2) = –2 + 2 = 0 y f(2) = 3.2 – 4 = 2



26.- Señalar cuales de las siguientes funciones son recíprocas (ó inversas) de sí mismas y representar sus gráficas. (a): y = x ; (b): y = –x ; (c): y = 2x – 2 ; (d): ; (e): y = π – x.

¿Qué se puede decir de la gráfica de una función que es recíproca de sí misma? Razonar la respuesta.

**Resolución**

(a) y = x es la función identidad que obviamente es inversa de sí misma

(b) De y = f(x) = –x, cambiando x por y se obtiene x = –y. Despejando, .

Luego, en este caso la función es inversa de sí misma

(c) De y = f(x) = 2x – 2, cambiando x por y se obtiene x = 2y – 2. Despejando,

Luego, en este caso la función NO es inversa de sí misma

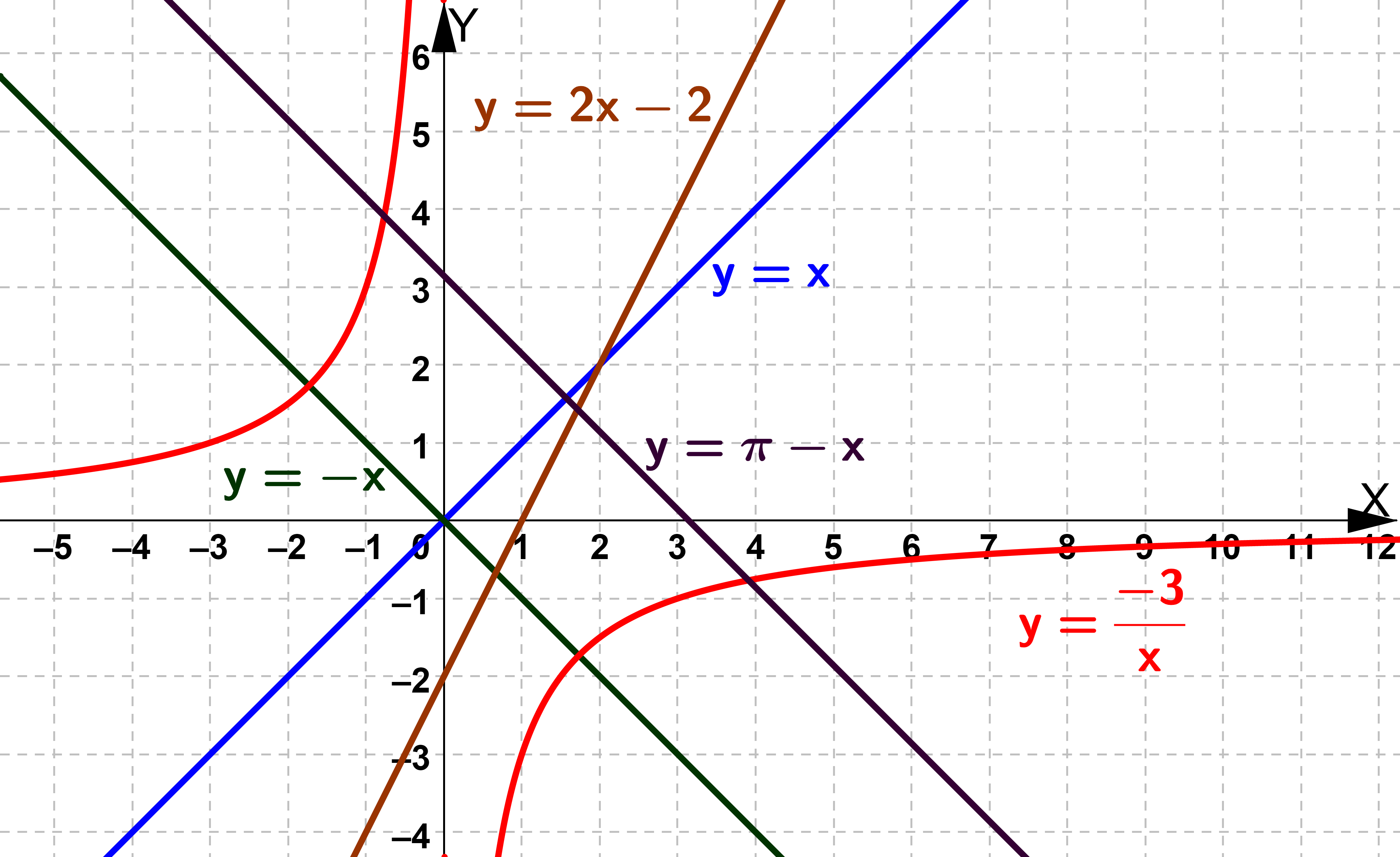
(d) De , cambiando x por y se obtiene . Despejando,

Luego, en este caso la función es inversa de sí misma

(e) De , cambiando x por y se obtiene . Despejando,

Luego, en este caso la función es inversa de sí misma

Las gráficas serían:



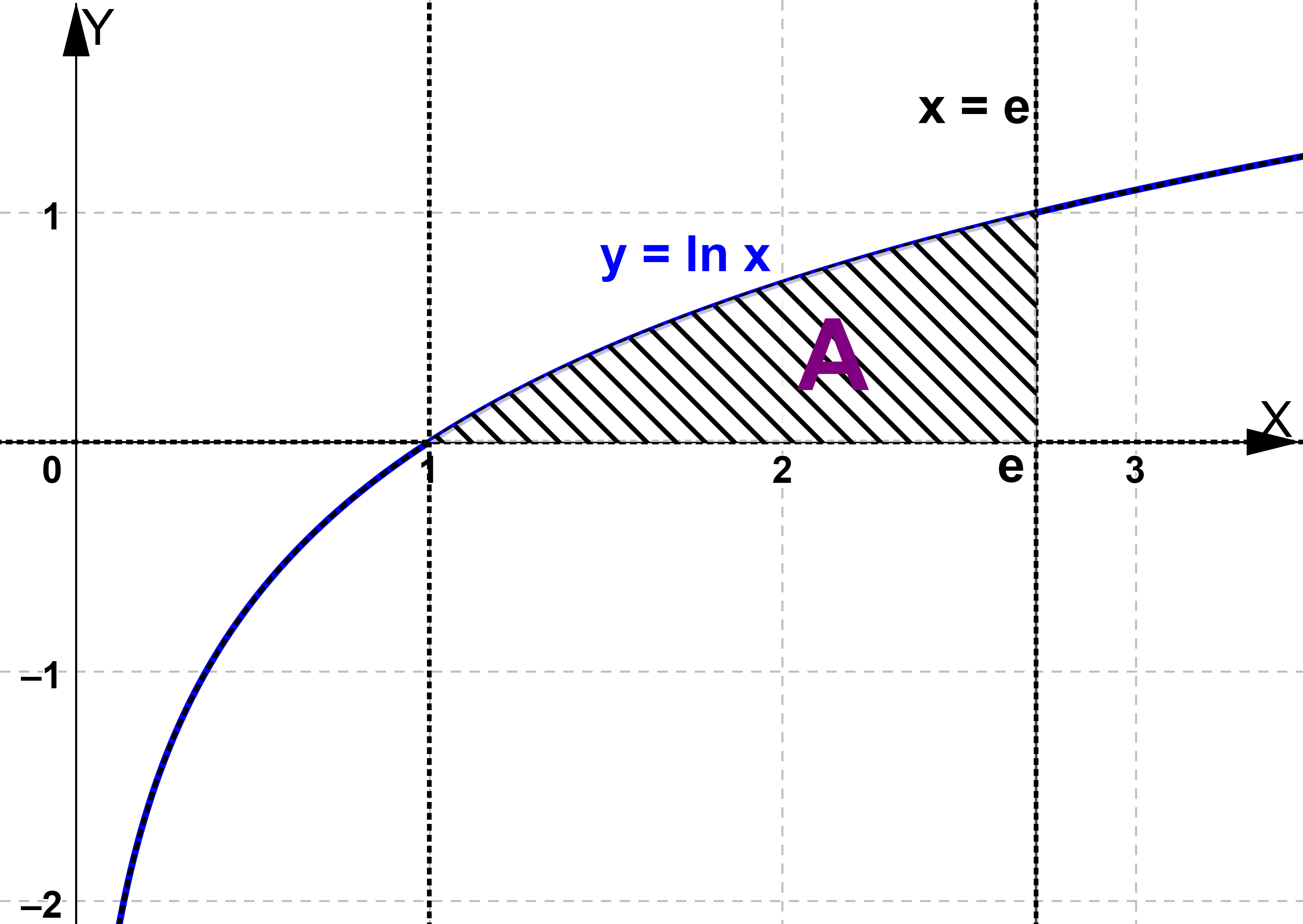
La gráfica de una función que es recíproca de sí misma es simétrica respecto de la bisectriz y = x

27.- Calcular el área de la región acotada por la curva y = ln x entre su punto de corte con el eje X y la recta x = e.

**Resolución**

y = f(x) = ln x = 0 ⇔ x = 1. El punto de corte con el eje X es (1, 0); para x = e, y = ln e = 1, punto (e, 1).

Un esbozo de la región sería:



El área que se pide es . Usamos la integración por partes: ;

. Una primitiva del integrando es .

Por la regla de Barrow, .

28.- ¿Es cierto que una ecuación polinómica de grado tres tiene siempre una raíz real? Razónese la

respuesta e ilústrese la situación con un ejemplo.

**Resolución**

Sí, porque si p(x) = ax3 + bx2 + cx + d de grado 3, y .

Luego, existe algún intervalo [a, b] donde p(a) y p(b) tienen distinto signo y por el teorema de Bolzano

existe al menos un t ∈ (a, b) tal que p(t) = 0. O sea, t es una raíz real de p(x)

29.- Calcular la integral indefinida , y explicar brevemente el procedimiento que se ha

utilizado.

**Resolución**

Usamos la integración por partes:

. Otra vez por partes:

.

O sea,

30.- Calcular las asíntotas verticales de la función y estudiar la posición de la curva

con respecto a ellas.

**Resolución**

Sea

⇒ f tiene una asíntota vertical en x = 2 de ecuación es A.V. : x = 2.

Además, y

⇒ asíntota vertical en x = –2, A.V. : x = –2.

Además, y

31.- Sin resolver la integral, indicar razonadamente donde hay máximos y mínimos relativos de la

función . Comentar también los resultados que se utilicen.

**Resolución**

Si g(t) = (t – 1)(t + 1), derivable en R, por el teorema fundamental del cálculo integral la función F es

derivable y F´(x) = g(x) = (x – 1)(x + 1) = x2 – 1 = 0 ⇔ x = 1, x = –1

F´´(x) = 2x ; F´´(1) = 2.1 > 0 y F´´(–1) = 2(–1) = –2 < 0

Luego, en x = 1 hay un mínimo relativo y en x = –1 un máximo relativo

32.- Sea la función f(x) = 1 – x2/3, comprueba que f(1) = f(–1) = 0, pero que f´(x) no se anula en [–1, 1].

¿Es esto una contradicción al teorema de Rolle? Enunciar dicho teorema.

**Resolución**

Teorema de Rolle: Si f es continua en [a, b], derivable en (a, b) y además f(a) = f(b) entonces existe por lo menos un c ∈ (a, b), tal que f´(c) = 0.

En este caso, f es continua en R y derivable en R – {0} , siendo

En particular f es continua en [–1, 1] pero no es derivable en (–1, 1) porque no es derivable en x = 0 ya que

Luego, no cumple todas las hipótesis del teorema de Rolle, no se contradice el teorema.

33.- Poner un ejemplo de una función que tenga dos discontinuidades de distinta naturaleza (evitable, no

evitable)

**Resolución**

Por ejemplo,

Si x ≠ 0, x ≠ 1, f es continua por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables

y como ∄ f(0), f tiene una discontinuidad evitable en x = 0

. Luego, f tiene una discontinuidad no evitable en x = 1

34.- Enunciar el teorema de Cauchy y estudiar si es aplicable a las funciones: f(x) = x2 – 2x + 3

y g(x) = x3 – 7x2+ 20x – 5 en el intervalo [1, 4].

**Resolución**

El teorema de Cauchy establece que dadas dos funciones f y g continuas en el intervalo [a, b] y derivables en (a, b), si g(a) ≠ g(b), existe al menos un punto c ∈ (a, b), siempre que g’(c) ≠ 0, tal que se cumple:

En este caso, f y g son continuas y derivables en R por ser funciones polinómicas. En particular, son continuas en [1, 4] y derivables en (1, 4).

g(1) = 13 – 7.12+ 20.1 – 5 = 9 ≠ g(4) = 43 – 7.42+ 20.4 – 5 = 27

Como g´(x) = 3x2 – 14x + 20 = 0 ⇔ . Resulta que f´(x) ≠ 0, **∀** x

Luego, se cumplen las hipótesis del teorema y, por tanto, es aplicable

Es decir, existe al menos c ∈ (1, 4) tal que

Como f(x) = x2 – 2x + 3, f(4) = 42 – 2.4 + 3 = 11, f(1) = 12 – 2.1 + 3 = 2, f´(x) = 2x – 2

Sustituyendo,

3c2 – 18c + 24 = 0 ⇒ c2 – 6c + 8 = 0 ⇔

El punto c que asegura su existencia el teorema es c = 2

35.- Calcular una función f que cumpla las siguientes condiciones:

f´´´(x) = cos x ; f(0) = 0 ; ; f(π)= –1. Comentar brevemente el método utilizado.

**Resolución**

Usando el teorema fundamental del cálculo integral, .

y

Como f(0) = 0, entonces y

Como , entonces

Como , entonces

Restando las ecuaciones, . Sustituyendo,

Por tanto,

36.- La función y = tg x, toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo y sin

embargo no se anula en él. ¿Contradice esto el teorema de Bolzano? Enunciar dicho teorema.

**Resolución**

Teorema de Bolzano: Si f es continua en [a, b] y cambia de signo en los extremos de dicho intervalo entonces existe por lo menos un c ∈ (a, b), tal que f(c) = 0.

En este caso, f(x) = tg x, el intervalo es , f es discontinua en , por no estar definida.

Por tanto, f no es continua en

, ; f(x) = tg x ≠ 0 en

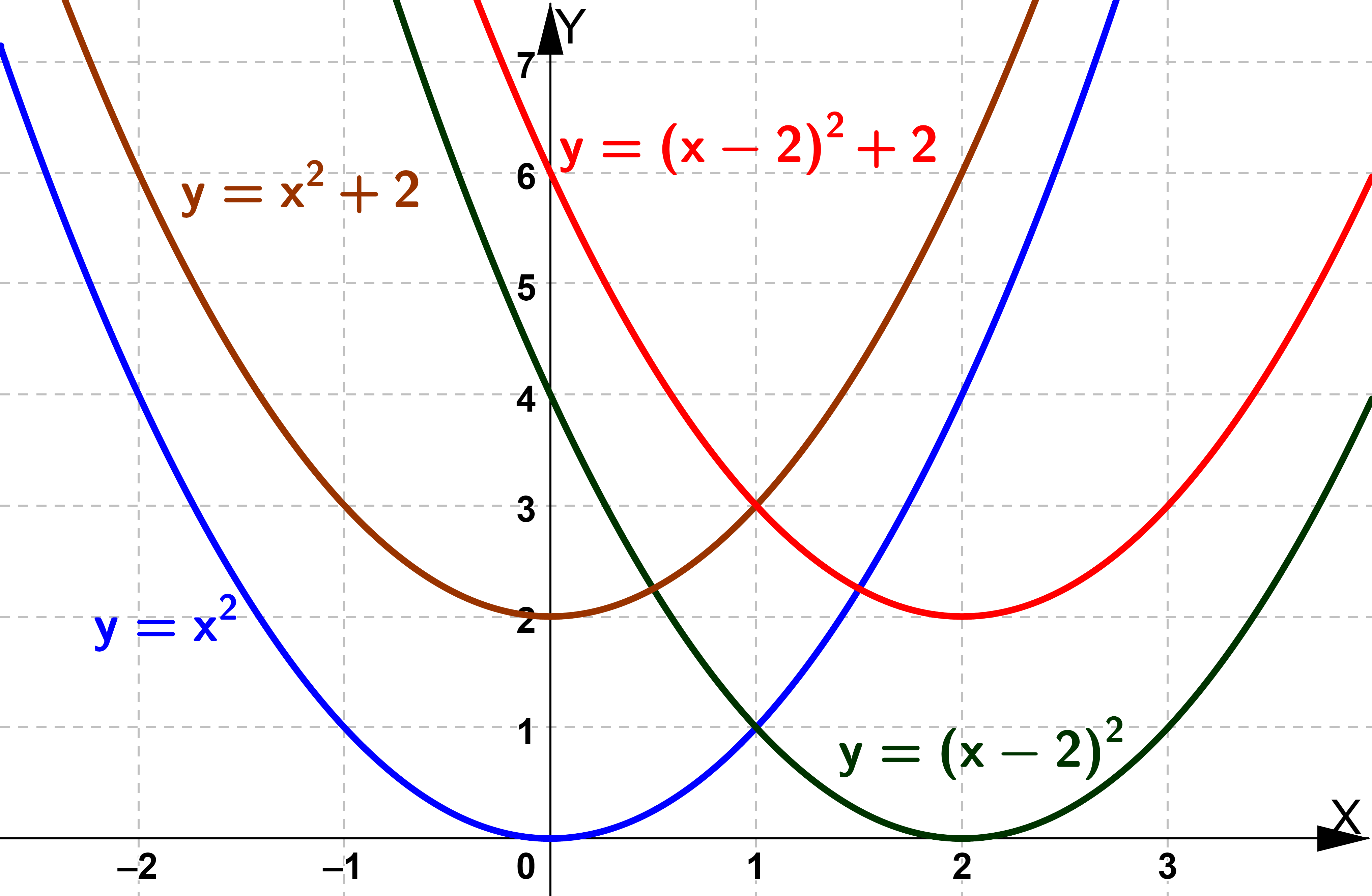
f no cumple todas las hipótesis del teorema de Bolzano, no es continua en y no se contradice el teorema.

37.- A partir de la gráfica de la función f(x) = x2, representa aproximadamente las gráficas de las

siguientes funciones: f1(x) = (x – 2)2 ; f2(x) = x2 + 2 ; f3(x) = (x – 2)2 + 2. Argumentar brevemente el

método que se ha utilizado.

**Resolución**



La gráfica de f1 se obtiene trasladando la gráfica de f dos unidades hacía la derecha

La gráfica de f2 se obtiene trasladando la gráfica de f dos unidades hacía arriba

La gráfica de f3 se obtiene trasladando la gráfica de f dos unidades hacía la derecha y dos unidades hacía arriba.

38.- Enunciar el teorema de Rolle. Calcular el valor de α para que la función f(x) = x3 – 4x + 3 cumpla las

hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [0, α]. ¿Dónde cumple la tesis?

**Resolución**

Teorema de Rolle: Si f es continua en [a, b], derivable en (a, b) y además f(a) = f(b) entonces existe por lo menos un c ∈ (a, b), tal que f´(c) = 0.

En este caso, f(x) = x3 – 4x + 3 , [a, b] = [0, α], continua y derivable en R por ser polinómica.

Para que f cumpla las hipótesis del Teorema de Rolle en [0, α] deber ser

y como α > 0, debe ser α = 2

Veamos donde se cumple la tesis: f´(c) = 3c2 – 4c = 3(3c – 4) = 0. Y como c ∈ (0, 2) debe ser

39.- Calcular razonadamente el área de la región del plano limitada por las gráficas de las

funciones f(x) = 2x2 + 1 y g(x) = x + 2.

**Resolución**

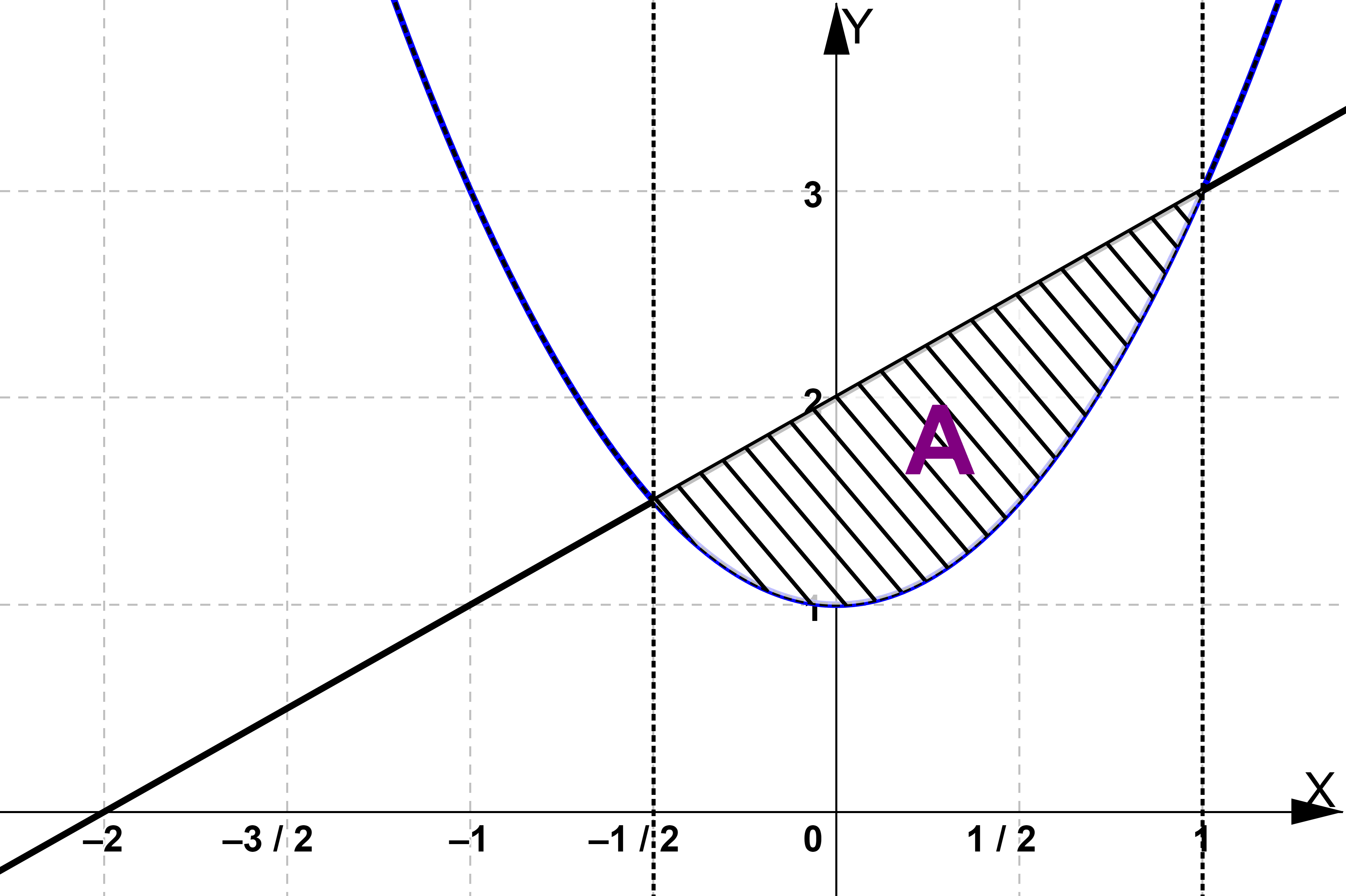
f(x) = 2x2 + 1 > 0 , f´(x) = 4x = 0 ⇔ x = 0, y = f(0) = 2. La gráfica de f es una parábola convexa de vértice (0, 2).

La gráfica de g es una recta que corta a los ejes en (–2, 0) y (0, 2)

Hallamos los puntos de corte entre la parábola y la recta:

; puntopunto

Un esbozo de la región sería:



El área que se pide es .

Una primitiva es . Por la regla de Barrow,

.

40.- Se considera la función definida en el intervalo (3, 7). ¿Es continua?, ¿Está acotada

superiormente? ¿Contradice el teorema de Weiertrass? Enuncia dicho teorema.

**Resolución**

x – 3 ≠ 0 para x ∈ (3, 7) ⇒ f es continua por ser cociente de funciones continuas.

Como , f no está acotada superiormente y, por tanto, no alcanza máximo absoluto.

El teorema de Weierstrass dice: si f es continua en un intervalo cerrado [a, b], entonces f alcanza su máximo y su mínimo absoluto dentro de dicho intervalo.

No contradice el teorema porque, aunque f es continua, el intervalo (3, 7) no es cerrado.

41.- Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función

Calcular también sus máximos y mínimos relativos.

**Resolución**

⇔ x = 1.

Hagamos una tabla de signos de f´(x):

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | (–∞, –1) | –1 | (–1, 1) | 1 | (1, +∞) |
| f´(x) | – | ∄ | + | 0 | – |
| f(x) | decreciente | ∄ | creciente | máximo | decreciente |

f es decreciente en (–∞, –1) ∪ (1, +∞) y creciente en (–1, 1)

Máximo relativo: , . Punto . No hay mínimo relativo

42.- Calcular el área de la región limitada por las gráficas de las funciones: y = x2 e y = x3.

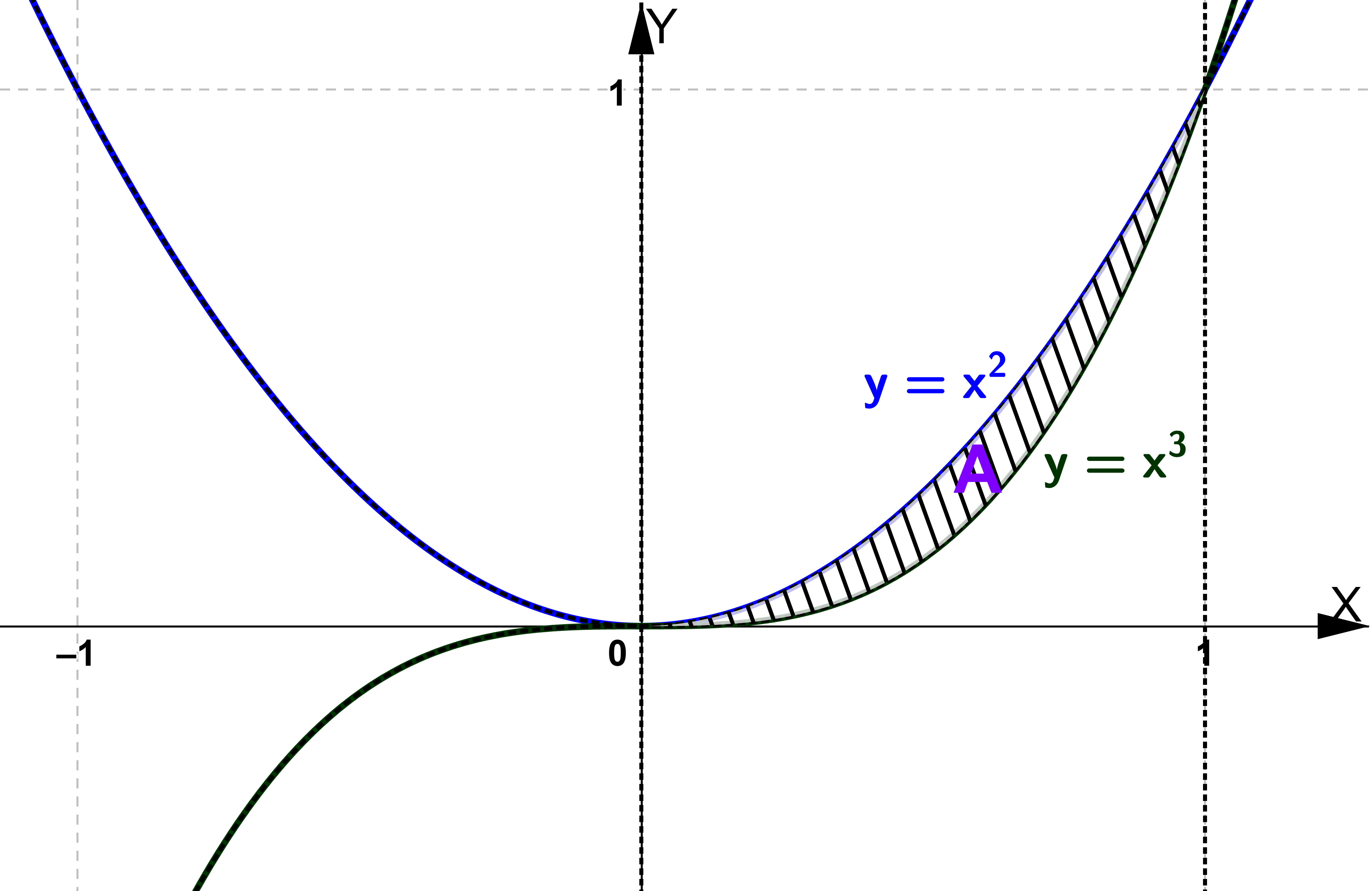
Realizar una representación gráfica de dicha región.

**Resolución**

Puntos de corte entre la parábola y la cúbica:

Los puntos de corte son x = 0, y = 02 = 0punto (0, 0) y x = 1, y = 12 = 1punto (1, 1)

Un esbozo de la región sería:



El área que se pide es . Una primitiva es .

Por la regla de Barrow, .

43.- Sea f una función continua en [0, 1], que verifica 0 < f(x) < 1 en dicho intervalo. Demuestra que

tiene que haber un número α en (0, 1) para el cual f(α) = α. Pon un ejemplo de esta situación.

¿Qué teorema has utilizado?

**Resolución**

Sea la función g(x) = f(x) – x, continua en [0, 1] por serlo f ; g(1) = f(1) – 1 < 0, g(0) = f(0) – 0 > 0

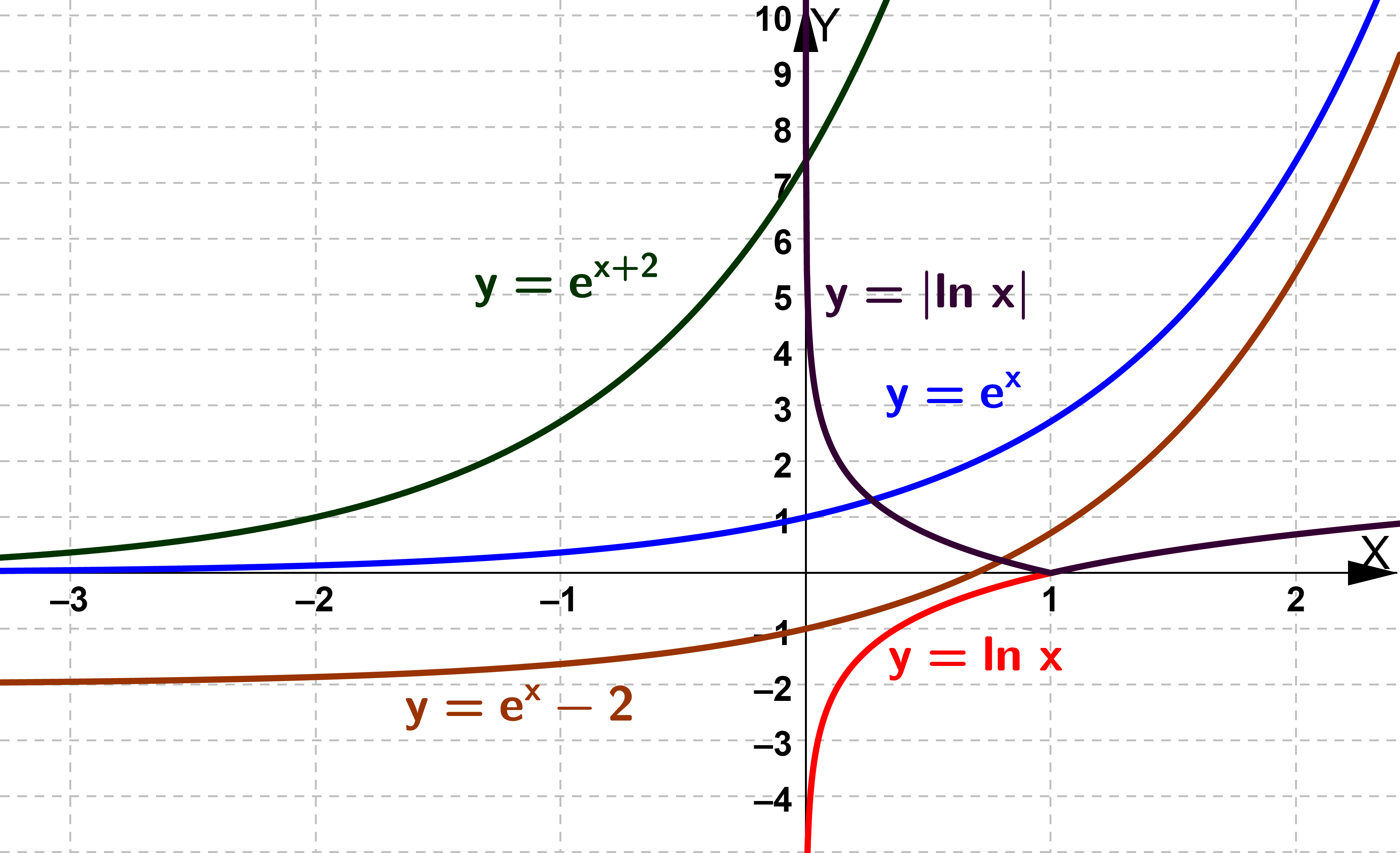
Por el teorema de Bolzano como g cambia de signo en los extremos de dicho intervalo entonces existe por lo menos un α ∈ (0, 1), tal que g(α) = f(α) – α = 0. Es decir, f(α) = α

44.- A partir de la gráfica de la función f(x) = ex, obtener razonadamente las gráficas de las siguientes

funciones: (a) f1(x) = ex + 2, (b) f2 (x) = ex – 2, (c) f3(x) = ln x, (d) f4(x) = |ln x|.

¿Son todas ellas diferenciables? ¿Se refleja esto en sus gráficas, cómo?

**Resolución**



La gráfica de f1 se obtiene trasladando la gráfica de f dos unidades hacía la izquierda

La gráfica de f2 se obtiene trasladando la gráfica de f dos unidades hacía abajo

La gráfica de f4 se obtiene reflejando la parte negativa de la gráfica de f3 con respecto del eje X

La única función que no es diferenciable (en x = 1) es f4(x) = |ln x| porque la función valor absoluto no es diferenciable en x = 0.

Esto se detecta en su gráfica porque en el punto (1, 0) no existe la recta tangente, “la gráfica tiene un pico”